Motion of a ponderous rigid body with a fixed point in a mildly resisting medium

Article *in* Soviet Applied Mechanics · March 1975

DOI: 10.1007/BF00883028

1 author:

Dmytro Leshchenko
Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

1975 ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА Том XI, в. 3
ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИКИ, МЕХАНИКИ И КИБЕРНЕТИКИ АН УССР

УДК 531.1

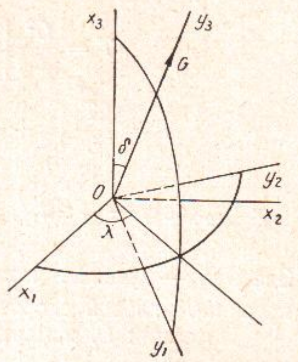
О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ В СЛАБО СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Д. Д. Лещенко

(Одесса)

Задача о движении тяжелого тела вокруг неподвижной точки с малым расстоянием центра тяжести до неподвижной точки эквивалентна задаче о движении несимметричного гироскопа с неконтактным подвесом, исследованной в статье [5].

Некоторые частные случаи интегрирования уравнений движения симметричного и не вполне симметричного тел вокруг центра масс в сопротивляющейся среде были рассмотрены в работах [2, 6].



В данной статье изучается быстрое движение динамически несимметричного тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в сопротивляющейся среде. Сопротивление предполагается малым и линейным по отношению к угловой скорости.

§ 1. Введем наряду с неподвижной системой координат Ox_i $(i=1, 2, 3)$ и системой Oz_i, связанной с твердым телом, систему Oy_i, ось Oy_3 которой направлена по вектору кинетического момента твердого тела. Общее начало систем совпадает с неподвижной точкой O тяжелого твердого тела.

Углы λ и δ определяют направление вектора кинетического момента относительно неподвижной системы координат, как показано на рисунке.

Формулы для косинусов углов между осями приведены в таблице.

Уравнения движения тела относительно неподвижной точки в общем виде для динамически несимметричного тела записываются следующим образом [9]:

$$\frac{dG}{dt} = L_3; \qquad \frac{d\delta}{dt} = \frac{L_1}{G}; \qquad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{L_2}{G\sin\delta}; \qquad (1.1)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = G\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2}\right) + \frac{L_2\cos\psi - L_1\sin\psi}{G};$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = G\cos\theta\left(\frac{1}{A_3} - \frac{\sin^2\varphi}{A_1} - \frac{\cos^2\varphi}{A_2}\right) + \frac{L_1\cos\psi + L_2\sin\psi}{G\sin\theta}; \qquad (1.2)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = G\left(\frac{\sin^2\varphi}{A_1} + \frac{\cos^2\varphi}{A_2}\right) - \frac{L_1\cos\psi + L_2\sin\psi}{G}\operatorname{ctg}\theta - \frac{L_3}{G}\operatorname{ctg}\delta,$$

где L_i — проекции момента внешних сил относительно неподвижной точки на оси Oy_i; G — величина кинетического момента.

	Oz_1	Oz_2	Oz_3
Oy_1	$\alpha_{11}=\cos\varphi\cos\psi-$ $-\cos\theta\sin\varphi\sin\psi$	$\alpha_{12}=-\sin\varphi\cos\psi-$ $-\cos\theta\cos\varphi\cos\psi$	$\alpha_{13}=\sin\theta\sin\psi$
Oy_2	$\alpha_{21}=\cos\varphi\sin\psi+$ $+\cos\theta\sin\varphi\cos\psi$	$\alpha_{22}=-\sin\varphi\sin\psi+$ $+\cos\theta\cos\varphi\cos\psi$	$\alpha_{23}=-\sin\theta\cos\psi$
Oy_3	$\alpha_{31}=\sin\theta\sin\varphi$	$\alpha_{32}=\sin\theta\cos\varphi$	$\alpha_{33}=\cos\theta$

Используя выражения для проекций вектора $\overline{G}$ на оси связанной системы координат Oz_i

$$A_i r_i = G\alpha_{3i} \quad (i = 1, 2, 3), \tag{1.3}$$

запишем выражения для кинетической энергии T движения тела относительно неподвижной точки и ее производной

$$T = \frac{G^2}{2}\left[\left(\frac{\sin^2\varphi}{A_1} + \frac{\cos^2\varphi}{A_2}\right)\sin^2\theta + \frac{\cos^2\theta}{A_3}\right]; \tag{1.4}$$

$$\dot{T} = \frac{2T}{G}L_3 + G\sin\theta\left[\cos\theta\left(\frac{\sin^2\varphi}{A_1} + \frac{\cos^2\varphi}{A_2} - \frac{1}{A_3}\right)\times\right.$$
$$\left.\times(L_2\cos\psi - L_1\sin\psi) + \sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2}\right)(L_1\cos\psi + L_2\sin\psi)\right]. \tag{1.5}$$

Здесь A_i — главные моменты инерции тела относительно осей Oz_i; r_i — проекции угловой скорости тела на те же оси.

