ПОРІВНЯННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ РОЗРАХУНКУ ЦИЛІНДРИЧНИХ РЕЗЕРВУАРІВ РІЗНОЇ ВИСОТИ.

Будзул А.Я., магістр(Одеська державна академія будівництва та архітектури, м. Одеса)

В статті зроблено аналіз можливості використання спрощених формул для розрахунку переміщень та зусиль в стінках циліндричного резервуару, завантаженого рідиною; наведені приклади порівняння результатів розрахунку циліндрів різної висоти, за допомогою повних та спрощених формул.

Якщо розглядати вісесиметрично завантажену циліндричну оболон-ку з стінкою сталої жорсткості, її стан описується диференційним рів-нянням [1], [2]:

$$\frac{d^4w}{dx^4} + 4\beta^4 w = \frac{p}{D} \text{ , де } \beta = \sqrt{\frac{1}{Rh}} \cdot \sqrt[4]{3(1-\mu^2)} \quad ,$$

R - радіус резервуара, E - модуль пружності, h - товщина стінки циліндра, D - циліндрична жорсткість, μ - коефіцієнт Пуассона, $w(x)$ - лінійне переміщення стінки циліндра, p - зовнішнє навантаження.

Для прикладу, візьмемо резервуар заповнений водою $p = \gamma(l-x)$.

Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд [1], [2]:

$$w(x) = e^{\beta x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x}(C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) - \gamma(l-x)R^2 / Eh \qquad (1),$$

де $\gamma(l-x)R^2/Eh$ - частковий роз'язок диференційного рівняння, а C_1, C_2, C_3, C_4 - постійні інтегрування, які можна визначити в кожному окремому випадку з умов на кінцях циліндра.

Тоді повні рівняння для визначення переміщень та зусиль:

$$\varphi(x) = e^{\beta x}[C_1(\cos \beta x - \sin \beta x) + C_2(\cos \beta x + \sin \beta x)] -$$
$$- e^{-\beta x}[C_3(\cos \beta x + \sin \beta x) + C_4(\sin \beta x - \cos \beta x)] + \gamma R^2 / Eh; \; N(x) = Ehw / R .$$
$$M(x) = -2D\beta^2[e^{\beta x}(C_2 \cos \beta x - C_1 \sin \beta \cdot x) + e^{-\beta x}(C_3 \sin \beta x + C_4 \cos \beta x)];$$
$$Q(x) = -2D\beta^3\{e^{\beta x}[(C_2 - C_1)\cos \beta x - (C_2 + C_1)\sin \beta x] + \qquad (2),$$
$$+ e^{-\beta x}[(C_3 + C_4)\cos \beta x + (C_4 - C_3)\sin \beta x]\}$$

де $\varphi(x)$ - кут повороту стінки циліндра, $M(x)$ - згинальний момент, $Q(x)$ - поперечна сила, γ - питома вага рідини, l - довжина циліндра.

Але, якщо вважати циліндр "довгим", то $C_1 = C_2 = 0$ [1]. Формули (2) спрощуються. Використанняя спрощених формул справедливе, коли довжина півхвилі ($\lambda = \pi / \beta$) періодичних функцій (див.[3], [4]), що входять до складу рівнянь $w(x)$, $\varphi(x)$, $M(x)$ та $Q(x)$ істотно менша довжини циліндра. Тоді ці формули використовуються для кожного краю циліндра, не враховуючи вплив крайових ефектів один на одного. Зрозуміло, що для „коротких" циліндрів різниця в результатах, отриманих в першому і другому випадку є недопустимою.

