Эволюция вращений спутника относительно центра масс под действием гравитационного момента и момента сил сопротивления

Dmytro Leshchenko
Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

Leonid D Akulenko
Russian Academy of Sciences

ЧЕТВЕРТЫЕ ПОЛЯХОВСКИЕ ЧТЕНИЯ

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

Санкт-Петербург
2006

УДК 531+532+533+534+539

Четвертые Поляховские чтения: Избранные труды. СПб.: Издательство "ВВМ", 2006. 702 с.

ISBN

В сборник включены избранные доклады, представленные на Международной научной конференции по механике "Четвертые Поляховские чтения", проходившей в Санкт-Петербурге 7–10 февраля 2006 г. Рассматриваются вопросы теоретической и прикладной механики, динамики космического полета, механики жидкости и газа, механики деформируемого твердого тела, истории механики.

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №06-01-10009) и INTAS (проект №05-116-5164)

ISBN

Л. Д. Акуленко[1], *Д. Д. Лещенко*[2], *А. Л. Рачинская*[2]

ЭВОЛЮЦИЯ ВРАЩЕНИЙ СПУТНИКА ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГРАВИТАЦИОННОГО МОМЕНТА И МОМЕНТА СИЛ СОПРОТИВЛЕНИЯ

[1] *Институт проблем механики РАН*
[2] *Одесская государственная академия строительства и архитектуры*
e-mail: rachinskaya@onu.edu.ua

Рассмотрим движение спутника относительно центра масс под действием совместного влияния моментов сил гравитационного притяжения и сопротивления. Исследованию вращательных движений тел относительно неподвижной точки под действием возмущающих моментов сил различной природы (гравитационных, аэродинамических, сопротивления и др.), близкому к приводимому ниже, посвящены работы [1–6].

Введем три декартовые системы координат, начало которых совместим с центром инерции спутника [1,2]. Система координат Ox_i $(i = \overline{1,3})$ движется поступательно вместе с центром инерции: ось Ox_1 параллельна радиусу-вектору перигея орбиты, ось Ox_2 — вектору скорости центра масс спутника в перигее, ось Ox_3 — нормали к плоскости орбиты. Система координат Oy_i $(i = \overline{1,3})$ связана со спутником и ориентирована по вектору кинетического момента $\mathbf{G}$. Ось Oy_3 направлена по вектору кинетического момента $\mathbf{G}$, ось Oy_2 лежит в плоскости орбиты, ось Oy_1 лежит в плоскости Ox_3y_3 и направлена так, что векторы $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$, $\mathbf{y}_3$ образуют правую тройку [1–3]. Оси системы координат Oz_i $(i = \overline{1,3})$ связаны с главными центральными осями инерции твердого тела. Взаимное положение главных центральных осей инерции и осей Oy_i определим углами Эйлера. При этом направляющие косинусы α_{ij} осей z_i относительно системы Oy_i выражаются через углы Эйлера φ, ψ, θ по известным формулам [1]. Положение вектора кинетического момента $\mathbf{G}$ относительно его центра масс в системе координат Ox_i определяются углами λ и δ, как показано в [1–3].

Уравнения движения тела относительно центра масс запишем в форме [2]:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dG}{dt} = L_3, \quad \frac{d\delta}{dt} = \frac{L_1}{G}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{L_2}{G\sin\delta} \\
&\frac{d\theta}{dt} = G\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2}\right) + \frac{L_2\cos\psi - L_1\sin\psi}{G} \\
&\frac{d\varphi}{dt} = G\cos\theta\left(\frac{1}{A_3} - \frac{\sin^2\varphi}{A_1} - \frac{\cos^2\varphi}{A_2}\right) + \frac{L_1\cos\psi + L_2\sin\psi}{G\sin\theta} \\
&\frac{d\psi}{dt} = G\left(\frac{\sin^2\varphi}{A_1} + \frac{\cos^2\varphi}{A_2}\right) - \frac{L_1\cos\psi + L_2\sin\psi}{G}\operatorname{ctg}\theta - \frac{L_2}{G}\operatorname{ctg}\delta.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Здесь L_i — моменты внешних сил относительно осей Oy_i, G — величина кинетического момента, A_i $(i = \overline{1,3})$ — главные центральные моменты инерции относительно осей Oz_i.

