

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/278242548>

Оптимальное по быстродействию торможение вращений твердого тела с внутренними степенями....

Article · January 1996

CITATIONS

0

READS

14

1 author:



[Dmytro Leshchenko](#)

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

214 PUBLICATIONS 221 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



Evolution of rotations of a rigid body close to the Lagrange case under the action of nonstationary torque of forces [View project](#)

ОПТИМАЛЬНОЕ
УПРАВЛЕНИЕ

УДК 534.62-50

ОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ТОРМОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ
ТВЕРДОГО ТЕЛА С ВНУТРЕННИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

© 1996 г. Д. Д. Лещенко

Одесса, Одесская государственная академия холода

Поступила в редакцию 27.04.95 г.

Исследуется задача об оптимальном по быстродействию торможении вращений свободного твердого тела, несущего элементы с распределенными и сосредоточенными параметрами. Предполагается, что тело содержит сферическую полость, заполненную жидкостью большой вязкости, и подвижную точечную массу, соединенную с телом посредством упругой связи с квадратичной диссипацией. Считается, что в недеформированном состоянии тело динамически симметрично, а масса лежит на оси симметрии.

Определен оптимальный закон управления для торможения вращений несущего твердого тела в форме синтеза. Установлено, что модуль кинетического момента в соответствии с этим законом убывает до нуля за конечное время. Численным интегрированием уравнения для угла нутации показано, что вектор кинетического момента тела в связанной с недеформированным телом системе координат стремится к оси наибольшего момента инерции.

Введение. Естественное развитие исследований задач динамики и управления движением твердых тел вокруг неподвижной точки состоит в учете того обстоятельства, что тела не являются абсолютно твердыми (жесткими), а в некотором смысле близки к указанным идеальным моделям. Необходимость анализа влияния различных неидеальностей обусловлена ростом требований к точности решения практических задач космонавтики, гироскопии и др. Влияние неидеальностей может быть выявлено на основе асимптотических методов нелинейной механики (сингулярных возмущений, усреднения и др.). Оно сводится к наличию дополнительных возмущающих моментов в уравнениях движения Эйлера некоторого фиктивного твердого тела. Анализ пассивных движений твердого тела с внутренними степенями свободы уделялось значительное внимание [1–4]. Проблеме управления вращениями “квазитвердых тел” посредством сосредоточенных моментов сил, имеющей значение для приложений, уделялось недостаточное внимание. Удалось выделить класс систем, приводящих к гладким управляющим воздействиям и дающих возможность применения методов сингулярных возмущений без накопления погрешностей типа “погранслоев” [3, 5–7].

Ниже исследуется задача оптимального по быстродействию торможения вращений динамически симметричного тела со сферической полостью, заполненной жидкостью большой вязкости (при малых числах Рейнольдса). Кроме того, тело соединено в точке на оси симметрии с массой относительно малых линейных размеров посредством упругой связи с квадратичной диссипацией.

Управление вращениями производится с помощью момента сил, ограниченного по модулю. Рассматриваемая ниже модель обобщает исследованные ранее в работах [3, 5–7].

1. Постановка задачи оптимального управления. На основе подхода [1, 3] уравнения управляемых вращений в проекциях на оси, связанной с фиксированным твердым телом, системы координат (уравнения Эйлера) могут быть представлены в виде [3, 5, 7]

$$\begin{aligned} Ap' + (C - A)qr &= M_p + FG^2qr + Spr^6\omega_{\perp} + Lpr^2, \\ Aq' + (A - C)pr &= M_q - FG^2pr + Sqr^6\omega_{\perp} + Lqr^2, \\ Cr' &= M_r - AC^{-1}Sr^5\omega_{\perp}^3 + Hr\omega_{\perp}^2. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь p, q, r – проекции вектора абсолютной угловой скорости ω на связанные оси, $J = \text{diag}(A, A, C)$ – тензор инерции невозмущенного тела, $M_{p, q, r}$ – проекции вектора управляющего момента сил M ; кинетический момент тела $G = J\omega$, его модуль $G = |\mathbf{G}| = [A^2\omega_{\perp}^2 + C^2r^2]^{1/2}$, $\omega_{\perp}^2 = p^2 + q^2$.