Щоб наявно побачити та оцінити цю залежність використаємо один з найпростіших випадків крайових умов для циліндра з стінкою сталої жорсткості, а саме: нижня частина циліндра жорстко закріплена а верхня вільна. Тоді крайові умови мають такий вигляд:

<u>I випадок (повні рівняння):</u>

При $x = 0$: $w(0) = C_1 + C_3 - \gamma l R^2 / Eh = 0$, $\varphi(0) = C_1 + C_2 - C_3 + C_4 + \gamma R^2 / Eh = 0.$

При $x = l$: $M(l) = -2D\beta^2[e^{\beta l}(C_2 \cos\beta l - C_1 \sin\beta l) + e^{-\beta l}(C_3 \sin\beta l + C_4 \cos\beta l)] = 0$

$$Q(l) = -2D\beta^3\{e^{\beta l}[(C_2 - C_1)\cos\beta l - (C_2 + C_1)\sin\beta l] +$$

$$+ e^{-\beta x}[(C_3 + C_4)\cos\beta x + (C_4 - C_3)\sin\beta x]\} = 0.$$

Розв'язавши систему, складену з вище наведених рівнянь отримаємо невідомі C_1, C_2, C_3, C_4 і використаємо їх в подальшому обчисленні.

<u>II випадок (спрощені рівняння):</u>

При $x = 0$: $w(0) = C_3 - \gamma l R^2 / Eh = 0 \Rightarrow \quad C_3 = \gamma l R^2 / Eh;$

$$\varphi(0) = \beta(C_4 - C_3) + \gamma R^2 / Eh = 0 \Rightarrow \quad C_4 = \gamma R^2 (l - 1/\beta)/Eh \qquad (3).$$

Очевидно, що в цьому випадку знаходження C_i, та подальше обчислення є менш громіздким.

Для прикладу візьмемо залізобетонний циліндричний резервуар з параметрами: $R = 2$ м., $h = 0.12$ м., $\mu = 0.2$, а висоту резервуара будемо змінювати. Тоді $\beta = 2.66$, $\lambda = \pi / \beta = 3.14/2.66 = 1.18$ м.

Далі на рис. 1. наведені результати для трьох резервуарів з різними висотами: 1.5, 1.0 та 0.5 метра. Результати, отримані за допомогою повних формул, знаходяться у чисельнику; епюри зображені суцільною лінією. Відповідно результати, отримані за допомогою спрощених формул, знаходяться у знаменнику; епюри зображені штриховою лінією.

Аналізуючи отримані результати відмітимо, що:

при довжині 1.5 метра, поведінка відповідних епюр залишається досить схожою, в той час різниця в прогинах вже є помітною;

при довжині 1 метр результати, отримані за допомогою спрощених формул вже є не прийнятними, оскільки значення зусиль біля вільного краю, відмінні від нуля; звичайно, порівняно з максимальним значенням відповідних зусиль це відхилення незначне, але вже помітне. Різниця в прогинах біля вільного краю вже становить 61%;

при довжині 0.5 метра, відхилення від нуля значень зусиль біля верхнього краю, що мало місце в попередньому випадку, стає ще більш помітним, його вже можна порівняти з максимальним зусиллям; до того ж епюра переміщень взагалі змінює знак.