Проекции L_i момента внешних сил, складывающихся из гравитационного момента $L_i^{(g)}$ и момента сил внешнего сопротивления $L_i^{(c)}$, на оси Oy_i записываются в виде [2,5]. Здесь приведена проекция на ось Oy_1, на другие оси проекции имеют аналогичный вид

$$
L_1 = \frac{3\omega_0^2(1+e\cos\theta)^3}{(1-e^2)^3}\sum_{j=1}^{3}(\beta_2\beta_j S_{3j} - \beta_3\beta_j S_{2j}) - \\
- G\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{I_{i1}\alpha_{1i}\alpha_{31}}{A_1} + \frac{I_{i2}\alpha_{1i}\alpha_{32}}{A_2} + \frac{I_{i3}\alpha_{1i}\alpha_{33}}{A_3}\right) \tag{2}
$$

где согласно [2]

$$
S_{mj} = \sum_{p=1}^{3} A_p\alpha_{jp}\alpha_{mp}, \quad \beta_1 = \cos(\nu-\lambda)\cos\delta \tag{3}
$$

$$
\beta_2 = \sin(\nu-\lambda), \quad \beta_3 = \cos(\nu-\lambda)\sin\delta,
$$

ω_0 — угловая скорость орбитального движения, e — эксцентриситет орбиты.

В некоторых случаях удобно наряду с переменной θ использовать в качестве переменной кинетическую энергию T.

Центр масс спутника движется по кеплеровскому эллипсу с эксцентриситетом e и периодом обращения Q. Зависимость истинной аномалии ν от времени t дается соотношением

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{\omega_0(1 + e\cos\nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}}, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{Q}. \tag{4}$$

Рассматривается динамически несимметричный спутник, моменты инерции которого для определенности удовлетворяют неравенству $A_1 > A_2 > A_3$, в предположении, что угловая скорость ω движения спутника относительно центра масс существенно больше угловой скорости орбитального движения ω_0, т.е. $\varepsilon = \omega_0/\omega \sim A_1\omega_0/G \ll 1$. В этом случае кинетическая энергия вращения тела велика по сравнению с моментами гравитационных сил.

В работе предполагается, что момент сопротивления $\mathbf{L}^{(c)}$ может быть представлен в виде $\mathbf{L}^{(c)} = I\boldsymbol{\omega}$, где тензор I имеет постоянные компоненты I_{ij} в системе Oz_i, связанной с телом [1,5]. Сопротивление среды предполагаем слабым порядка малости ε: $\|I\|/G_0 \sim \varepsilon \ll 1$, где $\|I\|$ — норма матрицы коэффициентов сопротивления, G_0 — кинетический момент спутника в начальный момент времени.

Исследуем решение системы (1)–(4) при малом ε на большом промежутке времени $t \sim \varepsilon^{-1}$. Для решения задачи будем применять метод усреднения [7]. Медленными переменными в этом случае будут G, δ, λ, T, ν, а быстрыми - углы Эйлера φ, ψ, θ.

Рассмотрим движение при условии $2TA_1 \geq G^2 \geq 2TA_2$, соответствующем траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось Oz_1 [8]. Введем величину

$$k^2 = \frac{(A_2 - A_3)\,(2TA_1 - G^2)}{(A_1 - A_2)\,(G^2 - 2TA_3)}, \qquad (0 \leq k^2 \leq 1) \tag{5}$$

представляющую собой в невозмущенном движении постоянную — модуль эллиптических функций.

