

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/280131446>

О вращении тяжелого твердого тела, имеющего опору на горизонтальной плоскости с трением

Article · January 1984

CITATIONS
0

READS
18

2 authors:



Dmytro Leshchenko
Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture
217 PUBLICATIONS 224 CITATIONS

SEE PROFILE



Leonid D Akulenko
Russian Academy of Sciences
535 PUBLICATIONS 1,129 CITATIONS

SEE PROFILE

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:

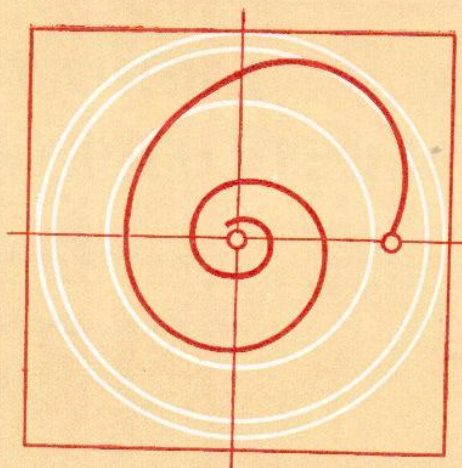


Numerical solution of eigenproblems [View project](#)



Evolution of rotations of a rigid body close to the Lagrange case under the action of nonstationary torque of forces [View project](#)

ISSN 0321—1975



МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

16 · 1984

Коэффициенты нормальной формы непрерывны по ε и, как показывают вычисления, при $\varepsilon=0$ определяются формулами

$$\lambda_1 = I_0, \quad \lambda_2 = \omega, \quad \gamma_n = 0,$$

$$a_{20} = \frac{1}{2}, \quad a_{11} = \frac{4I_0}{\omega(\kappa+1)^2}, \quad a_{02} = -\frac{5(\kappa-1)^2}{(\kappa+1)^2} - \frac{(\kappa^2-1)(3\kappa+1)+16I_0^2}{4\omega^2(\kappa+1)^3}.$$

Если параметры κ , I_0 , ε не лежат на поверхностях резонансов четвертого порядка, то в нормальной форме (41) следует положить $\gamma_n \equiv 0$.

Если при резонансе четвертого порядка выполняется неравенство

$$|a_{20}n^2 - 2na_{11} + 4a_{02}| > 4|\gamma_n|, \quad (42)$$

то, согласно [1, 4, 5], движение устойчиво. А если резонанса четвертого порядка нет, то достаточным условием устойчивости будет выполнение неравенства

$$D \equiv a_{20}\lambda_2^2 - a_{11}\lambda_1\lambda_2 + a_{02}\lambda_1^2 \neq 0. \quad (43)$$

Следовательно, если при $\varepsilon=0$ неравенство (43) выполнено, то при достаточно малых ε будет устойчивость как при наличии резонансов четвертого порядка, так и при их отсутствии. Кривая $D=0$ изображена на рис. 3.

Таким образом, когда параметры I_0 , κ не лежат вблизи кривой $D=0$ или в малой окрестности кривых параметрического резонанса (37), то движение эллипсоида, при котором он касается опорной плоскости одним из своих главных сечений, будет орбитально устойчивым, если указанное сечение будет достаточно близким к кругу. Вблизи же кривых (37) возможна неустойчивость при сколь угодно малом отклонении главного сечения эллипсоида от круга.

1. Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. — Успехи мат. наук, 1963, 18, № 6, с. 91—192.
2. Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. — М.: Гостехиздат, 1941.—320 с.
3. Маркеев А. П. Устойчивость плоских колебаний и вращений спутника на круговой орбите. — Косм. иссл., 1975, 13, № 3, с. 322—336.
4. Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. — М.: Наука, 1978.—312 с.
5. Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. — М.: Мир, 1973.—167 с.
6. Румянцев В. В. Об устойчивости стационарных движений спутников. — М.: ВЦ АН СССР, 1967.—141 с.
7. Румянцев В. В. Об устойчивости вращения тяжелого гироската на горизонтальной плоскости. — Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1980, № 4, с. 11—21.
8. Пуанкаре В. Solution de quelques question relatives au mouvement d'un corps solide pesant pose'sur un plan horizontal. — J. de math. pures et appl., 1852, 17, p. 1—30.
9. Routh E. I. A treatise on the stability of a given state of motion, particularly steady motion, London: Macmillan and Co, 1877, 108 p.
10. Thomson W., Tait P. Treatise of Natural Philosophy, 1, Oxford: Clarendon Press, 1867, 727 p.