Предполагается, что допустимые значения M ограничены сферой [7]

$$\begin{aligned} M &= bu, \quad |u| \leq 1; \\ b &= b(t, \omega), \quad 0 < b_* \leq b \leq b^* < \infty, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где b – скалярная функция, ограниченная в рассматриваемой области изменения аргументов согласно (1.2). Эта область определяется априори или может быть оценена через начальные данные для ω , $\omega(t_0) = \omega_0$. Введенные в (1.1) обозначения

ния F, S, L, H выражаются через параметры системы следующим образом:

$$F = m\rho^2\Omega^{-2}CA^{-3}, \quad S = m\rho^3\Lambda\Omega^{-3}d|d|C^4A^{-4},$$

$$d = 1 - CA^{-1}, \quad L = \beta P v^{-1}A^{-2}C(A - C), \quad (1.3)$$

$$H = \beta P v^{-1}A^{-1}(C - A),$$

F, S характеризуют возмущающие моменты сил, обусловленные наличием упругого элемента. Здесь m – масса подвижной точки, ρ – радиус-вектор точки O_1 крепления подвижной массы, находящейся на оси симметрии. Постоянные $\Omega^2 = c/m$, $\lambda = \mu/m = \Lambda\Omega^3$ определяют частоту колебаний и скорость их затухания соответственно; c – жесткость; μ – коэффициент квадратичного трения.

Рассматривается случай, когда коэффициенты связи λ и Ω таковы, что “свободные” движения точки m , вызванные начальными отклонениями, затухают значительно быстрее, чем тело совершит оборот. Движение твердого тела близко к движению Эйлера–Пуансо, а относительные колебания точки, вынуждаемые этим движением, будут малы. Предполагается, что

$$\Omega \gg \omega. \quad (1.4)$$

Неравенство (1.4) позволяет ввести малый параметр в (1.3) и считать указанные возмущающие моменты малыми с целью применения асимптотических методов усреднения. Заметим, что величина массы m может быть значительной, сравнимой с массой тела.

Аналогично изложенному коэффициенты L, H (1.3) характеризуют момент сил, обусловленный движениями сильно вязкой жидкости в полости. Здесь β – плотность, v – кинематический коэффициент вязкости, определяемый формой полости; для сферической полости радиуса a_0 он равен $P = 8\pi a_0^7/525$, см. [1]. Основным допущением является предположение о малости числа Рейнольдса Re

$$Re = lvv^{-1} \sim l^2 T_*^{-1} v^{-1} \sim l^2 \omega v^{-1} \ll 1. \quad (1.5)$$

Здесь l – характерный линейный размер полости ($l \sim a_0$), v – характерная скорость, а T_* – некоторый временной масштаб ($T_* \sim \omega^{-1}$). Если взять за единицу длины и времени l и T_* соответственно, то, согласно (1.5), кинематическая вязкость v является большим параметром, $v \gg 1$ [1]. Заметим также, что масса жидкости может быть значительной, сравнимой с массой системы.

Итак, в квазистатическом приближении возмущающие моменты сил, обусловленные упругостью и квадратичным трением демпфера, являются однородными функциями вектора $\omega = (p, q, r)^T$ четвертой и восьмой степеней соответственно.

Момент со стороны вязкой жидкости определяется мономами третьей степени от ω . Математическая модель управляемых вращений квазитвердого тела построена в виде уравнений Эйлера (1.1). Ставится задача оптимального по быстродействию торможения вращений

$$\omega(T) = 0, \quad T \rightarrow \min_u, \quad |u| \leq 1. \quad (1.6)$$

Требуется найти оптимальный закон управления в виде синтеза $u = u(t, \omega)$, соответствующую ему траекторию $\omega(t, t_0, \omega^0)$ и время быстродействия $T = T(t_0, \omega^0)$, а также функцию Беллмана задачи $V = V(t, \omega) - t$.

2. Решение задачи оптимального торможения.