Для построения усредненной системы первого приближения подставим решение невозмущенного движения Эйлера-Пуансо [8] в правые части уравнений (1) и проведем усреднение по переменной ψ, а затем по времени t с учетом зависимости φ, θ от t [2]. При этом для медленных переменных сохраняются прежние обозначения. В результате получим

$$\begin{aligned}
\frac{d\delta}{dt} &= -\frac{3\omega_0^2\,(1+e\cos\nu)^3}{2G\,(1-e^2)^3}\beta_2\beta_3 N,\ \frac{d\lambda}{dt} = \frac{3\omega_0^2\,(1+e\cos\nu)^3}{2G\,(1-e^2)^3\sin\delta}\beta_1\beta_3 N \\
\frac{dG}{dt} &= -\frac{G}{R(k)}\Big\{ I_{22}\,(A_1-A_3)\,W(k)+ \\
&\quad +I_{33}\,(A_1-A_2)\left[k^2-W(k)\right]+I_{11}(A_2-A_3)\left[1-W(k)\right]\Big\} \\
W(k) &= 1-\frac{E(k)}{K(k)},\quad R(k)=A_1\,(A_2-A_3)+A_3\,(A_1-A_2)\,k^2 \\
N &= A_2+A_3-2A_1+3\left(\frac{2A_1T}{G^2}-1\right)\times \\
&\quad \times\left[A_3+(A_2-A_3)\frac{K(k)-E(k)}{K(k)k^2}\right].
\end{aligned} \tag{6}$$

Запись уравнения dT/dt не приводится из-за громоздкости. Здесь $E(k)$ и $K(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно. Дифференцируя выражение (5) для k^2 и используя уравнение (6) для dG/dt и dT/dt, получим дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned}
\frac{dk^2}{d\xi} &= (1-\chi)(1-k^2)-\left[(1-\chi)+(1+\chi)k^2\right]\tfrac{E(k)}{K(k)} \qquad (7)\\
\chi &= (2I_{22}A_1A_3-I_{11}A_2A_3-I_{33}A_1A_2)/[(I_{33}A_1-I_{11}A_3)A_2] \\
\xi &= (t-t_*)/N, \qquad N=A_1A_3/(I_{33}A_1-I_{11}A_3).
\end{aligned}$$

Здесь t_* — постоянная. Значению $k^2=1$ отвечает равенство $2TA_2=G^2$, что соответствует сепаратрисе для движения Эйлера-Пуансо. Если для некоторого решения уравнения (7) равенство $k^2=1$ достигается, то выберем t_* так, чтобы $k^2=1$ при $\xi=0$, $t=t_*$.

Из уравнений (6) следует, что под влиянием сопротивления среды происходит эволюция величины кинетического момента G. Непосредственно видно, что в первом приближении на его изменение оказывает влияние только сила сопротивления, причем в уравнение входят лишь диагональные коэффициенты I_{ii} матрицы момента трения. Члены, содержащие недиагональные компоненты I_{ij} $(i\neq j)$, выпадают при усреднении. Изменения углов λ, δ зависят как от действия силы сопротивления, так и гравитационного притяжения.

Уравнение (7) описывает усредненное движение конца вектора кинетического момента $\mathbf{G}$ на сфере радиуса G. Третье уравнение (6) описывает изменение радиуса сферы с течением времени.

Выражение, стоящее в фигурных скобках правой части уравнения (6) для G положительно (при $A_1 > A_2 > A_3$), так как справедливы неравенства $(1-k^2)\,K \leq E \leq K$ [9]. Каждый коэффициент при I_{ii} является неотрицательной функцией k^2, причем одновременно они все в нуль обратиться не могут. Поэтому $dG/dt < 0$ поскольку $G > 0$, т.е. переменная G строго убывает для любых $k^2 \in [0,1]$. Аналогично показывается, что кинетическая энергия также строго убывает.

Основным этапом в исследовании движения тела является анализ уравнения (7). Отметим, что на эволюцию k^2 оказывает влияние только сопротивление среды, и в силу того, что это уравнение интегрируется самостоятельно, происходит частичное разделение влияния гравитационного момента и момента сопротивления. Полное разделение в данном случае не имеет места, так как медленно убывающие переменные G, T входят в правые части уравнений (6) для λ и δ. Уравнение (7) совпадает с аналогичным, полученным для движения тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде [5] и с уравнением, полученным для случая свободного пространственного движения тела с полостью, заполненной жидкостью большой вязкости [10]. Численное интегрирование уравнения (7) при начальном условии $k^2(0) \approx 1$ показывает, что функция k^2 монотонно убывает с ростом ξ, причем тем быстрее, чем больше χ. Представляет интерес в будущем исследование существования и устойчивости квазистационарных движений.

