

УДК 62-50

ОПТИМАЛЬНОЕ ТОРМОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЬЮ, ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ, В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ*

© 2010 г. Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская

Россия, Москва, ИПМех РАН,

Украина, Одесса, Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Одесский национальный ун-т

Поступила в редакцию 26.06.09 г.

Исследована задача об оптимальном по быстродействию торможении вращений свободного твердого тела. Предполагается, что тело содержит сферическую полость, заполненную жидкостью большой вязкости. Кроме того, на твердое тело действует малый тормозящий момент сил вязкого трения. Считается, что тело динамически симметрично. Определены оптимальный закон управления для торможения вращений несущего твердого тела в форме синтеза, время быстродействия и фазовые траектории.

Введение. Естественное развитие исследования задач динамики и управления движением твердых тел вокруг неподвижной точки состоит в учете того обстоятельства, что тела не являются абсолютно твердыми (жесткими), а в некотором смысле близки к указанным идеальным моделям. Необходимость анализа влияния различных неидеальностей обусловлена ростом требований к точности решения практических задач космонавтики, гироскопии и др. Влияние неидеальностей может быть выявлено на основе асимптотических методов нелинейной механики (сингулярных возмущений, усреднения и др.). Оно сводится к наличию дополнительных возмущающих моментов в уравнениях движения Эйлера фиктивного твердого тела. Анализ пассивных движений твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, и в сопротивляющейся среде уделялось значительное внимание [1-5]. Проблеме управления вращениями “квазитвердых” тел посредством сосредоточенных моментов сил, имеющих значения для приложений, уделялось недостаточное внимание. Удалось выделить класс систем, приводящих к гладким управляющим воздействиям и дающих возможность применения методов сингулярных возмущений без накопления погрешностей типа “погранслоев” [6, 7].

Ниже исследуется задача оптимального по быстродействию торможения вращений динамически симметричного тела со сферической полостью, заполненной жидкостью большой вязкости (при малых числах Рейнольдса). Кроме того, на

твердое тело действует малый тормозящий момент сил вязкого трения. Управление вращениями производится с помощью момента сил, ограниченного по модулю. Рассматриваемая ниже модель обобщает исследованные ранее в работах [6–8].

1. Постановка задачи оптимального управления.

На основе подхода [1, 7] уравнения управляемых вращений в проекциях на оси, связанной с фиксированным твердым телом системы координат (уравнения Эйлера), могут быть представлены в виде [1, 3, 4, 7]

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - A)qr &= M_p + Lpr^2 - \lambda Ap, \\ A\dot{q} + (A - C)pr &= M_q + Lqr^2 - \lambda Aq, \\ C\dot{r} &= M_r + H(p^2 + q^2)r - \lambda Cr. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь p, q, r – проекции вектора абсолютной угловой скорости ω на связанные оси, $J = \text{diag}(A, A, C)$ – тензор инерции невозмущенного тела, $M_{p,q,r}$ – проекции вектора управляющего момента сил \mathbf{M} ; кинетический момент тела $\mathbf{G} = J\omega$, его модуль

$$G = |\mathbf{G}| = [A^2\omega_{\perp}^2 + C^2r^2]^{1/2}, \quad \omega_{\perp}^2 = p^2 + q^2.$$

Для упрощения задачи в систему (1.1) внесено структурное ограничение. Считается, что диагональный тензор момента сил вязкого сопротивления пропорционален тензору момента сил инерции, т.е. момент сил диссипации пропорционален кинетическому моменту.

Предполагается дополнительно, что допустимые значения момента управляющих сил \mathbf{M} ограничены сферой [7]

$$\mathbf{M} = b\mathbf{u}, \quad |\mathbf{u}| \leq 1; \quad b = b(t, \mathbf{G}), \quad 0 < b_* \leq b < b^* < \infty, \quad (1.2)$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 08-01-00180, 08-01-00234, 09-01-00582) и Программы поддержки ведущих научных школ (проект НШ.4315.2008.1).

где b – скалярная функция, ограниченная в рассматриваемой области изменения аргументов t , \mathbf{G} согласно условиям (1.2). Эта область определяется априори или может быть оценена через начальные данные для \mathbf{G} , $\mathbf{G}(t_0) = \mathbf{G}^0$.

