

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/282251033>

main-booklet 2

Data · September 2015

CITATIONS

0

READS

148

3 authors, including:



[Leonid D Akulenko](#)

Russian Academy of Sciences

531 PUBLICATIONS 1,106 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)



[Dmytro Leshchenko](#)

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

213 PUBLICATIONS 207 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



Evolution of rotations of a rigid body close to the Lagrange case under the action of nonstationary torque of forces [View project](#)



Numerical solution of eigenproblems [View project](#)

All content following this page was uploaded by [Dmytro Leshchenko](#) on 28 September 2015.

The user has requested enhancement of the downloaded file.

Ф. Л. Черноусько, Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко

Эволюция движений твердого тела относительно центра масс



Москва ♦ Ижевск

2015

УДК 531
ББК 22.236.3
Ч-494



Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту № 15-01-07013

Издание РФФИ не подлежит продаже

Черноуцько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д.

Эволюция движений твердого тела относительно центра масс. — М.–Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2015. — 308 с.

В данной монографии изложены результаты исследований авторов по динамике твердого тела относительно центра масс, в которых рассмотрена эволюция этих движений под действием различных возмущающих моментов сил. Основным методом, применяемым в этих исследованиях, является асимптотический метод усреднения Крылова–Боголюбова. Такие проблемы возникают в современных задачах динамики, ориентации и стабилизации естественных и искусственных небесных тел, гироскопии и в других областях механики.

Для всех случаев движения, рассмотренных в книге, приведены и проанализированы исходные уравнения, выполнена процедура усреднения и получены усредненные уравнения, которые, будучи существенно проще исходных, описывают движение на большом интервале времени. Приводятся оценки точности асимптотической процедуры. В результате анализа и решения полученных уравнений установлены количественные и качественные особенности движений, дано описание эволюций движения тела. Изложение иллюстрируется многочисленными примерами.

ISBN 978-5-4344-00??-?

© Ф. Л. Черноуцько, Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, 2015
© Ижевский институт компьютерных исследований, 2015

<http://shop.rcd.ru>
<http://ics.org.ru>

Оглавление

Предисловие	7
Обзор литературы	11
ГЛАВА 1. Основы динамики твердого тела с неподвижной точкой	27
§ 1. Определение положения тела. Углы Эйлера	27
§ 2. Геометрия масс. Моменты инерции	27
§ 3. Теорема об изменении кинетического момента	31
§ 4. Динамические уравнения Эйлера	33
§ 5. Кинематические уравнения Эйлера. Направляющие косинусы	34
§ 6. Уравнения движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки	37
ГЛАВА 2. Движение твердого тела по инерции. Случай Эйлера	41
§ 1. Первые интегралы	41
§ 2. Некоторые сведения из теории эллиптических функций Якоби	44
§ 3. Интегрирование динамических уравнений Эйлера. Исследование движения	45
§ 4. Частные случаи (регулярная прецессия, стационарные вращения)	51
ГЛАВА 3. Случай Лагранжа	55
§ 1. Интегрирование уравнений движения и его исследование	55
§ 2. Регулярная прецессия	62
§ 3. Быстро вращающийся волчок	65
ГЛАВА 4. Уравнения возмущенного движения твердого тела относительно центра масс	71
§ 1. Понятие возмущенного движения	71
§ 2. Основные понятия метода усреднения. Системы в стандартной форме. Системы с быстро вращающейся фазой	72

§ 3. Системы, содержащие медленные и быстрые движения	76
§ 4. Схема усреднения высших степеней в системах с быстрыми и медленными фазами	78
§ 5. Уравнения возмущенного движения твердого тела, близкого к случаю Эйлера	82
§ 6. Уравнения возмущенного движения спутника относительно центра масс	86
§ 7. Процедура усреднения для тела с близкими моментами инерции	92
§ 8. Уравнения возмущенного вращательного движения твердого тела, близкого к случаю Лагранжа	95
8.1. Общий случай	95
8.2. Случай различных порядков малости проекций вектора возмущающего момента	98
8.3. Возмущающие моменты малы по сравнению с восстанавливающим	103
ГЛАВА 5. Возмущающие моменты сил, действующие на твердое тело	107
§ 1. Гравитационные моменты, действующие на спутник	107
§ 2. Твердое тело в среде с сопротивлением	112
§ 3. Твердое тело с полостью, заполненной жидкостью большой вязкости	113
§ 4. Случай подвижных масс, соединенных с телом упругими связями с вязким трением	117
§ 5. Тело с упругими и диссипативными элементами	121
§ 6. Вязкоупругое твердое тело	132
§ 7. Влияние подвижной массы, соединенной с телом упругой связью с квадратичным трением	137
§ 8. Момент сил светового давления	139
ГЛАВА 6. Движение спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов	141
§ 1. Движение трехосного спутника с близкими моментами инерции	141
§ 2. Быстрые вращения спутника с трехосным эллипсоидом инерции	147

§ 3. Резонансные явления при плоском движении спутника относительно центра масс	159
---	-----

ГЛАВА 7. Движение твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью

§ 1. Уравнения движения тела с вязкой жидкостью в полости	175
§ 2. Плоское движение маятника с вязкой жидкостью	177
§ 3. Свободное пространственное движение тела с вязкой жидкостью	181
§ 4. О движении твердого тела, содержащего демпфер	191
§ 5. Устойчивость движения твердого тела с демпфером	198

ГЛАВА 8. Эволюция вращений твердого тела в среде

§ 1. Быстрое движение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки	203
§ 2. Вращение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в вязкой среде	206
2.1. Постановка задачи и процедура усреднения	206
2.2. Исследование уравнения для k^2	212
2.3. Качественное исследование частных случаев движения твердого тела	215
2.4. Исследование устойчивости квазистационарных вращений	217
2.5. Случай динамической симметрии	220
§ 3. Быстрое вращение спутника относительно центра масс под действием гравитационного момента в среде с сопротивлением	221

ГЛАВА 9. Движение твердого тела с внутренними степенями свободы

§ 1. Динамика твердого тела с подвижной внутренней массой . . .	231
1.1. Случай полной симметрии тела	231
1.2. Движение динамически симметричного тела с подвижной массой	237
§ 2. О движении твердого тела с подвижной массой, соединенной с телом упругой связью с квадратичным трением	241

ГЛАВА 10. Влияние момента сил светового давления на движение спутника Солнца относительно центра масс	245
§ 1. Уравнения вращения спутника под действием момента сил светового давления	245
§ 2. Эволюция вращений спутника с близкими моментами инерции	247
2.1. Исходные предположения и постановка задачи	247
2.2. Преобразование выражения силовой функции, процедура усреднения и построение системы первого приближения	249
2.3. Исследование уравнений для углов нутации и собственного вращения	252
2.4. Учет нулевой и первой гармоник при аппроксимации момента сил светового давления	253
§ 3. Учет третьей и четных гармоник при аппроксимации момента сил светового давления	262
ГЛАВА 11. Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа	269
§ 1. Общие свойства процедуры усреднения по движению Лагранжа	269
§ 2. Возмущенное движение тела при линейных диссипативных моментах	272
§ 3. Эволюция вращений твердого тела в случае различных порядков малости проекций вектора возмущающего момента	275
3.1. Общий подход	275
3.2. Влияние внешних диссипативных моментов	279
3.3. Действие малого постоянного момента, приложенного вдоль оси симметрии	281
3.4. Случай тела, близкого к динамически симметричному	283
Литература	285

Предисловие

Проблема движения твердого тела относительно неподвижной точки является одной из классических задач механики, исследование которой в XVIII–XIX веках связано с именами Эйлера, Лагранжа, Ковалевской. Именно этим ученым принадлежат три случая, в которых возможно полное интегрирование уравнений движения твердого тела; эти случаи названы по именам их открывателей. Решение в случае Эйлера описывает движение свободного твердого тела. Случай Лагранжа отвечает тяжелому твердому телу, обладающему динамической симметрией, причем центр тяжести тела и неподвижная точка лежат на оси динамической симметрии. Случай Ковалевской имеет место при специальном соотношении между моментами инерции. Впоследствии исследования в этой области были направлены главным образом на отыскание первых интегралов и частных решений в задаче динамики твердого тела.

Интерес к проблемам динамики твердого тела значительно усилился во второй половине XX века в связи с развитием ракетно-космической техники, ростом скоростей и маневренности самолетов, созданием гироскопических систем. Исследование движения спутников и космических аппаратов относительно центра масс важно для создания систем управления ориентацией, стабилизации движения и в конечном счете для решения практических задач космонавтики.

Спутник или космический корабль в своем движении относительно центра масс подвержен влиянию моментов сил различной физической природы. На них действуют гравитационные, аэродинамические, электромагнитные моменты, моменты сил светового давления, а также моменты, обусловленные движением некоторых масс внутри тела. Эти движения могут быть обусловлены различными причинами: наличием жидкости в полостях, расположенных в теле (например, жидкого топлива или окислителя в баках ракет), нежесткостью (упругой податливостью) конструкции аппарата, наличием в теле вращающихся масс (роторов, гироскопов, гиродинов), сложной внутренней структурой (в случае естественных небесных тел), а также перемещениями экипажа (в случае пилотируемого аппарата).

Перечисленные моменты, действующие на тело, часто сравнительно невелики и могут рассматриваться как возмущения. Поэтому естественным является использование асимптотических методов малого параметра или методов возмущений для анализа динамики твердого тела под действием приложенных моментов.

В данной монографии изложены результаты исследований авторов по динамике твердого тела относительно центра масс, в которых рассмотрена эволюция этих движений под действием различных возмущающих моментов. Основным методом, применяемым в этих исследованиях, является асимптотический метод усреднения Крылова–Боголюбова.

Основное содержание книги предваряет обзор литературы, в котором кратко характеризуются работы, близкие по тематике к предмету монографии.

В книге 11 глав.

В главе 1 кратко изложены основы динамики твердого тела. Приводятся базовые понятия, формулируются основные кинематические и динамические уравнения.

Глава 2 посвящена движению твердого тела по инерции, т. е. случаю Эйлера. Это движение служит опорным, или порождающим, для большинства возмущенных движений, рассматриваемых в книге, так как при действии малых возмущающих моментов движение оказывается близким к движению Эйлера на коротких интервалах времени. Приводятся сведения о движении Эйлера, необходимые для дальнейших рассуждений.

Случаю Лагранжа посвящена глава 3. Этот случай используется как опорный в главе 11. Приводятся необходимые соотношения для этого движения, включая его частные случаи: регулярную прецессию и быстрое вращение.

В главе 4 содержатся основные положения метода усреднения, широко используемого в книге. Здесь приведены понятия систем в стандартной форме и систем с быстро вращающейся фазой, указаны оценки погрешности метода. Обсуждается применение метода усреднения к уравнениям возмущенного движения, близкого к движению в случае Эйлера. Именно процедура усреднения по движению в случае Эйлера позволила исследовать эволюцию движений спутника в случае различных возмущений. Далее рассматриваются также уравнения возмущенного движения, близкого к случаю Лагранжа.

Глава 5 посвящена описанию различных возмущающих моментов, действующих на твердое тело. Приводятся необходимые для дальнейших рас-

суждений соотношения для гравитационных моментов, действующих на спутник, для моментов сил сопротивления внешней среды, для моментов сил светового давления, а также для моментов, обусловленных наличием вязкой жидкости в полости твердого тела. Рассмотрены различные случаи влияния внутренних масс на движение тела: наличие упругих и диссипативных элементов, вязкоупругих свойств движущегося тела.

В последующих главах 6–10 исследованы возмущенные движения твердого тела под действием различных внешних и внутренних моментов. Соответствующие выражения для возмущающих моментов взяты из главы 5. В качестве опорного (порождающего) движения в главах 6–10 используется движение в случае Эйлера и усреднение проводится по этому движению согласно асимптотической процедуре, изложенной в главе 4.

Глава 6 посвящена движению спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов на эллиптической орбите. Здесь исследованы случаи спутника с близкими моментами инерции и быстрые вращения спутника с произвольными моментами инерции. Отдельно рассмотрены плоские колебательные и вращательные движения спутника относительно центра масс на эллиптической орбите.

В главе 7 рассматриваются движения твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью. В результате проведенного асимптотического анализа получено решение, описывающее в нелинейной постановке эволюцию движения тела, имеющего полость с жидкостью большой вязкости, на значительном интервале времени. Показано, что динамика тела с полостью, содержащей вязкую жидкость, эквивалентна динамике гиростата, несущего роторы, взаимодействующие с телом посредством сил линейного сопротивления.

Глава 8 посвящена движению твердого тела в сопротивляющейся среде, действующей на тело посредством моментов, зависящих от его угловой скорости. Рассмотрен также случай одновременного влияния моментов сил тяжести и сил сопротивления. Исследовано движение спутника относительно центра масс под действием гравитационного момента и момента сил сопротивления.

В главе 9 исследуются различные случаи движения твердого тела, имеющего внутренние степени свободы. Здесь рассмотрены движения тела, содержащего линейно-упругие и диссипативные элементы. В частности, исследованы движения тела, несущего массы, присоединенные к нему посредством упругих сил с линейным или квадратичным демпфированием. Эта ситуация моделирует наличие нежестко закрепленных деталей на кос-

мическом аппарате, что оказывает существенное влияние на его движение относительно центра масс.

Влияние момента сил светового давления на движение спутника Солнца относительно центра масс рассмотрено в главе 10. Здесь исследована эволюция угловых движений в ряде случаев.

Глава 11 посвящена возмущенным движениям твердого тела, близким к случаю Лагранжа. В качестве порождающего движения используется движение, описанное в главе 3. Путем усреднения по движению в случае Лагранжа исследованы возмущенные движения под действием линейных диссипативных моментов.

Для всех случаев движения тела, рассмотренных в книге, приведены и проанализированы исходные уравнения, выполнена процедура усреднения и получены усредненные уравнения, которые, будучи существенно проще исходных, описывают движение на большом интервале времени. Приводятся оценки точности асимптотической процедуры. В результате анализа и решения полученных уравнений установлены количественные и качественные особенности движений, дано описание эволюции движения тела. Изложение иллюстрируется многочисленными примерами.

Авторы надеются, что книга представит интерес для ученых в области механики и прикладной математики, инженеров, аспирантов и студентов соответствующих специальностей.

Обзор литературы

Задача о движении твердого тела относительно неподвижной точки является одной из классических задач механики. Л. Эйлер в 1758 году получил [1] решение этой задачи для случая свободного твердого тела, когда центр масс совпадает с неподвижной точкой. В 1788 году Ж. Лагранжем [2] было исследовано движение тяжелого твердого тела в случае, когда эллипсоид инерции, построенный для неподвижной точки, является эллипсоидом вращения, а центр масс твердого тела находится на оси симметрии этого эллипсоида.

После Лагранжа исследование вращения твердого тела вокруг неподвижной точки продолжалось, но лишь С. В. Ковалевская в 1889 году нашла еще один случай [3], для которого решение может быть получено при произвольных начальных условиях. Кроме того, были открыты несколько случаев, для которых получены частные решения уравнений движения. К ним относятся случаи В. Гесса, Д. К. Бобылева, В. А. Стеклова, Д. Н. Горячева, С. А. Чаплыгина, Д. Гриоли и другие.

Во второй половине XX века были разработаны новые формы уравнений движения твердого тела, развиты методы их исследований. В результате получены новые решения задачи о движении твердого тела вокруг неподвижной точки. Основные результаты в этой области получены П. В. Харламовым, Е. И. Харламовой и другими, в первую очередь представителями Донецкой школы механики.

Обзор полученных решений, их классификация и подробная библиография приведены в работах П. В. Харламова [4], И. Н. Гашененко, Г. В. Горра, А. М. Ковалева [5], А. В. Борисова, И. С. Мамаева [6].

Общие вопросы динамики твердого тела рассмотрены в монографиях [7, 8].

Практические задачи требуют исследования более сложных движений твердого тела. Ряд объектов в природе и технике в ряде случаев может моделироваться в виде одного твердого тела. К ним относятся летательные аппараты, самолеты, космические и подводные корабли, небесные тела с учетом действующих возмущений и их внутренней структуры.

Это вызывает необходимость исследований вращательных движений твердых и квазитвердых (близких к твердым) тел относительно неподвижной точки под действием внешних и внутренних возмущающих моментов сил различной физической природы. Разработана теория и методы расчета движения тела, содержащего вязкую жидкость, упругие и вязкоупругие элементы. Такие проблемы возникают в современных задачах динамики, ориентации, управления и стабилизации естественных и искусственных небесных тел, гироскопии, технических объектов и в других областях механики.

Различная физическая природа возмущающих моментов сил, их достаточно сложная зависимость от обобщенных координат приводят к уравнениям движения, точное аналитическое решение которых едва ли возможно. Численное же решение, подробно характеризующее частные случаи, не позволяет проследить за общими закономерностями движения и его эволюцией. Поэтому велика роль различных асимптотических методов, позволяющих при их корректном применении уже в первом приближении выявить основные особенности движения.

Применение метода малого параметра Пуанкаре для построения решений задачи о движении твердого тела вокруг неподвижной точки изложено в книгах [9, 10]. В работе [11] содержится обзор методов интегрирования уравнений движения механических систем.

Основная цель данной книги заключается в исследовании эволюции движения твердого тела относительно центра масс под действием различных возмущающих моментов. При этом основное внимание уделяется применению метода усреднения [12–14]. Этот метод давно применялся в небесной механике, хотя и без надлежащего обоснования. Впервые он был строго сформулирован и обоснован в работах Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [12].

