Эволюция вращений волчка Лагранжа под действием возмущающего момента сил , медленно изменяющегося во времени

ARTICLE · JANUARY 2000

3 AUTHORS, INCLUDING:

Dmytro Leshchenko
Odessa State Academy of Civil Engineering …

Leonid D Akulenko
A. Ishlinsky Institute for Problems in Mecha…

Вісник Одеськ. держ. ун-ту. — 2000. — Т. 5, вип. 3. Фіз.-мат. науки. — С. 102–108.

УДК 531.383

Л. Д. Акуленко*, Т. А. Козаченко**, Д. Д. Лещенко***
*Институт проблем механики Российской академии наук
**Одесская государственная академия холода
***Одесская государственная академии строительства и архитектуры

ЭВОЛЮЦИЯ ВРАЩЕНИЙ ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВОЗМУЩАЮЩЕГО МОМЕНТА СИЛ, МЕДЛЕННО ИЗМЕНЯЮЩЕГОСЯ ВО ВРЕМЕНИ

Рекомендовано до друку науковим семінаром кафедр оптимального керування та економічної кібернетики ОНУ і теоретичної механіки ОДАБА 31.08.2000

Досліджуються збурені обертальні рухи твердого тіла, які близькі до регулярної прецесії в випадку Лагранжа, під дією моменту сил, який повільно змінюється з часом. Тіло припускається швидко закрученим, так що відновлюючий і збурюючий моменти являються малими з означеною ієрархією малості компонентів. Одержано усереднену систему рівнянь руху в першому наближенні. Розглянуто приклади нелінійної двочастотної системи в нерезонансному і резонансному випадках.

Исследуются возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа, под действием момента, медленно изменяющегося во времени. Тело предполагается быстро закрученным, а восстанавливающий и возмущающий моменты предполагаются малыми с определенной иерархией малости компонентов. Получена усредненная система уравнений движения в первом приближении для существенно нелинейной двухчастотной системы в нерезонансном и резонансном случаях. Рассмотрены примеры.

We investigate perturbed rotational motions of a rigid body, similar to regular precession in the Lagrange case, under the action of the moment of forces that is slowly changed in time and the restoring moment. It is assumed that: the angular velocity of the body is large; restoring and perturbing moments are small with definite hierarchy of smallness of components. The averaged system of equations of motion is obtained in the first approximation for the essentially nonlinear two-frequency system in nonresonant and resonant cases. Examples are considered.

Введение. С помощью метода усреднения рассматривается движение осесимметричного тела вокруг неподвижной точки под действием восстанавливающего момента и возмущающего момента сил, медленно изменяющегося во времени. В статьях [2,5] исследованы движения твердого тела, когда возмущающие моменты не зависят от времени, а восстанавливающий момент k = const или $k = k(\theta)$. В ряде работ, например [4,6], исследованы возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа, под действием момента, изменяющегося во времени.

1. Постановка задачи. Применение метода усреднения. Рассмотрим движение динамически симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки O под действием восстанавливающего и возмущающего моментов. Уравнения движения имеют вид [2]

$$\begin{gathered}
A\dot{p} + (C - A)\,qr = k\sin\theta\cos\varphi + M_1 \\
A\dot{q} + (A - C)\,pr = -k\sin\theta\sin\varphi + M_2 \\
C\dot{r} = M_3, M_i = M_i(p,q,r,\psi,\theta,\varphi,\tau), \tau = \varepsilon t\ (i = 1, 2, 3) \\
\dot{\psi} = (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\operatorname{cosec}\theta,\ \ \dot{\theta} = p\cos\varphi - q\sin\varphi \\
\dot{\varphi} = r - (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta,\ \ A \sim C
\end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь p, q, r – проекции вектора угловой скорости тела на главные оси инерции тела, проходящие через точку O; величины M_i (i = 1, 2, 3) – проекции вектора возмущающего момента на те же оси; они зависят от медленного времени $\tau = \varepsilon t$ ($\varepsilon \ll 1$ – малый параметр, t – время) и являются периодическими функциями углов Эйлера ψ, φ, θ с периодами 2π. A – экваториальный, C – осевой момент инерции тела относительно точки O. Предполагается, что на тело действует восстанавливающий момент, максимальная величина которого равна k и который создается постоянной по величине и направлению силой, приложенной в некоторой фиксированной точке оси динамической симметрии.