Введенные в (1.1) обозначения L , H выражаются через параметры системы следующим образом:

$$L = \beta P v^{-1} A^{-2} C(A - C), \quad H = \beta P v^{-1} A^{-1} (C - A).$$

Коэффициенты L , H в (1.1) характеризуют момент сил, обусловленный движениями сильно вязкой жидкости в полости, β – объемная плотность, v – кинематический коэффициент вязкости, P – коэффициент, определяемый формой полости; для сферической полости радиуса a_0 он равен $P = 8\pi a_0^7 / 525$ [1]. Основное допущение – предположение о малости числа Рейнольдса Re

$$Re = l V v^{-1} \sim a_0^2 T_*^{-1} v^{-1} \sim a_0^2 \omega v^{-1} \ll 1. \quad (1.3)$$

Здесь l – характерный линейный размер полости ($l \sim a_0$), V – характерная скорость, а T_* – некоторый временной масштаб ($T_* \sim \omega^{-1}$). Если взять за единицу длины и времени l и T_* соответственно, то, согласно (1.3), кинематическая вязкость v является большим параметром, $v \gg 1$ [1]. Заметим также, что масса жидкости может быть значительной, сравнимой с массой системы.

Спротивление, действующее на тело, можно представить парой приложенных сил. При этом проекции момента этой пары на главные оси инерции тела суть величины $\lambda A p$, $\lambda A q$, $\lambda C r$ [3, 4], где λ – некоторый постоянный коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств среды.

Итак, в квазистатическом приближении момент со стороны вязкой жидкости в полости определяется мономами компонент вектора $\vec{\omega}$ третьей степени. Малый тормозящий момент сил вязкого трения является линейным относительно угловой скорости возмущением. Математическая модель управляемых вращений квазитвердого тела построена в виде уравнений Эйлера (1.1).

Ставится задача оптимального по быстродействию торможения вращений

$$\omega(T) = 0, \quad T \rightarrow \min_{\mathbf{u}}, \quad |\mathbf{u}| \leq 1. \quad (1.4)$$

Требуется найти оптимальный закон управления в виде синтеза $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \omega)$, соответствующую ему траекторию $\omega(t, t_0, \omega^0)$ и время быстродействия $T = T(t_0, \omega^0)$, а также функцию Беллмана задачи $W = T(t, \omega) - t$.

2. Решение задачи оптимального торможения. Отметим, что момент сил, обусловленный вязкой жидкостью в полости, является внутренним для фиктивного тела, а момент сил вязкого трения – внешним. На основе динамического программи-

рования синтез оптимального по быстродействию управления имеет вид [7]

$$M_p = -b \frac{Ap}{G}, \quad M_q = -b \frac{Aq}{G}, \quad M_r = -b \frac{Cr}{G}, \quad (2.1)$$

$$b = b(t, G).$$

Здесь для дальнейшего упрощения можно полагать $b = b(t, G)$, $0 < b_1 \leq b \leq b_2 < \infty$.

Домножим первое уравнение (1.1) на Ap , второе – на Aq , третье – на Cr и сложим. Получим уравнение вида

$$\dot{G} = -b(t, G) - \lambda G, \quad G(t_0) = G^0,$$

$$G(T, t_0, G^0) = 0, \quad T = T(t_0, G^0), \quad W(t, G) = T(t, G) - t.$$

В предположении $b = b(t)$ получим решение и условие для T

$$G(t) = G^0 e^{-\lambda(t-t_0)} - \int_{t_0}^t b(\tau) e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau, \quad (2.2)$$

$$G^0 = e^{-\lambda t_0} \int_{t_0}^T b(\tau) e^{\lambda \tau} d\tau, \quad T = T(t_0, G^0).$$

Здесь t – текущее время процесса торможения, T – время быстродействия.