В настоящее время имеется много работ, посвященных обоснованию и приложениям асимптотических методов. Изложение этих методов, а также подробная библиография по данному вопросу содержатся в книгах Н. Н. Боголюбова, Ю. А. Митропольского [12], В. М. Волосова, Б. И. Моргунова [13], Ю. А. Митропольского [14], Н. Н. Моисеева [15], В. И. Арнольда, В. В. Козлова, А. И. Нейштадта [11, 16].

Впервые методика усреднения была применена к исследованию возмущенных движений спутника относительно центра масс в работах В. В. Белецкого [17] и Ф. Л. Черноушко [18]. В [17] рассматривался спутник, обладающий динамической симметрией. В работе [18] построена процедура

усреднения для спутника с произвольным трехосным эллипсоидом инерции, т. е. усреднение было проведено по движению Эйлера–Пуансо. Кроме того, в статье [18] предложена процедура усреднения для трехосного спутника с близкими друг к другу моментами инерции. В обоих этих случаях движение спутника складывается из движения Эйлера–Пуансо вокруг вектора кинетического момента и движения самого вектора кинетического момента в пространстве.

Остановимся кратко на работах, посвященных исследованию возмущенных движений твердого тела относительно центра масс и близких к тематике настоящей книги. Монография [17] посвящена описанию методов исследования и основных эффектов движения искусственного спутника относительно центра масс под действием гравитационных, магнитных, аэродинамических моментов и моментов сил светового давления. В книге [19] более подробно изложена теория относительного движения спутника в гравитационном поле, причем основное внимание уделено нелинейным резонансным эффектам. Эффекты движения спутника, описанные в [17, 18], были также исследованы в работе [20].

В. В. Белецкий, А. М. Яншин в [21] исследовали влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. Работа [22] посвящена изучению воздействия на вращательное движение спутников различной формы тормозящих аэродинамических моментов. В статье [23] исследованы эффекты, связанные с возмущенным движением несимметричного ИСЗ относительно центра масс под действием сил аэродинамической диссипации. В работе [24] изучена эволюция вращения спутника с использованием полной формулы диссипативного аэродинамического момента.

Основные направления исследований движения космических аппаратов и моделирования внешних сил, действующих на спутники, освещены в обзорах В. М. Морозова [25], В. А. Сарычева [26], S. K. Shrivastava, V. J. Modi [27].

Аналізу резонансных эффектов при исследовании вращательного движения спутника с неравными моментами инерции в гравитационном поле посвящена статья [28]. В работе [29] исследуются нерезонансные и резонансные возмущенные вращения трехосного спутника в гравитационном поле.

В статье [30] рассматривается быстрое вращение трехосного спутника, возмущенное гравитационным моментом. Решение, выраженное через эллиптические функции и интегралы Якоби, справедливо для нерезонанс-

ных вращений в предположении, что скорость вращения намного больше угловых скоростей орбитального движения и прецессии.

Среди систем стабилизации искусственных спутников с помощью моментов внешних сил наибольшее распространение получили системы гравитационной стабилизации. Первая модель гравитационной стабилизации искусственных спутников и исследование динамики этой системы представлены в работе Д. Е. Охоцимского и В. А. Сарычева [31]. Подробные сведения о системах гравитационной стабилизации можно найти в обзоре [26]. В статье [32] дан обзор проблем и работ, связанных с разработкой пассивных систем ориентации спутника. Библиография российских и зарубежных исследований по пассивным системам ориентации спутников и космических аппаратов представлена также в книгах [33–35]. В работе [36] дан обзор основных результатов, полученных в прикладной небесной механике и управлении движением космических аппаратов.

Модель динамически несимметричного спутника с близкими моментами инерции, движущегося в центральном гравитационном поле под действием момента сил аэродинамического сопротивления, исследуется в [37]. Вопросы эволюции быстрого вращения спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов посвящена статья [38].

В работе [39] предложена математическая модель вращательного движения спутника «Фотон». В статье [40] рассмотрены вопросы моделирования моментов аэродинамических сил, действующих на спутник с гравитационной системой стабилизации.

Важной областью практических приложений динамики твердого тела является механика гироскопических систем. Наиболее полно результаты по механике гироскопов отражены в книгах А. Ю. Ишлинского [41] и К. Магнуса [42]. Ряд случаев интегрирования уравнений движения гироскопа в сопротивляющейся среде рассмотрен в [6, 42–54]. К исследованию динамики гироскопа стал применяться метод усреднения. В работе Д. М. Климова, Г. Н. Космодемьянской, Ф. Л. Черноушко [55] исследовано быстрое движение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела или эквивалентное ему движение гироскопа с неконтактным подвесом. С помощью метода усреднения Ю. Г. Мартыненко продолжил исследования движений различных видов гироскопов с неконтактными подвесами. В его книге [56] изложены вопросы теории движения проводящего твердого тела в электрических и магнитных полях.

В работах Г. Г. Денисова, Ю. М. Урмана [57–59] проведен анализ прецессионных движений твердого тела с неподвижной точкой под действи-

ем моментов, имеющих силовую функцию. Движение гироскопа с неконтактным подвесом под действием неконсервативных моментов рассмотрено в [60].

Целый ряд исследований посвящен динамике твердого тела в сопротивляющейся среде. В работах Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, Ф. Л. Черноушко, А. Л. Рачинской [61–64] рассмотрено быстрое движение вокруг подвижной точки несимметричного тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде. Движение тела состоит из движения Эйлера–Пуансо вокруг вектора кинетического момента (с медленно убывающими величинами кинетического момента и кинетической энергии) и из движения в пространстве самого вектора кинетического момента. В результате применения метода усреднения получено автономное уравнение, описывающее движение вектора кинетического момента. Анализ этого уравнения позволяет найти квазистационарные движения, в которых движение в целом затухает (кинетический момент и кинетическая энергия стремятся к нулю), но характер движения тела вокруг вектора кинетического момента остается неизменным.

В статьях А. И. Нейштадта [65], М. Л. Пивоварова [66] исследуется движение вокруг центра масс несимметричного твердого тела, на которое действуют два малых возмущающих момента: постоянный в связанных с телом осях и линейный диссипативный, или постоянный и содержащий слагаемые, квадратично зависящие от угловой скорости.

В работе [67] рассматривается возмущенное движение вращающегося космического аппарата на круговой орбите под действием малого аэродинамического момента, пропорционального угловой скорости тела.

В работах [68–70] получены аналитические приближенные решения задачи о движении твердого тела, близкого к симметричному, а также тела с произвольными инерционными характеристиками, подверженного воздействию постоянного в связанных осях момента.

В работах [71, 72] рассмотрены задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки под действием диссипативного момента, включающие члены, линейные и квадратичные по отношению к угловой скорости.

В статье [73] и книге [56] изучается движение относительно центра масс симметричного твердого тела при наличии сопротивления среды и активного вращающего момента, обеспечивающего постоянство угловой скорости вращения ротора.

В работе [74] исследуется устойчивость вращений тела вокруг центра масс в линейно сопротивляющейся среде при наличии момента, направленного вдоль одной из главных его осей.

В книгах Б. Я. Локшина, В. А. Привалова, В. Н. Рубановского, В. А. Самонова, М. В. Шамолина [75–77] исследована задача о движении твердого тела в сопротивляющейся среде. Рассмотрены квазистационарные модели воздействия среды, пространственное движение в сопротивляющейся среде, а также движение осесимметричных тел с неподвижной точкой в потоке среды.

В работе [78] проинтегрированы уравнения Эйлера симметричного гиростата, рассматриваемого в виде твердого тела с расположенным внутри него симметричным ротором, с учетом внешних диссипативных моментов. В статье [79] рассмотрена задача о движении несимметричного твердого тела относительно центра масс в сопротивляющейся среде. Дается качественное описание фазовых траекторий, приводятся некоторые их характеристики и количественные оценки. В работе [80] получены условия глобальной асимптотической устойчивости стационарных вращений несимметричного твердого тела вокруг центра масс в поле постоянного внешнего и диссипативного моментов.

В статье [81] рассматривается свободное вращательное движение твердого тела под действием линейного вязкого момента. Работа [82] посвящена построению точного решения задачи о свободном вращении осесимметричного твердого тела с учетом момента вязкого трения, линейно зависящего от угловой скорости тела. В статье [83] при помощи численных методов исследована эволюция вращения твердого тела под действием суммы постоянного и диссипативного возмущающих моментов. В работе [84] исследуются некоторые случаи вращения твердого тела, близкие к случаю Эйлера, при различных демпфирующих моментах.

Задача исследования вращательного движения космического аппарата под действием момента сил светового давления является одним из важных разделов динамики вращательного движения твердого тела относительно центра масс. Вначале изучались спутники и КА, оснащенные протяженными солнечными батареями или отражающими антеннами. Затем рассматривались задачи об управлении ориентацией с помощью сил светового давления. Литературу по этим вопросам можно найти в обзорах [26, 85] и книгах [86–88].

В монографии [17] исследовано вращение динамически симметричного спутника на гелиоцентрической орбите под действием момента сил

светового давления. В работах [89, 90] получены интегральные характеристики силового воздействия светового потока на корпус летательного аппарата, а также приведены формулы для момента сил светового давления, действующего на тело, ограниченное поверхностью вращения.

Можно выделить основные направления исследований влияния светового давления на вращательные движения небесных объектов. Первое направление — анализ использования светового давления для ориентации КА. В конце 80-х годов XX века в СССР велись исследования по астрометрическому проекту «Регата-Астро», в рамках которого предполагалось вывести на гелиоцентрическую орбиту КА, ориентированный на Солнце давлением солнечного излучения. Различные вопросы динамики такого КА рассматривались в статьях [91–93].

Второе направление — влияние светового давления на вращательно-поступательное движение астероидов. С начала 90-х годов со всё большей активностью обсуждается опасность соударения Земли с крупным астероидом. Предсказание подобных явлений требует построения точных теорий движения астероидов. В световом потоке сложная геометрия реальных астероидов приводит к появлению возмущающих моментов, изменяющих ориентацию оси вращения и в итоге величину суммарной силы светового давления, возмущающей орбитальное движение. В качестве примера исследований такого рода отметим работы [94–96].

Третье направление — изучение так называемого эффекта Ярковского. Солнечный свет, падающий на какой-либо объект, нагревает его, в результате возникает тепловое излучение. Влияние этого эффекта на движение относительно центра масс рассматривалось в статьях [97–99].

Особенности влияния светового давления на режим ориентации и стабилизации КА с солнечными парусами или отражающими панелями изучаются в книге [100]. Расчету главного вектора и главного момента сил светового давления, действующих на КА с солнечным парусом, посвящена статья [101].

В работах Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, А. С. Шамаева [102–104] исследуется вращательное движение динамически несимметричного спутника с осесимметричной поверхностью относительно центра масс под действием момента сил светового давления. С помощью метода усреднения изучается эволюция вращений трехосного спутника, близкого к динамически-сферическому, под действием момента сил светового давления в случае, когда космический аппарат представляет собой тело вращения. При этом коэффициент момента сил светового давления аппроксимируется три-

гонометрическими полиномами по углу ориентации произвольного порядка. Найден первый интеграл системы усредненных уравнений первого приближения для углов нутации и собственного вращения. Проведен численный и качественный анализ фазовой плоскости, выявлены новые качественные эффекты вращений спутника.

В статьях [105, 106] исследуется эволюция вращений спутника Солнца, движущегося по эллиптической орбите с произвольным эксцентриситетом под действием моментов сил гравитации и светового давления.

Рассмотрим влияние моментов сил внутренней диссипации на вращение твердого тела. Задачи динамики тел с полостями, содержащими жидкость, относятся к числу классических задач механики. Фундаментальное исследование вращательного движения твердого тела, имеющего полости, заполненные однородной идеальной жидкостью, в общей постановке было проведено Н. Е. Жуковским [107].

Большой интерес к задачам о вращении твердых тел с полостями, содержащими жидкость, возник в связи с развитием ракетной и космической техники. Изложение результатов по динамике и устойчивости движения относительно центра масс тела с полостями, содержащими жидкость, дано в книгах Н. Н. Моисеева, В. В. Румянцева [108], Г. Н. Микишева, Б. И. Рабиновича [109], Г. С. Нариманова, Л. В. Докучаева, И. А. Луковского [110]. В обзорных статьях [111, 112] приведены постановки задач теории устойчивости и колебаний твердых тел с полостями, заполненными жидкостью, рассмотрены различные формы уравнений вращательного движения, их первые интегралы, дано систематическое изложение результатов исследования движения гироскопов.

Задачи динамики твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость, представляют значительно большие трудности, чем в случае идеальной жидкости. Важный вклад в решение этих задач внесли работы Ф. Л. Черноусько [113–120], обобщенные в монографии [121]. Ее перевод дан в [122]. В этих работах показано, что решение задач динамики тела с однородной вязкой жидкостью при некоторых естественных предположениях разбивается на две части: гидродинамическую и динамическую, что позволяет существенно упростить исходную задачу. В статье [113] и первой главе монографии [121, 122], результаты которых используются в данной книге, рассматривается движение относительно центра масс твердого тела с полостью, заполненной жидкостью большой вязкости (при малых числах Рейнольдса). В них построена система обыкновенных дифференциальных уравнений, приближенно (в квазистационарном приближении) описываю-

щая вращательное движение твердого тела с жидкостью вне начального малого интервала времени, когда течение в полости существенно нестационарно. Влияние жидкости на движение тела в квазистационарном приближении характеризуется некоторым тензором, который определяется только формой полости. В качестве примера рассмотрена задача о пространственном движении свободного твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью.

В работах А. И. Кобрин [123, 124] методом пограничного слоя исследован начальный участок вращения тела с полостью, содержащий жидкость большой вязкости, и указаны начальные условия для предложенной в [113, 121, 122] системы уравнений. Исследуется движение относительно центра масс управляемого тела, имеющего полость, заполненную вязкой жидкостью.

Статья [125] посвящена изучению стабилизирующего влияния вязкой жидкости в полости на вращение волчка вокруг заданной оси. В ней на основе уравнений, полученных Ф. Л. Черноусько, найдены характерное время стабилизации и наилучшая ориентация полости относительно твердого тела. В работе [126] исследуются колебания на эллиптической орбите твердого тела со сферической полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса. В статьях [127, 128] рассмотрено движение вокруг неподвижной точки в сопротивляющейся среде тяжелого твердого тела с полостями, заполненными жидкостью большой вязкости. Исследовано быстрое вращательное движение относительно центра масс динамически симметричного спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, под действием моментов сил гравитации и сопротивления среды. В работе [129] рассматривается возможность демпфирования нутационных колебаний при помощи вязкой жидкости, заполняющей полость в роторе или в рамках гироскопа.

Статья [130] посвящена исследованию колебаний твердого тела с тороидальной полостью, заполненной вязкой жидкостью. Именно тороидальные полости с жидкостью используются в системах демпфирования колебаний космических аппаратов относительно центра масс. В работе [131] изучается вращение спутника с постоянным магнитом в плоскости полярной эллиптической орбиты. Исследуется демпфирование с помощью вязкой жидкости, целиком заполняющей полость произвольной формы, при малых числах Рейнольдса. В статьях [132, 134] и книге [133] асимптотическим методом изучаются движение по инерции твердого тела и вращательное движение симметричного спутника со сферической или эллипсоидальной

ной полостью, заполненной вязкой жидкостью. Вековые эффекты во вращательном движении планеты, обусловленные диссипацией энергии в веществе ядра, исследуются в [135]. Предполагается, согласно [113, 121, 122], что влияние жидкого ядра эквивалентно действию на «замороженную» планету неконсервативного момента специального вида. В работах [136–138] исследуются быстрые вращательные движения относительно центра масс динамически несимметричного спутника с полостью, целиком заполненной жидкостью большой вязкости, под действием гравитационного и светового моментов.

В статье [139] представлены аналитические и численные результаты, полученные при исследовании движения системы, состоящей из твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью. Хаотические движения твердого тела и спутника с полостью, заполненной жидкостью, исследуются в работах [140–142].

В статьях [143, 144] рассматривается движение вокруг центра масс спутника-гиростата с полостью, содержащей жидкость, при малых числах Рейнольдса. Построено управление по принципу обратной связи, стабилизирующее стационарные движения гиростата. В книге [145] рассматриваются некоторые задачи управления вращающимися твердыми телами с полостями, заполненными идеальной или вязкой жидкостью.

Большое число работ посвящено исследованию вращения твердого тела с подвижными внутренними массами, с упругими и диссипативными элементами. Обзор работ по механике систем связанных твердых тел представлен в [146]. Обзор исследований по нелинейной динамике упругого КА или ИСЗ с деформируемыми элементами, опубликованных до начала 1980 года, дан в [147]. Работы этого направления описаны также в обзорах по динамике КА [26, 27, 148, 149].

Необходимость рассмотрения вращательной динамики системы тел возникла в связи с развитием практической космонавтики. С одной стороны, это работы, связанные с исследованием движений спутников-гиростатов, содержащих вращающиеся массы, с другой — работы, в которых учитываются упругие свойства спутников и их элементов. Ряд задач в указанных областях и библиография по этим вопросам представлены в монографиях [7, 150, 151]. В книге Б. В. Раушенбаха, Е. Н. Токаря [152] представлены уравнения углового движения носителя космического корабля, несущего подвижные массы.