Отметим, что моменты сил, обусловленные движениями подвижной массы, соединенной с телом упругой связью при наличии квадратичного трения и вязкой жидкости в полости, являются внутренними для фиктивного тела. Это означает, что модуль $G = |G|$ вектора кинетического момента $G = J\omega$ постоянен во времени: $G(t) = G^0 = \text{const}$ при $M \equiv 0$, где G^0 значение G в начальный момент времени $t = t_0$. Доказательство следует непосредственно; оно проводится на основе неуправляемой системы (1.1) скалярным умножением векторного уравнения на $G = (Ap, Aq, Cr)^T$, см. [7, 8]. Таким образом, к рассматриваемой системе применима методика управления системами с инвариантной нормой посредством ограниченного по модулю управляющего воздействия [7]. Решение задачи синтеза закона оптимального по быстродействию торможения вращений может быть построено на основе функционального неравенства Шварца [7, 8] для $G(t)$

$$-bG^{-1}(M, G) \leq G \leq bG^{-1}(M, G). \quad (2.1)$$

Из (2.1) следует, что синтез оптимального закона торможения имеет вид

$$M_0 = b(t, \omega)u_0, \quad u_0 = -GG^{-1}. \quad (2.2)$$

Итак, орт оптимального по быстродействию тормозящего момента сил M_0 направлен против вектора кинетического момента. Модуль кинетического момента $G(t)$ убывает до нуля за конечное время $T_0 - t_0$, которое определяется в результате интегрирования системы (1.1) при $M = M_0(t, \omega)$. Оптимальный момент времени $T_0 = T_0(t_0, \omega^0)$ может быть оценен, согласно (2.1), (2.2), (1.2), как

$$t_0 + G^0/b^* = T^* \leq T_0 \leq T_* = t_0 + G^0/b_*,$$

$$b^* = \max_{t, \omega} b(t, \omega), \quad b_* = \min_{t, \omega} b(t, \omega), \quad (2.3)$$

$$|J\omega| \leq G^0, \quad t_0 \leq t \leq T^0 < \infty.$$

Итак, оптимальное время быстродействия $T_0(t_0, \omega^0)$ определяется в результате интегрирования системы (1.1), (2.2) из следующего условия: $G(T_0, t_0, G^0) = 0$ или $\omega(T_0, t_0, \omega^0) = 0$, что то же

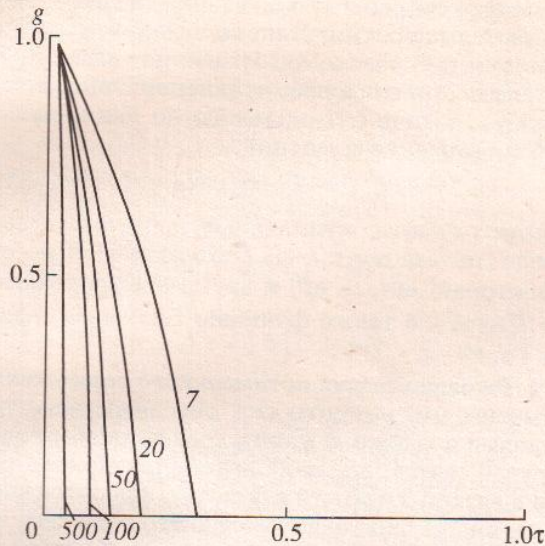


Рис. 1.

самое. Проблема определения величины T_0 упрощается и сводится к интегрированию одного уравнения для G , если $b = b(t, G)$; тогда для нахождения T_0 имеем

$$G' = -b(t, G), \quad G(t_0) = G^0, \quad G(T_0, t_0, G^0) = 0. \quad (2.4)$$

В частности, если функция $b = b(G)$ не зависит от t явно, то

$$T_0(t_0, G^0) = t_0 + \int_0^{G^0} \frac{dG}{b(G)}. \quad (2.5)$$

В другом частном случае $b = b(t)$ время быстрого действия T_0 есть единственный корень уравнения

$$G^0 = \int_{t_0}^{T_0} b(t) dt, \quad T_0 = T_0(t_0, G^0). \quad (2.6)$$

Пусть $b = b^0 + ct$, $b^0 > 0$ и $c > 0$. Тогда уравнение для G принимает вид

$$G' = -b^0 - ct, \quad (2.7)$$

откуда

$$g = 1 - \tau - \alpha\tau^2. \quad (2.8)$$

Здесь $g = G/G^0$, $\tau = t/T_0 \in [0, \tau_*]$, $T_0 = G^0/b^0$, $\alpha = cG^0/2b^{02}$, $\tau_* = [-1 + (1 + 4\alpha)^{1/2}]/2\alpha$.