Рассмотрим систему, состоящую из первых двух уравнений системы (6) и уравнения (4). Их можно записать следующим образом:

$$\dot{\delta} = \omega_0^2 \Delta(\nu, \delta, \lambda), \quad \dot{\lambda} = \omega_0^2 \Lambda(\nu, \delta, \lambda)$$
$$\dot{\nu} = \frac{\omega_0}{h(e)}(1 + e\cos\nu)^2 \quad h(e) = \left(1 - e^2\right)^{3/2}.$$

Здесь Δ, Λ — правые части первых двух уравнений (6).

Получена система вида [11], для решения которой применяется модифицированный метод усреднения по следующей схеме [10].

$$\dot{\delta} = \frac{\omega_0^2 h(e)}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\Delta(\lambda, \delta, \nu)}{(1 + e\cos\nu)^2}\, d\nu, \quad \dot{\lambda} = \frac{\omega_0^2 h(e)}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\Lambda(\lambda, \delta, \nu)}{(1 + e\cos\nu)^2}\, d\nu.$$

После усреднения получим

$$\dot{\delta} = 0, \quad \dot{\lambda} = \frac{3\omega_0 \cos\delta N}{4G(1-e^2)^{3/2}}. \tag{8}$$

Для медленных усредненных переменных сохраняются прежние обозначения. Отметим, что действие приложенных сил не приводит к изменению угловой переменной δ и отклонение вектора $\mathbf{G}$ от вертикали остается постоянным в указанном приближении.

Полученную систему уравнений (8), два уравнения системы (6) для кинетического момента и кинетической энергии, уравнение для k^2 можно численно проинтегрировать при начальных условиях $G^2(0) = 2$, $k^2(0) = 0.99$, $\omega(0) = 0.0011775$ рад/с, $\delta(0) = 0.785$ рад, $\lambda(0) = 0.785$ рад, и значениях главных центральных моментов инерции тела $A_1 = 3.2$, $A_2 = 2.6$, $A_3 = 1.67$. Численный расчет выполнялся для различных видов орбит с эксцентриситетом: $e = 0$ — круговая орбита; $e = 0.04473$ — 1–й советский спутник; $e = 0.0487$ — 3–й советский спутник; $e = 0.421$ — сильно эллиптическая орбита [1]. Для коэффициентов сопротивления рассматривались два возможных варианта: $I_{11} = 2.322$; $I_{22} = 1.31$; $I_{33} = 1.425$ и $I_{11} = 0.919$; $I_{22} = 5.228$; $I_{33} = 1.666$. В первом случае величина χ уравнения (7) была отрицательной -4.477, а во втором — $\chi = 3.853$. Численный анализ показывает, что функции $G(t)$ и $T(t)$ являются монотонно убывающими (рис. 1). Видно, что при положительной величине χ (кривые 2) функции убывают быстрее, но функция $G(t)$ стремится к асимптоте медленнее за больший промежуток времени. Функция $\lambda = \lambda(t)$ в обоих расчетных вариантах величины χ является убывающей функцией, но в первом варианте убывает быстрее. Необходимо отметить, что при изменении эксцентриситета орбиты в расчетах, в обоих вариантах, увеличение e приводит к более быстрому убыванию угла λ. На рис. 2 показаны графики функции $\lambda = \lambda(t)$ при $e = 0$ (кривая 1) и $e = 0.421$ (кривая 2) при положительном χ. Видно, что со временем величина угла λ уменьшается, т.е. вращение вектора $\mathbf{G}$ в пространстве вокруг нормали к плоскости орбиты происходит на постоянном угловом расстоянии δ от нее в направлении по ходу часовой стрелки.