В статье [153] (R. E. Roberson) рассматриваются воздействующие на спутник возмущающие моменты, которые образуются за счет относитель-

ного движения находящихся внутри спутника тел. Работа [154] (W. R. Natseltine) посвящена исследованию демпфирования нутационного движения вращающегося ИСЗ с помощью внутреннего пассивного устройства. В статье [155] (G. Colombo) и в книге [156] (W. T. Thomson) изучается влияние внутренней упругости и диссипации на движение спутника относительно центра масс.

В космическом полете иногда возникает необходимость подавить беспорядочное вращение, возникающее по каким-либо причинам. С этой целью используют относительные перемещения подвижных масс [157–161].

Значительное число работ посвящено анализу различных задач динамики космических аппаратов, содержащих внутренние подвижные массы. Изучались вопросы устойчивости и неустойчивости, резонансные явления, а также проблемы управления и стабилизации движений. В этой связи можно отметить работы [162–180].

В статьях Ф. Л. Черноушко [181–183] рассмотрены некоторые случаи движения твердого тела, содержащего подвижные внутренние массы, соединенные с телом посредством упругих и диссипативных элементов. Исследовано угловое движение твердого тела, содержащего массу сплошной вязкоупругой среды. Ряд задач о движении твердого тела, содержащего упругие и диссипативные элементы, исследован в работах [184–189]. Вопросы динамики и устойчивости вращений твердого тела, содержащего упругие и диссипативные элементы, рассматривались в статье [190], книгах [191–194].

В монографии [195] рассмотрены вопросы движения летательных аппаратов при значительных углах поворота, когда деформируемые элементы типа стержней, пластин или жидких масс под действием инерционных массовых сил совершают колебательные перемещения. В книге [133] исследованы стационарные движения механических систем с упругими элементами и их устойчивость. В монографии [196] исследована динамика составных орбитальных космических систем, состоящих из жестких и упругих деформируемых тел. В книге [197] рассмотрены вопросы движения упругих космических конструкций относительно центра масс под действием моментов сил гравитационного поля. В работе [198] исследуются переходные процессы, связанные с колебаниями упругого спутника при движении относительно центра масс под действием управляющего момента. В статье [199] найдены количественные оценки переходного процесса, приводящего вязкоупругое твердое тело шаровой формы в неконтактном подвесе к стационарному вращению вокруг оси наибольшего момента инерции. В рабо-

те [200] рассматривается свободное движение линейно-упругого твердого тела около центра масс.

В статьях [201, 202] проведено изучение влияния упругих и вязких свойств тел на их свободные угловые движения.

В работах [203, 204] исследуется вращательное движение твердого тела, несущего вязкоупругие нерастяжимые стержни. В статье [205] исследуется эволюция движения спутника с гибкими вязкоупругими стержнями на круговой орбите. В книге [206] изучаются нелинейные колебания твердого тела, упруго связанного с точечной массой, в центральном силовом поле. В работе [207] исследуются динамика и устойчивость твердого тела с внутренней диссипацией.

Проблема эволюции вращений твердого тела относительно неподвижной точки продолжает привлекать внимание исследователей. В прикладном аспекте анализ вращательных движений тел относительно неподвижной точки важен для решения задач космонавтики, входа летательных аппаратов в атмосферу, движения вращающегося снаряда, гироскопии. При этом во многих случаях в качестве порождающего (опорного) движения твердого тела, учитывающего основные моменты сил, действующих на тело, может рассматриваться движение в случае Лагранжа. Напомним, что в этом случае тело предполагается имеющим неподвижную точку и находящимся в поле тяжести, причем центр масс тела и неподвижная точка лежат на оси динамической симметрии тела. Восстанавливающий момент сил, аналогичный моменту сил тяжести, создается также аэродинамическими силами, действующими на тело в потоке газа. Поэтому движения, близкие к случаю Лагранжа, исследовались в целом ряде работ по динамике летательных аппаратов, где помимо восстанавливающего момента учитывались различные возмущающие моменты. Отметим работы Г. Е. Кузмака [208, 209] и В. А. Ярошевского [210], в которых исследовались движения относительно центра масс летательных аппаратов, входящих в атмосферу с большой скоростью. При этом использовались метод эталонных уравнений и метод усреднения.

В монографии В. С. Асланова [211] изучается движение вращающегося твердого тела в атмосфере под действием синусоидального или бигармонического восстанавливающего момента, зависящего от времени, и малых возмущающих моментов.

В книге [212] рассмотрено влияние на движение гироскопа экваториального и аксиального тормозящего моментов, играющих существенную роль при изучении вращательного движения артиллерийских снарядов.

В монографии Н. Н. Моисеева [15] исследуется задача Лагранжа о движении осесимметричного волчка под действием опрокидывающего момента, направленного перпендикулярно плоскости, проходящей через ось симметрии волчка. В статье [213] рассматривается влияние изменения направления силы, создающей опрокидывающий или восстанавливающий момент, на движение гироскопа Лагранжа. В работе [214] изучается влияние диссипативных сил на устойчивость перманентных движений гироскопа Лагранжа.

В статье [215] исследуется влияние вязкого трения на устойчивость по Ляпунову вращения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Ряд работ посвящен исследованиям движений «спящего» волчка Лагранжа. В статье [216] найдены достаточные условия устойчивости вертикального вращения волчка Лагранжа при наличии демпфирующего момента. В работе [217] получены достаточные условия асимптотической устойчивости «спящего» волчка в сопротивляющейся среде.

В статье А. М. Ковалева [218] движение тела, мало отличающегося от гироскопа Лагранжа, изучается с помощью теоремы Колмогорова – Арнольда. В работе [219] рассматривается задача о существовании периодических решений уравнений движения твердого тела вокруг неподвижной точки с распределением масс, близким к случаю Лагранжа. В книге [10] описывается применение методов усреднения типа Гаусса или введенных в небесной механике методов Фату, Н. Д. Моисеева, И. Делоне и Г. Хилла в динамике твердого тела. Исследуется периодические движения волчка Лагранжа при малом смещении его центра тяжести или при малом нарушении его осевой динамической симметрии. В работе [220] с помощью метода Хори исследуется движение тяжелого твердого тела с закрепленной точкой, распределение масс в котором мало отличается от случая Лагранжа, а центр тяжести расположен достаточно близко к этой точке. В статье [221] изучается движение тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Лагранжа при асимметрии, связанной с неравенством экваториальных моментов инерции. В работе [222] рассматривается возникновение хаотических движений тяжелого твердого тела с малым смещением центра масс с оси динамической симметрии.

В статьях [223–225] рассмотрена аналогия между возмущенной задачей о движении волчка Лагранжа в случае потенциальных возмущений и задачей о вращении спутника, центр масс которого движется по круговой орбите в экваториальной плоскости, с учетом влияния магнитного поля Земли.

В работе [226] исследованы стационарные движения твердого тела в случае Лагранжа под действием момента диссипативных сил и дебаланса тяги, создающей восстанавливающий момент. Найдены области выполнения условий устойчивости равномерных вращений. Ранее устойчивость движения симметричного тяжелого твердого тела при наличии сил сопротивления среды и момента двигателя относительно оси симметрии, заданного как функция времени, рассматривалась в статье [227].

В работе В. Ф. Журавлева [228] и в монографии [229] рассматривается задача о поведении волчка Лагранжа в случае, когда точка подвеса совершает гармонические колебания в горизонтальной плоскости. В статьях В. Н. Кошлякова [230, 231] рассматривается задача стабилизации с помощью вертикальной вибрации симметричного твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки.

Задачам динамики тяжелого твердого тела с вибрирующей точкой подвеса посвящен еще целый ряд исследований. Так, движение быстро вращающегося симметричного и близкого к симметричному гироскопа при вертикальных вибрациях точки подвеса исследовано в работах [232, 233]. В статье [234] рассматривается вращение вязкоупругого твердого тела с подвижным основанием. В работе [235] исследуются возмущенные угловые движения волчка Лагранжа при случайных колебаниях точки опоры. В статье [236] рассматривается движение волчка Лагранжа, точка подвеса которого совершает вертикальные гармонические колебания высокой частоты и малой амплитуды.

В работе [237] изучается вращение гироскопа Лагранжа, вдоль оси динамической симметрии которого перемещается точечная масса под воздействием силы тяжести и упругой силы. В статье [238] оценено влияние подвижных точечных масс (линейных осцилляторов), совершающих колебания вдоль оси симметрии волчка или вдоль осей, ортогональных оси симметрии, на устойчивость равномерного вращения волчка Лагранжа. В работе [239] рассмотрена задача о пассивной стабилизации вращений вокруг вертикали гироскопа Лагранжа с двухступенным демпфером типа «качели».

В статье [240] рассматривается движение динамически симметричного тяжелого твердого тела с неподвижной точкой под действием постоянного и диссипативного моментов. Определены стационарные режимы системы и исследована их устойчивость. В работе [241] оценено влияние диссипативного и постоянного моментов на устойчивость равномерного вращения волчка Лагранжа с произвольной осесимметричной полостью, полностью

заполненной идеальной жидкостью. Статья [242] посвящена исследованию движения симметричного волчка с полостью, заполненной вязкой жидкостью, в поле сил тяжести, когда ось волчка отклонена от вертикали. В работе [243] рассматривается движение симметричного тяжелого твердого тела с неподвижной точкой под действием сил трения, обусловленных окружающей диссипативной средой.

В статье [244] исследуется эволюция регулярных прецессий твердого тела, близкого к случаю Лагранжа. В работах [245, 246] изучается асимптотическое поведение движений гироскопа Лагранжа, близких к регулярным прецессиям, под действием малого возмущающего момента.

В работе [247] дается обзор результатов, полученных до 1998 года, по проблеме эволюции вращений твердого тела, близких к случаю Лагранжа.

Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа, исследуются при помощи метода усреднения в статье Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, Ф. Л. Черноушко [248]. В ней приведены условия возможности усреднения уравнений движения по углу нутации, получена усредненная система уравнений. Рассмотрено движение тела в среде с линейной диссипацией. В работе [249] рассматривается возмущенное движение волчка Лагранжа под действием медленно изменяющегося во времени линейного диссипативного момента.

В статьях [250, 251] рассматриваются возмущенные быстрые вращения твердого тела, близкие к регулярной прецессии. Получена и исследована усредненная система уравнений движения в первом и втором приближениях. В работах [252–254] рассматривается эволюция вращений в более общем случае, когда величина восстанавливающего момента сил зависит от угла нутации. Исследуются примеры, отвечающие постоянному и линейному внешнему моментам сил. Определяются решения усредненных систем уравнений первого и второго приближений.

В статье [189] исследуются возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа, под действием возмущающего момента, медленно изменяющегося во времени, и восстанавливающего момента, зависящего от угла нутации. В работах [255–257] исследуется эволюция вращений твердого тела, близких к регулярной прецессии, под действием восстанавливающего момента, зависящего от медленного времени и угла нутации, а также возмущающего момента, медленно изменяющегося во времени.

В работах [258, 259] рассматриваются возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагран-

жа, под действием восстанавливающего момента, зависящего от углов нутации и прецессии.

Приведенный краткий обзор не претендует на полноту и может быть существенно расширен. Однако и из этого обзора видно, что имеется значительная литература по динамике твердого тела, движущегося относительно центра масс под действием возмущающих моментов сил различной физической природы. Исследования в этой области востребованы в связи с проблемами движения летательных аппаратов (спутников, космических кораблей, самолетов, беспилотных аппаратов), небесных тел (планет, комет), гироскопов и других объектов современной техники.

ГЛАВА 1

Основы динамики твердого тела с неподвижной точкой

§ 1. Определение положения тела. Углы Эйлера

Рассмотрим твердое тело, движущееся вокруг неподвижной точки O . Положение твердого тела в пространстве в каждый момент времени определяется положением подвижной системы координат $Oxyz$, связанной с телом, относительно неподвижной системы $Ox_1y_1z_1$. Для определения положения тела задаются три независимых (между собой) параметра, соответствующие числу степеней свободы тела. Рассмотрим один из наиболее распространенных способов задания ориентации твердого тела при помощи углов Эйлера [260–263]. Плоскость Oxy пересекается с плоскостью Ox_1y_1 по прямой ON , называемой линией узлов. На рис. 1 показан угол прецессии ψ как угол между осью Ox_1 и линией узлов ON , угол нутации θ как угол между осями Oz и Oz_1 , угол собственного вращения φ как угол между линией узлов ON и осью Ox .

Обычно принимается, что $0 \leq \psi < 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Переход от системы координат $Ox_1y_1z_1$ к системе $Oxyz$ осуществляется путем трех последовательных поворотов: на угол ψ вокруг оси Oz_1 , на угол θ вокруг линии узлов ON и на угол φ вокруг оси Oz .

Случаи $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ являются особыми. В этих случаях линия узлов ON и углы φ и ψ не определены, а определена только их сумма $\varphi + \psi$.

§ 2. Геометрия масс. Моменты инерции

Моментом инерции механической системы, состоящей из n материальных точек, относительно оси u называется сумма произведений масс точек

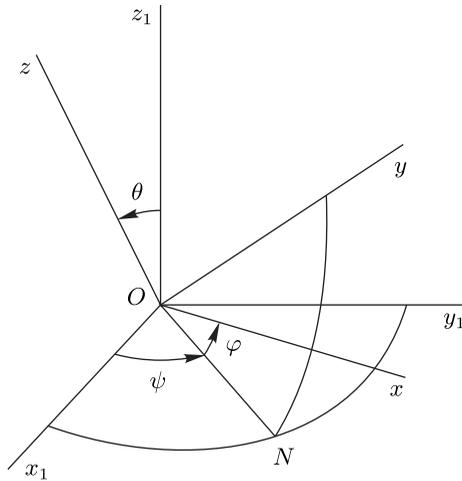


Рис. 1

системы на квадраты расстояний h_i от точек до оси:

$$J_u = \sum_{i=1}^n m_i h_i^2. \quad (1.2.1)$$

В случае твердого тела соответствующим предельным переходом получим

$$J_u = \lim_{\substack{\Delta m_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n h_i^2 \Delta m_i = \int_{(M)} h^2 dm. \quad (1.2.2)$$

Здесь интеграл определяют для всей массы тела так, что каждый элемент массы умножается на квадрат своего расстояния до оси.

Для сплошного абсолютно твердого тела масса элементарной частицы тела dm равна $dm = \rho d\tau$, где ρ — плотность тела, а $d\tau$ — элемент объема. Рассмотрим твердое тело в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$. Если тело неоднородно, то его плотность ρ меняется от точки к точке и является функцией координат $\rho = \rho(x, y, z)$. Масса всего тела M вычисляется при помощи тройного интеграла

$$M = \int \rho d\tau = \iiint \rho dx dy dz. \quad (1.2.3)$$

В (1.2.3) интегрирование производится по всему объему тела.

Если через h обозначить расстояние от бесконечно малого элемента с массой dm до оси u , то момент инерции J_u тела относительно оси u согласно (1.2.2) определяется интегралом

$$J_u = \iiint \rho h^2 dx dy dz. \quad (1.2.4)$$

В соответствии с (1.2.4) моменты инерции твердого тела относительно осей Ox , Oy и Oz имеют вид

$$\begin{aligned} J_x &= \iiint \rho(y^2 + z^2) dx dy dz, \\ J_y &= \iiint \rho(x^2 + z^2) dx dy dz, \\ J_z &= \iiint \rho(x^2 + y^2) dx dy dz. \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

Центром масс (центром инерции) механической системы называется геометрическая точка C , радиус-вектор которой определяется по формуле

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{M}, \quad (1.2.6)$$

где $M = \sum_{i=1}^n m_i$ — масса механической системы, \mathbf{r}_i — радиус-векторы точек данной механической системы.

В случае сплошного твердого тела координаты центра масс определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{M} \iiint \rho x dx dy dz, \\ y_C &= \frac{1}{M} \iiint \rho y dx dy dz, \\ z_C &= \frac{1}{M} \iiint \rho z dx dy dz. \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

Здесь M вычисляется по формуле (1.2.3).

Согласно теореме Гюйгенса–Штейнера [260, 262, 263] момент инерции механической системы относительно какой-либо оси равен сумме момента

инерции относительно центральной оси, параллельной данной, и произведения массы системы на квадрат расстояния между осями:

$$J_z = J_{z'} + Md^2. \quad (1.2.8)$$

Здесь ось z' , проходящая через центр масс, называется центральной, M — масса системы, d — расстояние между осями.

Центробежные моменты инерции определяются равенствами

$$\begin{aligned} J_{xy} &= \iiint \rho xy \, dx \, dy \, dz, \\ J_{xz} &= \iiint \rho xz \, dx \, dy \, dz, \\ J_{yz} &= \iiint \rho yz \, dx \, dy \, dz. \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

Симметрическая матрица, составленная из осевых J_x, J_y, J_z и взятых с обратным знаком центробежных моментов инерции $-J_{xy}, -J_{zy}, -J_{zx}$, называется тензором инерции тела в данной точке O :

$$J = \begin{vmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{vmatrix}. \quad (1.2.10)$$

Проведем через точку O тела три взаимно перпендикулярные оси x, y и z и произвольно направленную ось u , составляющую с этими осями углы α, β и γ соответственно. Момент инерции твердого тела относительно оси u выражается по формуле

$$J_u = J\mathbf{e} \cdot \mathbf{e},$$

где \mathbf{e} — единичный вектор (орт), направленный по оси u . В скалярной записи имеем

$$\begin{aligned} J_u &= J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma - \\ &- 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2J_{zx} \cos \gamma \cos \alpha. \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

Рассмотрим изменение момента инерции J_u , происходящее при изменении направления оси u , т. е. при изменении углов α, β, γ . Для наглядного

изображения этого изменения отложим по оси u от точки O отрезок OL длиной $1/\sqrt{J_u}$. Если исключить тела, имеющие форму бесконечно тонкого стержня, для которых момент инерции относительно оси стержня равен нулю, то точка L опишет замкнутую поверхность при изменении направления оси u . Уравнение этой поверхности записывается следующим образом:

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy} xy - 2J_{yz} yz - 2J_{zx} zx = 1. \quad (1.2.12)$$

Эта поверхность является эллипсоидом и называется эллипсоидом инерции тела для точки O . Три оси симметрии эллипсоида инерции называются главными осями инерции тела для этой точки.

