

УДК 531.383

©2001. Л.Д. Акуленко, Т.А. Козаченко, Д.Д. Лещенко

ВОЗМУЩЕННЫЕ ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕСТАЦИОНАРНОГО ВОССТАНАВЛИВАЮЩЕГО МОМЕНТА, ЗАВИСЯЩЕГО ОТ УГЛА НУТАЦИИ

Исследуются возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа, под действием восстанавливающего момента, зависящего от медленного времени $\tau = \varepsilon t$ ($\varepsilon \ll 1$ – малый параметр, t – время) и угла нутации θ , а также возмущающего момента, медленно изменяющегося во времени. Тело предполагается быстро закрученным, а восстанавливающий и возмущающий моменты предполагаются малыми с определенной иерархией малости компонентов. Получена усредненная система уравнений движения в первом приближении для существенно нелинейной двухчастотной системы в нерезонансном случае. Исследована задача управления экваториальной составляющей вектора угловой скорости тела.

Рассмотрим движение динамически симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки O под действием восстанавливающего момента, зависящего от медленного времени $\tau = \varepsilon t$ и угла нутации θ , а также возмущающего момента, медленно изменяющегося во времени. Уравнения движения имеют вид [1]

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - A)qr &= k(\tau, \theta) \sin \theta \cos \varphi + M_1, \\ A\dot{q} + (A - C)pr &= -k(\tau, \theta) \sin \theta \sin \varphi + M_2, \\ C\dot{r} &= M_3, \quad M_i = M_i(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau), \quad \tau = \varepsilon t \quad (i = 1, 2, 3), \\ \dot{\psi} &= (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{cosec} \theta, \quad \dot{\theta} = p \cos \varphi - q \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= r - (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь p, q, r – проекции вектора угловой скорости тела на главные оси инерции тела, проходящие через точку O . Величины M_i – проекции вектора возмущающего момента на те же оси. Они зависят от медленного времени $\tau = \varepsilon t$ и являются периодическими функциями углов Эйлера ψ, φ, θ с периодами 2π . Здесь A – экваториальный, C – осевой моменты инерции тела относительно точки $O, A \neq C$. Предполагается, что на тело действует восстанавливающий момент $k(\tau, \theta)$, медленно изменяющийся во времени и зависящий от угла нутации. При отсутствии возмущений ($M_i = 0$) и $k(\tau, \theta) = \operatorname{const}$ уравнения (1) отвечают случаю волчка Лагранжа.

Система (1) исследуется при условии выполнения следующих предположений:

$$(p^2 + q^2) \ll r^2, \quad Cr^2 \gg k, \quad |M_{1,2}| \ll k, \quad M_3 \sim k, \quad (2)$$

которые означают, что направление угловой скорости тела близко к оси динамической симметрии; угловая скорость осевого вращения достаточно велика, так что кинетическая энергия тела много больше потенциальной энергии, обусловленной восстанавливающим моментом; две проекции вектора возмущающего момента на главные оси инерции тела малы по сравнению с восстанавливающим моментом, а третья – одного с ним порядка.

Неравенства (2) позволяют ввести следующие соотношения:

$$p = \varepsilon P, \quad q = \varepsilon Q, \quad k(\tau, \theta) = \varepsilon K(\tau, \theta), \quad \tau = \varepsilon t, \quad (3)$$

$$M_{1,2} = \varepsilon^2 M_{1,2}^*(P, Q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau),$$

$$M_3 = \varepsilon M_3^*(P, Q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau).$$

Новые переменные P, Q а также переменные r, ψ, θ, φ , функции K, M_i^* ($i = 1, 2, 3$) и параметры A, C предполагаются ограниченными величинами порядка единицы при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В работах [1,2] рассматривались быстрые вращения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа, под действием постоянного восстанавливающего момента $k = \text{const}$ [1] и момента $k = k(\theta)$, зависящего от угла нутации [2]. Мы же исследуем более общий случай зависимости восстанавливающего момента одновременно от угла нутации и медленного времени $k = k(\tau, \theta)$. Возмущающий момент предполагается медленно изменяющимся во времени и является функцией вида $M_i = M_i(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau)$.