Принимаются следующие исходные предположения:

$$(p^2 + q^2)^{1/2} \ll r, Cr^2 \gg k, |M_i| \ll k\ (i = 1, 2), M_3 \sim k \tag{1.2}$$

которые означают, что направление угловой скорости тела близко к оси динамической симметрии; угловая скорость достаточно велика, так что кинетическая энергия тела много больше потенциальной энергии, обусловленной восстанавливающим моментом; две проекции вектора возмущающего момента на главные оси инерции тела малы по сравнению с восстанавливающим моментом, а третья – одного с ним порядка.

Неравенства (1.2) позволяют ввести малый параметр $\varepsilon \ll 1$ и положить

$$\begin{gathered}
p = \varepsilon P, q = \varepsilon Q, k = \varepsilon K \\
M_i = \varepsilon^2 M_i^*(P,Q,r,\psi,\theta,\varphi,\tau)\ (i = 1,2), M_3 = \varepsilon M_3^*(P,Q,r,\psi,\theta,\varphi,\tau), \tau = \varepsilon t
\end{gathered} \tag{1.3}$$

Ставится задача исследования асимптотического поведения системы (1.1) если выполнены условия (1.2), которое будет проводиться методом усреднения [2,3] на интервале времени порядка ε^{-1}. Постановка задачи близка [2]; отличие заключается в допущении зависимости от τ, что существенно обобщает результаты [2].

Процедура усреднения для системы вида (1.1) изложена в [2]. Рассмотрим систему нулевого приближения (предварительно разделив обе части первых двух уравнений (1.1) после замены переменных (1.3) на ε), и положим $\varepsilon = 0$. Тогда решение полученной системы имеет вид

$$\begin{gathered}
r = r_0, \psi = \psi_0, \theta = \theta_0, \varphi = \varphi_0 + r_0 t \\
P = a\cos\gamma_0 + b\sin\gamma_0 + KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\cos(r_0 t + \varphi_0) \\
Q = a\sin\gamma_0 - b\cos\gamma_0 + KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\cos(r_0 t + \varphi_0) \\
a = P_0 - KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\sin\varphi_0, b = -Q_0 + KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\cos\varphi_0 \\
\gamma_0 = n_0 t, n_0 = (C - A)A^{-1}r_0, r_0 \neq 0, |n_0 / r_0| \leq 1
\end{gathered} \tag{1.4}$$

Здесь $r_0, \psi_0, \theta_0, \varphi_0, P_0, Q_0$ – постоянные, равные начальным значениям переменных при $t = 0$, а переменная $\gamma = \gamma_0$ имеет смысл фазы прецессионных колебаний. Пользуясь соотношениями (1.4), перейдем в системе (1.1) от переменных $P, Q, r, \psi, \varphi, \theta, \tau$ к новым переменным $a, b, r, \psi, \theta, \alpha, \gamma, \tau$, где $\alpha = \gamma + \varphi$.

После преобразований получим систему уравнений следующего вида

$$\begin{gathered}
\dot{a} = \varepsilon A^{-1}(M_1^0\cos\gamma + M_2^0\sin\gamma) - \varepsilon KC^{-1}r^{-1}\cos\theta(b - KC^{-1}r^{-1}\sin\theta\cos\alpha) + \\
+ \varepsilon KC^{-2}r^{-2}M_3^0\sin\theta\sin\alpha \\
\dot{b} = \varepsilon A^{-1}(M_1^0\sin\gamma - M_2^0\cos\gamma) + \varepsilon KC^{-1}r^{-1}\cos\theta\,(a + KC^{-1}r^{-1}\sin\theta\sin\alpha) - \\
- \varepsilon KC^{-2}r^{-2}M_3^0\sin\theta\cos\alpha \\
\dot{r} = \varepsilon C^{-1}M_3^0, \dot{\psi} = \varepsilon\operatorname{cosec}\theta\,(a\sin\alpha - b\cos\alpha) + \varepsilon KC^{-1}r^{-1} \\
\dot{\theta} = \varepsilon\,(a\cos\alpha + b\sin\alpha), \dot{\gamma} = (C - A)A^{-1}r \\
\dot{\alpha} = CA^{-1}r - \varepsilon\operatorname{ctg}\theta\,(a\sin\alpha - b\cos\alpha) - \varepsilon KC^{-1}r^{-1}\cos\theta \\
M_i^0\,(a,b,r,\psi,\varphi,\theta,\alpha,\gamma,\tau) \equiv M_i^*(P,Q,r,\psi,\varphi,\tau), (i = 1,2,3), \tau = \varepsilon t
\end{gathered} \tag{1.5}$$