Моск. авиац. ин-т

Получено 11.06.82

УДК 531.38

Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко

О ВРАЩЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО ОПОРУ НА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ С ТРЕНИЕМ

Исследованию движения тела осесимметричной формы по идеально гладкой или абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости посвящено большое число работ (см., например, [1, 3—11]). В них при рассмотрении движения по плоскости с трением в основном изучается устойчивость вращения волчка вокруг вертикальной оси симметрии. В данной работе исследуется движение симметричного тяжелого твер-

дого тела с опорой на линейной поверхности. Опорная плоскость определена эволюцией

Рассмотрим движение тела с осью симметрии $A=B$ и Волчок касается опорной плоскости в окрестности центра тяжести; центр тяжести находится на расстоянии r от центра опорной системы координат.

Для описания движения (рис. 2), а также углы α , β и координаты центра масс x , y и величины первой и второй производных в соответствии с уравнениями движения линей-



Предположим, что тело имеет ось симметрии $A=B$ и Волчок касается опорной плоскости в окрестности центра тяжести; центр тяжести находится на расстоянии r от центра опорной системы координат.

$$A\ddot{\alpha} -$$

$$A\ddot{\beta} +$$

$$\dot{V}_1^s = -\varepsilon \frac{h}{n}$$

Здесь $h=a+r$ — коэффициент трения, ε — коэффициент трения, n — параметр трения.

В первом приближении движение тела по оси симметрии описывается уравнениями нах тела высота центра тяжести a от центра опорной системы координат радиуса закругления r .

Для решения задачи в качестве начальных условий принимаются движение без трения. В качестве начальных условий принимаются движение без трения.

5 — 3-514

по ε и, как показы-

$$-1)(3\kappa+1)+16I_0^2 \\ 4\omega^2(\kappa+1)^3.$$

резонансов четвер-

тет положить $\gamma_n \equiv 0$.

лняется неравенство

(42)

резонанса четверто-

вости будет выпол-

(43)

полнено, то при до-

жиги резонансов чет-

ти движения в классиче-

спутников. — М.: Наука,

973.—167 с.

спутников. — М.: ВЦ АН

стата на горизонтальной

№ 4, с. 11—21.

vement d'un corps solide

apl., 1852, 17, p. 1—30.

otion, particularly steady

xford: Clarendon Press,

Получено 11.06.82

ИМЕЮЩЕГО ТРЕНИЕМ

формы по идеально

дого тела с опорой на шероховатой горизонтальной плоскости при наличии линейного трения. Проведено усреднение уравнений движения, определена эволюция медленных переменных.

Рассмотрим симметричное тело, у которого совпадают моменты инерции $A=B$ и центр тяжести лежит на оси симметрии $3'$ (рис. 1). Волчок касается опорной шероховатой плоскости точкой P . Поверхность тела в окрестности точки P приближенно принимается за сферу радиуса r ; центр кривизны K поверхности лежит на оси $3'$. Горизонтальная опорная плоскость совпадает с плоскостью $1-2$ неподвижной системы координат.

Для описания движения тела используем кардановы углы α, β, γ (рис. 2), а также вектор x_i^S , определяющий положение центра тяжести. Углы α, β и изменения компонент вектора x_i^S принимаются за величины первого порядка малости, и в соответствии с этим уравнения движения линеаризуются.

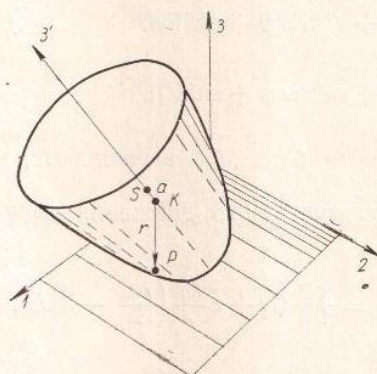


Рис. 1

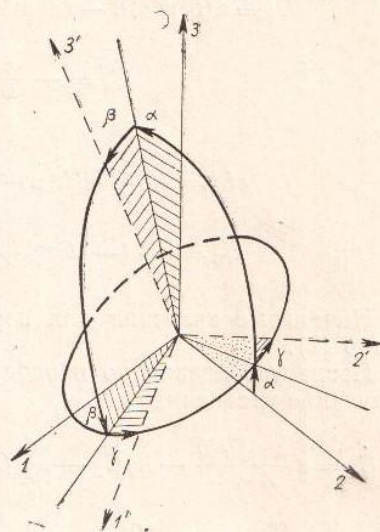


Рис. 2

Предположим, что волчок равномерно вращается вокруг вертикальной оси симметрии $3'$ (спящий волчок). Тогда для возмущенного движения уравнения с учетом сделанных предположений запишутся следующим образом [5]:

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha} + \epsilon kh^2\dot{\alpha} - aG\alpha + C\omega_0\dot{\beta} + \epsilon kh r\omega_0\beta + \epsilon kh V_2^s &= 0, \\ A\ddot{\beta} + \epsilon kh^2\dot{\beta} - aG\beta - C\omega_0\dot{\alpha} - \epsilon kh r\omega_0\alpha - \epsilon kh V_1^s &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\dot{V}_1^s = -\epsilon \frac{k}{m} (V_1^s - h\dot{\beta} + r\omega_0\alpha), \quad \dot{V}_2^s = -\epsilon \frac{k}{m} (V_2^s + h\dot{\alpha} + r\omega_0\beta).$$

Здесь $h=a+r$ — максимальная высота точки S над плоскостью, k — коэффициент пропорциональности в выражении силы трения, ϵ — малый параметр. Начальные условия предполагаются заданными.

В первом приближении скорость вращения вокруг вертикальной оси симметрии остается постоянной: $\dot{\gamma}=\omega_0=\text{const}$ и при малых наклонах тела высота точки S не изменяется: $x_3^S=\text{const}$. Предполагаем, что расстояние a от центра кривизны до центра масс значительно меньше радиуса закругления r ($a \ll r$). Пусть $\frac{a}{r} \sim \mu$ и положим, что ϵ и μ одного порядка.

Для решения задачи воспользуемся методом усреднения [2]. В качестве невозмущенного движения ($\epsilon=0, \mu=0$) рассматривается движение без трения и при совпадении центра масс с центром кривизны.

Решение невозмущенной системы записывается в виде

$$\alpha = \frac{1}{\Omega} (C_1 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t) + C_3, \quad \beta = \frac{1}{\Omega} (C_1 \sin \Omega t - C_2 \cos \Omega t) + C_4, \quad (2)$$

$$V_1^s = C_5, \quad V_2^s = C_6,$$

где $\Omega = C\omega_0/A$, C_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) — произвольные постоянные.

Величины, которые были постоянными в невозмущенном движении, становятся медленными переменными. Уравнения для медленных переменных принимают вид

$$\dot{C}_1 = \varepsilon (f_\beta \cos \Omega t - f_\alpha \sin \Omega t), \quad \dot{C}_2 = \varepsilon (f_\alpha \cos \Omega t + f_\beta \sin \Omega t), \quad (3)$$

$$\dot{C}_3 = -\frac{\varepsilon}{\Omega} f_\beta, \quad \dot{C}_4 = \frac{\varepsilon}{\Omega} f_\alpha.$$

Здесь

$$\varepsilon f_\alpha = -\frac{1}{A} (\varepsilon k h^2 \dot{\alpha} - a G \alpha + \varepsilon k h r \omega_0 \beta + \varepsilon k h V_2^s),$$

$$\varepsilon f_\beta = \frac{1}{A} (-\varepsilon k h^2 \dot{\beta} + a G \beta + \varepsilon k h r \omega_0 \alpha + \varepsilon k h V_1^s).$$

Начальные значения для переменных $C_1, \dots, C_4$ вычисляются согласно (2).

После усреднения по периоду невозмущенного движения получим следующие уравнения:

$$\dot{C}_1 = \varepsilon \frac{k h}{A} \left(\frac{r \omega_0}{\Omega} - h \right) C_1 - \frac{a G}{\Omega A} C_2, \quad \dot{C}_2 = \frac{a G}{\Omega A} C_1 + \varepsilon \frac{k h}{A} \left(\frac{r \omega_0}{\Omega} - h \right) C_2,$$

$$\dot{C}_3 = -\varepsilon \frac{k h r \omega_0}{\Omega A} C_3 - \frac{a G}{\Omega A} C_4 - \varepsilon \frac{k h}{\Omega A} V_1^s, \quad \dot{C}_4 = \frac{a G}{\Omega A} C_3 - \varepsilon \frac{k h r \omega_0}{\Omega A} C_4 - \varepsilon \frac{k h}{\Omega A} V_2^s, \quad (4)$$

$$\dot{V}_1^s = -\varepsilon \frac{k}{m} (V_1^s + r \omega_0 C_3), \quad \dot{V}_2^s = -\varepsilon \frac{k}{m} (V_2^s + r \omega_0 C_4).$$