Для произвольных различных значений α , указанных на рис. 1, расчетные графические зависимости $g = g(\tau)$ определены с помощью ЭЦВМ. Основной вывод, следующий из графиков рис. 1, состоит в том, что g достигает нулевых значений за конечное время $\tau \in [0, \tau_*]$ и тем быстрее, чем больше значение α .

Наконец, при $b = \text{const}$ имеем $T_0 = t_0 + G^0/b$. При помощи достаточных условий оптимальности метода динамического программирования [9] можно также установить, что функция $M_0(t, \omega)$ (2.2) – оптимальный синтез в задаче быстрого действия (1.1), (1.6), а соответствующая траектория $\omega = \omega_0(t, t_0, \omega^0)$ будет оптимальной. Время T_0 является минимальным, а функция $V(t, \omega) = T_0(t, \omega) - t$ есть функция Беллмана задачи оптимального быстрого действия. Для ее определения необходимо интегрировать систему уравнений (1.1), (2.2) в текущий момент времени t при заданном (измеренном) значении вектора ω для момента времени T_0 , для которого $\omega_0(T_0, t, \omega) = 0$. В частных случаях (2.4)–(2.6) функция Беллмана находится достаточно просто. Далее для определенности будем рассматривать указанные более простые выражения функции $b = b(t, G)$ и считать, что величина $T_0(t_0, G^0)$ и зависимость $G = G_0(t, t_0, G^0)$ известны.

3. Анализ осевого вращения для управляемого движения тела. Подстановка известного выражения для G в третье уравнение (1.1) приводит к нелинейному уравнению относительно r

$$r' = -r \{ bG^{-1} + A^{-2}C^{-1}(G^2 - C^2r^2) \times \\ \times [C^{-1}Sr^4(G^2 - C^2r^2)^{1/2} - H] \}. \quad (3.1)$$

Заменой осевой составляющей вектора угловой скорости $r = Gr$, где R – неизвестная функция, уравнение (3.1) приводится к более удобному виду ($z = R^2$)

$$z' = -2A^{-2}C^{-1}G^2z(1 - C^2z) \times \\ \times [C^{-1}SG^5z^2(1 - C^2z)^{1/2} - H]. \quad (3.2)$$

Вектор кинетического момента G при проектировании на главные центральные оси инерции тела приводит к выражению $Cr = G \cos \theta$, где θ – угол нутации. В результате для неизвестной R получается соотношение $CR = \cos \theta$. Уравнение (3.2) после перехода к неизвестной θ может быть записано в виде, удобном для дальнейшего изучения

$$\theta' = (A - C) G^2 \cos \theta \sin \theta (\alpha G^5 |\sin \theta| \cos^4 \theta + \eta), \\ \alpha = m\rho^3 \Lambda \Omega^{-3} C^{-2} A^{-7} |d|, \quad d = 1 - CA^{-1}, \quad (3.3)$$

$$\eta = \beta P v^{-1} A^{-3} C^{-1}, \quad \theta(t_0) = \theta^0, \quad 0 \leq \theta, \quad \theta^0 < \pi.$$

Здесь α, η – положительные постоянные, а переменная $G = G(t, t_0, G^0)$ считается известной в соответствии с принятым выше в конце разд. 2 предположением ($G' = -b$). Переменная θ и уравнение (3.3) обладают привлекательной геометрической наглядностью. Без нарушения общности можно принять, что θ^0 (и θ) принадлежит первой четверти ($0 \leq \theta^0, \theta \leq \pi/2$). Если θ^0 принимает значения из

указанного промежутка, то угол нутации в процессе эволюции вращений также не выйдет за его пределы, поскольку $\theta^* = 0, \pi/2$ есть стационарные точки уравнения (3.3) независимо от изменения G .

Исследуем поведение угла нутации в малой окрестности стационарных точек: $\theta = \delta\theta > 0$ и $\theta = \pi/2 + \delta\theta, \delta\theta < 0$. В первом случае ($\theta^* = 0$) имеем

$$\delta\theta' = (A - C) G^2 \eta \delta\theta, \quad \delta\theta(t_0) = \delta\theta^0 > 0;$$

$$\delta\theta(t) = \delta\theta^0 \exp \left[(A - C) \eta \int_{t_0}^t G^2(\tau) d\tau \right]. \quad (3.4)$$