С целью приближенного исследования рассмотрим систему (1.5) с точки зрения применения метода усреднения [2,3]. Это двухчастотная существенно нелинейная система. Если предположить, что возмущающие моменты зависят от быстрой переменной t, например, периодически, то получим существенно нелинейную, трехчастотную систему и непосредственное применение метода усреднения весьма затруднено. Исследуем "более простой" случай зависимости возмушающих моментов от медленного времени $\tau = \varepsilon t, t \in \left(0, \varepsilon^{-1}\right)$.

Система (1.5) содержит медленные переменные $a, b, r, \psi, \varphi, \theta, \tau$ и быстрые переменные – фазы α, γ, причем γ входит лишь в первые три уравнения (1.5). Так как $M_i^*(i = 1, 2, 3)$ периодичны по φ с периодом 2π, то согласно (1.4) функции M_i^0 из (1.5) являются 2π – периодическими функциями α, γ. В этом случае система (1.5) содержит две вращающиеся фазы α, γ и соответствующие им частоты $\omega_\gamma = CA^{-1}r$ и $\omega_\alpha = \left(C - A\right)A^{-1}r$ переменны и зависят от медленной переменной.

При усреднении существенно нелинейной системы (1.5) следует различать два случая: нерезонансный, когда частоты ω_γ и ω_α несоизмеримы (C/A – иррациональное число) и резонансный, когда эти частоты соизмеримы ($C/A = i/j$, $i/j \le 2$, i, j – взаимно простые небольшие натуральные числа). Существенной особенностью системы (1.5), является то, что отношение частот постоянно $\omega_\gamma / \omega_\alpha = 1 - AC^{-1}$. В результате введения независимой переменной γ усреднение нелинейной системы (1.5) эквивалентно усреднению квазилинейной системы с постоянными частотами CA^{-1} и $(C-A)\,A^{-1} \sim 1$.

Данная система эквивалентна двухчастотной системе с постоянными частотами, поскольку обе частоты пропорциональны осевой составляющей r вектора угловой скорости.

В нерезонансном случае $(C/A \ne i/j)$ усредненную систему первого приближения получим путем независимого усреднения правых частей системы (1.5) по обеим быстрым переменным α, γ. При этом, сделав замену $\tau = \varepsilon t, t \in \left[0, \varepsilon^{-1}\right)$ и разделив обе части уравнений на ε, имеем

$$
\begin{aligned}
& a' = A^{-1}\mu_1 - bKC^{-1}r^{-1}\cos\theta + KC^{-2}r^{-2}\sin\theta\mu_3^s \\
& b' = A^{-1}\mu_2 + aKC^{-1}r^{-1}\cos\theta - KC^{-2}r^{-2}\sin\theta\mu_3^c \\
& r' = C^{-1}\mu_3, \psi' = KC^{-1}r^{-1}, \theta' = 0 \\
& \mu_1 = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(M_1^0\cos\gamma + M_2^0\sin\gamma\right)d\alpha d\gamma \qquad (1.6) \\
& \mu_2 = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(M_1^0\sin\gamma - M_2^0\cos\gamma\right)d\alpha d\gamma \\
& \mu_3 = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}M_3^0 d\alpha d\gamma, \quad \mu_3^s = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}M_3^0\sin\alpha d\alpha d\gamma \\
& \mu_3^c = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}M_3^0\cos\alpha d\alpha d\gamma
\end{aligned}
$$

Система (1.6) содержит 5 медленных переменных.

В резонансном случае $\left(C/A = i/j,\ i/j \le 2\right)$ система (1.5) одночастотная. Условие резонансности может выполняться приближенно. Действительно, введем вместо α медленную переменную λ – разность фаз

$$
\lambda = \alpha - i\left(i - j\right)^{-1}\gamma, \left(i, j > 0, i/j \ne 1, i/j \le 2\right) \qquad (1.7)
$$

Тогда система (1.5) примет вид стандартной системы с вращающейся фазой γ и правые части этой системы будут периодичны по γ с периодом $2|i-j|\pi$. Система типа (1.5) будет содержать шесть медленных переменных.