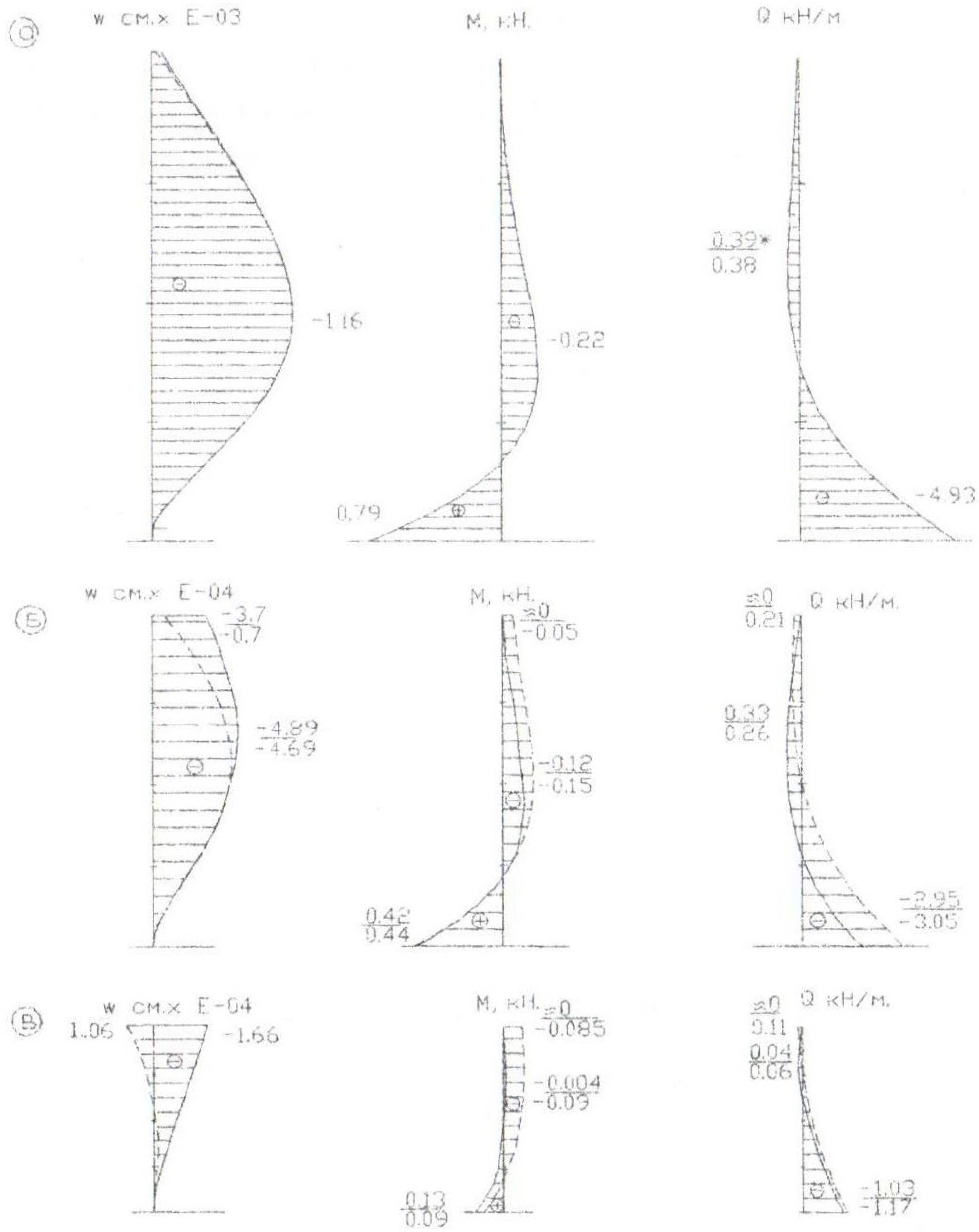

Рис.1. Епюри переміщень та зусиль для циліндрів різної довжини: а) 1.5м., б) 1м., в) 0.5м.

Отже, використання спрощених формул можливе при деякій різниці між довжиною циліндра l та λ, а саме: для практичних розрахунків можна прийняти таке відношення l/λ , яке дозволить використання спрощених формул. Оскільки $\lambda = \pi / \beta$, то попереднє відношення прий-має вигляд $l\beta/\pi$. Для резервуара розглянутого зище, при висоті 1.5 метри похибка у результатах досягає 3%, але висота 2 метри вже є прийнятною. Тому $l\beta/\pi = 2\cdot 2.66/\pi$, або $l\beta = 5.32$. Дійсно, перевірив-ши результати розрахунку резервуарів з іншими розмірами, помітно, що для використання спрощених формул необхідною є умова $l\beta > 5.5$.

Далі розглянемо як приклад циліндр з стінкою змінної жорсткості, використовуючи у розв'язанні цієї задачі спрощені формули, вважаючи кожну частину сталої жорсткості довгим циліндром. Маємо два незалежних рішення, що накладаються одне на одне.