Ставится задача исследования асимптотического поведения системы (1) при малом ε , если выполнены условия (2), (3). Это исследование будет проводиться методом усреднения [3, 4] на интервале времени порядка ε^{-1} . Метод усреднения широко применялся в задачах динамики твердого тела. Упрощающие предположения (2) или (3) дают возможность получить в общем случае довольно простую схему усреднения и исследовать примеры.

Сделаем в системе (1) замену переменных (3). Сократив обе части первых двух уравнений (1) на ε , получим

$$A\dot{P} + (C - A)Qr = K(\tau, \theta) \sin \theta \cos \varphi + \varepsilon M_1^*, \quad (4)$$

$$A\dot{Q} + (A - C)Pr = -K(\tau, \theta) \sin \theta \sin \varphi + \varepsilon M_2^*,$$

$$C\dot{r} = \varepsilon M_3^*, \quad \dot{\psi} = \varepsilon(P \sin \varphi + Q \cos \varphi) \operatorname{cosec} \theta,$$

$$\dot{\varphi} = r - \varepsilon(P \sin \varphi + Q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta, \quad \dot{\theta} = \varepsilon(P \cos \varphi - Q \sin \varphi).$$

Система (4) является двухчастотной и существенно нелинейной.

Рассмотрим сначала систему первого приближения и положим $\varepsilon = 0$ в (4). Из последних четырех уравнений находим

$$r = r_0, \quad \psi = \psi_0, \quad \theta = \theta_0, \quad \varphi = r_0 t + \varphi_0, \quad K_0 = K(\tau_0, \theta_0). \quad (5)$$

Здесь $r_0, \psi_0, \theta_0, \varphi_0, \tau_0$ – постоянные, равные начальным значениям переменных при $t = 0$. Подставим равенства (5) в первые два уравнения (4) при $\varepsilon = 0$ и проинтегрируем полученную систему линейных уравнений для P, Q . Получим

$$P = a \cos \gamma + b \sin \gamma + KC^{-1}r^{-1} \sin \theta \sin \varphi,$$

$$Q = a \sin \gamma - b \cos \gamma + KC^{-1}r^{-1} \sin \theta \cos \varphi, \quad (6)$$

$$a = P_0 - K_0 C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \sin \varphi_0, \quad b = -Q_0 + K_0 C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \cos \varphi_0,$$

$$\dot{\gamma} = n, \quad \gamma(0) = 0, \quad n = (C - A)A^{-1}r \neq 0, \quad \left| \frac{n}{r} \right| \leq 1, \quad \alpha = \varphi + \gamma.$$

Здесь a, b – оскулирующие переменные типа Ван дер Поля, введенные вместо (3), а переменная γ имеет смысл фазы колебаний.

При $\varepsilon \neq 0$ рассмотрим соотношения (6) как формулы замены переменных (содержащие переменную γ), определяющие переход от переменных P, Q к переменным a, b и обратно. Пользуясь этими формулами, перейдем в системе (4) от переменных $P, Q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau$ к новым переменным $a, b, r, \psi, \theta, \alpha, \gamma, \tau$. Отметим, что фазы φ, α, γ связаны конечным соотношением, которое оказывается более удобным для дальнейших исследований стандартной системы с двумя вращающимися фазами α, γ . После преобразований получим систему вида:

$$\begin{aligned} \dot{a} = & \varepsilon A^{-1}(M_1^0 \cos \gamma + M_2^0 \sin \gamma) + \varepsilon K(\tau, \theta) C^{-2} r^{-2} M_3^0 \sin \theta \sin \alpha - \\ & - \varepsilon K(\tau, \theta) C^{-1} r^{-1} \cos \theta (b - K(\tau, \theta) C^{-1} r^{-1} \sin \theta \cos \alpha) - \\ & - \varepsilon C^{-1} r^{-1} \sin \theta \sin \alpha \left[\frac{\partial K}{\partial \theta} (a \cos \alpha + b \sin \alpha) + \frac{\partial K}{\partial \tau} \right], \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \dot{b} = & \varepsilon A^{-1}(M_1^0 \sin \gamma - M_2^0 \cos \gamma) - \varepsilon K(\tau, \theta) C^{-2} r^{-2} M_3^0 \sin \theta \cos \alpha + \\ & + \varepsilon K(\tau, \theta) C^{-1} r^{-1} \cos \theta (a + K(\tau, \theta) C^{-1} r^{-1} \sin \theta \sin \alpha) + \\ & + \varepsilon C^{-1} r^{-1} \sin \theta \cos \alpha \left[\frac{\partial K}{\partial \theta} (a \cos \alpha + b \sin \alpha) + \frac{\partial K}{\partial \tau} \right], \end{aligned}$$