Первые два уравнения (4) легко интегрируются и дают

$$C_1 = \exp \left[\varepsilon \frac{k h}{A} \left(\frac{r \omega_0}{\Omega} - h \right) t \right] \left(C_1^0 \cos \frac{a G}{\Omega A} t - C_2^0 \sin \frac{a G}{\Omega A} t \right), \quad (5)$$

$$C_2 = \exp \left[\varepsilon \frac{k h}{A} \left(\frac{r \omega_0}{\Omega} - h \right) t \right] \left(C_1^0 \sin \frac{a G}{\Omega A} t + C_2^0 \cos \frac{a G}{\Omega A} t \right),$$

где C_1^0, C_2^0 — значения C_1, C_2 в начальный момент времени.

Из (5) следует, что усредненное движение неустойчиво при $\frac{A}{C} > \frac{h}{r}$ и устойчиво при $\frac{A}{C} < \frac{h}{r}$. Этот вывод совпадает с полученным в [5].

Для дальнейшего исследования введем комплексные переменные $u = C_3 + i C_4$, $V = V_1^s + i V_2^s$. В этом случае последние четыре уравнения (4) можно записать следующим образом:

$$\dot{u} = \left(-\varepsilon \frac{k h r \omega_0}{\Omega A} + i \frac{a G}{\Omega A} \right) u - \varepsilon \frac{k h}{\Omega A} V, \quad (6)$$

$$\dot{V} = -\varepsilon \frac{k r \omega_0}{m} u - \varepsilon \frac{k}{m} V.$$

В результате и
тельной и мнимой

$$C_3 = \frac{\sqrt{2} \varepsilon k h}{A \Omega D w}$$

$$C_4 = -\frac{\sqrt{2} \varepsilon k h}{A \Omega D w}$$

$$V_1^s = -$$

$$V_2^s = \frac{1}{2}$$

Здесь V_1^{s0}, V_2^{s0} —
Коэффициент

$$w = \frac{a G}{\Omega A} \left[1 - \right.$$

$$l = -\frac{1}{2} \left[\varepsilon k \left(\frac{h r \omega_0}{\Omega} \right. \right.$$

$$n = -\frac{1}{2} \left[\varepsilon k \left(\right. \right.$$

$$z = -\varepsilon k \left(\frac{1}{m} \right.$$

$$\eta = \frac{(\varepsilon k h r \omega_0)}{(\Omega A)^2}$$

$$+ 2 \frac{(\varepsilon k h G)}{(\Omega A)^2}$$

В результате
вид:

$$\alpha = \frac{1}{\Omega} \exp \left[\varepsilon \frac{k h}{A} \right.$$

$$+ \frac{\sqrt{2} \varepsilon k h}{A \Omega D w}$$

$$\beta = -\frac{1}{\Omega} \exp \left[\varepsilon \right.$$

$$+ \frac{\sqrt{2} \varepsilon k h}{A \Omega D w}$$

1. Аппель П. Теорема
2. Волосов В. М., Л
3. Дувакин А. П.
4. Контенсу П. Св
5. Магнус К. Гирс

В результате интегрирования системы (6), собирая члены действительной и мнимой частей, получаем

(2)

$$C_3 = \frac{V_2 \varepsilon k h}{A \Omega D \omega} [(-w V_1^{S0} + b V_2^{S0}) e^{it} \cos gt + (w V_1^{S0} + z V_2^{S0}) e^{nt} \cos pt],$$

$$C_4 = \frac{\bar{V}_2 \varepsilon k h}{A \Omega D \omega} [(-w V_1^{S0} + b V_2^{S0}) e^{it} \sin gt + (w V_1^{S0} + z V_2^{S0}) e^{nt} \sin pt],$$