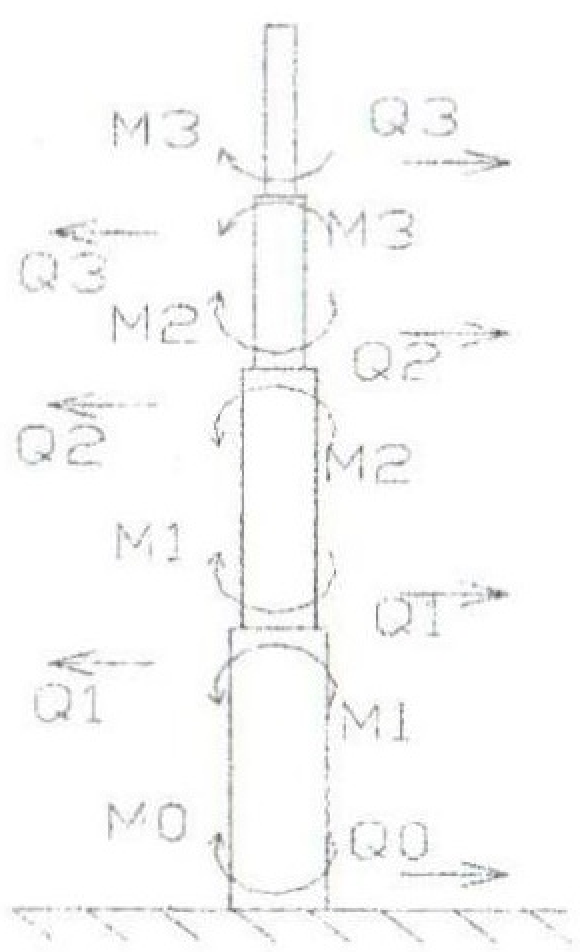

Рис.2.

Маючи розі'явок для зусиль та переміщень, задаємо крайові умови (рис.2): при x = 0, $w = 0, \dfrac{\partial w}{\partial x} = 0$, та в усіх інших перерізах $M = -D\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = M_i$ та $Q = -D\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} = Q_i$, де M_i та Q_i - відповідно згинальний момент та поперечна сила на краю циліндра, яку попередньо знайдемо методом сил. Далі, якщо виразити невідомі C_3 та C_4 через знайдені M_i та Q_i рівняння для визначення зусиль та переміщень матимуть вигляд:

$$N_2 = 2r\beta[Q_i e^{-\beta x}\cos\beta x - M_i\beta e^{-\beta x}(\cos\beta x - \sin\beta x)]$$

$$Q = \pm[Q_i e^{-\beta x}(\cos\beta x - \sin\beta x) + 2M_i\beta e^{-\beta x}\sin\beta x] \qquad (4).$$

$$M = M_i e^{-\beta x}(\cos\beta x + \sin\beta x) - (Q_i e^{-\beta x}\sin\beta x)/\beta$$

$$w(x) = 2r^2\beta[Q_i e^{-\beta x}\cos\beta x - M_i\beta e^{-\beta x}(\cos\beta x - \sin\beta x)]/Eh\,,\ N(x) = Ehw/R$$

Як приклад візьмемо циліндр радіусом 2 м., що складається з чотирьох частин, кожна з яких має довжину $l_1 = 3$ м., $l_2 = 1.5$ м., $l_3 = 1.5$ м., $l_4 = 1.0$ м., та товщину $h_1 = 0.12$ м., $h_2 = 0.10$ м., $h_3 = 0.08$ м., $h_4 = 0.06$ м.

Зупинимося на розв'язку для однієї нижньої частини.