В резонансном случае систему первого приближения построим путем усреднения правых частей системы (1.5) по указанному периоду изменения аргумента γ и, сделав замену $\tau = \varepsilon t, t \in \left[0, \varepsilon^{-1}\right)$, приводим систему к виду

$$
\begin{aligned}
& a' = A^{-1}\mu_1^* - bKC^{-1}r^{-1}\cos\theta + KC^{-2}r^{-2}\sin\theta\mu_3^{*s} \\
& b' = A^{-1}\mu_2^* + aKC^{-1}r^{-1}\cos\theta - KC^{-2}r^{-2}\sin\theta\mu_3^{*c} \\
& r' = C^{-1}\mu_3^*, \psi' = KC^{-1}r^{-1}, \theta' = 0, \lambda' = -KC^{-1}r^{-1}\cos\theta \\
& \mu_1^* = \frac{1}{2\pi|i-j|}\int_0^{2\pi|i-j|}\left(M_1^0\cos\gamma + M_2^0\sin\gamma\right)d\gamma \qquad (1.8) \\
& \mu_2^* = \frac{1}{2\pi|i-j|}\int_0^{2\pi|i-j|}\left(M_1^0\sin\gamma - M_2^0\cos\gamma\right)d\gamma, \quad \mu_3^* = \frac{1}{2\pi|i-j|}\int_0^{2\pi|i-j|}M_3^0 d\gamma \\
& \mu_3^{*s} = \frac{1}{2\pi|i-j|}\int_0^{2\pi|i-j|}M_3^0\sin\alpha d\gamma, \quad \mu_3^{*c} = \frac{1}{2\pi|i-j|}\int_0^{2\pi|i-j|}M_3^0\cos\alpha d\gamma
\end{aligned}
$$

Имеем систему для шести усредненных переменных.

Далее при помощи изложенной методики рассмотрим некоторые конкретные примеры возмущенного движения твердого тела.

2. Пример 1. Влияние внешней среды. Исследуем возмущенное движение Лагранжа с учетом моментов, действующих на твердое тело со стороны внешней среды. Примером может служить внешняя среда, медленно изменяющая свойства вязкости вследствие изменения плотности, температуры, состава среды. Возмущающие моменты $M_i(i = 1, 2, 3)$ с учетом (1.3) примут вид

$$
M_1 = -\varepsilon^2 I_1\left(\tau\right)P, M_2 = -\varepsilon^2 I_1\left(\tau\right)Q, M_3 = -\varepsilon I_3\left(\tau\right)r \qquad (2.1)
$$

Здесь $I_1(\tau), I_3(\tau)$ – положительные интегрируемые функции на промежутке [0,1).

После ряда преобразований решение усредненной системы уравнений первого приближения (1.6) для возмущающих моментов (2.1) имеет вид

$$
\begin{aligned}
& a\left(\tau\right) = \exp\left[F_1(\tau)\right]\left[P_0\cos\beta + Q_0\sin\beta - KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\sin\left(\beta + \varphi_0\right)\right] \\
& b\left(\tau\right) = \exp\left[F_1(\tau)\right]\left[P_0\sin\beta - Q_0\cos\beta + KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\cos\left(\beta + \varphi_0\right)\right] \\
& \psi\left(\tau\right) = \psi_0 + KC^{-1}r_0^{-1}\int_0^\tau \exp\left[-F_3\left(\tau^*\right)\right]d\tau^* \\
& \theta = \theta_0, r\left(\tau\right) = r_0\exp\left[F_3(\tau)\right], r_0 \ne 0 \qquad (2.2) \\
& F_1\left(\tau\right) = -A^{-1}\int_0^\tau I_1\left(\tau^*\right)d\tau^*, F_3(\tau) = -C^{-1}\int_0^\tau I_3\left(\tau^*\right)d\tau^* \\
& \beta = KC^{-1}r_0^{-1}\cos\theta_0\int_0^\tau \exp\left[-F_3\left(\tau^*\right)\right]d\tau^*
\end{aligned}
$$

Отметим некоторые качественные особенности движения в данном случае. Модуль осевой скорости вращения r уменьшается по экспоненте. Угол нутации сохраняет постоянное значение. Приращение угла прецессии $\psi-\psi_0$ медленно экспоненциально возрастает. Медленные переменные a, b являются произведением экспоненциально убывающего сомножителя, обусловленного диссипацией энергии, и осциллирующего сомножителя с возрастающей частотой.