Если за оси координат принять главные оси инерции $Ox'y'z'$, то тензор инерции будет диагональным и матрица (1.2.10) имеет вид

$$J = \begin{vmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{vmatrix}. \quad (1.2.13)$$

Моменты инерции A_1, A_2, A_3 называются главными моментами инерции тела для точки O . Главные оси инерции для центра масс тела называются главными центральными осями инерции.

§ 3. Теорема об изменении кинетического момента

Моментом количества движения (импульса) точки относительно полюса O называется векторное произведение радиус-вектора \mathbf{r} материальной точки, проведенного из этого полюса, на ее количество движения (импульс) $m\mathbf{v}$:

$$\mathbf{m}_0(m\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}. \quad (1.3.1)$$

Кинетическим моментом механической системы относительно полюса O называется векторная сумма моментов количеств движения точек системы относительно того же полюса:

$$\mathbf{G} = \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_0(m_i \mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i. \quad (1.3.2)$$

Здесь $m_i \mathbf{v}_i$ — количество движения i -й точки, \mathbf{r}_i — радиус-вектор, соединяющий полюс O с i -й точкой системы.

Кинетический момент твердого тела относительно полюса O в случае непрерывного распределения массы в объеме τ определяется следующим образом:

$$\mathbf{G} = \iiint \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} d\tau = \iiint \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} dx dy dz, \quad (1.3.3)$$

где ρ — плотность, \mathbf{v} — вектор скорости бесконечно малого элемента тела dm , $d\tau$ — элемент объема. В (1.3.3) интегрирование производится по всему объему.

Если тело вращается вокруг неподвижного полюса O , который принимается за начало жестко связанной с твердым телом системы координат $Oxyz$, то для проекций кинетического момента на оси этой системы координат получим

$$\begin{aligned} G_x &= J_x p - J_{xy} q - J_{xz} r, \\ G_y &= -J_{yx} p + J_y q - J_{yz} r, \\ G_z &= -J_{zx} p - J_{zy} q + J_z r. \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Здесь p, q, r — проекции вектора угловой скорости тела $\boldsymbol{\omega}$ на оси выбранной системы координат $Oxyz$.

Используя обозначение J из (1.2.10) тензора инерции тела для полюса O , можно представить (1.3.4) в виде

$$\mathbf{G} = J\boldsymbol{\omega}. \quad (1.3.5)$$

Если за подвижные оси взять главные оси инерции тела для неподвижного полюса, то формулы (1.3.4) упрощаются и записываются следующим образом:

$$G_x = A_1 p, \quad G_y = A_2 q, \quad G_z = A_3 r. \quad (1.3.6)$$

Теорема об изменении кинетического момента относительно неподвижного полюса имеет вид

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \mathbf{L}_0^e. \quad (1.3.7)$$

Таким образом, производная по времени от кинетического момента системы относительно неподвижного полюса равна главному моменту внешних сил системы относительно этого полюса.

Если $\mathbf{L}_0^e = 0$, то согласно (1.3.7) кинетический момент системы \mathbf{G} есть величина постоянная:

$$\mathbf{G} = \text{const}. \quad (1.3.8)$$

Проектируя обе части равенства (1.3.8) на оси координат, получим три скалярных интеграла:

$$G_x = C_1, \quad G_y = C_2, \quad G_z = C_3. \quad (1.3.9)$$

§ 4. Динамические уравнения Эйлера

Рассмотрим твердое тело, движущееся вокруг неподвижной точки O . Для описания движения тела введем неподвижную систему координат $Ox_1y_1z_1$.

Подвижная система координат $Oxyz$ связана с телом, и ее оси направлены по главным осям инерции тела для точки O . Применим теорему об изменении кинетического момента относительно неподвижной точки (1.3.7).

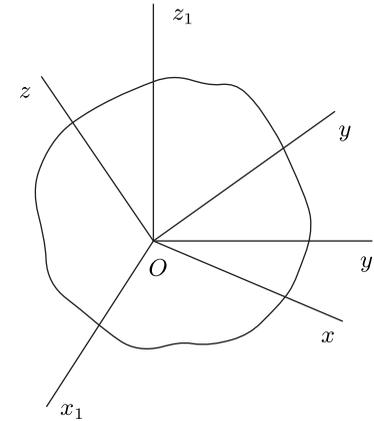


Рис. 2

Абсолютная производная $\frac{d\mathbf{G}}{dt}$ относительно неподвижной системы координат $Ox_1y_1z_1$ связана с локальной производной $\frac{\tilde{d}\mathbf{G}}{dt}$ относительно подвижной системы координат $Oxyz$ формулой

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \frac{\tilde{d}\mathbf{G}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G}. \quad (1.4.1)$$

Тогда уравнение (1.3.7) запишется в виде

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{G}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G} = \mathbf{L}_0^e. \quad (1.4.2)$$

Спроектируем обе части равенства (1.4.2) на оси подвижной системы координат $Oxyz$. Получим

$$\begin{aligned} \frac{dG_x}{dt} + qG_z - rG_y &= L_x^e, \\ \frac{dG_y}{dt} + rG_x - pG_z &= L_y^e, \\ \frac{dG_z}{dt} + pG_y - qG_x &= L_z^e. \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

Здесь p, q, r — проекции угловой скорости ω тела на оси системы координат $Oxyz$.

Если оси подвижной системы координат $Oxyz$ направлены по главным осям инерции тела для точки O , то

$$G_x = A_1 p, \quad G_y = A_2 q, \quad G_z = A_3 r, \quad (1.4.4)$$

где A_1, A_2, A_3 — главные моменты инерции тела для точки O .

В результате уравнения (1.4.3) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} A_1 \dot{p} + (A_3 - A_2)qr &= L_x^e, \\ A_2 \dot{q} + (A_1 - A_3)rp &= L_y^e, \\ A_3 \dot{r} + (A_2 - A_1)pq &= L_z^e. \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

Здесь и далее точкой обозначаются производные по времени t . Уравнения (1.4.5) называются динамическими уравнениями Эйлера.

Если L_x^e, L_y^e, L_z^e — функции p, q, r, t , то уравнения (1.4.5) образуют замкнутую систему уравнений, интегрирование которой дает зависимость величин p, q, r от времени t и начальных условий p_0, q_0, r_0 .

§ 5. Кинематические уравнения Эйлера. Направляющие косинусы

Рассмотрим твердое тело, движущееся вокруг неподвижной точки O . Обозначим неподвижную систему координат через $Ox_1y_1z_1$, а подвижную систему координат, неизменно связанную с твердым телом, — через $Oxyz$. Положение тела в данный момент времени определяется положением подвижной системы отсчета относительно неподвижной, которое задается углами Эйлера ψ, θ, φ (рис. 3).

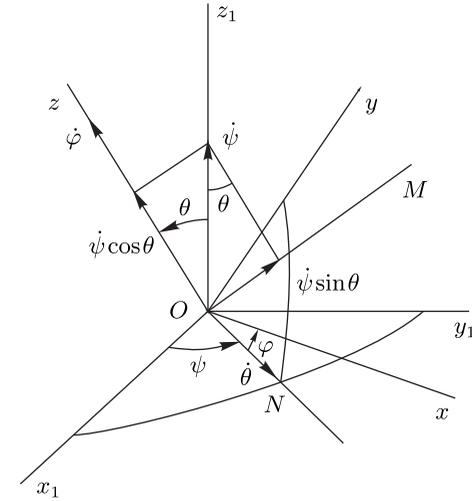


Рис. 3

Угловая скорость ω твердого тела равна сумме угловых скоростей трех вращений: с угловой скоростью $\dot{\psi}$ вокруг оси Oz_1 , с угловой скоростью $\dot{\theta}$ вокруг линии узлов ON и с угловой скоростью $\dot{\varphi}$ вокруг оси Oz (рис. 3).

Кинематические уравнения Эйлера, выражающие проекции p, q, r угловой скорости ω на оси подвижной системы координат $Oxyz$ через углы Эйлера и их производные, получим из рис. 3, на котором вспомогательная прямая OM лежит в плоскости Oxy и перпендикулярна линии узлов. Имеем

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ q &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ r &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

Соотношения, выражающие $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ через p, q, r , имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{1}{\sin \theta} (p \sin \varphi + q \cos \varphi), \\ \dot{\theta} &= p \cos \varphi - q \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= r - (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta. \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

Выражения (1.5.2) имеют особенности при малых углах нутации.

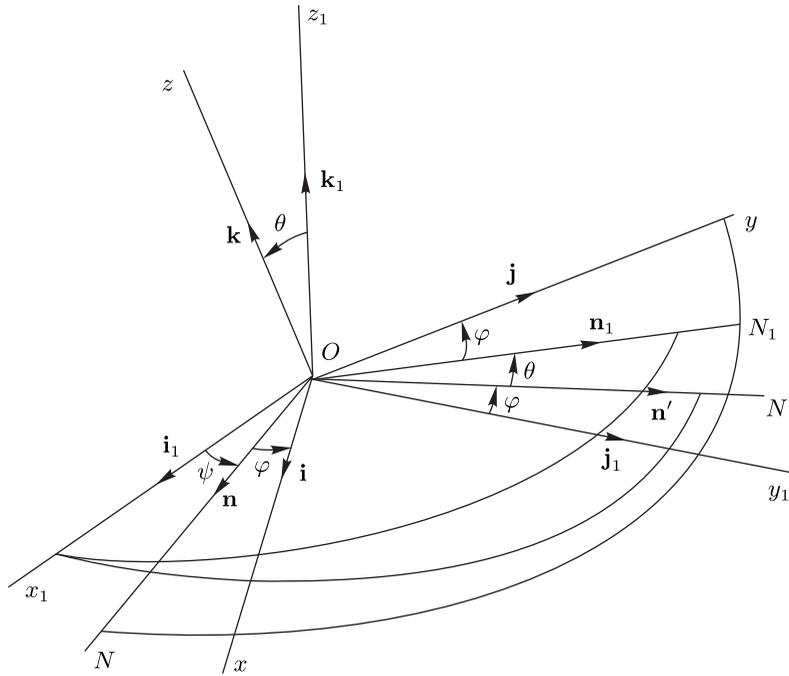


Рис. 4

Выразим направляющие косинусы осей $Oxyz$ через углы Эйлера [7]. Обозначим единичный вектор линии узлов через \mathbf{n} , единичные векторы осей Oz_1 и Oz — через \mathbf{k}_1 и \mathbf{k} соответственно. Построим два вспомогательных координатных триэдра: $\mathbf{n}, \mathbf{n}', \mathbf{k}_1$ и $\mathbf{n}, \mathbf{n}_1, \mathbf{k}$, ориентированные как правые системы координат (рис. 4), причем вектор \mathbf{n}' лежит в плоскости Ox_1y_1 , а вектор \mathbf{n}_1 — в плоскости Oxy .

Тогда единичные векторы осей Ox_1, Oy_1, Ox, Oy можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_1 &= \mathbf{n} \cos \psi - \mathbf{n}' \sin \psi, & \mathbf{j}_1 &= \mathbf{n} \sin \psi + \mathbf{n}' \cos \psi, \\ \mathbf{i} &= \mathbf{n} \cos \varphi + \mathbf{n}_1 \sin \varphi, & \mathbf{j} &= -\mathbf{n} \sin \varphi + \mathbf{n}_1 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

Заметим, что имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} &= 1, & \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1 = 0, & \mathbf{n}' \cdot \mathbf{n}_1 &= \cos \theta, \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{k}_1 = 0, & \mathbf{n}' \cdot \mathbf{k} &= -\sin \theta. \end{aligned}$$

Найдем девять направляющих косинусов осей $Oxyz$, которые равны скалярным произведениям соответствующих единичных векторов неподвижной и подвижной систем координат. Имеем

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \cos(\widehat{x_1, x}) = \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta, \\ \alpha_{12} &= \cos(\widehat{x_1, y}) = -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \theta, \\ \alpha_{13} &= \cos(\widehat{x_1, z}) = \sin \psi \sin \theta, \\ \alpha_{21} &= \cos(\widehat{y_1, x}) = \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta, \\ \alpha_{22} &= \cos(\widehat{y_1, y}) = -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta, \\ \alpha_{23} &= \cos(\widehat{y_1, z}) = -\cos \psi \sin \theta, \\ \alpha_{31} &= \cos(\widehat{z_1, x}) = \sin \varphi \sin \theta, \\ \alpha_{32} &= \cos(\widehat{z_1, y}) = \cos \varphi \sin \theta, \\ \alpha_{33} &= \cos(\widehat{z_1, z}) = \cos \theta. \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

Взаимная ориентация систем координат $Oxyz$ и $Ox_1y_1z_1$ определяется при помощи матрицы Q направляющих косинусов, задаваемых таблицей

	x	y	z	(1.5.5)
x_1	α_{11}	α_{12}	α_{13}	
y_1	α_{21}	α_{22}	α_{23}	
z_1	α_{31}	α_{32}	α_{33}	

Ее элементы α_{ij} выражаются через углы Эйлера по формулам (1.5.4).

§ 6. Уравнения движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки

Рассмотрим движение твердого тела вокруг неподвижной точки под действием силы тяжести \mathbf{P} . Направим ось Oz_1 неподвижной системы координат вертикально вверх (рис. 5).

Оси подвижной системы координат $Oxyz$ направим вдоль главных осей инерции тела для неподвижной точки O . Координаты центра тяжести C в системе координат $Oxyz$ обозначим через x_C, y_C, z_C . Ориентацию тела относительно неподвижной системы координат определим при помощи углов Эйлера (рис. 5).

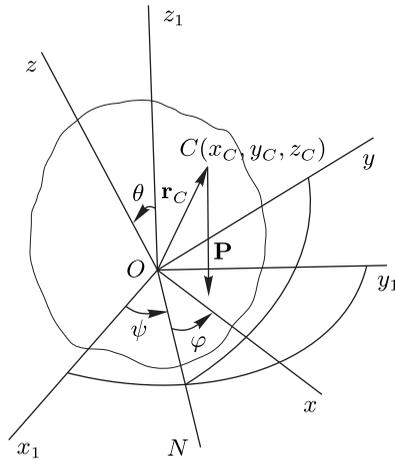


Рис. 5

Обозначим через $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ проекции единичного вектора \mathbf{k}_1 вертикальной оси Oz_1 на подвижные оси. Имеем

$$\mathbf{k}_1 = \gamma_1 \mathbf{i} + \gamma_2 \mathbf{j} + \gamma_3 \mathbf{k},$$

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — единичные векторы подвижных осей, связанных с телом. В силу уравнений (1.5.4) получим

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \alpha_{31} = \sin \varphi \sin \theta, \\ \gamma_2 &= \alpha_{32} = \cos \varphi \sin \theta, \\ \gamma_3 &= \alpha_{33} = \cos \theta. \end{aligned} \quad (1.6.1)$$

Вектор \mathbf{k}_1 постоянен в неподвижной системе координат, поэтому его абсолютная производная равна нулю: $\frac{d\mathbf{k}_1}{dt} = 0$. Учитывая связь абсолютной и локальной производных вектора, имеем

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{k}_1}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}_1 = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{k}_1}{dt} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}_1 = - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ p & q & r \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}. \quad (1.6.2)$$

Проектируя обе части этого равенства на подвижные оси, находим уравнения, называемые уравнениями Пуассона:

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = q\gamma_1 - p\gamma_2. \quad (1.6.3)$$

Получим динамические уравнения Эйлера для данной задачи. Внешними силами, действующими на тело, являются сила тяжести и реакция неподвижной точки O , не создающая момента относительно этой точки. Сила тяжести \mathbf{P} направлена противоположно оси z_1 , поэтому $\mathbf{P} = -P\mathbf{k}_1$. Момент силы тяжести относительно точки O равен

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{r}_C \times \mathbf{P} = -P\mathbf{r}_C \times \mathbf{k}_1 = P \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix}.$$

Таким образом, для рассматриваемого случая динамические уравнения Эйлера (1.4.5) имеют вид

$$\begin{aligned} A_1 \dot{p} + (A_3 - A_2)qr &= P(\gamma_2 z_C - \gamma_3 y_C), \\ A_2 \dot{q} + (A_1 - A_3)rp &= P(\gamma_3 x_C - \gamma_1 z_C), \\ A_3 \dot{r} + (A_2 - A_1)pq &= P(\gamma_1 y_C - \gamma_2 x_C). \end{aligned} \quad (1.6.4)$$

Уравнения (1.6.3), (1.6.4) образуют систему шести нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка, описывающую движение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки.

Если $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ найдены как функции времени из системы (1.6.3), (1.6.4), то функции $\theta(t), \varphi(t)$ находятся из (1.6.1), а для определения $\psi(t)$ нужно воспользоваться первым из уравнений Эйлера (1.5.2).

Таким образом, основная задача состоит в интегрировании системы уравнений (1.6.3), (1.6.4).