При $b = \text{const}$ решение уравнения и краевой задачи (2.2) записывается следующим образом

$$G(t) = \left(G^0 + \frac{b}{\lambda} \right) \exp(-\lambda t) - \frac{b}{\lambda}, \quad (2.3)$$

$$T = \frac{1}{\lambda} \ln \left(G^0 \frac{\lambda}{b} + 1 \right), \quad t_0 = 0.$$

Далее детально анализируется случай (2.3).

3. Анализ осевого вращения для управляемого движения тела. Подстановка известного выражения для G (2.3) в третье уравнение (1.1) приводит к элементарному нелинейному уравнению относительно r (уравнению Бернулли)

$$\dot{r} = -r \left[b G^{-1} + \lambda - A^{-2} H C^{-1} (G^2 - C^2 r^2) \right]. \quad (3.1)$$

Заменой осевой составляющей вектора угловой скорости $r = GR$, где R – неизвестная функция, уравнение (3.1) приводится к виду, допускающему разделение переменных и тривиальное интегрирование

$$\dot{R} = -A^{-2} H C^{-1} G^2 (1 - C^2 R^2) R. \quad (3.2)$$

Вектор кинетического момента \mathbf{G} при проектировании на главные центральные оси инерции тела приводит к выражению $Cr = G \cos \theta$, где θ – угол нутации. В результате для неизвестной R получается соотношение $CR = \cos \theta$. Уравнение (3.2) после перехода к неизвестной θ может быть записано в виде, также допускающем разделение переменных и аналитическое интегрирование

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -A^{-2}HC^{-1}\lambda^{-2} \times \\ &\times \left[(G^0\lambda + b)\exp(-\lambda t) - b \right]^2 \cos\theta \sin\theta, \quad (3.3) \\ \theta(0) &= \theta^0. \end{aligned}$$

Его решение записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\theta &= \operatorname{tg}\theta^0 \exp\left\{ -A^{-2}HC^{-1} \left[-0.5(G^0\lambda + \right. \right. \\ &+ b)^2\lambda^{-1}(\exp(-2\lambda t) - 1) + 2b(G^0\lambda + \\ &+ b)\lambda^{-1}(\exp(-\lambda t) - 1) + b^2t \left. \right] \}. \quad (3.4) \end{aligned}$$

Без нарушения общности можно принять, что начальное значение $\theta(0) = \theta^0$ принадлежит первой четверти ($0 \leq \theta^0 \leq \pi/2$). Если θ^0 принимает значения из указанного промежутка, то угол нутации в процессе эволюции вращений также не выйдет за его пределы, поскольку $\theta^* = 0$ и $\theta^* = \pi/2$ – стационарные решения уравнения (3.3) независимо от изменения G .

Исследуем поведение угла нутации в малой окрестности стационарных решений $\theta^* = 0$ и $\theta^* = \pi/2$ уравнения (3.3): $\theta = \delta\theta > 0$ и $\theta = \frac{\pi}{2} + \delta\theta$, $\delta\theta < 0$. В первом случае ($\theta^* = 0$) имеем

$$\begin{aligned} \delta\dot{\theta} &= -A^{-2}HC^{-1}\lambda^{-2} \left[(G^0\lambda + b)\exp(-\lambda t) - b \right]^2 \delta\theta, \\ \delta\theta(t) &= \delta\theta^0 \exp\left\{ -A^{-2}HC^{-1}\lambda^{-2} \left[-0.5(G^0\lambda + b)^2\lambda^{-1} \times \right. \right. \\ &\times (\exp(-2\lambda t) - 1) + \\ &+ 2b(G^0\lambda + b)\lambda^{-1}(\exp(-\lambda t) - 1) + b^2t \left. \right] \}. \quad (3.5) \end{aligned}$$

Из (3.5) следует, что при $C > A$ (сплюснутое тело) вариация $\delta\theta$ монотонно убывает (так как $H > 0$), а при $C < A$ (вытянутое тело) – монотонно возрастает (так как $H < 0$).