Проекции L_i момента внешних сил на оси Oy_i записываются с учетом (1.3) в виде

$$L_1 = -\sum_{i=1}^{3} mg\cos\delta a_i\alpha_{2i} - \sum_{i,j=1}^{3}\varepsilon_{ij}\frac{G}{A_j}\alpha_{3j}\alpha_{1i};$$

$$L_2 = \sum_{i=1}^{3} mga_i(\alpha_{3i}\sin\delta + \alpha_{1i}\cos\delta) - \sum_{i,j=1}^{3}\varepsilon_{ij}\frac{G}{A_j}\alpha_{3j}\alpha_{2i}; \tag{1.6}$$

$$L_3 = -\sum_{i=1}^{3} mg\sin\delta a_i\alpha_{2i} - \sum_{i,j=1}^{3}\varepsilon_{ij}\frac{G}{A_j}\alpha_{3j}\alpha_{3i},$$

причем $a_i\,(i = 1, 2, 3)$ определяют положение центра масс в системе Oz_i; $\varepsilon_{ij} = \varepsilon I_{ij}$; I_{ij} — коэффициенты аэродинамического момента сопротивления вращению тела [1]; ε — малый параметр.

Предполагаем, что центр тяжести тела удален на малое расстояние от неподвижной точки. В связи с этим выбираем в качестве малого параметра безразмерное отношение $\varepsilon \sim \dfrac{mga}{T}$.

Уравнения (1.2), (1.5), (1.6) решаются методом осреднения [3, 8]. Осреднение проводится по движению Эйлера способом, предложенным в работах [9, 10] для нерезонансных случаев. Погрешность осредненного решения для медленных переменных составляет величину порядка ε на интервале времени, за который тело совершит $\sim \dfrac{1}{\varepsilon}$ оборотов.

§ 2. Положим a_i и ε равными нулю, при этом из (1.2), (1.5) следует, что G, T, λ, δ постоянны. Примем для определенности $A_1 > A_2 > A_3$ и рассмотрим движение при условии $2TA_1 \geqslant G^2 \geqslant 2TA_2$, соответствующем траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось Oz_1 [7, 10].

Введем функцию

$$k^2 = \frac{(A_2 - A_3)(2TA_1 - G^2)}{(A_1 - A_2)(G^2 - 2TA_3)} \quad (0 \leqslant k \leqslant 1). \tag{2.1}$$

Для построения системы осредненных уравнений подставим решение для невозмущенного движения Эйлера—Пуансо в виде [7] в правые части уравнений (1.2), (1.5), (1.6) и произведем осреднение по углу ψ, а затем по углам θ и φ. В результате, используя формулы для интегралов от эллиптических функций [4], получаем

$$\dot{\lambda} = \frac{\pi mga_1}{2G^2K(k)}\sqrt{\frac{A_1(G^2 - 2TA_3)}{A_1 - A_3}}; \qquad \dot{\delta} = 0;$$

$$\frac{\dot{G}}{G} = -\frac{\varepsilon}{A_1(A_2 - A_3) + A_3(A_1 - A_2)k^2}\Big\{I_{22}(A_1 - A_3) + I_{33}(A_1 - A_2) \times$$
$$\times (k^2 - 1) + \frac{E(k)}{K(k)}[I_{11}(A_2 - A_3) - I_{22}(A_1 - A_3) + I_{33}(A_1 - A_2)]\Big\};$$

$$\frac{\dot{T}}{T} = \frac{2\varepsilon}{A_1(A_2 - A_3) + A_3(A_1 - A_2)k^2}\Big(-\Big\{I_{22}(A_1 - A_3) +$$
$$+ I_{33}(A_1 - A_2)(k^2 - 1) + \frac{E(k)}{K(k)}[I_{11}(A_2 - A_3) - I_{22}(A_1 - A_3) + \tag{2.2}$$
$$+ I_{33}(A_1 - A_2)]\Big\} + \frac{(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)(A_2 - A_3)}{(A_2 - A_3) + (A_1 - A_2)k^2}\Big\{(1 - k^2) \times$$
$$\times \left(\frac{I_{33}}{A_3} - \frac{I_{22}}{A_2}\right) - \frac{E(k)}{K(k)}\left[\left(\frac{I_{33}}{A_3} - \frac{I_{22}}{A_2}\right) + \left(\frac{I_{22}}{A_2} - \frac{I_{11}}{A_1}\right)k^2\right]\Big\}\Big),$$

где $K(k)$, $E(k)$ — полные эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода.

Заметим, что наличие сопротивления среды приводит к эволюции как кинетической энергии тела, так и величины кинетического момента.