Знаходимо невідомі зусилля . Рівняння для знаходження невідомих зусиль мають вигляд:

$$(\Delta^1{}_{11} + \Delta^2{}_{11})\cdot M_1 + (\Delta^1{}_{12} - \Delta^2{}_{12})\cdot Q_1 + \delta^1{}_{1p} + \delta^2{}_{1p} = 0 \qquad (5),$$

$$(\Delta^1{}_{21} + \Delta^2{}_{21})\cdot M_1 + (\Delta^1{}_{22} + \Delta^2{}_{22})\cdot Q_1 - \delta^1{}_{2p} + \delta^2{}_{2p} = 0$$

де $\Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{21}, \Delta_{22}, \delta_{1p}, \delta_{2p}$ - в E раз збільшені кутові та лінійні переміщення від одиничних зусиль та від зовнішнього навантаження (див.[2]). Для першої нижньої частини: $\beta_1 = 2{,}68$, $h_1 = 0.12$ м. Для верхнього краю $\Delta_{11} = 2557.05, \Delta_{12} = \Delta_{21} = 477.65, \Delta_{22} = 178.45$, $\delta_{1p} = -333.3$, $\delta_{2p} = -1333.3$. Для другої(верхньої) частини: $\beta_2 = 2.93, h_2 = 0.10$ м.

Для нижнього краю $\Delta_{11} = 4033.59$, $\Delta_{12} = \Delta_{21} = 687.81$, $\Delta_{22} = 234.57$, $\delta_{1p} = 400$, $\delta_{2p} = -1800$. Підставивши значення переміщень в систему (5) отримаємо: $M_1 = 0.01$ кН, $Q_1 = 0.65$ кН/м.

Далі знаходимо зусилля та переміщення в інших перерізах. Для нижнього контуру, використовуємо спрощені рівняння. Для цього знаходимо C_3 , C_4, використовуючи рівняння (3). Для верхнього контуру, використо-вуємо рівняння (4). Отримані значення в певних точках сумуються . Аналогічно виконується розрахунок і інших частин циліндра.

Остаточні епюри згинальних моментів , поперечних зусиль та лінійних переміщень для розглянутого циліндра наведено нижче. Для порівняння поряд з отриманими епюрами наведено результати розрахунку резервуара з такою ж висотою та діаметром, але з стінкою сталої жорсткості - $h = 0.11$ м.