ни,
пе-

(3)

$$\begin{aligned} V_1^S = & -\frac{V_2}{2D\omega} [(-w V_1^{S0} + b V_2^{S0}) e^{it} (z \cos gt + w \sin gt) + \\ & + (w V_1^{S0} + z V_2^{S0}) e^{nt} (-b \cos pt + d \sin pt)], \\ V_2^S = & \frac{V_2}{2D\omega} [-(-w V_1^{S0} + b V_2^{S0}) e^{it} (-w \cos gt + z \sin gt) + \\ & + (w V_1^{S0} + z V_2^{S0}) e^{nt} (b \sin pt + w \cos pt)]. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь V_1^{S0}, V_2^{S0} — начальные значения V_1^S, V_2^S .
Коэффициенты формул (7) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} w = & \frac{aG}{\Omega A} \left[1 - V_2 \varepsilon D k \left(\frac{1}{m} - \frac{hr\omega_0}{\Omega A} \right) \right], \quad b = \varepsilon k \left(\frac{1}{m} - \frac{hr\omega_0}{\Omega A} \right) + \frac{V_2}{2} D, \\ l = & -\frac{1}{2} \left[\varepsilon k \left(\frac{hr\omega_0}{\Omega A} + \frac{1}{m} \right) - \frac{V_2}{2} D \right], \quad g = \frac{aG}{\Omega A} \left[1 + \frac{V_2}{D} \varepsilon k \left(\frac{1}{m} - \frac{hr\omega_0}{\Omega A} \right) \right], \\ n = & -\frac{1}{2} \left[\varepsilon k \left(\frac{hr\omega_0}{\Omega A} + \frac{1}{m} \right) + \frac{V_2}{2} D \right], \quad p = \frac{aG}{\Omega A} \left[1 - \frac{V_2}{D} \varepsilon k \left(\frac{1}{m} - \frac{hr\omega_0}{\Omega A} \right) \right], \\ z = & -\varepsilon k \left(\frac{1}{m} - \frac{hr\omega_0}{\Omega A} \right) + \frac{V_2}{2} D, \quad d = \frac{aG}{\Omega A} \left[1 + V_2 \varepsilon D k \left(\frac{1}{m} - \frac{hr\omega_0}{\Omega A} \right) \right], \end{aligned}$$

$$D = \sqrt{\xi + V_2 \eta},$$

$$\xi = \frac{(\varepsilon k h r \omega_0)^2}{(\Omega A)^2} + \frac{(\varepsilon k)^2}{m^2} - \frac{(aG)^2}{(\Omega A)^2} + 2 \frac{(\varepsilon k)^2 h r \omega_0}{\Omega A m},$$

$$\begin{aligned} \eta = & \frac{(\varepsilon k h r \omega_0)^4}{(\Omega A)^4} + \frac{(\varepsilon k)^4}{m^4} + \frac{(aG)^4}{(\Omega A)^4} + 6 \frac{(\varepsilon k)^4 (h r \omega_0)^2}{(\Omega A m)^2} + 2 \frac{(\varepsilon k h r \omega_0 a G)^2}{(\Omega A)^4} + \\ & + 2 \frac{(\varepsilon k a G)^2}{(\Omega A m)^2} + 4 \frac{(\varepsilon k)^4 h r \omega_0}{\Omega A m^3} - 12 \frac{(\varepsilon k a G)^2 h r \omega_0}{(\Omega A)^3 m} + 4 \frac{(\varepsilon k)^4 (h r \omega_0)^3}{(\Omega A)^3 m}. \end{aligned}$$

В результате изменения кардановых углов α, β принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \alpha = & \frac{1}{\Omega} \exp \left[\varepsilon \frac{k h}{A} \left(\frac{r \omega_0}{\Omega} - h \right) t \right] \left[C_1^0 \cos \left(\frac{aG}{\Omega A} - \Omega \right) t + C_2^0 \sin \left(\frac{aG}{\Omega A} - \Omega \right) t \right] + \\ & + \frac{V_2 \varepsilon k h}{A \Omega D \omega} [(-w V_1^{S0} + b V_2^{S0}) e^{it} \cos gt + (w V_1^{S0} + z V_2^{S0}) e^{nt} \cos pt], \\ \beta = & -\frac{1}{\Omega} \exp \left[\varepsilon \frac{k h}{A} \left(\frac{r \omega_0}{\Omega} - h \right) t \right] \left[C_1^0 \sin \left(\frac{aG}{\Omega A} - \Omega \right) t + C_2^0 \cos \left(\frac{aG}{\Omega A} - \Omega \right) t \right] + \\ & + \frac{V_2 \varepsilon k h}{A \Omega D \omega} [(-w V_1^{S0} + b V_2^{S0}) e^{it} \sin gt + (w V_1^{S0} + z V_2^{S0}) e^{nt} \sin pt]. \end{aligned}$$

1. Аппель П. Теоретическая механика. — М.; Л.: Физматгиз, 1960. — Т. 2. 487 с.
2. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1971. — 507 с.
3. Дувакин А. П. Об устойчивости движения волчка по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. — Инж. журн., 1962, 2, вып. 2, с. 222—230.
4. Контенсу П. Связь между трением скольжения и трением верчения и ее учет в теории волчка. — В кн.: Пробл. гироскопии. М.: Мир, 1967, с. 60—77.
5. Магнус К. Гироскоп: Теория и применение. — М.: Мир, 1974. — 526 с.