ГЛАВА 2

Движение твердого тела по инерции. Случай Эйлера

§ 1. Первые интегралы

В случае Эйлера главный момент внешних сил, действующих на твердое тело, относительно неподвижной точки равен нулю $\mathbf{L}_0^e = 0$. Динамические уравнения Эйлера (1.4.5) принимают вид

$$\begin{aligned} A_1 \dot{p} + (A_3 - A_2)qr &= 0, \\ A_2 \dot{q} + (A_1 - A_3)rp &= 0, \\ A_3 \dot{r} + (A_2 - A_1)pq &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

В этой главе излагаются необходимые в дальнейшем сведения об этом случае движения твердого тела [42, 52, 54, 260, 263–265].

Так как главный момент внешних сил \mathbf{L}_0^e относительно неподвижной точки O равен нулю, то согласно теореме об изменении кинетического момента (см. (1.3.8)) следует, что

$$\mathbf{G} = \text{const}, \quad (2.1.2)$$

т. е. кинетический момент тела относительно точки O постоянен в неподвижной системе отсчета $Ox_1y_1z_1$.

Найдем первый интеграл (2.1.2) по-другому. Для этого умножим уравнения движения (2.1.1) соответственно на A_1p , A_2q , A_3r и сложим их почленно; получим

$$A_1^2 p \frac{dp}{dt} + A_2^2 q \frac{dq}{dt} + A_3^2 r \frac{dr}{dt} = 0.$$

Интегрируя, имеем

$$G^2 = A_1^2 p^2 + A_2^2 q^2 + A_3^2 r^2 = \text{const}. \quad (2.1.3)$$

Здесь A_1p , A_2q , A_3r — проекции вектора \mathbf{G} на главные оси инерции тела Ox , Oy , Oz , а G^2 есть квадрат величины вектора \mathbf{G} .

Перед получением другого первого интеграла уравнений (2.1.1) напомним понятия кинетической энергии механической системы и кинетической энергии твердого тела.

Кинетической энергией механической системы называется величина T , определяемая по формуле

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2. \quad (2.1.4)$$

Здесь m_i — масса i -й точки, v_i — ее скорость.

Для твердого тела в случае непрерывного распределения массы в объеме τ выражение для кинетической энергии имеет вид

$$T = \frac{1}{2} \iiint \rho v^2 d\tau = \frac{1}{2} \iiint \rho v^2 dx dy dz, \quad (2.1.5)$$

где ρ — плотность, \mathbf{v} — вектор скорости бесконечно малого элемента тела dm , $d\tau$ — элемент объема. В (2.1.5) интегрирование производится по всему объему тела.

Если твердое тело движется вокруг неподвижной точки O — начала жестко связанной с телом системы координат $Oxyz$, то кинетическая энергия тела определяется равенством

$$T = \frac{1}{2}(J_x p^2 + J_y q^2 + J_z r^2) - J_{xy} pq - J_{xz} pr - J_{yz} qr. \quad (2.1.6)$$

Здесь J_x, J_y, J_z и J_{xy}, J_{xz}, J_{yz} — осевые и центробежные моменты инерции тела для точки O . Равенство (2.1.6) можно представить в виде

$$T = \frac{1}{2} J \omega \cdot \omega,$$

где J — тензор инерции тела для точки O (см. (1.2.10)).

Если оси Ox, Oy, Oz — главные оси инерции тела для точки O , то равенство (2.1.6) принимает вид

$$T = \frac{1}{2}(A_1 p^2 + A_2 q^2 + A_3 r^2), \quad (2.1.7)$$

где A_1, A_2, A_3 — величины главных моментов инерции для этой точки.

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы в дифференциальной форме имеет вид [260, 263]

$$dT = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^e dr_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^i dr_i. \quad (2.1.8)$$

Дифференциал кинетической энергии системы равен сумме элементарных работ всех действующих на систему внешних и внутренних сил, обозначенных верхними индексами e и i соответственно.

Равенство

$$T - T_0 = \sum_{i=1}^n A_i^e + \sum_{i=1}^n A_i^i \quad (2.1.9)$$

выражает теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме: изменение кинетической энергии системы при перемещении ее из начального положения в данное равно сумме работ на этом перемещении всех приложенных к системе внешних и внутренних сил.

Для твердого тела работа внутренних сил равна нулю, и равенство (2.1.8) принимает вид

$$dT = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^e dr_i. \quad (2.1.10)$$

Работа внешних сил, приложенных к твердому телу, вычисляется по формуле

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^e dr_i = \mathbf{R}^e \mathbf{v}_O dt + \mathbf{L}_0^e \omega dt, \quad (2.1.11)$$

где \mathbf{R}^e — главный вектор, а \mathbf{L}_0^e — главный момент внешних сил относительно полюса O , \mathbf{v}_O — скорость полюса, ω — угловая скорость тела, dt — бесконечно малый промежуток времени, соответствующий бесконечно малым перемещениям точек системы, на которых вычисляется работа.

Для движения твердого тела в случае Эйлера

$$dT = \mathbf{R}^e \mathbf{v}_O dt + \mathbf{L}_0^e \omega dt = 0,$$

так как $\mathbf{v}_O = 0, \mathbf{L}_0^e = 0$.

Поэтому существует еще один первый интеграл уравнений (2.1.1):

$$T = \frac{1}{2}(A_1 p^2 + A_2 q^2 + A_3 r^2) = \text{const}. \quad (2.1.12)$$

Этот первый интеграл получим также, умножая уравнения (2.1.1) соответственно на p, q, r и складывая их почленно. Имеем

$$A_1 p \frac{dp}{dt} + A_2 q \frac{dq}{dt} + A_3 r \frac{dr}{dt} = 0.$$

Интегрируя и обозначая через h произвольную постоянную, находим

$$A_1 p^2 + A_2 q^2 + A_3 r^2 = h. \quad (2.1.13)$$

Это интеграл энергии, так как левая часть равенства (2.1.13) — удвоенная кинетическая энергия $2T$.

§ 2. Некоторые сведения из теории эллиптических функций Якоби

Ниже даются некоторые сведения из теории эллиптических функций, нужные для дальнейших рассуждений.

Интеграл

$$u = F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} \quad (2.2.1)$$

называется эллиптическим интегралом первого рода [266–268]. Число k называется модулем эллиптического интеграла и удовлетворяет неравенствам $0 \leq k < 1$.

В частном случае $\varphi = \frac{\pi}{2}$ этот интеграл называется полным эллиптическим интегралом первого рода:

$$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}. \quad (2.2.2)$$

Этот интеграл можно разложить в ряд по степеням k (при $k^2 \ll 1$):

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4}k^2 + \dots\right). \quad (2.2.3)$$

Интеграл u (2.2.1) есть функция верхнего предела φ . Обратная функция φ от u называется амплитудой и обозначается как

$$\varphi = \operatorname{am} u. \quad (2.2.4)$$

Якоби ввел функции

$$\begin{aligned} \operatorname{sn} u &= \operatorname{sn}(u, k) = \sin \varphi = \sin \operatorname{am} u, & \operatorname{cn} u &= \operatorname{cn}(u, k) = \cos \varphi = \cos \operatorname{am} u, \\ \operatorname{dn} u &= \operatorname{dn}(u, k) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = \Delta \varphi = \frac{d\varphi}{du} = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u, k)}, \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

которые называются соответственно эллиптическим синусом, эллиптическим косинусом и дельтой амплитуды. Функции $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ имеют действительный период, равный $4K(k)$, а функция $\operatorname{dn} u$ — действительный период $2K(k)$.

Если модуль $k = 0$, то эллиптические функции вырождаются в $\sin u$ и $\cos u$. Отметим, что $\operatorname{sn} 0 = 0$, $\operatorname{cn} 0 = 1$, $\operatorname{dn} 0 = 1$.

Между функциями $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ имеют место соотношения

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1, \quad \operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u = 1. \quad (2.2.6)$$

Формулы дифференцирования эллиптических функций записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \operatorname{sn} u &= \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \\ \frac{d}{du} \operatorname{cn} u &= -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u, \\ \frac{d}{du} \operatorname{dn} u &= -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u. \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Интеграл

$$E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} dx \quad (2.2.8)$$

называется эллиптическим интегралом второго рода [266–268].

Полным эллиптическим интегралом второго рода в случае, когда $\varphi = \frac{\pi}{2}$, называется интеграл вида

$$E(k) = E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} dx. \quad (2.2.9)$$

Этот интеграл можно разложить в степенной ряд по k (при малых k^2):

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{4}k^2 + \dots\right). \quad (2.2.10)$$

§ 3. Интегрирование динамических уравнений Эйлера. Исследование движения

Получим аналитическое решение уравнений (2.1.1). Будем для определенности считать, что $A_1 > A_2 > A_3$.

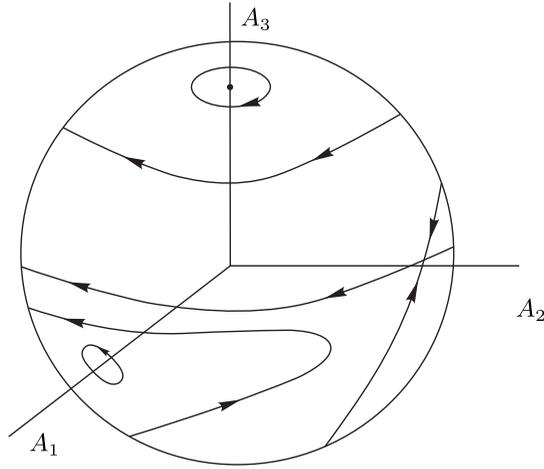


Рис. 6

На рис. 6 изображены траектории вектора \mathbf{G} в случае Эйлера. Стрелки указывают направление возрастания времени, а буквы A_1, A_2, A_3 обозначают главные центральные оси с соответствующими моментами инерции. Траектории вектора замкнуты, а стационарные движения (особые точки) — вращения вокруг главных центральных осей инерции. Вращения вокруг осей с моментами инерции A_1 и A_3 устойчивы (особые точки типа «центр»), а вокруг средней оси с моментом инерции A_2 — неустойчивы (особая точка «седло», $A_1 > A_2 > A_3$). Сепаратрисы отделяют траектории, охватывающие ось A_1 , для которых имеют место неравенство $2TA_2 < G^2$, от траекторий, охватывающих ось A_3 (для них $2TA_2 > G^2$). Отметим еще, что справедливо неравенство $2TA_1 \geq G^2 \geq 2TA_3$, которое следует из (2.1.3), (2.1.12) при $A_1 > A_2 > A_3$ и которое превращается в равенство при вращениях тела вокруг осей с моментами инерции A_1, A_3 .

Выразим величины p^2 и r^2 через q^2, A_1, A_2, A_3 и постоянные T, G из первых интегралов (2.1.3), (2.1.12):

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{1}{A_1(A_3 - A_1)} [2TA_3 - G^2 - A_2(A_3 - A_2)q^2], \\ r^2 &= \frac{1}{A_3(A_3 - A_1)} [G^2 - 2TA_1 - A_2(A_2 - A_1)q^2]. \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Подставляя во второе из уравнений (2.1.1) найденные значения p и r , получим

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \pm \frac{1}{A_2 \sqrt{A_1 A_3}} \{ [2TA_3 - G^2 - A_2(A_3 - A_2)q^2] \times \\ &\quad \times [G^2 - 2TA_1 - A_2(A_2 - A_1)q^2] \}^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Если это уравнение с разделяющимися переменными проинтегрировано, то p и q определяются из выражений (2.3.1).

Рассмотрим три случая, соответствующие различным соотношениям между T и G .

1. Пусть выполняются неравенства $2TA_2 > G^2 \geq 2TA_3$, соответствующие траекториям (см. рис. 6), охватывающим ось A_3 . В этом случае величина r всегда отлична от нуля. Вводим новые переменные для интегрирования уравнения (2.3.2):

$$q = \pm \sqrt{\frac{G^2 - 2TA_3}{A_2(A_2 - A_3)}} \sin \lambda, \quad \tau = \sqrt{\frac{(A_2 - A_3)(2TA_1 - G^2)}{A_1 A_2 A_3}} (t - t_0),$$

где t_0 — произвольная постоянная, а также положительный параметр $k^2 < 1$ согласно формуле

$$k^2 = \frac{(A_1 - A_2)(G^2 - 2TA_3)}{(A_2 - A_3)(2TA_1 - G^2)}. \quad (2.3.3)$$

Уравнение (2.3.2) в новых переменных имеет вид

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \lambda}. \quad (2.3.4)$$

Пусть $q = 0$ при $t = 0$. Тогда из (2.3.4) согласно § 2 данной главы найдем $\lambda = \text{am } \tau$. Решение уравнений Эйлера (2.1.1) в данном случае выражается через эллиптические функции Якоби следующим образом:

$$\begin{aligned} p &= \mp \sqrt{\frac{G^2 - 2TA_3}{A_1(A_1 - A_3)}} \text{cn } \tau, \\ q &= \pm \sqrt{\frac{G^2 - 2TA_3}{A_2(A_2 - A_3)}} \text{sn } \tau, \\ r &= \sqrt{\frac{2TA_1 - G^2}{A_3(A_1 - A_3)}} \text{dn } \tau. \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Здесь одновременно берутся или только верхние, или только нижние знаки.

2. Рассмотрим движение при условии $2TA_1 \geq G^2 > 2TA_2$, соответствующем траекториям на рис. 6, охватывающим ось A_1 . В этом случае величина p во все время движения отлична от нуля.

Замена переменных имеет вид

$$q = \pm \sqrt{\frac{2TA_1 - G^2}{A_2(A_1 - A_2)}} \sin \lambda, \quad \tau = \sqrt{\frac{(A_1 - A_2)(G^2 - 2TA_3)}{A_1A_2A_3}}(t - t_0).$$

Введем обозначение для квадрата модуля эллиптических функций k^2 :

$$k^2 = \frac{(A_2 - A_3)(2TA_1 - G^2)}{(A_1 - A_2)(G^2 - 2TA_3)}. \quad (2.3.6)$$

Тогда уравнение (2.3.2) принимает вид (2.3.4), и при условии $q = 0$ для $t = t_0$ решение уравнений (2.1.1) записывается в виде

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{\frac{G^2 - 2TA_3}{A_1(A_1 - A_3)}} \operatorname{dn} \tau, \\ q &= \pm \sqrt{\frac{2TA_1 - G^2}{A_2(A_1 - A_2)}} \operatorname{sn} \tau, \\ r &= \mp \sqrt{\frac{2TA_1 - G^2}{A_3(A_1 - A_3)}} \operatorname{cn} \tau. \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

3. Если $G^2 = 2TA_2$, то равенства (2.3.1) имеют вид

$$p^2 = \frac{(A_2 - A_3)}{A_1(A_1 - A_3)}(2T - A_2q^2), \quad r^2 = \frac{(A_1 - A_2)}{A_3(A_1 - A_3)}(2T - A_2q^2). \quad (2.3.8)$$

Отсюда следует, что $A_1(A_1 - A_2)p^2 = A_3(A_2 - A_3)r^2$.

Если положить

$$\tau = \sqrt{\frac{2T(A_1 - A_2)(A_2 - A_3)}{A_1A_2A_3}}(t - t_0),$$

то уравнение (2.3.2) в данном случае принимает вид

$$\frac{dq}{d\tau} = \pm \frac{1}{\sqrt{2TA_2}}(2T - A_2q^2). \quad (2.3.9)$$

Сохраняем знак плюс в правой части (2.3.9). Пусть $q = 0$ при $t = t_0$. Тогда из (2.3.9) и (2.3.8) находим решение уравнений Эйлера (2.1.1), выражающееся через гиперболические функции

$$p = \sqrt{\frac{2T(A_2 - A_3)}{A_1(A_1 - A_3)}} \frac{1}{\operatorname{ch} \tau}, \quad q = \sqrt{\frac{2T}{A_2}} \operatorname{th} \tau, \quad r = -\sqrt{\frac{2T(A_1 - A_2)}{A_3(A_1 - A_3)}} \frac{1}{\operatorname{ch} \tau}. \quad (2.3.10)$$

Траектории движения вектора \mathbf{G} на единичной сфере в этом случае представляют собой сепаратрисы, разделяющие периодические движения, охватывающие оси A_1 и A_3 .

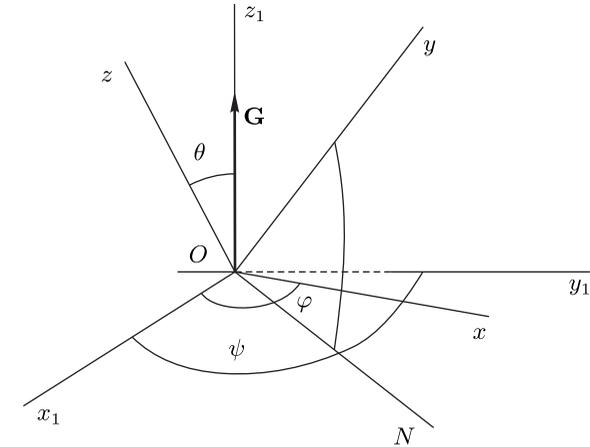


Рис. 7

Если величины p , q , r определены как функции времени, то углы Эйлера ψ , θ , φ можно найти из кинематических уравнений Эйлера (1.5.1). Однако вычисления можно упростить, если воспользоваться постоянством вектора кинетического момента \mathbf{G} и выбрать неподвижную систему координат $Ox_1y_1z_1$ (рис. 7) так, чтобы направление оси Oz_1 совпадало с неизменным направлением вектора \mathbf{G} .