В результате подстановки в соотношения (1.3) выражений P, Q, a, b, r из (1.4), (2.2) определим

$$
\begin{aligned}
p &= \exp\left[F_1(\tau)\right]\left[p_0\cos(\gamma-\beta)-q_0\sin(\gamma-\beta)+kC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\sin(\gamma-\beta-\varphi_0)\right]+\\
&+kC^{-1}r_0^{-1}\exp\left[-F_3(\tau)\right]\sin\theta_0\sin\varphi\\
q &= \exp\left[F_1(\tau)\right]\left[p_0\sin(\gamma-\beta)+q_0\cos(\gamma-\beta)-kC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\cos(\gamma-\beta-\varphi_0)\right]+\\
&+kC^{-1}r_0^{-1}\exp\left[-F_3(\tau)\right]\sin\theta_0\cos\varphi\\
\gamma &= A^{-1}r_0\,(C-A)\int_0^t\exp\left[F_3(\varepsilon t)\right]dt
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Согласно (2.3), слагаемые проекций p, q, обусловленные начальными значениями p_0, q_0, представляют собой произведение экспоненциально убывающего сомножителя и осциллирующего сомножителя с возрастающей частотой. В то же время проекции p, q, содержат экспоненциально возрастающие члены, пропорциональные восстанавливающему моменту k, что приводит к экспоненциальному росту величины $\left(p^2+q^2\right)^{1/2}$.

Отметим, что аналогично может быть исследован более общий, чем (2.1), случай зависимости диссипативных моментов от угловой скорости вращения, а именно $\overline{M}=-\varepsilon I\overline{\omega}$. Здесь I – тензор, определяемый матрицей

$$
\begin{Vmatrix}
I_1 & \varepsilon I_{12} & \varepsilon I_{13}\\
\varepsilon I_{21} & I_2 & \varepsilon I_{23}\\
\varepsilon I_{31} & \varepsilon I_{32} & I_3
\end{Vmatrix}
$$

в которой перекрестные члены малы по сравнению с диагональными.

Если выполнено резонансное соотношение $C/A=i/j$ ($i/j\le 2$, i,j – натуральные взаимно простые числа), то усреднение следует проводить по схеме (1.8). В данном случае все интегралы μ_i^* из (1.8) совпадают с соответствующими интегралами μ_i из (1.6). Поэтому резонанс фактически места не имеет и полученное решение пригодно для описания движения при любом отношении $C/A\neq 1$.

3. Пример 2. Гашение экваториальной составляющей вектора угловой скорости вращения. Рассмотрим задачу о приведении волчка в "спящее состояние". Малые управляющие моменты в этом случае примут вид

$$
M_1=-\varepsilon^2h(\tau)\frac{\widetilde{p}}{\left(\widetilde{p}^2+\widetilde{q}^2\right)^{1/2}},\quad M_2=-\varepsilon^2h(\tau)\frac{\widetilde{q}}{\left(\widetilde{p}^2+\widetilde{q}^2\right)^{1/2}},\quad M_3=\varepsilon u(\tau)
\tag{3.1}
$$

$$
\widetilde{p}=p-kC^{-1}r^{-1}\sin\theta\sin\varphi,\quad \widetilde{q}=q-kC^{-1}r^{-1}\sin\theta\cos\varphi
$$

Здесь $h(\tau)$, $u(\tau)$ – заданные функции на промежутке $[0,1)$; $h(\tau)>0$, $\tau\sim 1$.

Эти законы управления отвечают оптимальному по быстродействию гашению экваториальной составляющей вектора угловой скорости вращения [1].