Рассмотрим движение тела при малых $k^2 \ll 1$, отвечающих движениям твердого тела, близким к вращениям вокруг оси A_1. В этом случае правую часть уравнения (7) можно упростить, используя разложения полных эллиптических интегралов в ряды по k^2[9]. Тогда (7) интегрируется, и асимптотическое решение записывается в виде

$$k^2 = C_1 \exp\left[-\frac{(3+\chi)\xi}{2}\right] = k_0^2 \exp\left[-\rho t\right],$$

$$\rho = \frac{I_{22}}{A_2} + \frac{I_{33}}{A_3} - 2\frac{I_{11}}{A_1},$$

где $C_1 > 0$ — постоянная.

В случае малых k^2 аналитическое выражение для величины кинетического момента можно получить в явном виде

$$G = G_0 \exp\left\{-\frac{I_{11}}{A_1}t + b\exp\left[-\rho t\right]\right\}. \tag{9}$$

Аналогичным образом может быть записано выражение для $T(t)$. Здесь

$$b = \frac{0.5k_0^2}{\rho A_1^2(A_2 - A_3)}\left[(I_{22} + I_{33})A_1^2 - (I_{11} + I_{22})A_1A_3 - \right.$$
$$\left. - (I_{11} + I_{33})A_1A_2 + 2I_{11}A_2A_3\right].$$

Решение уравнения (8) для λ с учетом (9) имеет следующий вид

$$\lambda = \frac{\alpha}{\rho}\left\{(\mu - d)b^k\left[-\gamma(-k, b) + \gamma(-k, be^{\tau})\right] - \right.$$
$$\left. - \mu\eta x^k\left[-\gamma(-k, x) + \gamma(-k, xe^{\tau})\right]\right\}$$

$$k = \frac{\beta}{\rho}, \quad x = 3b - a, \quad \tau = -\rho t$$

$$\alpha = \frac{3\omega_0^2\cos\delta}{4(1-e^2)^{3/2}G_0}, \qquad \beta = \frac{I_{11}}{A_1}$$

$$\mu = \frac{3}{2}(A_2 + A_3), \qquad \eta = \frac{2A_1T_0}{G_0}, \qquad d = A_2 + A_3 - 2A_1.$$

Здесь $\gamma(n, x)$ — неполная гамма-функция [9] и $b > 0$, $x > 0$.

Представляет интерес исследование системы (6) в случае малых диагональных коэффициентов сопротивления, т.е.

$$I_{11} = \mu i_{11}, \quad I_{22} = \mu i_{22}, \quad I_{33} = \mu i_{33}, \text{ где } \mu \ll 1. \tag{10}$$

Решение третьего уравнения системы (6) после интегрирования записывается следующим образом

$$
\begin{aligned}
G = &G_0 - \frac{G_0 \mu t}{R(k_0)} \Big\{ i_{22}(A_1 - A_3) W(k_0) + i_{33}(A_1 - A_2) \times \\
&\times \left[k_0^2 - W(k_0)\right] + i_{11}(A_2 - A_3)\,(1 - W(k_0)) \Big\}.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Решение для T записывается аналогичным образом. Здесь $W(k_0)$, $R(k_0)$ — значения функций (6) при $k = k_0$. Согласно (11) функции $G(t)$ и $T(t)$ являются строго убывающими, как и в случае системы (6).

Для малых моментов сопротивления необходимо так же построить приближенное решение

$$
\begin{aligned}
k^2 = k_0^2 + \frac{2\mu t}{A_1 A_2 A_3} \Big\{ & A_1(i_{33}A_2 - i_{22}A_3)(1 - k_0^2) - \\
& - \left[A_1(i_{33}A_2 - i_{22}A_3) + A_3(i_{22}A_1 - i_{11}A_2) k_0^2\right] \cdot \frac{E(k_0)}{K(k_0)} \Big\}.
\end{aligned}
$$