При таком выборе системы координат проекции A_1p , A_2q , A_3r вектора \mathbf{G} на оси связанной с телом системы координат Ox , Oy , Oz , образованной главными осями инерции, вычисляются по формулам, согласно рис. 7,

$$A_1p = G \sin \theta \sin \varphi, \quad A_2q = G \sin \theta \cos \varphi, \quad A_3r = G \cos \theta. \quad (2.3.11)$$

Отсюда сразу определяются два угла Эйлера:

$$\cos \theta = \frac{A_3 r}{G}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 p}{A_2 q}. \quad (2.3.12)$$

Для определения угла ψ воспользуемся выражением (1.5.2) для $\dot{\psi}$:

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\sin \theta} (p \sin \varphi + q \cos \varphi).$$

Если в это выражение подставить величины $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$, полученные из первых двух равенств (2.3.11), и воспользоваться третьим равенством (2.3.11), получим

$$\dot{\psi} = G \frac{2T - A_3 r^2}{G^2 - A_3^2 r^2}. \quad (2.3.13)$$

Если динамические уравнения Эйлера проинтегрированы, то правые части равенств (2.3.12), (2.3.13) — известные функции времени t .

Движения тела, отличные от перманентных вращений и движений, отвечающих сепаратрисам, будут двухчастотными. Одна частота является частотой ω_1 периодических колебаний углов θ и φ , определяемых из (2.3.12), (2.3.5) или из (2.3.12), (2.3.7). Вторая частота ω_2 — среднее по времени значение правой части уравнения (2.3.13).

Если частоты ω_1 и ω_2 соизмеримы (отношение ω_1/ω_2 — рациональное число), то имеет место резонансный случай. В этом случае движение тела в пространстве периодическое. Если частоты ω_1 и ω_2 несоизмеримы (нерезонансный случай), то движение тела в пространстве условно периодическое.

Отметим одно свойство построенного решения, используемое в дальнейшем (см. также [265]). Для всех движений, кроме движения по сепаратрисам, переменные p , q , r периодичны по t с периодом τ , зависящим от постоянных G и T . Углы θ и φ , определяемые соотношениями (2.3.12), также либо периодичны для этих движений с периодом $\tau(G, T)$, либо получают за период приращения, равные 2π . Угол ψ , определяемый из уравнения (2.3.13), обладает для рассматриваемых движений следующим свойством: он может быть представлен в виде

$$\psi(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t), \quad \psi_2 = \frac{2\pi(t + t_0)}{\tau}, \quad t_0 = \text{const},$$

где τ' — период, а функции $\psi_1(t)$ обладает теми же свойствами периодичности с периодом τ , что и функции $\theta(t)$ и $\varphi(t)$. Предположим, что периоды $\tau' = \tau'(G, T)$ и τ несоизмеримы.

§ 4. Частные случаи (регулярная прецессия, стационарные вращения)

В частном случае, когда эллипсоид инерции относительно неподвижной точки O является эллипсоидом вращения, интегрирование уравнений движения в случае Эйлера проводится в элементарных функциях. В этом случае тело называют динамически симметричным и два его главных момента инерции для точки O равны $A_1 = A_2$. В этом случае динамические уравнения Эйлера (2.1.1) принимают вид

$$\begin{aligned} A_1 \dot{p} + (A_3 - A_1)qr &= 0, \\ A_1 \dot{q} + (A_1 - A_3)rp &= 0, \\ A_3 \dot{r} &= 0. \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Из последнего уравнения системы (2.4.1) следует, что

$$r = r_0 = \text{const}, \quad (2.4.2)$$

т. е. проекция угловой скорости тела на его ось динамической симметрии постоянна.

Решение первых двух уравнений системы (2.4.1) имеет вид

$$\begin{aligned} p &= p_0 \cos \lambda t + q_0 \sin \lambda t, \\ q &= -p_0 \sin \lambda t + q_0 \cos \lambda t. \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Здесь $\lambda = \frac{A_1 - A_3}{A_1} r_0$, а индексом 0 обозначены начальные значения соответствующих величин.

Неподвижную систему координат $Ox_1y_1z_1$ выберем, как и в § 3, направив ось Oz_1 по постоянному в случае Эйлера вектору \mathbf{G} (рис. 7). Тогда проекции вектора кинетического момента на подвижные оси $Oxyz$ определяются равенствами (2.3.11).

Из последнего уравнения (2.3.11) следует, что

$$\cos \theta = \frac{A_3 r_0}{G} = \text{const}, \quad (2.4.4)$$

т. е. угол нутации постоянен: $\theta = \theta_0 = \text{const}$.

Кинематические уравнения Эйлера (1.5.1) первой главы при $\theta = \theta_0$, $r = r_0$ дают

$$p = \dot{\psi} \sin \theta_0 \sin \varphi, \quad q = \dot{\psi} \sin \theta_0 \cos \varphi, \quad r = \dot{\psi} \cos \theta_0 + \dot{\varphi}. \quad (2.4.5)$$

Подставив выражение для p из (2.4.5) в первое из уравнений (2.3.11), получим

$$\dot{\psi} = \frac{G}{A_1} = \omega_2 = \text{const}. \quad (2.4.6)$$

Величина ω_2 называется угловой скоростью прецессии.

Используя формулы (2.4.4) и (2.4.6), с помощью последнего из равенств (2.4.5) определим $\dot{\varphi}$:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} = r_0 - \dot{\psi} \cos \theta_0 = r_0 - \frac{G}{A_1} \cos \theta_0 = r_0 - \frac{A_3}{A_1} r_0 = \frac{A_1 - A_3}{A_1} r_0 = \\ = \lambda = \omega_1 = \text{const}, \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

где λ введено в формулах (2.4.3), а ω_1 называется угловой скоростью собственного вращения.

Движение твердого тела вокруг неподвижной точки, состоящее из его вращения вокруг оси, связанной с телом, и вращения этой оси вокруг пересекающей ее оси, неподвижной в рассматриваемой системе отсчета, называют прецессией. Прецессия называется регулярной, если вращение тела вокруг связанной с ним оси и вращение самой оси происходят с постоянными по численной величине угловыми скоростями.

Таким образом, динамически симметричное тело совершает регулярную прецессию в случае Эйлера. При этом ось симметрии тела описывает круговой конус с осью \mathbf{G} , а вращение оси симметрии вокруг \mathbf{G} происходит с постоянной угловой скоростью ω_2 . Одновременно тело вращается вокруг оси симметрии с постоянной угловой скоростью ω_1 .

Уравнения (2.1.1) допускают частные решения, отвечающие вращениям твердого тела с постоянной угловой скоростью вокруг оси, проходящей через неподвижную точку O . Такие движения называются стационарными вращениями. В этом случае величины p , q , r постоянны. Тогда из (2.1.1) следует, что

$$(A_3 - A_2)qr = 0, \quad (A_1 - A_3)rp = 0, \quad (A_2 - A_1)pq = 0. \quad (2.4.8)$$

В случае различных главных моментов инерции равенства (2.4.8) возможны, лишь если две из трех величин p , q , r равны нулю. Таким образом,

в общем случае стационарное вращение тела может происходить только вокруг одной из главных осей инерции тела для точки O , причем величина угловой скорости тела может быть произвольной постоянной.

Для динамически симметричного тела ($A_1 = A_2 \neq A_3$) равенства (2.4.8) выполняются либо при $p = q = 0$, либо при $r = 0$. В этом случае стационарные вращения возможны либо вокруг оси динамической симметрии ($p = q = 0$, $r = r_0$), либо вокруг любой из осей перпендикулярной оси динамической симметрии.

Если же все три главных момента инерции равны друг другу ($A_1 = A_2 = A_3$), то уравнения (2.4.8) удовлетворяются при любых постоянных $p = p_0$, $q = q_0$, $r = r_0$. В этом случае тело равномерно вращается вокруг некоторой неподвижной в пространстве оси, направление которой определяется начальными данными и может быть взято произвольно. При этом условии ($A_1 = A_2 = A_3$) эллипсоид инерции для точки O — сфера, и поэтому любая ось, проходящая через точку O , — главная ось инерции тела.

ГЛАВА 3

Случай Лагранжа

§ 1. Интегрирование уравнений движения и его исследование

Пусть эллипсоид инерции твердого тела относительно неподвижной точки O является эллипсоидом вращения, т. е. $A_1 = A_2$, а центр тяжести тела лежит на оси динамической симметрии тела. Введем подвижную и неподвижную системы координат $Oxyz$ и $Ox_1y_1z_1$ следующим образом (рис. 8).

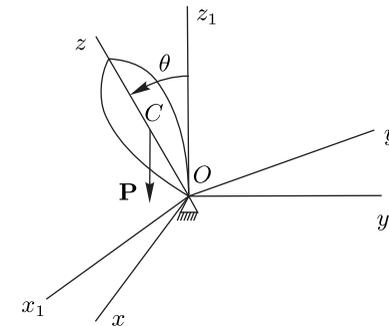


Рис. 8

Общее начало этих двух систем координат выберем в неподвижной точке O . Ось Oz_1 неподвижной системы координат вертикальна. Ось Oz подвижной системы координат, неизменно связанной с телом, направим по оси динамической симметрии. Обозначим радиус-вектор центра тяжести C относительно точки O через $l(0, 0, l)$, а направляющие косинусы вертикальной оси Oz_1 относительно подвижных осей — через $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Их выражения через углы Эйлера определяются формулами (1.6.1). Проекции силы тяжести тела $\mathbf{P} = mg$ на подвижные оси имеют

вид $\mathbf{P}(-mg\gamma_1, -mg\gamma_2, -mg\gamma_3)$. Составим динамические уравнения Эйлера. Момент силы тяжести относительно неподвижной точки O равен

$$\mathbf{L} = \mathbf{l} \times \mathbf{P} = -P \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & l \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

или

$$\begin{aligned} L_x &= mgl\gamma_2 = mgl \sin \theta \cos \varphi, \\ L_y &= -mgl\gamma_1 = -mgl \sin \theta \sin \varphi, \\ L_z &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

Динамические уравнения Эйлера для рассматриваемого случая Лагранжа примут вид

$$\begin{aligned} A_1 \dot{p} + (A_3 - A_1)qr &= mgl \sin \theta \cos \varphi, \\ A_1 \dot{q} + (A_1 - A_3)pr &= -mgl \sin \theta \sin \varphi, \\ A_3 \dot{r} &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Присоединим к этим уравнениям кинематические уравнения Эйлера (1.5.1):

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ q &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ r &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Определим первые интегралы уравнений движения. Единичный вектор ξ^0 , направленный вдоль неподвижной вертикальной оси Oz_1 , в проекциях на подвижные оси выражается следующим образом:

$$\xi^0 = \gamma_1 \mathbf{i} + \gamma_2 \mathbf{j} + \gamma_3 \mathbf{k}. \quad (3.1.4)$$

Возводя в квадрат обе части уравнения (3.1.4), получим тривиальный интеграл в виде

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1. \quad (3.1.5)$$

Для получения следующего интеграла применим теорему об изменении кинетического момента относительно оси Oz_1 . Так как момент силы тяжести относительно этой оси равен нулю, то

$$\frac{dG_1}{dt} = 0.$$

Отсюда $G_1 = G_{z_1} = \text{const}$.

Для рассматриваемого случая кинетический момент в проекциях на подвижные оси определяется формулой

$$\mathbf{G} = A_1 p \mathbf{i} + A_1 q \mathbf{j} + A_3 r \mathbf{k}. \quad (3.1.6)$$

Скалярно перемножая векторы (3.1.6) и (3.1.4), найдем первый интеграл — проекцию вектора кинетического момента на вертикаль Oz_1 :

$$\begin{aligned} G_1 &= \mathbf{G} \cdot \xi^0 = A_1(p\gamma_1 + q\gamma_2) + A_3 r \gamma_3 = \\ &= A_1 \sin \theta (p \sin \varphi + q \cos \varphi) + A_3 r \cos \theta = C_1 = \text{const}. \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Еще один первый интеграл получим из теоремы о сохранении полной энергии. Потенциальная энергия тела равна

$$\Pi = mgz_{1C}, \quad (3.1.8)$$

где $z_{1C} = l\gamma_3 = l \cos \theta$ — координата центра тяжести C в неподвижной системе отсчета.

Принимая во внимание выражение кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2}[A_1(p^2 + q^2) + A_3 r^2],$$

запишем интеграл энергии в виде

$$H = T + \Pi = \frac{1}{2}[A_1(p^2 + q^2) + A_3 r^2] + mgl \cos \theta = C_2 = \text{const}. \quad (3.1.9)$$

Здесь H — полная энергия тела.

Последнее уравнение системы (3.1.2) показывает, что

$$r = C_3 = \text{const}. \quad (3.1.10)$$

Рассмотрим необходимые в дальнейшем сведения о движении твердого тела в случае Лагранжа [42, 52–54, 212, 260, 269–272]. Первый интеграл (3.1.7) с помощью кинематических уравнений Эйлера (1.5.1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} G_1 &= A_1[(\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi) \sin \theta \sin \varphi + \\ &+ (\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) \sin \theta \cos \varphi] + A_3 r \cos \theta = C_1. \end{aligned}$$

После упрощений получим

$$G_1 = A_1 \dot{\psi} \sin^2 \theta + A_3 r \cos \theta = C_1. \quad (3.1.11)$$

Интеграл энергии (3.1.9) после аналогичных подстановок выражается следующим образом:

$$H = \frac{1}{2} [A_1 (\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + A_3 r^2] + mgl \cos \theta = C_2. \quad (3.1.12)$$

Интеграл (3.1.10) с помощью кинематических уравнений Эйлера запишем в виде

$$r = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} = C_3. \quad (3.1.13)$$

Обозначим

$$\cos \theta = u \quad (3.1.14)$$

и выразим $\dot{\psi}$ и $\dot{\varphi}$ как функции u . Из соотношения (3.1.11) с учетом (3.1.14) находим

$$\dot{\psi} = \frac{G_1 - A_3 r u}{A_1 (1 - u^2)}. \quad (3.1.15)$$

Из равенства (3.1.13) получим

$$\dot{\varphi} = r - \frac{(G_1 - A_3 r u)u}{A_1 (1 - u^2)}. \quad (3.1.16)$$

Выражение (3.1.12) приобретает вид

$$\dot{\theta}^2 = \frac{1}{A_1} (2H - A_3 r^2 - 2mglu) - \frac{(G_1 - A_3 r u)^2}{A_1^2 (1 - u^2)}. \quad (3.1.17)$$

На основании (3.1.14) имеем

$$\theta = \arccos u, \quad \dot{\theta} = -\frac{\dot{u}}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

Поэтому уравнение (3.1.17) записывается следующим образом:

$$\dot{u}^2 = Q(u) = \frac{1}{A_1^2} [A_1 (2H - A_3 r^2 - 2mglu)(1 - u^2) - (G_1 - A_3 r u)^2]. \quad (3.1.18)$$

Для любого движения тела выполняются условия $u = \cos \theta \in [-1, 1]$ и $\dot{u}^2 = Q(u) \geq 0$. Следовательно, существует значение $u_0 \in [-1, 1]$, для которого $Q(u_0) > 0$. Кроме того, в силу (3.1.18) имеем

$$Q(-\infty) < 0, \quad Q(-1) < 0, \quad Q(+1) < 0, \quad Q(+\infty) > 0. \quad (3.1.19)$$

Следовательно, многочлен третьей степени $Q(u)$ имеет три вещественных корня u_1, u_2, u_3 , расположенных в интервалах

$$-1 \leq u_1 \leq u_0 \leq u_2 \leq +1 < u_3 < +\infty. \quad (3.1.20)$$

Представим многочлен $Q(u)$ (3.1.18) в виде

$$Q(u) = \frac{2mgl}{A_1} (u - u_1)(u - u_2)(u - u_3). \quad (3.1.21)$$

Для того чтобы производная \dot{u} имела вещественное значение, из (3.1.18) и (3.1.21) следует, что величина u должна удовлетворять неравенству

$$u_1 \leq u \leq u_2.$$

Введем новую переменную γ соотношением

$$u = u_1 \cos^2 \gamma + u_2 \sin^2 \gamma = u_1 + (u_2 - u_1) \sin^2 \gamma. \quad (3.1.22)$$

Найдем

$$\begin{aligned} u - u_1 &= (u_2 - u_1) \sin^2 \gamma, \\ u - u_2 &= -(u_2 - u_1) \cos^2 \gamma, \\ u - u_3 &= -(u_3 - u_1) \left(1 - \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1} \sin^2 \gamma\right). \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

Введем обозначение

$$k^2 = \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1}, \quad (3.1.24)$$

причем в силу (3.1.20) имеем $0 \leq k^2 < 1$. Дифференцируя соотношение (3.1.22), получим

$$\dot{u} = 2(u_2 - u_1) \dot{\gamma} \sin \gamma \cos \gamma. \quad (3.1.25)$$

Подставляя (3.1.23) и (3.1.25) в равенство $\dot{u}^2 = Q(u)$ и используя соотношение (3.1.21), найдем

$$\dot{\gamma} = \pm \alpha \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}, \quad \alpha = [mgl(u_3 - u_1)/(2A_1)]^{1/2}. \quad (3.1.26)$$

При увеличении u от u_1 до u_2 знак перед корнем будет положительным, при уменьшении от u_2 до u_1 — отрицательным. При изменении γ от 0 до $\pi/2$ знак перед корнем в правой части (3.1.26) положителен, а при увеличении γ от $\pi/2$ до π — отрицателен.

