Некоторые задачи стабилизации тел с внутренними степенями свободы

2 authors:

Dmytro Leshchenko
Odessa State Academy of Civil Engineering a…

Leonid D Akulenko
Russian Academy of Sciences

ках.— Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1971, № 5, с. 44—48. 6. *Новиков Л. З.* Определение собственных частот колебаний электродвигателей, связанных с нелинейной упругостью подшипников.— Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1961, № 6, с. 84—90.

Поступила в редколлегию 04.06.81

СИСТЕМЫ ВИБРОЗАЩИТЫ И УПРАВЛЕНИЯ ГИРОСКОПИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 531.313:532.58

Л. Д. АКУЛЕНКО, канд. физ.-мат. наук
Институт проблем механики АН СССР,
Д. Д. ЛЕЩЕНКО, канд. физ.-мат. наук
Одесский технологический институт холодильной промышленности

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ СТАБИЛИЗАЦИИ ТЕЛ С ВНУТРЕННИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Исследованы некоторые случаи торможения возмущенных вращательных движений твердого тела под действием управляющего момента, ограниченного по модулю.

1. Рассмотрим управляемое движение динамически симметричного твердого тела со сферической полостью, заполненной жидкостью большой вязкости. Предположим, что вектор управляющего момента относительно центра инерции ограничен сферой и имеет вид

$$M_i = bu_i \ (i = 1, 2, 3), \ |\vec{u}| \leqslant 1 \ (b_1 \geqslant b(t) \geqslant b_0 \geqslant 0). \tag{1}$$

Уравнения управляемого движения тела, следуя [1], запишем так:

$$\begin{gathered} A\dot{p} + (C - A)\,qr = bu_1 + \frac{\rho P}{\nu A^2}\,C\,(A - C)\,pr^2, \\ A\dot{q} + (A - C)\,rp = bu_2 + \frac{\rho P}{\nu A^2}\,C\,(A - C)\,qr^2, \\ C\dot{r} = bu_3 + \frac{\rho P}{\nu A}\,(C - A)\,r\,(p^2 + q^2). \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь ρ — плотность жидкости, ν — кинематический коэффициент вязкости, A, C — экваториальный и осевой моменты инерции соответственно, p, q, r — проекции вектора $\vec{\omega}$ на главные центральные оси инерции. Аффинный ортогональный тензор второго ранга в случае сферической полости имеет вид $P_{ij} = P\delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера, $P > 0$. Как показано в работе [1], для сферической полости радиуса a $P = \frac{8\pi a^7}{525}$.

Математически задача оптимального по быстродействию торможения вращений тела ставится так:

$$\vec{\omega}(T) = 0, \qquad T \to \min, \qquad |\vec{u}| \leqslant 1. \tag{3}$$

Требуется найти оптимальный закон управления, оптимальную фазовую траекторию и минимальное значение функционала. Отметим, что аналогичные задачи оптимальной по быстродействию стабилизации твердого тела без учета полости, заполненной вязкой жидкостью, рассматривались в работах [2, 3].

Поставленная задача торможения решается на основе достаточных условий оптимальности метода динамического программирования [4]. Используя функциональное неравенство Шварца [5] для $\vec{G}$, находим, что алгоритм оптимального управления имеет довольно простой вид: $\vec{u}^* = -\vec{G}G^{-1}$, а модуль кинетического момента G в соответствии с этим законом убывает до нуля за конечное время T^*:

$$G(t, t_0, G_0) = G_0 - \int_{t_0}^{t} b(\tau)\,d\tau, \qquad \int_{t_0}^{T} b(t)\,dt = G_0. \tag{4}$$

Согласно (1) $b \geqslant b_0 > 0$, поэтому корень второго уравнения (4) $T^* = T(G_0, t_0)$ существует и единствен, причем $T^* \leqslant t_0 + G_0 b_0^{-1}$. Непосредственно дифференцированием устанавливаем, что $T(G, t)$ — функция Беллмана задачи оптимального управления (1)—(3). Заметим, что частный случай движения твердого тела без полости с жидкостью при $b = \mathrm{const}$ был изучен в статье [6].