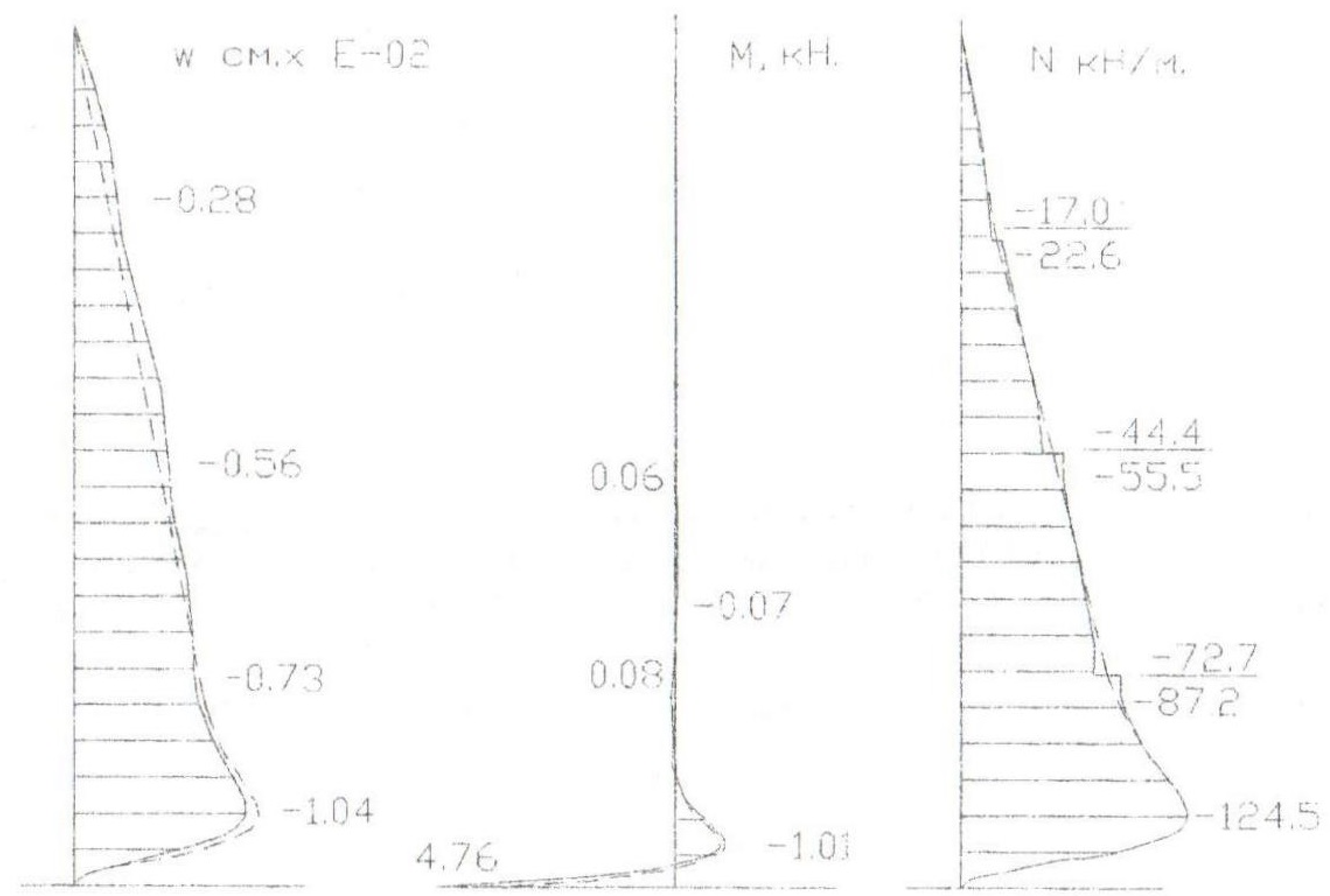

Рис.3. Епюри переміщень та зусиль для циліндра зі змінною товщиною стінки (суцільна лінія) та стінкою постійної товщини (штрихова лінія). Значення епюр зусиль та переміщень стосуються циліндра зі змінною товщиною стінки.

При розрахунку циліндра зі стінкою змінної жорсткості окремі частини якого вважаються „короткими", розрахунок ускладнюється: необхідно знаходити чотири сталі інтегрування та застосовувати повні формули для знаходження зусиль та переміщень .

Далі наведено порівняння результатів розрахунку резервуара, що складається з чотирьох частин(„коротких" циліндрів), кожна з яких має довжину $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 1$ м. та товщину $h_1 = 0.12$ м., $h_2 = 0.10$ м., $h_3 = 0.08$ м., $h_4 = 0.06$ м., отриманих за допомогою повних (1), (2) та спрощених (3) формул. При використанні спрощених формул, в місцях зміни товщини стінки з'являються розриви в епюрах моментів та поперечних сил.