С помощью формулы для изменения величины кинетического момента (11), проведем анализ направления вектора $\mathbf{G}$. Согласно (8) отклонение вектора $\mathbf{G}$ от вертикали так же остается постоянным, как и в случае малых k^2, а скорость изменения угла λ зависит от переменной величины N, которая выражается через кинетический момент G и кинетическую энергию T. Тогда для малых моментов сопротивления закон изменения угла λ от времени имеет вид

$$
\lambda = \lambda_0 + \frac{3\omega_0^2 \cos\delta N_0 t}{4G_0\,(1 - e^2)^{3/2}} + \frac{3\omega_0^2 \cos\delta \mu t^2 \alpha}{8G_0\,(1 - e^2)^{3/2}}.
$$

Изменение угла $\lambda = \lambda(t)$ имеет вид квадратической функции от t, у которой свободный член и коэффициент при первой степени t выражаются через постоянные величины ω_0, N_0, G_0 и $\cos\delta$. Все величины являются положительными и задаются в начальный момент времени.

Таким образом, исследовано движение спутника относительно центра масс под действием совместного влияния моментов сил гравитационного притяжения и сопротивления.

Указатель литературы

[1] *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука. 1965. 416 с.

[2] *Черноусько Ф.Л.* О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // Прикл. математика и механика. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 474–483.

[3] *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ. 1975. 308 с.

[4] *Белецкий В.В, Яншин А.М.* Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. Киев: Наук. думка. 1984. 188 с.

[5] *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л.* Быстрое движение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1982. №3. С. 5–13.

[6] *Кузнецова Е.Ю., Сазонов В.В., Чебуков С.Ю.* Эволюция быстрого вращения спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2000. №2. С. 3–14.

[7] *Волосов В.М., Моргунов Б.И.* Метод усреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ. 1971. 507 с.

[8] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. М.: Наука. 1973. Т. 1. Механика. 208 с.

[9] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука. 1971. 1108 с.

[10] *Черноусько Ф.Л.* Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1965. Т. 5. № 6. С. 1049–1070.

[11] *Акуленко Л.Д.* Схемы усреднения высших степеней в системах с быстрой и медленной фазами // Прикл. математика и механика. 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 165–176.

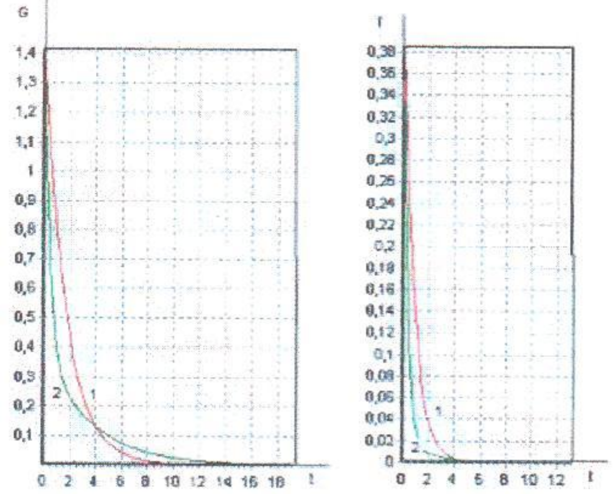

Рис. 1. Функции $G(t)$ и $T(t)$.

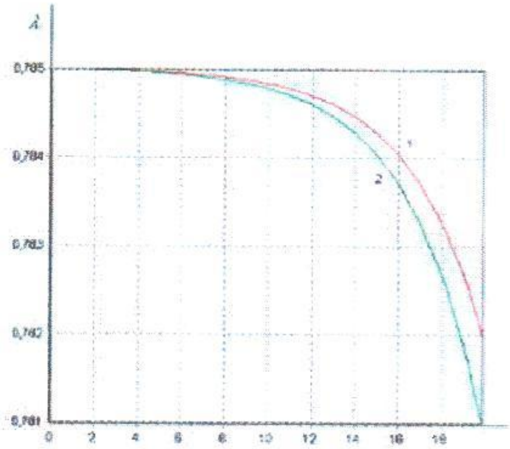

Рис. 2 График изменения угла λ.