Подстановка известного выражения для функции G в третье уравнение (2) приводит к нелинейному уравнению относительно r:

$$\dot{r} = -r\,[bG^{-1} + \rho P\nu^{-1}A^{-3}C^{-1}(A - C)(G^2 - C^2r^2)]. \tag{5}$$

Заменой переменной $r = GR$, где R — неизвестная функция, уравнение (5) преобразуем к виду

$$\dot{R}^2 = 2\rho P\nu^{-1}A^{-3}C^{-1}(C - A)\,G^2R^2(1 - C^2R^2). \tag{6}$$

Согласно известной формуле, определяющей проекции вектора G на главные центральные оси инерции, $Cr = G\cos\theta$ или с учетом замены переменных $CR = \cos\theta$. В результате интегрирования уравнения (6) находим в неявной форме зависимость угла нутации θ от времени t

$$\ln|\operatorname{tg}\theta\,\operatorname{tg}^{-1}\theta_0| = \frac{\rho P(A - C)}{\nu A^3 C}\int_{t_0}^{t} G^2(\tau)\,d\tau. \tag{7}$$

Пусть $b = \mathrm{const}$, тогда можно найти зависимость времени t от угла нутации θ в виде ($t_0 = 0$)

$$\tau = 1 - (1 + \sigma_1 \ln\operatorname{tg}\theta_0\,\operatorname{tg}^{-1}\theta)^{1/3} \quad (0 \leqslant \tau \leqslant 1), \tag{8}$$

$$T^* = \frac{G_0}{b}, \qquad \sigma_1 = \frac{3\nu A^3 Cb}{\rho P(A - C)\,G_0^3} \quad (-\infty < \sigma_1 < \infty).$$

На рис. 1 приведены зависимости угла нутации $\theta(\tau)$ при начальном значении $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$ и различных значениях σ_1. Анализируя их, можно сделать вывод о том, что при $\sigma_1 \to \pm 0$ величина $\theta(\tau)$ стремится к прямому углу и нулю соответственно. Это обстоятельство связано с тем фактом, что время t неограниченно «сжимается» (τ — медленное, или сжатое время). При $\sigma_1 \to \pm\infty$ $\theta(\tau) \to \theta_0$, так как за время торможения T^* вращений твердого тела угол нутации θ не успевает существенно измениться. Аналогичный характер изменения угла нутации $\theta(\tau)$ описан в работе [2], где рассматривалось управляемое движение динамически симметричного твердого тела и подвижной массы, соединенных вязкоупругой связью. Однако в случае торможения тела с жидкостью величина $\theta(\tau)$ при $\sigma_1 \to \pm 0$ стремится к прямому углу и нулю быстрее, а при $\sigma_1 \to \pm\infty$ $\theta(\tau) \to \theta_0$ медленнее, чем в случае торможения тела и подвижной массы, соединенных вязкоупругим образом. Различная скорость стремления $\theta(\tau)$ к нулю и $\frac{\pi}{2}$ объясняется тем, что

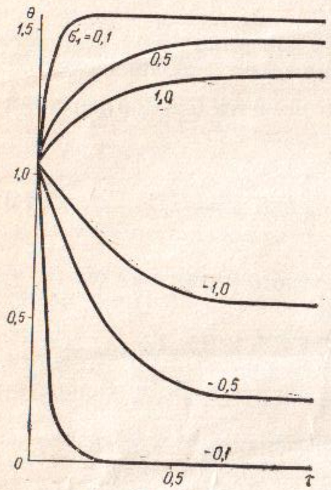

Рис. 1

в первом случае возмущающий момент представляет собой полином третьей степени относительно угловой скорости $\vec{\omega}$ [1], а во втором — полином, содержащий четвертые и пятые степени $\vec{\omega}$ [7].

В пределе при $b \to 0$ формулы (7), (8) совпадают с полученными в работе [1] для задачи пассивного движения.