Для промежутка времени, соответствующего изменению γ от 0 до $\pi/2$, найдем

$$\alpha t + \beta = \int_0^\gamma \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}}. \quad (3.1.27)$$

Здесь β — постоянная интегрирования. Используя свойства эллиптических функций (см. § 2 главы 2), найдем с помощью амплитуды Якоби

$$\gamma = \text{am}(\alpha t + \beta). \quad (3.1.28)$$

Отсюда согласно (3.1.22) решение уравнения (3.1.18) выражается через эллиптический синус в виде

$$\begin{aligned} u = \cos \theta &= u_1 + (u_2 - u_1) \text{sn}^2(\alpha t + \beta), \\ \text{sn}(\alpha t + \beta) &= \sin \text{am}(\alpha t + \beta, k). \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

Переменные ψ и φ получаются квадратурами из уравнений (3.1.15), (3.1.16).

Функция u , задаваемая соотношением (3.1.29), зависит от четырех постоянных интегрирования G_1 , H , r и β . Последующее интегрирование уравнений (3.1.15), (3.1.16) даст еще две произвольные постоянные.

Общее решение (выражения для угловых скоростей, направляющих косинусов или углов Эйлера) в различных формах представлено в работах [53, 272–275].

Для наглядного представления свойств движения твердого тела в случае Лагранжа используем геометрический метод. Опишем вокруг неподвижной точки тела сферу единичного радиуса и рассмотрим кривую, описываемую на поверхности сферы концом единичного вектора ON , направленного вдоль оси динамической симметрии Oz (рис. 8). Конец этого вектора называется апексом. Движение апекса по сфере изобразит движение оси Oz , т. е. прецессию и нутацию гироскопа.

Так как $u = \cos \theta$, то из вывода о том, что для движения u находится в границах $u_1 \leq u \leq u_2$, следует, что

$$\theta_1 \geq \theta \geq \theta_2, \quad (3.1.30)$$

где $\cos \theta_1 = u_1$, $\cos \theta_2 = u_2$.

Угол нутации θ согласно закону его изменения (3.1.29) является периодической функцией времени с периодом

$$T = \frac{2K(k)}{\alpha},$$

где K — полный эллиптический интеграл первого рода. Из (3.1.29) также следует, что возрастание угла θ от значения θ_2 до θ_1 и его убывание от значения θ_1 до θ_2 происходят монотонно за промежуток времени $\frac{K(k)}{\alpha}$. При этом точка N описывает на сфере волнистую линию, заключенную между двумя параллелями, образующимися при пересечении сферы конусами с углами раствором $2\theta_2$ и $2\theta_1$ (рис. 9). Через равные промежутки времени $\frac{K(k)}{\alpha}$ эта точка поочередно попадает на верхнюю или на нижнюю параллель.

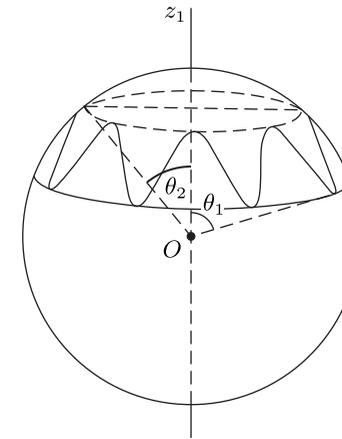


Рис. 9

Вид траектории апекса между ограничивающими ее параллелями зависит от характера прецессионного движения. Угловая скорость прецессии определяется формулой (3.1.15). Знаменатель выражения (3.1.15) — величина положительная, поэтому направление прецессии зависит от значения постоянной G_1 , т. е. от начальных условий. Возможны следующие случаи.

- 1) При $G_1 > A_3 r \cos \theta_2$ (или $G_1 < A_3 r \cos \theta_1$) во все время движения выполняются неравенства $\cos \theta_1 \leq \cos \theta \leq \cos \theta_2$, и в этом случае $\dot{\psi}$ имеет один и тот же знак и не обращается в нуль при $\theta = \theta_1$ или $\theta = \theta_2$,

когда $\dot{\theta} = 0$. Отсюда следует, что кривая, вычерчиваемая точкой N , касается параллелей, приведенных на рис. 9.

- 2) Если выполняется равенство $G_1 = A_3 r \cos \theta_2$, то при достижении углом нутации значения θ_2 в нуль обращается не только величина $\dot{\theta}$, но и величина $\dot{\psi}$. Траектория апекса имеет вид сферической циклоиды, изображенной на рис. 10.

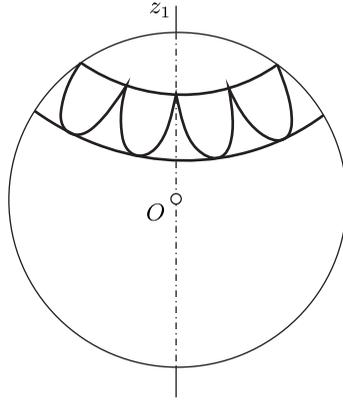


Рис. 10

- 3) Проанализируем случай, когда выполняются неравенства

$$A_3 r \cos \theta_1 < G_1 < A_3 r \cos \theta_2.$$

Для углов θ , удовлетворяющих условию $\cos \theta_1 \leq \cos \theta < \frac{G_1}{A_3 r}$, угловая скорость прецессии $\dot{\psi}$ положительна, а при $\frac{G_1}{A_3 r} < \cos \theta \leq \cos \theta_2$ она отрицательна. Следовательно, при угле θ^* , удовлетворяющем уравнению $\cos \theta^* = \frac{G_1}{A_3 r}$, направление прецессии изменится. В этом случае траектория апекса будет петлеобразной кривой (рис. 11).

§ 2. Регулярная прецессия

Частный тип движения твердого тела в случае Лагранжа характеризуется постоянным значением угла нутации $\theta = \theta_0$. Исключим в уравнениях движения (3.1.2) переменные p и q при помощи кинематических уравнений

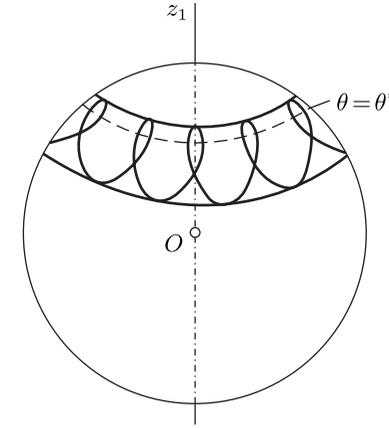


Рис. 11

Эйлера (3.1.3). Подставив в (3.1.2), (3.1.3) $r = r_0$ и $\theta = \theta_0$ ($\dot{\theta} = 0$), находим

$$\begin{aligned} A_1 \dot{p} + (A_3 - A_1) q r_0 &= mgl \sin \theta_0 \cos \varphi, \\ A_1 \dot{q} + (A_1 - A_3) p r_0 &= -mgl \sin \theta_0 \sin \varphi, \\ p &= \dot{\psi} \sin \theta_0 \sin \varphi, \\ q &= \dot{\psi} \sin \theta_0 \cos \varphi. \end{aligned}$$

После исключения из этих уравнений p и q получим

$$\begin{aligned} A_1 (\ddot{\psi} \sin \varphi + \dot{\psi} \dot{\varphi} \cos \varphi) + (A_3 - A_1) r_0 \dot{\psi} \cos \varphi &= mgl \cos \varphi, \\ A_1 (\ddot{\psi} \cos \varphi - \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \varphi) + (A_1 - A_3) r_0 \dot{\psi} \sin \varphi &= -mgl \sin \varphi. \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Умножив первое уравнение (3.2.1) на $\sin \varphi$, второе — на $\cos \varphi$ и сложив их, находим

$$A_1 \ddot{\psi} = 0, \quad \dot{\psi} = \dot{\psi}_0 = \text{const.} \quad (3.2.2)$$

Из третьего уравнения (3.1.3) с учетом (3.1.10) и (3.2.2) следует

$$\dot{\varphi} = r_0 - \dot{\psi}_0 \cos \theta_0 = \dot{\varphi}_0 = \text{const.} \quad (3.2.3)$$

Таким образом, при выполнении условия $\theta = \theta_0$ следует постоянство угловых скоростей $\dot{\psi}$ и $\dot{\varphi}$. Это движение называется регулярной прецессией.

Подстановка $\ddot{\psi} = 0$ во второе уравнение (3.2.1) дает соотношение

$$A_1 \dot{\psi} \dot{\varphi} - (A_1 - A_3) r_0 \dot{\psi} = mgl.$$

Подставив в него (3.2.3), получим квадратное уравнение относительно $\dot{\psi}$:

$$A_1 \cos \theta_0 \dot{\psi}^2 - A_3 r_0 \dot{\psi} + mgl = 0, \quad (3.2.4)$$

корнями которого являются

$$\dot{\psi}_{1,2} = \frac{A_3 r_0}{2A_1 \cos \theta_0} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4A_1 mgl \cos \theta_0}{A_3^2 r_0^2}} \right]. \quad (3.2.5)$$

Кривые изменения этих корней в зависимости от r_0 для различных углов наклона θ_0 представлены в [8, 42].

Отметим такие случаи:

- 1) $0 \leq \theta_0 < \frac{\pi}{2}$, $\cos \theta_0 > 0$ — это «стоящее» твердое тело: при $r_0^2 < \frac{4A_1 mgl \cos \theta_0}{A_3^2} = r_0^{*2}$ действительных корней (3.2.5) нет; при $r_0^2 = r_0^{*2}$ имеются два равных корня, $\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2$; при $r_0^2 > r_0^{*2}$ — два действительных корня того же знака, что и r_0 ;
- 2) $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\cos \theta_0 = 0$; в этом случае ось тела горизонтальна и у уравнения (3.2.4) есть действительный корень

$$\dot{\psi}_2 = \frac{mgl}{A_3 r_0}; \quad (3.2.6)$$

- 3) $\frac{\pi}{2} < \theta_0 \leq \pi$, $\cos \theta_0 < 0$ — это «висящее» твердое тело; в этом случае два действительных корня имеют противоположные знаки.

Согласно принятым обозначениям всегда $|\dot{\psi}_1| \geq |\dot{\psi}_2|$. Поэтому движение с угловой скоростью $\dot{\psi}_1$ называют быстрой прецессией, а движение с угловой скоростью $\dot{\psi}_2$ — медленной прецессией.

Угловая скорость быстрой регулярной прецессии при $g = 0$ или $l = 0$ совпадает с угловой скоростью прецессии свободного от момента сил симметричного твердого тела. В самом деле, при $l = 0$ корнями уравнения (3.2.4) будут

$$\dot{\psi}_1 = \frac{A_3 r_0}{A_1 \cos \theta_0}, \quad \dot{\psi}_2 = 0. \quad (3.2.7)$$

Рассмотрим другой подход к определению регулярной прецессии. Пусть уравнение $Q(u) = 0$ имеет кратный корень $u_1 = u_2 = u_0$. Тогда из (3.1.29) следует, что $u = u_1 = u_0$ и угол θ постоянен: $\theta = \theta_0$. Отметим, что при этом $k^2 = 0$, как следует из (3.1.24). Согласно формулам (3.1.15), (3.1.16) угловые скорости $\dot{\psi}$ и $\dot{\varphi}$ также постоянны и тело совершает регулярную прецессию.

§ 3. Быстро вращающийся волчок

Если корни u_1 и u_2 кубического многочлена (3.1.18) не равны между собой, но мало отличаются друг от друга, то параллели на рис. 9–11 почти сливаются, а точка N вычерчивает между ними сферическую кривую. В этом случае тело совершает так называемую псевдoreгулярную прецессию, т. е. движение, близкое к регулярной прецессии.

Выведем соотношения для псевдoreгулярной прецессии. Соотношение (3.1.21) представим в виде

$$Q(u) = \frac{2mgl}{A_1} (u^3 + a_2 u^2 + a_1 u + a_0), \quad (3.3.1)$$

где введены обозначения для коэффициентов кубического многочлена через его корни

$$a_2 = -(u_1 + u_2 + u_3), \quad a_1 = u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3, \quad a_0 = -u_1 u_2 u_3. \quad (3.3.2)$$

С другой стороны, из соотношения (3.1.18) для $Q(u)$ получим следующие выражения для коэффициентов (3.3.2) через постоянные m , g , l , A_1 , A_3 и константы интегрирования r , H , G_1 :

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{A_3(A_1 - A_3)r^2 - 2HA_1}{2mglA_1}, \\ a_1 &= \frac{G_1 A_3 r}{mglA_1} - 1, \\ a_0 &= \frac{2HA_1 - A_1 A_3 r^2 - G_1^2}{2mglA_1}. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Предположим, что угловая скорость r достаточно велика, так что выполнено условие

$$A_3 r^2 \gg mgl. \quad (3.3.4)$$

При условии (3.3.4) можно ввести безразмерный малый параметр

$$\varepsilon = \sqrt{mgl/A_3} r^{-1} \ll 1. \quad (3.3.5)$$

Если тело совершает быстрое вращение вокруг оси симметрии, то при условии (3.1.24) потенциальная энергия тела мала по сравнению с его кинетической энергией, и в первом приближении имеем

$$G_1 \approx A_3 r, \quad H \approx T \approx \frac{1}{2} A_3 r^2. \quad (3.3.6)$$

Из соотношения (3.3.5) получим

$$r = \sqrt{mgl/A_3} \varepsilon^{-1}, \quad (3.3.7)$$

а для констант G_1 и H согласно (3.3.6) и (3.3.7) справедливы разложения

$$\begin{aligned} G_1 &= \sqrt{A_3 mgl} \varepsilon^{-1} (1 + \varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 + \dots), \\ H &= \frac{mgl}{2} \varepsilon^{-2} (1 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2 + \dots). \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Здесь g_i и h_i — пока неизвестные постоянные.

Подставим формулу (3.3.7) и разложения (3.3.8) в соотношения (3.3.3) для коэффициентов a_2 , a_1 , a_0 . Выполняя разложения по степеням малого параметра и сохраняя первые два члена разложений, получим после преобразований и упрощений

$$\begin{aligned} a_2 &= -\chi \varepsilon^{-2} - \varepsilon^{-1} (h_1/2) - h_2/2 + O(\varepsilon), \\ a_1 &= 2\chi \varepsilon^{-2} + 2\chi \varepsilon^{-1} g_1 + 2\chi g_2 - 1 + O(\varepsilon), \\ a_0 &= -\chi \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-1} (h_1/2 - 2\chi g_1) + h_2/2 - 2\chi g_2 - \chi g_1^2 + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

Здесь введено обозначение

$$\chi = A_3/(2A_1) \leq 1. \quad (3.3.10)$$

Подставляя коэффициенты (3.3.9) в многочлен (3.3.1) и опуская малые высших порядков, представим его в виде

$$\begin{aligned} \frac{A_1 Q(u)}{2mgl} &= u^3 - \chi \varepsilon^{-2} (u-1)^2 + \varepsilon^{-1} (u-1) \left[2\chi g_1 - \frac{h_1}{2} (u+1) \right] - \\ &\quad - \frac{h_2}{2} (u^2 - 1) + 2\chi g_2 (u-1) - u - \chi g_1^2. \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Найдем корни многочлена (3.3.11) в виде разложений по степеням ε , принимая во внимание неравенства (3.1.20). Наибольший корень u_3 ищем в виде

$$u_3 = \varepsilon^{-2} (u_3^0 + \varepsilon u_3^1 + \dots).$$

Подставляя это разложение в уравнение $Q(u) = 0$, где $Q(u)$ определено формулой (3.3.11), получим $u_3^0 = \chi$. Таким образом, имеем, с точностью до членов высшего порядка

$$u_3 = \varepsilon^{-2} \chi. \quad (3.3.12)$$

Два других корня u_1 и u_2 представим в виде

$$u = 1 - \varepsilon x, \quad (3.3.13)$$

где $x \geq 0$, согласно неравенствам (3.1.20).

Подставляя выражение (3.3.13) в многочлен (3.3.11) и приравнявая его нулю, получим, с точностью до малых высшего порядка, следующее квадратное уравнение для величины χ :

$$\chi x^2 + (2\chi g_1 - h_1)x + \chi g_1^2 = 0. \quad (3.3.14)$$

Корни уравнения (3.3.14) представим в виде

$$x_1 = x_0 + \Delta, \quad x_2 = x_0 - \Delta, \quad x_0 = \frac{h_1 - 2\chi g_1}{2\chi}, \quad \Delta = \frac{\sqrt{h_1(h_1 - 4\chi g_1)}}{2\chi}. \quad (3.3.15)$$

Проанализируем полученные корни. Заметим, что уравнение (3.3.14) можно представить в виде

$$\chi(x + g_1)^2 = h_1 x.$$

Так как оба корня вещественны и положительны, то отсюда следует, что $h_1 > 0$, а из выражений (3.3.15) для Δ и x_0 вытекает, что $h_1 > 4\chi g_1$ и $x_0 > 0$. Таким образом, корни u_1 и u_2 многочлена $Q(u)$ определены в виде

$$u_1 = 1 - \varepsilon x_1, \quad u_2 = 1 - \varepsilon x_2, \quad u_1 < u_2 < 1, \quad x_2 < x_0 < x_1, \quad (3.3.16)$$

где x_0 , x_1 и x_2 даны соотношениями (3.3.15).