$$\dot{r} = \varepsilon C^{-1} M_3^0, \quad \dot{\theta} = \varepsilon (a \cos \alpha + b \sin \alpha),$$

$$\dot{\psi} = \varepsilon (a \sin \alpha - b \cos \alpha) \operatorname{cosec} \theta + \varepsilon K(\tau, \theta) C^{-1} r^{-1},$$

$$\dot{\alpha} = CA^{-1}r - \varepsilon (a \sin \alpha - b \cos \alpha) \operatorname{ctg} \theta - \varepsilon K(\tau, \theta) C^{-1} r^{-1} \cos \theta, \quad \dot{\gamma} = (C - A)A^{-1}r,$$

$$M_i^0(a, b, r, \psi, \theta, \alpha, \gamma, \tau) = M_i^*(P, Q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau) \quad (i = 1, 2, 3).$$

Отметим, что при $K = \text{const}$ и M_i , не зависящих от τ , система (7) совпадает с соответствующей системой, исследованной в [1].

Исследуем возможность применения метода усреднения к системе (7). Данная система содержит медленные переменные $a, b, r, \psi, \theta, \tau$ и быстрые переменные – фазы α и γ . Зависимость восстанавливающего момента от медленной переменной τ и угла нутации θ приводит к появлению в первых двух уравнениях системы (7) слагаемых, содержащих производные $\frac{\partial K}{\partial \tau}$ и $\frac{\partial K}{\partial \theta}$. Если возмущающие моменты зависят от времени t , то применение метода усреднения весьма затруднено, поскольку система является существенно нелинейной. Рассмотрим более простой случай зависимости возмущающих моментов от медленного времени $\tau = \varepsilon t$.

Моменты M_i^* периодичны по φ с периодом 2π , поэтому согласно (6) функции M_i^0 является 2π – периодическими функциями α и γ . В этом случае система (7) содержит две вращающиеся фазы α, γ , и соответствующие им частоты $\omega_\alpha = CA^{-1}r$ и $\omega_\gamma = (C - A)A^{-1}r$ переменны и зависят от медленной переменной. При усреднении системы (7) следует различать два случая: нерезонансный, когда частоты ω_γ и ω_α несоизмеримы (C/A – иррациональное число) и резонансный, когда эти частоты соизмеримы ($C/A = i/j$, $i/j \leq 2$, i, j – натуральные взаимно простые числа). Поскольку отношение частот постоянно: $\frac{\omega_\gamma}{\omega_\alpha} = 1 - AC^{-1}$, то в результате введения переменной γ усреднение

нелинейной системы (7) эквивалентно усреднению квазилинейной системы с постоянными частотами.

В нерезонансном случае ($\frac{C}{A} \neq \frac{i}{j}$) усредненную систему первого приближения получим путем независимого усреднения правых частей системы (7) по обеим быстрым переменным α, γ . При этом, сделав замену $\tau = \varepsilon t$ и разделив обе части уравнений на ε , имеем

$$\begin{aligned}
 a' &= A^{-1}\mu_1 - \frac{1}{2}C^{-1}r^{-1}b \sin \theta \frac{\partial K}{\partial \theta} - bK(\tau, \theta)C^{-1}r^{-1} \cos \theta + K(\tau, \theta)C^{-2}r^{-2} \sin \theta \mu_3^s, \\
 b' &= A^{-1}\mu_2 + \frac{1}{2}C^{-1}r^{-1}a \sin \theta \frac{\partial K}{\partial \theta} + aK(\tau, \theta)C^{-1}r^{-1} \cos \theta - K(\tau, \theta)C^{-2}r^{-2} \sin \theta \mu_3^c, \\
 r' &= C^{-1}\mu_3, \quad \psi' = K(\tau, \theta)C^{-1}r^{-1}, \quad \theta' = 0, \\
 \mu_1 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (M_1^0 \cos \gamma + M_2^0 \sin \gamma) d\alpha d\gamma, \\
 \mu_2 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (M_1^0 \sin \gamma - M_2^0 \cos \gamma) d\alpha d\gamma, \\
 \mu_3 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} M_3^0 d\alpha d\gamma, \quad \mu_3^s = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} M_3^0 \sin \alpha d\alpha d\gamma, \\
 \mu_3^c &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} M_3^0 \cos \alpha d\alpha d\gamma, \quad f' = \frac{df}{d\tau}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