После ряда преобразований, используя формулу (2.1) и два последних уравнения (2.2), производную $\dfrac{dk^2}{d\xi}$ запишем в виде

$$\frac{dk^2}{d\xi} = (1 - \varkappa)(1 - k^2) - [(1 - \varkappa) + (1 + \varkappa)k^2]\frac{E(k)}{K(k)}. \tag{2.3}$$

Здесь
$$\varkappa=\frac{2I_{22}A_1A_3-I_{11}A_2A_3-I_{33}A_1A_2}{(I_{33}A_1-I_{11}A_3)\,A_2};\qquad \xi=\frac{t-t_*}{N};$$
$$N=\frac{A_1A_3}{\varepsilon\,(I_{33}A_1-I_{11}A_3)},$$
причем постоянная t_* выбирается так, чтобы момент $t=t_*$ соответствовал $k=1$.

Следует отметить, что осредненное уравнение (2.3) является выражением вида (7.11) (см. работу [10]), полученным для случая свободного пространственного движения тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью.

Соотношение (2.3) сохраняется и для движения твердого тела в слабо сопротивляющейся среде вокруг центра масс.

Кроме того, согласно условию (2.3) на эволюцию k^2 оказывает влияние только сопротивление и в силу того, что это уравнение интегрируется самостоятельно, на определенном этапе происходит разделение влияний сопротивления и тяжести.

Величину $\varkappa$ запишем в виде
$$\varkappa=\frac{A_3\varkappa_1-A_1\varkappa_2}{A_3\varkappa_1+A_1\varkappa_2};\qquad \varkappa_1=I_{22}A_1-I_{11}A_2;\qquad \varkappa_2=I_{33}A_2-I_{22}A_3.$$

В зависимости от динамических характеристик $\varkappa$ может изменяться в диапазоне от $-\infty$ до $+\infty$. Это расширяет смысл канонического уравнения (2.3) по сравнению с соответствующим уравнением работы [10].

В случае, когда $\varkappa_1>0$, $\varkappa_2>0$ и, следовательно, $|\varkappa|\leqslant 1$, можно использовать результаты численного интегрирования при начальном условии $k^2(0)=1$. В этом случае функция k^2 монотонно убывает от 1 до 0 при росте ξ от 0 до ∞.

При малых k правую часть уравнения (2.3) можно упростить, используя разложения полных эллиптических интегралов в ряды по k^2 (см. работу [4]). В этом случае (2.3) интегрируется и асимптотическое решение, соответствующее большим ξ, записывается в виде
$$k^2=C\exp\left[-\frac{(3+\varkappa)\,\xi}{2}\right]=C\exp\left(-\varepsilon\,\frac{A_3\varkappa_1+A_2\varkappa_2}{A_1A_2A_3}\,t\right);\tag{2.4}$$
$$C>0\ (\xi\to+\infty;\ t\to+\infty).$$
Функцией (2.4) и формулами (2.1), (2.2), (2.3) движение описывается при $t\geqslant t_*$.

Случай, когда имеют место неравенства $2TA_2\geqslant G^2\geqslant 2TA_3$, т. е. траектории вектора кинетического момента охватывают ось Oz_3, рассматривается аналогично. При этом получаемые результаты могут быть приведены к рассмотренным путем изменения обозначений главных моментов инерции A_1 и A_3, а решения будут справедливы при $t\leqslant t_*$.

Выражения для G и T находим путем интегрирования последних двух уравнений (2.2) с учетом малости k
$$G=G_0k^{2\beta}\exp\left\{\frac{A_2A_3}{2A_1(A_2-A_3)}\left[-1+\frac{A_1(\varkappa_1+\varkappa_2)}{A_3\varkappa_1+A_2\varkappa_2}\right]k^2\right\};\tag{2.5}$$
$$T=T_0k^{4\beta}\exp\left\{\left[\frac{A_2A_3}{A_1(A_2-A_3)}\left(-1+\frac{A_1(\varkappa_1+\varkappa_2)}{A_3\varkappa_1+A_2\varkappa_2}\right)+\right.\right.$$

$$+\frac{(A_1-A_2)(A_1-A_3)}{A_1(A_2-A_3)}\Bigg]k^2\Bigg\},$$

где $\beta=\dfrac{I_{11}A_2A_3}{A_3\varkappa_1+A_2\varkappa_2}$.

Ограничиваясь членами порядка k^2 в выражениях (2.5) и учитывая (2.4), получаем

$$G=G_0\exp\left(-\varepsilon\frac{I_{11}}{A_1}t\right);\qquad T=T_0\exp\left(-2\varepsilon\frac{I_{11}}{A_1}t\right). \tag{2.6}$$

Таким образом, в пределах сделанных ограничений для k^2 величина кинетического момента и кинетическая энергия убывают по экспоненциальному закону с декрементом затухания соответственно $\varepsilon\dfrac{I_{11}}{A_1}$ и $2\varepsilon\dfrac{I_{11}}{A_1}$. Отметим, что при вычислениях рассматривался случай, когда траектории вектора кинетического момента охватывали ось Oz_1.