Теперь на основе известной зависимости угла нутации θ от времени простым пересчетом по формулам (4), (7) и $Cr = G\cos\theta$ находим зависимость осевой угловой скорости r от времени $r(t) = G(t)\cos\theta(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T^*)$.

Если эта функция построена, то из (2) получаем

$$p = p_0 G G_0^{-1} \exp\alpha(t)\cos\psi(t), \qquad q = -q_0 G G_0^{-1}\exp\alpha(t)\sin\psi(t), \quad (9)$$

$$\alpha(t) = \frac{\rho P}{\nu A^3} C(A - C)\int_{t_0}^{t} r^2(\tau)\,d\tau, \qquad \psi(t) = d\int_{t_0}^{t} r(\tau)\,d\tau,\ d = 1 - CA^{-1}.$$

Как следует из (9), $\omega_\perp = \omega_{\perp 0} G G_0^{-1}\exp\alpha$, причем $A^2\omega_\perp^2 + C^2 r^2 = G^2$, $\omega_\perp = (p^2 + q^2)^{1/2}$.

Подстановка найденных функций в выражение алгоритма управления $\vec{u}^*$ позволяет определить оптимальное программное управление.

2. Исследуем управляемое движение несимметричного твердого тела со сферической полостью, заполненной жидкостью большой вязкости. Уравнения управляемого движения согласно [1] имеют вид

$$A\dot{p} + (C - B)qr = bu_1 + \frac{\rho P}{\nu ABC} p[C(A - C)(A + C - B)r^2 + $$
$$+ B(A - B)(A + B - C)q^2]; \quad (10)$$

остальные уравнения получаем из (10) циклической перестановкой букв A, B, C и p, q, r в левой части и во вторых слагаемых правой части. Первые слагаемые правой части находим из (10) циклической перестановкой индексов. Все предложения и обозначения п. 1 остаются в силе.

Нетрудно показать, что алгоритм оптимального управления имеет довольно простой вид: $\vec{u}^* = -\vec{G}G^{-1}$, а модуль кинетического момента G в соответствии с этим законом убывает до нуля за конечное время T^* (см.(4)). Вычисляя производную по времени от кинетической энергии

$$H = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \quad (11)$$

и учитывая уравнения движения (10), получаем

$$\dot{H} = -\left\{\frac{2bH}{G} + \frac{\rho P}{\nu ABC}[(A + C - B)(A - C)^2p^2r^2 + (A + B - C)\times\right.$$
$$\left.\times (A - B)^2p^2q^2 + (B + C - A)(B - C)^2q^2r^2]\right\}. \quad (12)$$

Примем для определенности $A > B > C$ и рассмотрим движение при условии $2HA \geqslant G^2 \geqslant 2HB$. Введем величину

$$k^2 = \frac{(B - C)(2HA - G^2)}{(A - B)(G^2 - 2HC)} \quad (0 \leqslant k \leqslant 1), \quad (13)$$

представляющую собой при невозмущенном движении тела постоянную — модуль эллиптических функций.

При помощи формул (11), (12) можно выразить производную $\frac{dk^2}{dt}$ через p, q, r, G; функции p, r затем выразим через G, H, q из (12), H — через k^2 и G из формулы (13). Окончательно получим

$$\frac{dk^2}{dt} = \nu^{-1} f(G, k^2, q). \quad (14)$$

Функция k^2 является медленно меняющейся переменной, так как $\nu^{-1} \ll 1$, когда полость заполнена жидкостью большой вязкости. Отметим, что явная зависимость $\dot{k}^2$ от b исчезает. Поэтому в первом приближении метода усреднения [8] можно подставить в (14) вместо $q(t)$ решение, определяющее невозмущенное движение Эйлера — Пуансо [9]:

$$q=\sqrt{\frac{2HA-G^2}{B(A-B)}}\,\mathrm{sn}\left[\frac{t-t_0}{\tau_1}4K(k),k\right]. \tag{15}$$