В качестве примера рассмотрим задачу о приведении волчка в состояние регулярной прецессии, в частности, в "спящее состояние". Малые управляющие моменты принимаются в виде

$$M_1 = -\varepsilon^2 h(\tau) \frac{p^*}{(p^{*2} + q^{*2})^{1/2}}, \quad M_2 = -\varepsilon^2 h(\tau) \frac{q^*}{(p^{*2} + q^{*2})^{1/2}}, \quad M_3 = \varepsilon u(\tau), \tag{9}$$

$$p^* = p - k(\tau, \theta)C^{-1}r^{-1} \sin \theta \sin \varphi, \quad q^* = q - k(\tau, \theta)C^{-1}r^{-1} \sin \theta \cos \varphi.$$

Здесь $h(\tau)$ и $u(\tau)$ – заданные интегрируемые функции на промежутке $[0, 1]$; $h(\tau) > 0$, $\tau \sim 1$. Эти законы управления отвечают оптимальному по быстродействию гашению экваториальной составляющей вектора угловой скорости вращения [5].

С учетом соотношений (3) и (6) для p и q возмущающие моменты согласно (9) имеют вид

$$M_1 = -\varepsilon^2 h(\tau) \frac{a \cos \gamma + b \sin \gamma}{(a^2 + b^2)^{1/2}}, \quad M_2 = -\varepsilon^2 h(\tau) \frac{a \sin \gamma - b \cos \gamma}{(a^2 + b^2)^{1/2}}, \quad M_3 = \varepsilon u(\tau). \tag{10}$$

После подстановки в (8) возмущающих моментов (10) получим после интегрирования решение вида

$$\begin{aligned}
 \theta &= \theta_0, \quad r(\tau) = r_0 + C^{-1} \int_0^\tau u(\tau^*) d\tau^*, \\
 \psi(\tau) &= \psi_0 + C^{-1} \int_0^\tau K(\tau^*, \theta) r^{-1}(\tau^*) d\tau^*,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(\tau) &= F_4(\tau) [P_0 \cos \chi + Q_0 \sin \chi - K_0 C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \sin(\chi + \varphi_0)], \\ b(\tau) &= F_4(\tau) [P_0 \sin \chi - Q_0 \cos \chi + K_0 C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \cos(\chi + \varphi_0)], \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} F_4(\tau) &= \left[1 - A^{-1}(a_0^2 + b_0^2)^{-1/2} \int_0^\tau h(\tau^*) d\tau^* \right], \\ \chi &= C^{-1} \int_0^\tau \left[K(\tau^*, \theta) \cos \theta_0 + \frac{1}{2} \sin \theta_0 \frac{\partial K}{\partial \theta} \right] r^{-1}(\tau^*) d\tau^*. \end{aligned}$$

Подставляя в соотношения (3) выражения P, Q, a, b, r из (6), (11), определим иско-
мые величины

$$\begin{aligned} p &= F_4(\tau) [p_0 \cos(\gamma - \chi) - q_0 \sin(\gamma - \chi) + k_0 C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \sin(\gamma - \chi - \varphi_0)] + \\ &\quad + k(\tau, \theta) C^{-1} r^{-1}(\tau) \sin \theta_0 \sin \varphi, \\ q &= F_4(\tau) [p_0 \sin(\gamma - \chi) + q_0 \cos(\gamma - \chi) - k_0 C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \cos(\gamma - \chi - \varphi_0)] + \\ &\quad + k(\tau, \theta) C^{-1} r^{-1}(\tau) \sin \theta_0 \cos \varphi, \\ \gamma &= A^{-1}(C - A) \left[r_0 t + C^{-1} \int_0^t \left(\int_0^\tau u(\tau_1) d\tau_1 \right) dt \right], \quad \tau = \varepsilon t. \end{aligned} \quad (12)$$

Получено решение системы (8), (9) и найдены выражения проекций вектора угло-
вой скорости в случае момента (10). Угол нутации θ постоянен. Величина $|r(\tau)|$ возрас-
тает, если параметр r_0 и интеграл от функции $u(\tau)$ имеют одинаковые знаки, и убывает
в противном случае. Переменные a, b являются произведением сомножителя, прини-
мающего положительные, отрицательные значения и нуль в зависимости от подынте-
гральной функции $h(\tau)$, и осциллирующего сомножителя. Приращение угла прецессии
 $\psi - \psi_0$ зависит от интеграла, являющегося частным от деления восстанавливающего
момента на осевую скорость вращения и принимает положительное значение в случае,
если $K(\tau, \theta)$ и $r^{-1}(\tau)$ имеют одинаковые знаки.