Рассмотрим второй случай

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \delta\theta, \quad \delta\theta < 0 \quad \left(\theta^* = \frac{\pi}{2} \right).$$

Аналогично (3.5) имеем

$$\begin{aligned} \delta\dot{\theta} &= -A^{-2}HC^{-1}\lambda^{-2} \left[(G^0\lambda + b)\exp(-\lambda t) - b \right]^2 \delta\theta, \\ \delta\theta(t) &= \delta\theta^0 \exp\left\{ -A^{-2}HC^{-1}\lambda^{-2} \left[-0.5(G^0\lambda + b)^2\lambda^{-1} \times \right. \right. \\ &\times (\exp(-2\lambda t) - 1) + \\ &+ 2b(G^0\lambda + b)\lambda^{-1}(\exp(-\lambda t) - 1) + b^2t \left. \right] \}, \\ \delta\theta(0) &= \delta\theta^0 < 0. \quad (3.6) \end{aligned}$$

Из (3.6) следует, что при $A > C$ величина $\delta\theta$ монотонно убывает, а при $A < C$ монотонно возрастает.

4. Анализ вращений тела в экваториальной плоскости. Рассмотрим теперь изменение экваториальных составляющих переменных p, q согласно первым двум уравнениям (1.1). Введем переменную

$N = A(p^2 + q^2)^{1/2}$, имеющую смысл модуля указанных составляющих, характеризующую эти вращения. Умножая первое уравнение (1.1) на ApN^{-1} , а второе – на AqN^{-1} и складывая, получим для N линейное однородное уравнение

$$\begin{aligned} \dot{N} &= -d(t)N, \quad d(t) = \frac{b}{G(t)} - A^{-1}Lr^2(t) + \lambda, \\ d(t) &> 0. \quad (4.1) \end{aligned}$$

После интегрирования имеем

$$N(t) = N^0 \exp\left[-\int_0^t d(\tau) d\tau \right]. \quad (4.2)$$

Используя известные выражения $G(t)$ и $r(t)$, приведем уравнения для p, q (1.1) к виду линейных с переменными коэффициентами и определенной симметрией. Эти уравнения содержат только “гироскопические” и “диссипативные” члены с коэффициентами $g(t)$ и $d(t)$ соответственно

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{N}} &= -d(t)\mathbf{N} + g(t)I\mathbf{N}, \quad \mathbf{N} = (Ap, Aq)^T, \\ g(t) &= A^{-1}r(t)(A - C). \quad (4.3) \end{aligned}$$

Здесь I – симплектическая матрица, а коэффициент d определен в (4.1).

Уравнение (4.3) для \mathbf{N} интегрируется в явном виде. Полагая $\mathbf{N} = N\mathbf{n}$, где $\mathbf{n} = \mathbf{n}(t)$ – орт вектора \mathbf{N} , получим для неизвестной \mathbf{n} уравнение $\dot{\mathbf{n}} = gI\mathbf{n}$. Начальное значение $\mathbf{n}(0) = \mathbf{n}^0$, $|\mathbf{n}^0| = 1$ определяется условием $N^0 = N^0|\mathbf{n}^0|$. Отметим, что $|\mathbf{n}(t)| \equiv 1$ для всех $t \in [0, T_0]$. Введем аргумент σ так, чтобы $\mathbf{n}' = I\mathbf{n}$; имеем

$$\mathbf{n}(t) = \Pi(\sigma)\mathbf{n}^0, \quad \sigma = \int_0^t g(\tau) d\tau, \quad (4.4)$$

$$\Pi(\sigma) = \begin{bmatrix} \cos\sigma & \sin\sigma \\ -\sin\sigma & \cos\sigma \end{bmatrix},$$

где $\Pi(\sigma)$ – матрица поворота (начального вектора \mathbf{n}^0) на угол σ .

Таким образом, прецессионные вращения квазитвердого тела (относительно оси в экваториальной плоскости) полностью определены согласно (4.2), (4.4).