Здесь τ_1 — период движения, зависящий от H, G; t_0 — произвольная постоянная. Подставим (15) в (14), вновь исключим H с помощью (13) и усредним правую часть (14) по периоду τ_1 движения Эйлера — Пуансо. В результате, используя формулу для интегралов от эллиптических функций, получим усредненное дифференциальное уравнение

$$\frac{dk^2}{d\xi}=(1-\varkappa)(1-k^2)-[(1-\varkappa)+(1+\varkappa)k^2]\frac{E(k)}{K(k)}, \tag{16}$$

$$\varkappa=\frac{3B[(A^2+C^2)-B(A+C)]}{(A-C)[B(A+C-B)+2AC]},\quad |\varkappa|\leqslant 1,$$

$$\xi=\int_{t_*}^{t}\frac{d\tau}{N},$$

$$N=\frac{3\nu A^2B^2C^2}{\rho PG^2(t)(A-C)[B(A+C-B)+2AC]}.$$

Здесь $K(k)$, $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Произвольная постоянная t_* выбрана так, чтобы момент $t=t_*$ соответствовал переходу через сепаратрису, т. е. $k=1$, $2HB=G^2$ при $\xi=0$.

Уравнение (16) описывает усредненное движение конца вектора кинетического момента $\vec{G}$ на сфере радиуса G и совпадает с уравнением пассивного движения тела с полостью, заполненной жидкостью большой вязкости [1]. Явная зависимость от b отсутствует. Однако при пассивном движении кинетический момент сохранял постоянное значение, а при выбранном законе торможения он убывает до нуля за конечное время T^*. В результате интегрирования (16) получим

$$\int_{k_0^2}^{k^2}\frac{d\bar{k}^2}{(1-\varkappa)(1-\bar{k}^2)-[(1-\varkappa)+(1+\varkappa)\bar{k}^2]\frac{E(\bar{k})}{K(\bar{k})}}=$$

$$=\frac{\rho P(A-C)[B(A+C-B)+2AC]}{9\nu bA^2B^2C^2}(G_0^3-G^3). \tag{17}$$

При малых k^2, соответствующих движениям твердого тела, близким к вращениям вокруг оси наибольшего момента инерции A, правую часть уравнений (16) и (17) можно упростить, используя разложения полных эллиптических интегралов в ряды по k^2. В этом случае (17) интегрируется в явном виде и асимптотическое решение для $b=\mathrm{const}$ после ряда преобразований записывается следующим образом:

$$\tau=1-(1+\sigma_2\ln k^2k_0^{-2})^{1/3}\quad(0\leqslant\tau\leqslant 1),$$

$$\sigma_2=\frac{18\nu A^2B^2C^2b}{G_0^3(3+\varkappa)\rho P(A-C)[B(A+C-B)+2AC]}\quad(-\infty<\sigma_2<\infty). \tag{18}$$

На рис. 2 приведены зависимости $k^2(\tau)$ при начальном значении $k_0^2=0,1$ и различных значениях σ_2. При $\sigma_2\to\pm 0$ величина $k^2(\tau)$ стремится к нулю и единице соответственно. При $\sigma_2\to\pm\infty$ $k^2(\tau)\to k_0^2$, так как за время торможения T^* вращений твердого тела k^2 не успевает существенно измениться. В пределе при $b\to 0$ формулы (18) совпадают с полученными в работе [1] при решении задачи пассивного движения.

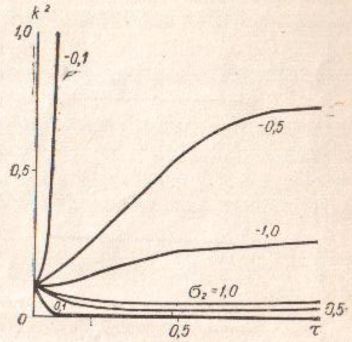

Рис. 2

Для величин $k^2\sim 1$, соответствующих движениям твердого тела вблизи сепаратрисы, правую часть (16) можно записать, применяя асимптотические разложения $E(k)$, $K(k)$. В результате разложения и последующего интегрирования (17) после несложных преобразований получим

$$\tau=1-\left\{1+\sigma_3\left[\frac{1}{2}(k^2-k_0^2)+(1-k_0^2)\ln\frac{4}{\sqrt{1-k_0^2}}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-(1-k^2)\ln\frac{4}{\sqrt{1-k^2}}\right]\right\}^{1/3},$$

$$\sigma_3=\frac{9\nu A^2B^2C^2b}{2G_0^3\rho P(A-C)[B(A+C-B)+2AC]}\quad(-\infty<\sigma_3<\infty). \tag{19}$$