6. Миндлин И. М. Об устойчивости движения волчка на горизонтальной плоскости при действии сухого трения скольжения. — Инж. журн., 1965, 5, вып. 2, с. 211—216.
7. Румянцев В. В. Об устойчивости движения гиристов некоторого вида. — Прикл. математика и механика, 1961, 25, вып. 4, с. 778—784.
8. Румянцев В. В., Карапетян А. В. Устойчивость движения неголономных систем. — Итоги науки и техники / ВИНТИ. Сер. Общ. механика, 1976, 3, с. 5—42.
9. Румянцев В. В. Об устойчивости вращения тяжелого гиристов на горизонтальной плоскости. — Изв. АН СССР. Сер. Механика твердого тела, 1980, № 4, с. 11—21.
10. Семов А. М. Об устойчивости вертикального положения равновесия динамической оси тела на горизонтальной плоскости с трением и на неголономной плоскости. — В кн.: Избранные вопросы динамики: Материалы совещ. Секция физики по механике за 1977—1978. М., 1979, с. 46—54.
11. Kane T. R., Levinson D. A. A realistic solution of the symmetric top problem. — Trans. ASME. J. Appl. Mech., 1978, 45, N 4, p. 903—909.

Ин-т проблем механики
АН СССР, Москва
Одес. технол. ин-т
холодильной пром-сти

Получено
31.08.81

УДК 531.36, 531.38

И. А. Болграбская, А. Я. Савченко

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ ВРАЩАЮЩИХСЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

В современной технике в качестве элементов конструкций зачастую встречаются осесимметричные упругие стержни, совершающие колебания в окрестности режима, соответствующего его равномерному вращению как твердого тела вокруг своей динамической оси симметрии. Исследование таких колебаний представляет крайне сложную проблему постановки задачи и ее решения. В частности, подобного рода проблемы возникают при определении критических скоростей быстро вращающихся валов с теми или иными граничными условиями [5]. Сложность математического описания таких объектов (уравнения в частных производных) приводит, во-первых, к неизбежной линеаризации исходной системы уравнений, во-вторых, даже для линейных систем и в простейших случаях [7]¹ не удается выписать явную зависимость первых частот от параметров стержня, что ограничивает возможность аналитического исследования, кроме того, далеко не всегда полностью учитывается гироскопический эффект вращения стержня [4, 6]. В этой связи возникает естественное стремление заменить механическую систему с распределенными параметрами системой с конечным числом степеней свободы, которая не имела бы недостатков, отмеченных выше, т. е. обладала бы следующими преимуществами: достаточно точно отражала изучаемое свойство исходной системы; имела достаточно развитый математический аппарат исследования ее свойств; имела возможность интегрирования с учетом нелинейности.

В настоящей статье, исходя из физических соображений, осесимметричному стержню, шарнирно закрепленному на конце и совершающему колебания в окрестности движения, соответствующего его равномерному вращению как твердого тела вокруг динамической оси симметрии, сопоставлена система n гироскопов Лагранжа, связанных упругими универсальными шарнирами. Приведены уравнения движения такой системы, ее первые интегралы, указаны варианты исследования устойчивости ее стационарных движений, установлены эффекты, вызванные наличием упругой связи, представляющие и самостоятельный интерес.

¹ Приведенные здесь ссылки не претендуют на полноту, а служат лишь иллюстрацией.

Опис
тяжести
точку O_k
 S_{k-1} и S
версалы
Лагранж
сальным
нальных
этом в с

Здесь M_k
разложени
орты жес
которой
 O_k ($k=2$
метрий те
орты e_k^1
правлен
Физи
при дост
вых пере
модель
жимого
чительно
жесткост
Уравн
из закон
количест
чаем ур
щей фор

$(A^k \omega_k)^{\cdot} +$
 $(k=1, \dots$
 $=L_1=C$
центр ма
 S_k, v_k^0 —
момент р
 R_{k+1}, L_k
положны
Мом
 $=L_j^2 +$

$(L_j + M_j$
Из урав

Сформи
(3) и с

¹ По
² От