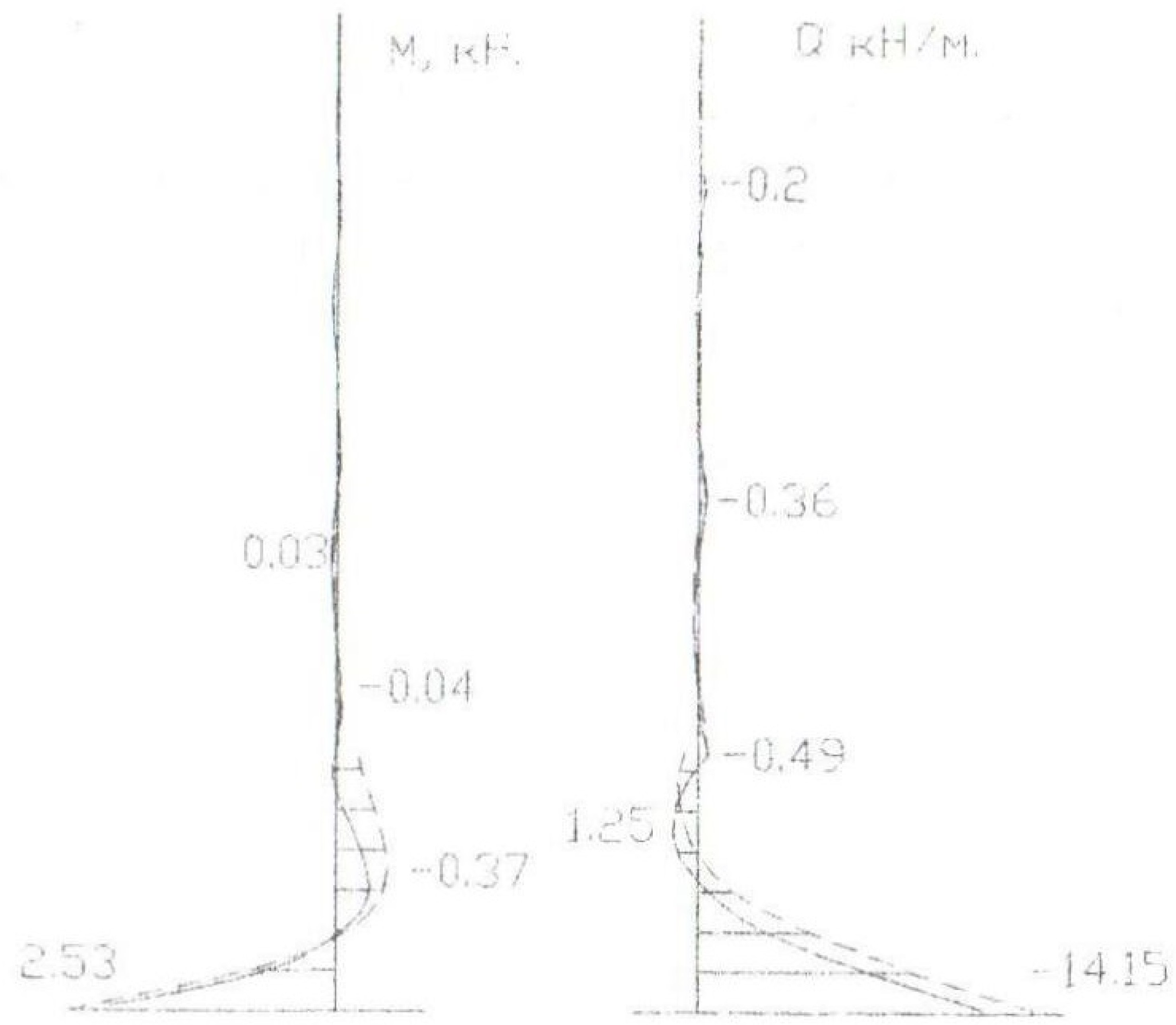

Рис.4. Епюри зусиль для циліндра зі змінною товщиною стінки: суцільна лінія – розрахунок виконано за допомогою повних формул; штрихова лінія – розрахунок виконано за допомогою спрощених формул. Чисельні результати отримані за допомогою повних формул.

1.С.П.Тимошенко, С.Войновский-Кригер. Пластинки и оболочки.- М.:Наука, 1966г.- 636 с., 2.А.М.Овечкин.Расчет железобетонних осесимметричних конструкций. – М., 1950г.-238 с., 3.Яременко А.Ф., Балдук П.Г. Механика материалов и конструкций.- Одесса: Внешрекламсервис, 2001г.- 254 с., 4.Колкунов Н.В.Основы расчета упругих оболочек.- М:Высшая школа, 1972г.-293 с.