Расчеты по формуле (19) показывают, что при $\sigma_3\to\pm 0$ $k^2(\tau)$ стремится к нулю и единице соответственно, а при $\sigma_3\to\pm\infty$ $k^2(\tau)\to k_0^2$. Таким образом, характер изменения $k^2(\tau)$, имевший место при малых k^2, сохраняется. При $t\leqslant t_*$ выполняются неравенства $2HB\geqslant G^2\geqslant 2HC$. Для получения решения в этом случае нужно просто поменять местами буквы A и C во всех формулах п. 2.

3. Рассмотрим управляемое движение динамически симметричного твердого тела и подвижной точечный массы m, соединенных упругой связью при наличии квадратичного трения с коэффициентом μ. Предполагаем, что точка O_1 крепления находится на оси симметрии, а свободные движения точки m, вызванные начальными отклонениями, затухнут значительно быстрее, чем тело совершит оборот [4]. Уравнения управляемого движения тела приводим к виду

$$p-dqr=bA^{-1}u_1+Sqr+Qpr^6,$$

$$\dot q + dpr = bA^{-1}u_2 - Spr + Qqr^6,$$

$$\dot r = bC^{-1}u_3 - QA^2C^{-2}\omega_\perp^2 r^5. \qquad (20)$$

Здесь $S = m\rho^2\Omega^{-2}CA^{-4}G^2$, $d = 1 - CA^{-1}$, $G^2 = A^2\omega_\perp^2 + C^2r^2$, $\omega_\perp = (p^2 + q^2)^{1/2}$, $Q = m\rho^3\Lambda\Omega^{-3}C^4A^{-5}d\,|d|\,\omega_\perp$, $\Omega^2 = c/m$, c — коэффициент жесткости упругой связи, $\lambda = \mu/m = \Lambda\Omega^3$, ρ — радиус-вектор точки O_1.

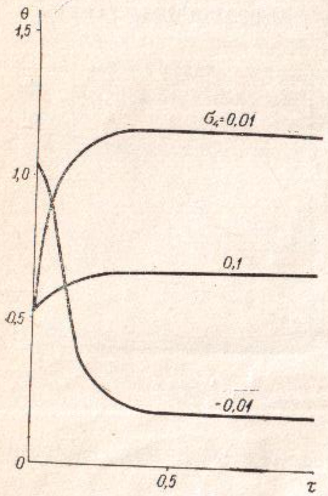

Рис. 3

Поставленная задача оптимального по быстродействию торможения решается на основе достаточных условий оптимальности метода динамического программирования. Используя процедуру, описанную в п. 1, находим, что алгоритм оптимального управления имеет вид $\vec u^* = -\vec G G^{-1}$, а модуль кинетического момента убывает до нуля за конечное время (см. (4)).

Подставив выражение для G в третье уравнение (20), получим следующее уравнение относительно r:

$$\dot r = -r\,[bG^{-1} + \alpha r^8 (G^2 - C^2r^2)^{3/2}]. \qquad (21)$$

Здесь $\alpha = m\rho^3\Lambda\Omega^{-3}C^2A^{-6}d\,|d|$.