При этом выражение для $\dot{\lambda}$ (2.2) с учетом (2.1) при малых k записывается так:

$$\dot{\lambda}=\frac{\pi mga_1\sqrt{A_1}}{2G}. \tag{2.7}$$

Отсюда следует, что вектор кинетического момента прецессирует с нарастающей по экспоненциальному закону скоростью, в то время как при отсутствии слабого сопротивления $\dot{\lambda}=\text{const}$ [5]. Полученные решения остаются справедливыми в пределах малых значений k.

Для тела, близкого к осесимметричному ($A_1\approx A_2$), система осредненных уравнений для медленных переменных принимает вид

$$\dot{\lambda}=\frac{mga_3}{G}\cos\theta;\quad \dot{\delta}=0;\quad \frac{\dot{G}}{G}=-\varepsilon\left[\frac{\sin^2\theta}{2A_1}(I_{11}+I_{22})+\frac{I_{33}}{A_3}\cos^2\theta\right];$$
$$\dot{\theta}=\varepsilon\sin\theta\cos\theta\left(-\frac{I_{11}+I_{22}}{2A_1}+\frac{I_{33}}{A_3}\right). \tag{2.8}$$

Уравнения (2.8) свидетельствуют, что слабое сопротивление среды приводит к эволюции величин G и θ, которые оставались постоянными в работе [5].

Интегрируя последнее уравнение (2.8), получаем

$$\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}\theta_0\exp\left[\varepsilon\left(-\frac{I_{11}+I_{22}}{2A_1}+\frac{I_{33}}{A_3}\right)t\right]. \tag{2.9}$$

Как видно, при $\dfrac{I_{33}}{A_3}>\dfrac{I_{11}+I_{22}}{2A_1}$ угол θ увеличивается и стремится к $\dfrac{\pi}{2}$. В случае $\dfrac{I_{11}+I_{22}}{2A_1}>\dfrac{I_{33}}{A_3}$ угол θ убывает и стремится к нулю.

Из третьего уравнения (2.8) при условии (2.9) имеем

$$G^2=G_0^2\left[\exp\left(-2\varepsilon\frac{I_{33}}{A_3}t\right)+\operatorname{tg}^2\theta_0\exp\left(-\varepsilon\frac{I_{11}+I_{22}}{A_1}t\right)\right]. \tag{2.10}$$

При этом, согласно (2.8), в случае $\frac{I_{33}}{A_3} > \frac{I_{11} + I_{22}}{A_1}$; $\theta \to \frac{\pi}{2}$ угловая скорость $\dot{\lambda}$ прецессирования вектора кинетического момента убывает и при $t \to \infty$, $\dot{\lambda} \to 0$. С другой стороны, при $\frac{I_{11} + I_{22}}{2A_1} > \frac{I_{33}}{A_3}$; $\theta \to 0$ угловая скорость вращения вектора $\overline{G}$ вокруг вертикальной оси возрастает.

При отсутствии сопротивления среды ($\varepsilon = 0$) выражения (2.2), (2.8) совпадают с соответствующими системами, приведенными в работе [5].

Выражаю глубокую благодарность Ф. Л. Черноусько за постановку задачи и ценные советы, А. А. Каспарьянцу — за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белецкий В. В., Движение искусственного спутника относительно центра масс, М., Изд-во «Наука», 1965.
2. Булгаков Б. В., Прикладная теория гироскопов, М., Гостехиздат, 1955.
3. Волосов В. М., Моргунов Б. И., Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем, М., Изд-во МГУ, 1971.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., Изд-во «Наука», 1971.
5. Климов Д. М., Космодемьянская Г. Н., Черноусько Ф. Л., О движении гироскопа с неконтактным подвесом, Изв. АН СССР, Механика твердого тела, № 2, 1972.
6. Кошляков В. Н., О некоторых частных случаях интегрирования динамических уравнений Эйлера, связанных с движением гироскопа в сопротивляющейся среде, Прикл. мат. и мех., т. XVII, в. 2, 1953.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теоретическая физика, т. I, М., Изд-во «Наука», 1965.
8. Митропольский Ю. А., Метод усреднения в нелинейной механике, Киев, Изд-во «Наукова думка», 1971.
9. Черноусько Ф. Л., О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов, Прикл. мат. и мех., т. XXVII, в. 3, 1963.
10. Черноусько Ф. Л., Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса, Журнал вычислительной математики и мат. физики, т. 5, № 6, 1965.

Одесский государственный университет

Поступила
14.XII 1973 г.