Из (3.4) следует, что с ростом t при $C > A$ (сплюснутое тело) вариация $\delta\theta$ монотонно убывает, а при $C < A$ (вытянутое тело) – монотонно возрастает. Если торможение достаточно медленное (коэффициент b мал), то $\delta\theta$ достаточно близко подходит к значению $\delta\theta = 0$ или экспоненциально возрастает соответственно при $C \cong A$. Таким образом, движение тела стремится к вращению вокруг оси с максимальным моментом инерции. Чтобы это установить, рассмотрим второй случай ($\theta^* = \pi/2$); для $\delta\theta < 0$ аналогично (3.4) имеем

$$\delta\theta' = (C - A) \eta G^2 \delta\theta, \quad \delta\theta(t_0) = \delta\theta^0 < 0;$$

$$\delta\theta(t) = \delta\theta^0 \exp \left[(C - A) \eta \int_{t_0}^t G^2(\tau) d\tau \right]. \quad (3.5)$$

Из (3.5) следует, что при $A > C$ величина $\delta\theta$ монотонно возрастает, а при $A < C$ – монотонно убывает. Если убывание $G(t)$ достаточно медленное, то при $A > C$ величина $\delta\theta(t) \rightarrow -0$, т.е. $\theta \rightarrow \pi/2 - 0$, а при $A < C$ величина $\delta\theta(t) \rightarrow -\infty$. Характер поведения θ для всех $0 \leq \theta \leq \pi/2$ непосредственно следует из уравнения (3.3), поскольку знак правой части определяется константой $(A - C)$. Количественные характеристики поведения угла нутации $\theta(t, t_0, \theta^0, [G])$ получаются в результате численного интегрирования уравнений (3.3) и (2.4) (или (2.5), (2.6)).

Отметим, что случай $\eta = 0$ в (3.3), рассмотренный ранее [5, 7], означает отсутствие полости (или жидкость “заморожена”). При этом уравнение (3.3) допускает разделение переменных θ, t и аналитическое интегрирование в квадратурах. Другой случай $\alpha = 0$ в (3.3) означает, что подвижная масса, соединенная с телом упругой связью с квадратичным трением, отсутствует или является абсолютно твердой. Наличие только полости с сильно вязкой жидкостью также допускает разделение переменных и интегрирование в квадратурах; эта задача также изучена [5, 7]. Если параметр η или α относительно мал или оба малы, то к уравнению (3.3) можно применить методы регулярных возмущений на рассматриваемом проме-

жутке времени $t \in [t_0, T_0]$. Однако только случай малых обоих коэффициента η и α приводит к рациональным обозримым конструкциям приближенного решения. Они могут быть реализованы в виде разложений по степеням η, α или последовательными приближениями по схеме Пикара, см. разд. 5.

Если в (3.3) формально положить $G = G^0 = \text{const}$, то это уравнение совпадает с полученным для неуправляемого движения ($b = 0$). Тогда правая часть есть тригонометрическая функция θ , а уравнение допускает разделение переменных и численное интегрирование. Результаты численного интегрирования [4] отвечают изложенному выше качественному выводу о финальном значении $\theta(t, \theta^0, G^0)$ при $t \rightarrow \infty$.

4. Анализ вращений тела в экваториальной плоскости. Рассмотрим теперь изменение переменных p, q согласно первым двум уравнениям (1.1) с учетом (2.2) и известных выражений $G(t), r(t) = C^{-1}G(t)\cos\theta(t)$; коэффициент b будет также известной функцией $t: b = b(t, G(t))$. Зависимость от параметров системы и начальных данных не указывается ради сокращения записи. Введем переменную $N = A(p^2 + q^2)^{1/2}$, характеризующую эти вращения. Умножая первое уравнение (1.1) на $A\rho N^{-1}$, а второе на AqN^{-1} и складывая, получим для N уравнение

$$N' = -d(t)N + f(t)N^2,$$

$$d(t) \equiv b(t)/G(t) - A^{-1}Lr^2(t), \quad (4.1)$$

$$f(t) \equiv A^{-2}Sr^6(t).$$

Это уравнение Бернулли (см. [10], с. 297). Интегрируя (4.1), находим

$$N^{-1} = -E(t)A^{-2}S \int r^6(t)E^{-1}(t)dt,$$

$$E(t) = \exp \left[\int d(t)dt \right]. \quad (4.2)$$

Отметим, что $N^2 = G^2 - C^2r^2, r = C^{-1}G\cos\theta$ и поэтому G и N одновременно обращаются в нуль при $\tau = \tau_*$, где $\tau_* = [-1 + (1 + 4\alpha)^{1/2}]/2\alpha$ – время окончания процесса, $\alpha = cG^0/2b^{02}$ (см. (2.8)).