Запишем возмущающие моменты с учетом соотношений (1.3) и (1.4) для p и q

$$
M_1=-\varepsilon^2h(\tau)\frac{a\cos\gamma+b\sin\gamma}{\left(a^2+b^2\right)^{1/2}},\quad M_2=-\varepsilon^2h(\tau)\frac{a\sin\gamma-b\cos\gamma}{\left(a^2+b^2\right)^{1/2}},\quad M_3=\varepsilon u(\tau)
\tag{3.2}
$$

Подставим (3.2) в (1.5) и усредним согласно (1.6). Получим

$$
\begin{aligned}
a' &= -A^{-1}h(\tau)\frac{a}{\left(a^2+b^2\right)^{1/2}}-bKC^{-1}r^{-1}\cos\theta_0\\
b' &= -A^{-1}h(\tau)\frac{b}{\left(a^2+b^2\right)^{1/2}}+aKC^{-1}r^{-1}\cos\theta_0\\
r' &= C^{-1}u(\tau),\ \psi'=KC^{-1}r^{-1},\ \theta=0
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Проинтегрировав третье, четвертое и пятое уравнения (3.3) имеем

$$
\theta=\theta_0,\ r(\tau)=r_0+C^{-1}\int_0^\tau u(\tau^*)\,d\tau^*,\ \psi(\tau)=\psi_0+KC^{-1}\int_0^\tau r^{-1}(\tau^*)\,d\tau^*
\tag{3.4}
$$

Решение системы первых двух уравнений (3.3) записывается следующим образом

$$
\begin{aligned}
a(\tau) &= \left[1-A^{-1}\left(a_0^2+b_0^2\right)^{-(1/2)}\int_0^\tau h(\tau^*)\,d\tau^*\right]\left[P_0\cos\chi+Q_0\sin\chi-KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\sin(\chi+\varphi_0)\right]\\
b(\tau) &= \left[1-A^{-1}\left(a_0^2+b_0^2\right)^{-(1/2)}\int_0^\tau h(\tau^*)\,d\tau^*\right]\left[P_0\sin\chi-Q_0\cos\chi+KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\cos(\chi+\varphi_0)\right]\\
\chi &= KC^{-1}\cos\theta_0\int_0^\tau r^{-1}(\tau^*)\,d\tau^*
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Решение системы первого приближения для медленных переменных в случае момента (3.1) построено. Согласно (3.5) из (3.4) следует, что угол нутации постоянен. Величина $|r(\tau)|$ возрастает, если параметр r_0 и интеграл от $u(\tau)$ имеют одинаковые знаки, и убывает в противном случае. Переменные a, b являются произведением сомножителя, принимающего положительные, отрицательные значения и нуль в зависимости от подынтегральной функции $h(\tau)$; и осциллирующего сомножителя, частота которого является меньшей $\sqrt{kC^{-1}}\cos\theta_0 t$.

В результате подстановки в соотношения (1.3) выражений P, Q, a, b, r из (1.4), (3.4), (3.5)определим

$$
\begin{aligned}
p &= \left[1-A^{-1}\left(a_0^2+b_0^2\right)^{-(1/2)}\int_0^\tau h(\tau^*)\,d\tau^*\right]\left[p_0\cos(\gamma-\chi)-q_0\sin(\gamma-\chi)+\right.\\
&\left.+kC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\sin(\gamma-\chi-\varphi_0)\right]+kC^{-1}r^{-1}(\tau)\sin\theta_0\sin\varphi\\
b(\tau) &= \left[1-A^{-1}\left(a_0^2+b_0^2\right)^{-(1/2)}\int_0^\tau h(\tau^*)\,d\tau^*\right]\left[p_0\sin(\gamma-\chi)+q_0\cos(\gamma-\chi)-\right.\\
&\left.-kC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\cos(\gamma-\chi-\varphi_0)\right]+kC^{-1}r^{-1}(\tau)\sin\theta_0\cos\varphi\\
\gamma &= A\,(C-A)\left(r_0t+C^{-1}\int_0^t\left(\int_0^u u(\tau)\,d\tau\right)dt\right)
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Составляющие p, q вектора угловой скорости согласно (3.6) содержат ограниченные осциллирующие слагаемые, а также слагаемое, обусловленное восстанавливающим моментом.

Функция $h(\tau)$ может иметь смысл ограничения на управляющее воздействие. Например, гашение экваториальной составляющей посредством ограниченного момента сил, где $M_{1,2}$ – управление для p, q, а M_3 – управление для r.

Заключение. Таким образом, в работе:

1. Разработана процедура усреднения для существенно нелинейной системы в нерезонансном и резонансном случаях.