Заменой переменной $r = GR$, где R — неизвестная функция, уравнение (21) приводим к виду

$$\dot R^2 = -2\alpha G^7R^6(1 - C^2R^2)^{3/2}. \qquad (22)$$

Следуя п. 1, положим $CR = \cos\theta$. В результате интегрирования уравнения (22) находим в неявной форме зависимость угла нутации θ от времени t:

$$2\sec^4\theta\,\mathrm{cosec}\,\theta + 5(\sec^2\theta - 3)\,\mathrm{cosec}\,\theta - 2\sec^4\theta_0\,\mathrm{cosec}\,\theta_0 - 5(\sec^2\theta_0 - 3)\,\mathrm{cosec}\,\theta_0 + 15\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta_0}{2}\right)\right| = 8\alpha C^{-4}\int_{t_0}^{t} G^7(\tau)\,d\tau. \qquad (23)$$

Пусть $b = \mathrm{const}$, тогда удается найти зависимость времени t от угла нутации θ в виде ($t_0 = 0$)

$$\tau = 1 - \Big\{1 + \sigma_4\Big[2\sec^4\theta_0\,\mathrm{cosec}\,\theta_0 + 5(\sec^2\theta_0 - 3)\,\mathrm{cosec}\,\theta_0 - 2\sec^4\theta\,\mathrm{cosec}\,\theta - 5(\sec^2\theta - 3)\,\mathrm{cosec}\,\theta + 15\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta_0}{2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta_0}{2}\right)\right|\Big]\Big\}^{1/8},$$

$$\sigma_4 = \frac{bC^2A^6\Omega^3}{m\rho^3\Lambda d\,|d|\,G_0^8} \qquad (-\infty < \sigma_4 < \infty). \qquad (24)$$

На рис. 3 приведены зависимости $\theta(\tau)$ при начальных значениях $\theta_0 = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$ и различных значениях σ_4. При $\sigma_4 \to \pm 0$ величина $\theta(\tau)$ стремится к прямому углу и нулю соответственно, а при $\sigma_4 \to \pm\infty$ $\theta(\tau) \to \theta_0$.

В пределе при $b \to 0$ формулы (23), (24) совпадают с полученными в работе [4].

Теперь на основе известной зависимости угла нутации θ от времени t пересчетом по формулам (21), (24) или (23) и $Cr = G\cos\theta$ находим зависимость проекции угловой скорости на ось симметрии r от времени $r(t) = G(t)\cos\theta(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T^*)$. Если эта функция построена, то из (20) получаем

$$p = p_0GG_0^{-1}\exp\beta(t)\cos\eta(t), \quad q = -q_0GG_0^{-1}\exp\beta(t)\sin\eta(t),$$

$$\beta(t) = Q\int_{t_0}^{t} r^6(\tau)\,d\tau, \quad \eta(t) = \int_{t_0}^{t}[d + S(\tau)]\,r(\tau)\,d\tau,$$

$$S(t) = m\rho^2\Omega^{-2}CA^{-4}G^2(t), \qquad (25)$$

как следует из (25), $\omega_1 = \omega_{10}GG^{-1}\exp\alpha$, причем $A^2\omega_1^2 + C^2r^2 = G^2$. Подстановка найденных функций, определяющих оптимальную фазовую траекторию, в выражение алгоритма управления $\vec u^*$ позволяет синтезировать оптимальное программное управление телом.

1. *Черноусько Ф. Л.* Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса.—Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1965, **5**, № 6, с. 1049—1070. 2. *Акуленко Л. Д.*, *Лещенко Д. Д.* Некоторые задачи движения твердого тела с подвижной массой.— Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1978, № 5, с. 29—34. 3. *Черноусько Ф. Л.*, *Акуленко Л.Д.*, *Соколов Б. Н.* Управление колебаниями. М., 1980. 383 с. 4. *Болтянский В. Г.* Математические методы оптимального управления. М., 1969. 408 с. 5. *Атанс М.*, *Фалб П.* Оптимальное управление. М., 1968. 764 с. 6. *Смольников Б. А.* Обобщение Эйлерова случая движения твердого тела.— Прикл. математика и механика, 1967, **31**, вып. 4, с. 735—736. 7. *Черноусько Ф. Л.* О движении твердого тела с подвижными внутренними массами.— Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1973, № 4, с. 33—44. 8. *Волосов В. М.*, *Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. 1971. 507 с. 9. *Ландау Л. Д.*, *Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Механика. М., 1973. 207 с.

Поступила в редколлегию 11.11.81