Используя известные выражения $G(t)$ и $r(t)$, приведем уравнения для p, q (1.1) к виду уравнений с переменными коэффициентами и определенной симметрией. Эти уравнения содержат только “гироскопические” и “диссипативные” члены с коэффициентами $g(t), d(t)$ и $f(t)$ соответственно

$$N' = -[d(t) - f(t)N]N + g(t)JN,$$

$$N = (Ap, Aq)^T, \quad g(t) \equiv A^{-1}r(t)[A - C + FG^2(t)]. \quad (4.3)$$

Здесь J – симплектическая единица, а “коэффициенты диссипации” $d(t)$ и $f(t)$ определены выше в

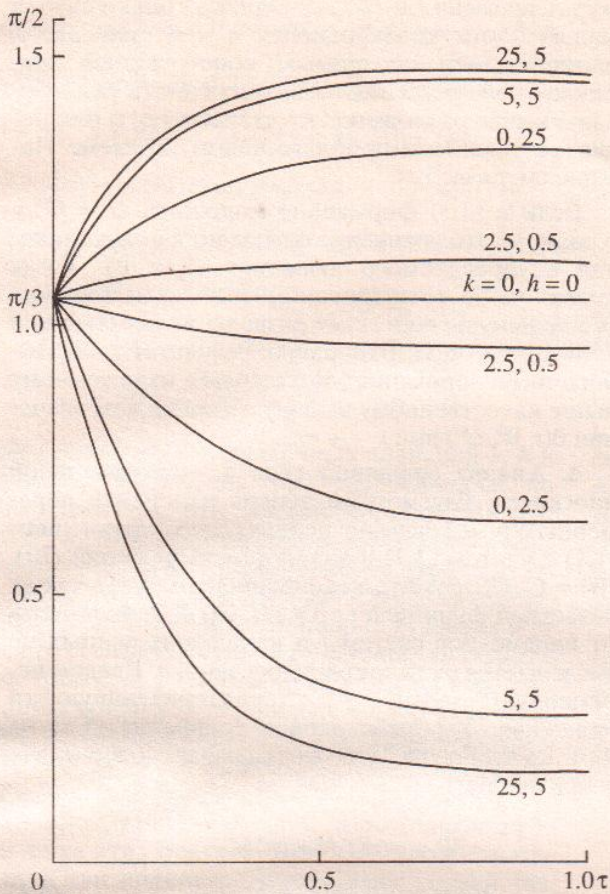


Рис. 2.

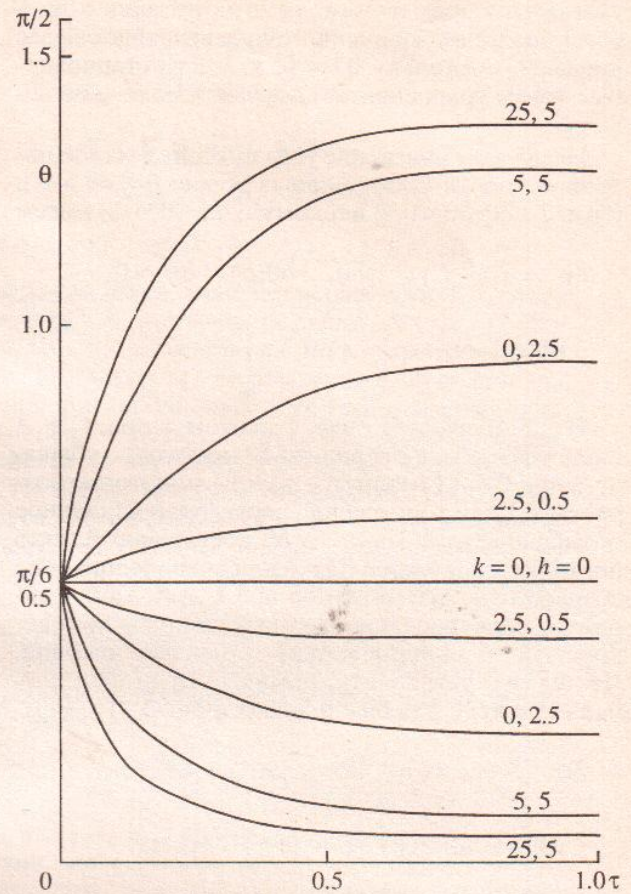


Рис. 3.