5. Численный анализ и выводы. Обратимся вновь к задаче определения угла нутации $\theta(t)$ в частном случае $b = \text{const}$ согласно (3.3). Проведем обезразмеривание этого уравнения. Введем обозначения

$$\tau = \lambda t, \quad k^* = \frac{bAC^{1/2}}{\lambda^{1/2}|H|^{1/2}}, \quad G^{0*} = \frac{G^0 AC^{1/2}\lambda^{1/2}}{|H|^{1/2}}. \quad (5.1)$$

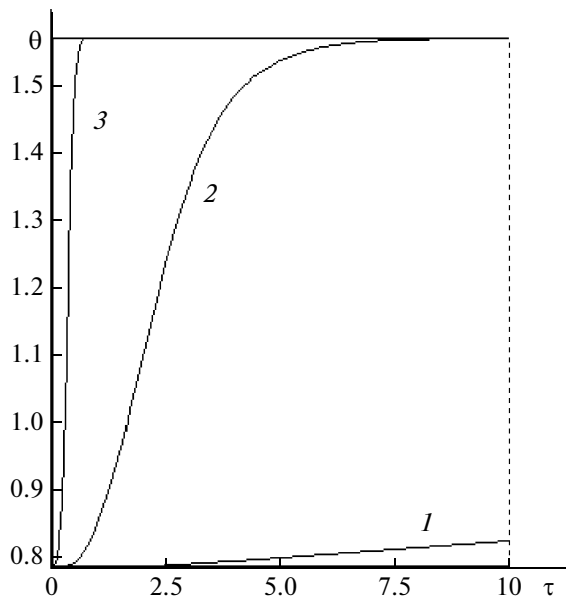


Рис. 1

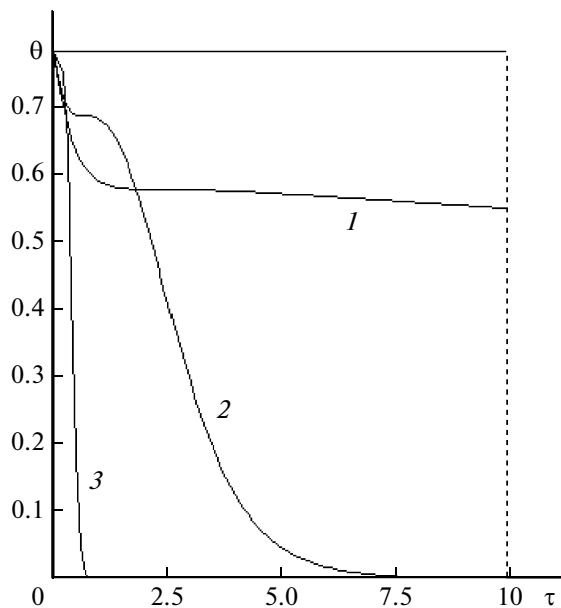


Рис. 3

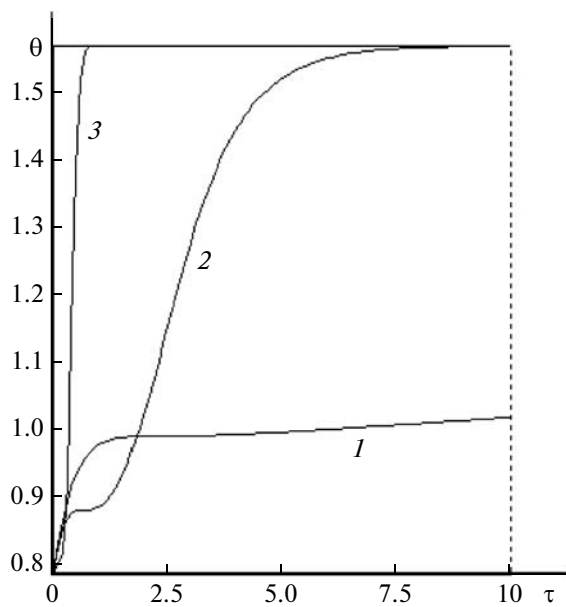


Рис. 2

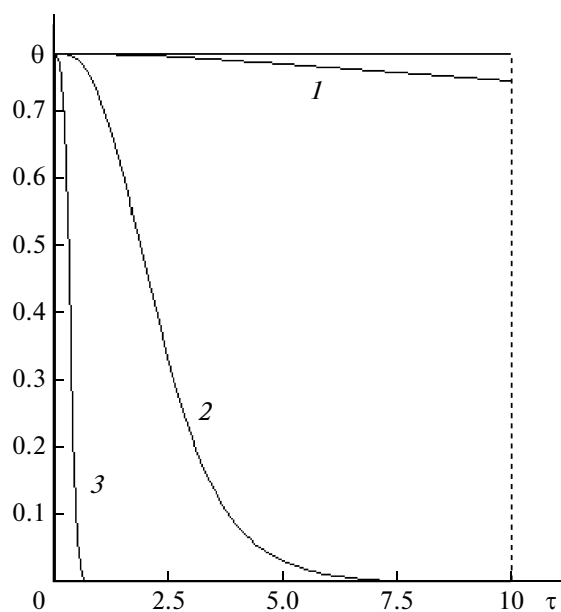


Рис. 4

В результате этих преобразований получим уравнения для угла нутации θ

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \pm \left[(G_0^* + k^*) \exp(-\tau) - k^* \right]^2 \sin\theta \cos\theta \quad (5.2)$$

при $A > C$ или $A < C$.

Уравнения (5.2) были численно проинтегрированы для произвольных различных значений G^{0*} , k^* и $\theta^0 = \pi/4$ рад. Графики изменения угла нутации θ представлены на рис. 1–4. Рисунки 1, 2 со-

ответствуют динамически вытянутому телу, а рисунки 3, 4 – сплюснутому.

Расчет кривых рис.1 проводился при значении $G^{0*} = 1$, а рис. 2 – при $G^{0*} = 0.1$. Согласно проведенному расчету, при $A > C$ угол нутации стремится к своему предельному значению $\pi/2$ рад. Кривые 1–3 соответствуют различным значениям $k^* = 0.1, 1, 10$. Видно, что чем больше отношение коэффициента пропорциональности момента сопротивления к скалярной величине вектора

управляющего момента, то тем быстрее тело стремится к устойчивому предельному положению оси вращения.

На кривой 2 рис. 2 видно, что имеется некоторое значение угла нутации $\theta = \hat{\theta}$, лежащее в области перегиба функции $\theta = \theta(\tau)$, которое приводит к неустойчивому положению оси вращения тела. Расчет кривых рис. 3 проводился при значении $G^{0*} = 1$, а рис. 4 – при $G^{0*} = 0.1$. Согласно кривым этих рисунков динамически сплюснутое тело стремится к своему предельному устойчивому положению оси вращения, соответствующему $\theta \rightarrow 0$ рад. Видно, что характер стремления зависит от величины коэффициента отношения k^* .