Составляющие p, q вектора угловой скорости, согласно (12), содержат ограничен-
ные осциллирующие слагаемые, частота колебаний которых определяется переменной
 $\gamma - \chi$, а также слагаемое, обусловленное восстанавливающим моментом $k(\tau, \theta)$.

Функция $h(\tau)$ может иметь смысл ограничения на управляющее воздействие. На-
пример, гашение экваториальной составляющей посредством ограниченного момента
сил, где $M_{1,2}$ – управление для p, q , а M_3 – управление для r .

Рассмотрим случай, когда восстанавливающий момент имеет вид

$$\begin{aligned} k(\tau, \theta) &= \varepsilon K(\tau, \theta) = \varepsilon(K(\theta) + \xi \sin \nu \tau) = k(\theta) + \varepsilon \xi \sin \nu \tau, \quad \xi \geq 0, \\ K(\theta) &= A(\mu + 2\eta \cos \theta). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь μ, η – постоянные коэффициенты, на знаки которых никаких ограничений не
накладывается. Такие задачи возникают при неуправляемом пространственном движе-
нии тела в атмосфере [6].

Выражение для угла прецессии ψ , аргумента χ и проекций p, q вектора угловой
скорости примут вид

$$\psi - \psi_0 = C^{-1} K(\theta_0) \int_0^\tau r^{-1}(\tau^*) d\tau^* + \eta_1,$$

$$\chi = C^{-1}[K(\theta_0) \cos \theta_0 - A\eta \sin^2 \theta_0] \int_0^\tau r^{-1}(\tau^*) d\tau^* + \eta_1 \cos \theta_0, \quad (14)$$

$$p = F_4(\tau)[p_0 \cos(\gamma - \chi) - q_0 \sin(\gamma - \chi) + k(\theta_0)C^{-1}r_0^{-1} \sin \theta_0 \sin(\gamma - \chi - \varphi_0)] + \\ + k(\theta_0)C^{-1}r^{-1}(\tau) \sin \theta_0 \sin \varphi + \eta_2,$$

$$\eta_1 = \xi C^{-1} \int_0^\tau \sin \nu \tau^* r^{-1}(\tau^*) d\tau^*,$$

$$\eta_2 = \varepsilon \xi \sin \nu \tau C^{-1} r^{-1}(\tau) \sin \theta_0 \sin \varphi.$$

Аналогично получается формула для q .

В выражениях для p , q и ψ из (14), как и в [2], присутствуют слагаемые, содержащие $k(\theta_0)$. Отличие состоит в том, что имеются еще дополнительные слагаемые η_1 и η_2 соответственно. Поскольку функция $r(\tau)$ ограничена, то дополнительные слагаемые также являются ограниченными и $|\sin \nu \tau| < |\nu \tau|$.

Выводы:

1. Исследован новый класс вращательных движений динамически симметричного твердого тела относительно неподвижной точки с учетом нестационарного возмущающего момента, а также восстанавливающего момента, медленно изменяющегося во времени и зависящего от угла нутации.

2. Разработана процедура усреднения для получающейся существенно нелинейной двухчастотной системы в нерезонансном случае.

3. Решена конкретная задача динамики и управления вращением твердого тела, близким к регулярной прецессии в случае Лагранжа, имеющая самостоятельное значение для приложений.

1. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л. Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1986. – N 5. – С. 3-10.
2. Лещенко Д.Д., Саллам С.Н. Возмущенные вращения твердого тела относительно неподвижной точки // Там же. – 1990. – N 5. – С. 16-23.
3. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
4. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 507 с.
5. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. – М.: Наука, 1987. – 365с.
6. Асланов В.С., Серов В.М. Вращательное движение осесимметричного твердого тела с бигармонической характеристикой восстанавливающего момента // Изв. АН. Механика твердого тела. – 1995. – N 3. – С. 19-25.