(4.1). Коэффициенты d, f и g известным образом зависят от времени t .

Уравнение (4.3) для N интегрируется в явном виде [7]. Действительно, полагая $N = Nn$, где $n = n(t)$ – орт вектора N , получим для неизвестной n уравнение $n' = gJn$. Начальное значение $n(t_0) = n^0$, $|n^0| = 1$ определяется условием $N^0 = N^0 n^0$. Отметим, что $|n(t)| \equiv |n(t_0)| = |n^0| = 1$ для всех $t \in [t_0, T_0]$. Введем аргумент δ так, чтобы $n' = Jn$; имеем

$$n(t) = \Pi(\delta)n^0,$$

$$\delta = \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau, \quad \Pi(\delta) = \begin{pmatrix} \cos \delta & \sin \delta \\ -\sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

где $\Pi(\delta)$ – матрица поворота (начального вектора n^0) на угол δ . Таким образом, прецессионные вращения квазитвердого тела (относительно оси в экваториальной плоскости) полностью определены согласно (4.2), (4.3). Существенное значение при этом, как отмечалось, имеет знание переменных $G(t)$ и $r(t)$, которые определялись в разд. 2, 3.

5. Численный анализ и выводы. Обратимся вновь к проблеме определения угла нутации $\theta(t)$ в частном случае $b = \text{const}$. На основе разд. 2, 3 получим для θ и G представления

$$\begin{aligned} \theta' &= \gamma(1 - \tau)^2 \sin \theta \cos \theta [k(1 - \tau)^5 |\sin \theta| \cos^4 \theta + h], \\ G(\tau) &= G^0(1 - \tau), \quad \tau = t/T_0 \in [0, 1], \quad T_0 = G^0/b, \\ k &= G^{08}|A - C|\alpha/b, \quad h = G^{03}|A - C|\eta/b, \quad (5.1) \\ 0 &\leq k, \quad h < \infty, \quad \gamma = \text{sign}(A - C) = \pm 1. \end{aligned}$$

Здесь штрих означает производную по аргументу τ . Заметим, что в автономном случае $b = b(G)$ (в частности, $b = \text{const}$) без ограничения общности можно положить $t_0 = 0$. При малых k и h , а также $|\delta\theta^0|$ в окрестности стационарных точек могут быть применены методы возмущений, которые в данном случае приводят к элементарным выражениям: полиномам по τ и экспонентам от полиномов и квадратурам от их произведений. Например, после первой итерации в первом при-

ближении по k, h и $\delta\theta^0$ имеем выражения для $\theta(\tau)$

$$\theta(\tau) = \theta^0 + \gamma \sin \theta^0 \cos \theta^0 \left[(k/8) |\sin \theta^0| \cos^4 \theta^0 (1 - (1 - \tau)^8) + (h/3) (1 - (1 - \tau)^3) \right] + O(k^2 + h^2);$$

$$\theta(\tau) = \delta\theta(\tau) = \delta\theta^0 \exp [\gamma(h/3)(1 - (1 - \tau)^3)] + O(\delta\theta^0{}^2), \quad \theta^* = 0, \quad \delta\theta^0 > 0; \quad (5.2)$$

$$\theta(\tau) = \pi/2 + \delta\theta(\tau) = \pi/2 + \delta\theta^0 \exp [-\gamma(h/3)(1 - (1 - \tau)^3)] + O(|\delta\theta^0|^2), \quad \theta^* = \pi/2, \quad \delta\theta^0 < 0.$$