2. Исследован новый класс движений осесимметричного тела с учетом нестационарных возмущающих моментов.

3. Решены задачи механики и управления вращениями твердого тела, имеющие самостоятельное значение для приложений.

1. **Акуленко Л. Д.** Асимптотические методы оптимального управления.– М.: Наука, 1987.– 365с.
2. **Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Черноусько Ф. Л.** Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1986. – № 5. – С. 3–10.
3. **Волосов В. М., Моргунов Б. И.** Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 507с.
4. **Кузмак Г. Е.** К вопросу о пространственном движении осесимметричного твердого тела около неподвижной точки под воздействием моментов, медленно изменяющихся во времени // ДАН СССР. – 1960. – Т. 132. – № 3. – С. 549–552.
5. **Лещенко Д. Д., Саллам С. Н.** Возмущенные вращения твердого тела относительно неподвижной точки // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1990. – № 5.– С. 16–23.
6. **Моисеев Н. Н.** Асимптотические методы нелинейной механики. – М.: Наука, 1981. – 400 с.

Вісник Одеськ. держ. ун-ту. — 2000. — Т. 5, вип. 3. Фіз.-мат. науки. — С. 109–115.

УДК 539.371

О. В. Онищук, К. И. Чумаченко
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

МЕТОД МИНИМИЗАЦИИ ЭНЕРГИИ ПОГРЕШНОСТИ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Рекомендовано до друку науковим семінаром
з математичних проблем механіки і математичної фізики ОНУ 13.10.2000

На основі зображення Трефтця побудовано вектор-функції, кожна з яких задовольняє диференціальним рівнянням просторової теорії пружності в багатозв'язній області. Наближений розв'язок задачі розшукується у вигляді лінійної комбінації цих вектор-функцій. Коефіцієнти лінійної комбінації знаходяться шляхом мінімізації енергії різниці між точним та наближеним розв'язками.

На основе представления Треффтца построены вектор-функции, каждая из которых удовлетворяет дифференциальным уравнениям пространственной теории упругости в многосвязной области. Приближенное решение задачи ищется в виде линейной комбинации этих вектор-функций. Коэффициенты линейной комбинации находятся путем минимизации энергии разности между точным и приближенным решениями.

The vector-functions satisfying the differential equations of the space elasticity in the multiconnected domain are constructed on the base of the Trefftz representation. The approximate solution of the problem is sought in the form of a linear combination of these vector-functions. The linear combination coefficients are found by the energy minimization of the difference of exact and approximate solutions.

Введение. В работе [1] изложен метод построения приближенного решения краевых задач теории упругости в виде

$$\vec{u}_c = \sum_{k=1}^{n} c_k \vec{u}_k (x_1, x_2, x_3) \qquad (0.1)$$

где $\vec{u}_k (x_1, x_2, x_3)$ – вектор-функции, удовлетворяющие уравнению Ламе [2, глава IV, формула (1.3.2)]:

$$(1-2\nu)\nabla^2 \vec{u} + \nabla\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in V \subset \mathbb{R}^3 . \qquad (0.2)$$

В [1] для случая *односвязной* области V вектор-функции $\vec{u}_k$ построены на основе представления Треффтца, в котором гармонические функции заменялись гармоническими полиномами. Чтобы построить $\vec{u}_k$ для двухсвязной области, расширим эту систему, используя гармонические функции, имеющие особенность в точке (0,0,0).

1. Некоторые соотношения для гармонических функций. Рассмотрим гармонические функции:

$$U_n^m = \rho \exp im\varphi = C_n^m + iS_n^m, \; C_n^m = \rho \cos m\varphi, \; S_n^m = \rho \sin m\varphi, \qquad (1.1)$$

$$\rho = \frac{2^n (-1)^m}{(n+1)_m} R^n P_n^m (p), \; p = \cos\theta, \; R^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 .$$

Для $n = 0,1,2,\ldots; m = -n,\ldots,n$ и $(n+1)_m = \Gamma(n+1+m)/\Gamma(n+1)$ формула (1.1) дает гармонические полиномы из [1]. Для них будем использовать также обозначение $U_n^m = U_{i,n}^m$ (i – internal, внутренний). Согласно [1] $U_{i,n}^m = 0$ при $|m| > n$.