При $A \approx C$, а также $|\delta\theta^0|$ в окрестности стационарных точек могут быть применены методы возмущений, которые в данном случае приводят к элементарным выражениям. Например, после первой итерации имеем выражение для θ

$$\begin{aligned} \theta(\tau) = & \theta^0 - A^{-3}C^{-1}\beta P\nu^{-1}(C - A)\lambda^{-2} \cos\theta^0 \sin\theta^0 \times \\ & \times \left[-0.5(G^0\lambda + b)^2\lambda^{-1}(\exp(-2\lambda t) - 1) + \right. \\ & \left. + 2(G^0\lambda + b)b\lambda^{-1}(\exp(-\lambda t) - 1) + b^2 t \right]. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Формула (5.3) позволяет провести анализ угла нутации во времени для различных значений параметров системы и начальных данных.

Заключение. Аналитически и численно исследована задача синтеза оптимального по быстро-

действию торможения вращений динамически симметричного “квазитвердого” тела в сопротивляющейся среде. В рамках асимптотического подхода определены управление, время быстрого действия (функция Беллмана) и угол нутации, установлены качественные свойства оптимального движения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноусько Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса // ЖВМ и МФ. 1965. Т. 5, № 6.
2. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л. Быстрое вращение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 3.
3. Кошляков В.Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. М.: Наука, 1985.
4. Раус Э.Дж. Динамика системы твердых тел. Т. II. М.: Наука, 1983.
5. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л. Эволюция вращения спутника под действием гравитационного момента в среде с сопротивлением // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 2.
6. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д. Оптимальное торможение вращений твердого тела с внутренними степенями свободы // Изв. РАН. ТиСУ. 1995. № 2.
7. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987.
8. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980.