Для произвольных различных значений k, h и θ^0 решение уравнения (5.1) проводилось на ЭЦВМ. Заметим, что семейства графиков $\theta = \theta(\tau, \theta^0, k, h)$ являются трехпараметрическими; кроме того, два значения принимает параметр $\gamma = \pm 1$. На рис. 2, 3 приведены расчетные графические зависимости θ^\pm при начальных условиях $\theta^0 = \pi/3, \pi/6$ соответственно и различных значениях параметров k, h , которые приведены на соответствующих кривых. Значениям $k = h = 0$ отвечают горизонтальные прямые $\theta(\tau) = \theta^0$. Если параметр $\gamma = +1$, то при $k, h > 0$ кривые $\theta^+(\tau)$ идут монотонно вверх к $\theta^* = \pi/2$ выше этих прямых; если $\gamma = -1$, то, наоборот, кривые θ^- идут монотонно вниз к $\theta^* = 0$ ниже этих прямых. При $h = 0$ (полость отсутствует или жидкость "заморожена") семейства кривых по k совпадают с построенными ранее [5, 7]; аналогично при $k = 0$ (подвижная масса, соединенная с телом упругой связью с квадратичной диссипацией, отсутствует или является "абсолютно жесткой") семейства по h отвечают изученным в [5, 7]. Основной качественный вывод, следующий из графиков рис. 2, 3 и других многочисленных расчетов, состоит в следующем. Оба фактора (упругий элемент с квадратичным трением и вязкая жидкость) способствуют стремлению $\theta(\tau) \rightarrow \theta^* = 0, \pi/2$ при $\gamma = \mp 1$. Для фиксированных значений k возрастание h приводит к более крутому стремлению $\theta(\tau)$ к 0 или $\pi/2$; аналогичная ситуация имеет место при фиксированных значениях h и возрастании k . Итак, для семейств графиков имеют место следующие свойства монотонности:

$$\theta^+(\tau_1, \theta^0, k, h) \leq \theta^+(\tau_2, \theta^0, k, h),$$

$$\tau_2 > \tau_1, \quad \tau_{1,2} \in [0, 1];$$

$$\theta^+(\tau, \theta_1^0, k, h) \leq \theta^+(\tau, \theta_2^0, k, h),$$

$$\theta_2^0 > \theta_1^0, \quad \theta_{1,2}^0 \in [0, \pi/2];$$

$$\theta^\pm(\tau, \theta^0, k_1, h) \leq \theta^\pm(\tau, \theta^0, k_2, h), \quad (5.3)$$

$$k_2 > k_1, \quad k_{1,2} \in [0, \infty);$$

$$\theta^\pm(\tau, \theta^0, k, h_1) \leq \theta^\pm(\tau, \theta^0, k, h_2),$$

$$h_2 > h_1, \quad h_{1,2} \in [0, \infty);$$

$$\tau \in (0, 1), \quad \theta^0 \in (0, \pi/2), \quad k, h \in (0, \infty).$$

Верхние знаки (меньше) неравенств (5.3) отвечают $\theta^+(\gamma = +1)$, нижние (больше) — $\theta^-(\gamma = -1)$. Неравенства (5.3) отвечают $\theta^+(\gamma = +1)$, нижние (больше) — $\theta^-(\gamma = -1)$. Неравенства (5.3) означают, что при фиксированных двух параметрах из трех и изменении третьего эти однопараметрические семейства не пересекаются (кроме точки $\theta^0, \tau = 0$). На основе имеющихся зависимостей $G(\tau)$ находится осевая составляющая r вектора угловой скорости ω : $r(\tau) = C^{-1}G \cos \theta$. Это позволяет по формулам (4.2), (4.4) определить другие составляющие: $(p, q)^T = A^{-1}Np$.

Изложенная выше методика синтеза и анализа гибридных систем может быть обобщена с учетом возмущающих факторов различной физической природы [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноушко Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1965. Т. 5. № 6.
2. Черноушко Ф.Л. О движении твердого тела с подвижными внутренними массами // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 4.
3. Акуленко Л.Д., Леценко Д.Д. Некоторые задачи движения твердого тела с подвижной массой // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 5.
4. Леценко Д.Д., Саллам С.Н. Некоторые задачи движения твердого тела с внутренними степенями свободы // Прикл. механика. 1992. Т. 28. № 8.
5. Акуленко Л.Д., Леценко Д.Д. Некоторые задачи стабилизации тел с внутренними степенями свободы // Механика гироскопических систем. Республ. межведомств. науч.-техн. сб. 1983. Вып. 2.
6. Акуленко Л.Д., Леценко Д.Д. Оптимальное торможение вращений твердого тела с внутренними степенями свободы // Теория и системы управления. 1995. №2.
7. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987.
8. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968.
9. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969.
10. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.