Напомним, что величина u связана с углом нутации θ соотношением (3.1.14). Определим угол θ_0 соотношением

$$\cos \theta_0 = u_0 = 1 - \varepsilon x_0$$

и положим

$$\theta = \theta_0 + \eta, \quad (3.3.17)$$

где η — малая величина порядка ε . Положим также

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 - \varepsilon x_0 - \varepsilon \Delta = \cos(\theta_0 + \eta_1), \\ u_2 &= 1 - \varepsilon x_0 + \varepsilon \Delta = \cos(\theta_0 + \eta_2). \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

Здесь η_1 и η_2 — малые постоянные величины, также имеющие порядок ε . Заметим, что в силу соотношений (3.3.16) и (3.3.18) имеем $\eta_1 > 0 > \eta_2$. Поэтому с точностью до малых высшего порядка справедливы равенства, вытекающие из соотношений (3.1.14), (3.3.17), (3.3.18):

$$\begin{aligned} u - u_1 &= \cos(\theta_0 + \eta) - \cos(\theta_0 + \eta_1) = -\sin \theta_0 (\eta - \eta_1), \\ u - u_2 &= \cos(\theta_0 + \eta) - \cos(\theta_0 + \eta_2) = -\sin \theta_0 (\eta - \eta_2). \end{aligned}$$

Подставим эти равенства и соотношение (3.3.12) для u_3 в выражение (3.1.21). Получим

$$Q(u) = \frac{2mgl \sin^2 \theta_0 \chi}{A_1 \varepsilon^2} (\eta - \eta_1)(\eta - \eta_2).$$

Подставим полученное выражение для $Q(u)$ в дифференциальное уравнение (3.1.18) и перейдем от переменной u к переменной η , воспользовавшись равенством

$$\dot{u} = -\sin \theta_0 \dot{\eta},$$

вытекающим из соотношений (3.1.14) и (3.3.17). Находим

$$\dot{\eta}^2 = \frac{2mgl \chi}{A_1 \varepsilon^2} (\eta_1 - \eta)(\eta - \eta_2).$$

Подставим в полученное уравнение выражение (3.3.5) для ε и формулу (3.3.10) для χ . В результате получим

$$\dot{\eta}^2 = \frac{A_3^2 r^2}{A_1^2} (\eta_1 - \eta)(\eta - \eta_2). \quad (3.3.19)$$

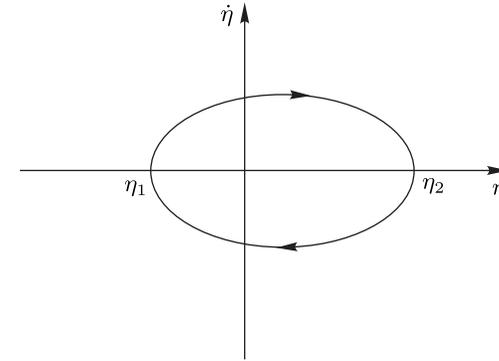


Рис. 12

Дифференциальное уравнение (3.3.19) описывает малые колебания угла нутации $\theta = \theta_0 + \eta$ около его среднего значения θ_0 . Фазовый портрет системы (3.3.19) представлен на рис. 12.

Заметим, что единственная замкнутая кривая на фазовой плоскости $(\eta, \dot{\eta})$ соответствует фиксированным значениям постоянных η_1 и η_2 . Эти постоянные в силу соотношений (3.3.18), (3.3.16) и (3.3.15) могут быть выражены через константы h_1 и g_1 , т.е. через постоянные значения интегралов движения H и G_1 .

ГЛАВА 4

Уравнения возмущенного движения твердого тела относительно центра масс

§ 1. Понятие возмущенного движения

Предметом данной книги является исследование возмущенных движений твердого тела относительно центра масс под действием моментов сил различной физической природы. Если на тело не действуют моменты внешних или внутренних сил, то оно совершает некоторое движение, которое назовем невозмущенным. В качестве невозмущенного движения обычно рассматривается движение в случае Эйлера или Лагранжа. В реальных условиях на тело действуют возмущающие моменты внешних и внутренних сил, в частности гравитационные силы, силы сопротивления среды и внутренние диссипативные силы.

В случае когда возмущающие моменты, действующие на твердое тело, малы в том смысле, что текущее значение кинетической энергии вращательного движения тела T существенно превосходит работу возмущающих сил A на некотором интервале времени, т. е. $T \gg A$, то движение на этом интервале времени будет близко к невозмущенному движению. Однако на большом интервале времени действие малых возмущающих моментов может привести к постепенной эволюции движения. Такое движение называется возмущенным движением.

Основная цель книги заключается в исследовании эволюции возмущенного движения. При этом хорошие результаты дает применение метода усреднения [12–14]. Для использования метода усреднения уравнения движения твердого тела нужно привести к стандартному виду систем с одной или несколькими вращающимися фазами.

Успех в исследовании возмущенного движения во многом зависит от выбора переменных при записи уравнений возмущенного движения. Точные уравнения возмущенного движения в общем случае обычно не могут

быть проинтегрированы, поэтому используются приближенные методы исследования.

В небесной механике для исследования уравнений возмущенного движения применяется метод оскулирующих элементов. Оскулирующие элементы — это характеристики орбиты, остающиеся постоянными в невозмущенном движении и меняющиеся со временем в возмущенном. Удобство уравнений в оскулирующих элементах заключается в том, что их приближенное решение можно провести с помощью асимптотических методов.

В задачах о возмущенном движении твердого тела относительно центра масс можно найти переменные, аналогичные оскулирующим элементам. Переменные, описывающие движение, следует выбрать так, чтобы уравнения в этих переменных для возмущенного движения имели форму, удобную для применения асимптотических методов. Выделяются медленные и быстрые переменные, причем в невозмущенном движении (движении в случае Эйлера или Лагранжа) медленные переменные постоянны. Переменные, удовлетворяющие этим условиям, называются эволюционными. Они могут быть выбраны неоднозначно, но желательно, чтобы они имели простой механический или геометрический смысл.

Известны различные способы введения эволюционных переменных при исследовании вращательного движения небесных тел: кеплеровские оскулирующие элементы, канонические элементы Якоби, Делоне, Пуанкаре, элементы Пуассона, Андуайе, Шарлье, Депри и другие [10]. Б. В. Булгаков ввел фазовые координаты, близкие переменным Андуайе–Депри для описания движения симметричного твердого тела [48]. В. В. Белецкий использовал оскулирующие элементы, отличающиеся на аддитивные постоянные от переменных Андуайе–Депри для решения ряда задач динамики вращательного движения динамически симметричных спутников [17, 19]. Дальнейшее развитие метода оскулирующих элементов было осуществлено Ф. Л. Черноусько, который исследовал движение спутника с трехосным эллипсоидом инерции [18].

§ 2. Основные понятия метода усреднения. Системы в стандартной форме. Системы с быстро вращающейся фазой

В следующих параграфах 2–4 будет рассмотрен математический аппарат, широко используемый в книге для исследования задач механики —

метод усреднения [12–14]. Это связано с тем, что в этих задачах обычно удается выделить быстро и медленно меняющиеся переменные. Метод усреднения давно применялся в небесной механике, хотя и без надлежащего обоснования. Впервые он был строго сформулирован и обоснован в работах Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова.

В настоящее время имеется много работ, посвященных обоснованию и приложениям асимптотических методов. Изложение этих методов, а также подробная библиография по данному вопросу содержатся в книгах Н. Н. Боголюбова, Ю. А. Митропольского [12, 14], В. М. Волосова, Б. И. Моргунова [13], Н. Н. Моисеева [15] и других.

Н. Н. Боголюбовым метод усреднения применялся к стандартным системам вида (см., например, [12])

$$\dot{x} = \varepsilon X(x, t, \varepsilon) = \varepsilon X_1(x, t) + \varepsilon^2 X_2(x, t) + \dots \quad (4.2.1)$$

Здесь x, X — действительные n -мерные векторы, $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Предполагается, что достаточно гладкая по переменным x, t функция X имеет среднее по времени. Ищется замена переменных

$$x = \bar{x} + \varepsilon u_1(\bar{x}, t) + \varepsilon^2 u_2(\bar{x}, t) + \dots, \quad (4.2.2)$$

позволяющая исключить t из правых частей системы и приводящая к усредненной системе вида

$$\dot{\bar{x}} = \varepsilon A(\bar{x}, \varepsilon) = \varepsilon A_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 A_2(\bar{x}) + \dots \quad (4.2.3)$$

Эта система не содержит явно время t и интегрируется проще, чем (4.2.1). Решения \bar{x} позволяют аппроксимировать решения системы (4.2.1) на большом интервале времени $t \sim \varepsilon^{-1}$ сколь угодно точно. Разработан алгоритм вычисления коэффициентов u_k, A_k . В первом приближении система принимает вид

$$\dot{\bar{x}} = \varepsilon \bar{X}_1(\bar{x}) = \varepsilon \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T X_1(\bar{x}, t) dt = \varepsilon A_1(\bar{x}). \quad (4.2.4)$$

Метод усреднения систем (4.2.1) обобщался Н. Н. Боголюбовым, Д. Н. Зубаревым на системы с быстро вращающейся фазой вида [12]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon X(x, y, \varepsilon) = \varepsilon X_1(x, y) + \varepsilon^2 X_2(x, y) + \dots, \\ \dot{y} &= \omega(x) + \varepsilon Y(x, y, \varepsilon) = \omega(x) + \varepsilon Y_1(x, y) + \dots \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Здесь x — вектор размерности n , y — скалярная фаза, $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Предполагается, что X и Y — периодические функции переменной y с периодом 2π . Формальная схема усреднения системы (4.2.5) состоит в следующем. В системе (4.2.5) переменные x изменяются медленно, а фаза y изменяется быстро. При усреднении системы (4.2.5) требуется получить систему, в которой медленные переменные x и быстрая фаза y будут разделены. При этом быстрая фаза не должна входить в правые части усредненных уравнений.

Для получения усредненной системы проведем в системе (4.2.5) замену переменных

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} + \varepsilon u_1(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon^2 u_2(\bar{x}, \bar{y}) + \dots, \\ y &= \bar{y} + \varepsilon v_1(\bar{x}, \bar{y}) + \dots, \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

где \bar{x}, \bar{y} — новые переменные; $u_i(\bar{x}, \bar{y}), v_i(\bar{x}, \bar{y})$ — некоторые периодические по \bar{y} с периодом 2π пока еще неизвестные функции. Заметим, что при $\omega' = \frac{d\omega}{dx} \neq 0$ фаза y определяется с меньшей (на единицу) степенью точности по ε , чем x .

Ищем усредненную систему в виде

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \varepsilon A_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 A_2(\bar{x}) + \dots, \\ \dot{\bar{y}} &= \omega(\bar{x}) + \varepsilon B_1(\bar{x}) + \dots \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Здесь $A_i(\bar{x}), B_i(\bar{x})$ — некоторые пока неизвестные функции.

Усредненная система (4.2.7) проще системы (4.2.5), потому что в (4.2.7) уравнение $\dot{\bar{x}} = \varepsilon A_1(\bar{x}) + \dots$ интегрируется независимо от \bar{y} и допускает введение медленного времени $\tau = \varepsilon t$, изменяющегося на ограниченном (при $\varepsilon \rightarrow 0$) интервале времени. После нахождения $\bar{x}(\tau, \varepsilon)$ переменная \bar{y} определяется квадратурой.

Нахождение преобразования (4.2.6) заключается в определении функций $u_i(\bar{x}, \bar{y}), v_i(\bar{x}, \bar{y}), A_i(\bar{x})$ и $B_i(\bar{x})$. Функции X, Y и ω считаются дифференцируемыми функциями своих переменных столько раз, сколько членов (4.2.6) нужно вычислить.

Продифференцируем формулы замены переменных (4.2.6) с учетом системы (4.2.7). Заменяем в полученном выражении производные $\dot{\bar{x}}, \dot{\bar{y}}$ правыми частями уравнений (4.2.7), разложим все функции по степеням параметра ε и сравним коэффициенты при одинаковых степенях указанного параметра. Получим систему уравнений, определяющую искомые функ-

ции [13, 14]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial \bar{y}} \omega(\bar{x}) &= X_1(\bar{x}, \bar{y}) - A_1(\bar{x}) = g_1(\bar{x}, \bar{y}) - A_1(\bar{x}), \\ \frac{\partial v_1}{\partial \bar{y}} \omega(\bar{x}) &= \frac{\partial \omega(\bar{x})}{\partial \bar{x}} u_1 + Y_1(\bar{x}, \bar{y}) - B_1(\bar{x}) = h_1(\bar{x}, \bar{y}) - B_1(\bar{x}), \\ \frac{\partial u_2}{\partial \bar{y}} \omega(\bar{x}) &= \frac{\partial X_1(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}} u_1 + \frac{\partial X_1(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}} v_1 + X_2(\bar{x}, \bar{y}) - \\ &\quad - \frac{\partial u_1}{\partial \bar{x}} A_1 - \frac{\partial u_1}{\partial \bar{y}} B_1 - A_2(\bar{x}) = g_2(\bar{x}, \bar{y}) - A_2(\bar{x}) \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

и т. д.

Из полученных соотношений можно определить коэффициенты u_1, v_1, u_2 преобразования (4.2.6) и функции A_1, B_1, A_2 , входящие в правые части усредненной системы (4.2.7).

Рассмотрим первое из уравнений (4.2.8). Интегрируя его, находим

$$u_1(\bar{x}, y) = \frac{1}{\omega(\bar{x})} \int_{y_0}^{\bar{y}} [g_1(\bar{x}, y) - A_1(\bar{x})] dy + \varphi(\bar{x}). \quad (4.2.9)$$

Здесь $\varphi(\bar{x})$ — произвольная функция \bar{x} . Ищем решение для функций, удовлетворяющих условию ограниченности

$$\lim_{y \rightarrow \infty} |u_i(\bar{x}, y)| < \infty.$$

В (4.2.9) под знаком интеграла стоит периодическая функция y с периодом 2π по y , так как $g_1(\bar{x}, y)$ — периодическая функция y и A_1 не зависит от y . Пусть среднее значение за период подынтегральной функции в (4.2.9) не равно нулю:

$$\overline{g_1 - A_1} = \frac{1}{2\pi} \int_{y_0}^{y_0+2\pi} [g_1(\bar{x}, y) - A_1(\bar{x})] dy = c(\bar{x}) \neq 0.$$

В этом случае

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_1(\bar{x}, y_0 + 2\pi k) = \frac{1}{\omega(\bar{x})} \lim_{k \rightarrow \infty} 2\pi c(\bar{x}) k = \pm \infty.$$

Выбор знака зависит от знака $c(\bar{x})$. Следовательно, для ограниченности u_1 необходимо и достаточно, чтобы

$$c(\bar{x}) = 0 \quad (4.2.10)$$

для любого \bar{x} .

Условия (4.2.10) достаточно для однозначного определения неизвестной функции $A_1(\bar{x})$ в интеграле равенства (4.2.9). Из (4.2.10) следует, что среднее значение функции g_1 определяется соотношением

$$\bar{g}_1(\bar{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_1(\bar{x}, y) dy = A_1(\bar{x}).$$

Следовательно, с учетом (4.2.8) имеем

$$A_1(\bar{x}) = g_1(\bar{x}) = \bar{X}_1(\bar{x}).$$

Тогда система первого приближения имеет вид

$$\dot{\bar{x}} = \varepsilon \bar{X}_1(\bar{x}) = \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X_1(\bar{x}, y) dy. \quad (4.2.11)$$

Заметим, что во многих прикладных задачах оказывается достаточным ограничиться первым приближением и остановиться на этом этапе вычислений. В приложениях основной интерес представляет поведение медленных переменных. Для приближенного описания их изменения на временах порядка ε^{-1} система уравнений (4.2.5) заменяется усредненной системой (4.2.11). Полученная система для описания медленного движения проще исходной и широко используется на практике.

§ 3. Системы, содержащие медленные и быстрые движения

Рассмотрим более общую схему усреднения для систем дифференциальных уравнений, содержащих многомерные медленные и быстрые движения, вида [13]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon X(x, y, t, \varepsilon) = \varepsilon X_1(x, y, t) + \varepsilon^2 X_2(x, y, t) + \dots, \\ \dot{y} &= Y(x, y, t, \varepsilon) = Y_0(x, y, t) + \varepsilon Y_1(x, y, t) + \dots \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

Здесь x, X — n -мерные, а y, Y — m -мерные векторные функции, ε — малый положительный параметр. Переменные x — медленные, так как $\dot{x} \sim \varepsilon$, а переменные y — быстрые (относительно x), поскольку $\dot{y} \sim 1$.

Одновременно с системой (4.3.1) будем рассматривать соответствующую вырожденную, или так называемую невозмущенную, систему, получающуюся из (4.3.1) при $\varepsilon = 0$:

$$\dot{y} = Y_0(x, y, t) = Y(x, y, t, 0), \quad \dot{x} = 0. \quad (4.3.2)$$

Предполагается, что в рассматриваемой области значений переменных x, y общее решение $y = \varphi(t)$ системы (4.3.2) известно. Это решение зависит от параметров x и от выбора начальных значений $y|_{t=t_0} = y_0$ или от других произвольных постоянных. Допустим, что вдоль интегральных кривых системы (4.3.2) существуют средние значения для правых частей системы (4.3.1) и некоторых других функций. Если $\Phi(x, y, t)$ — некоторая функция, то за ее среднее значение принимается предел

$$\bar{\Phi} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \Phi(x, \varphi, t) dt, \quad (4.3.3)$$

где $y = \varphi(t)$ — решение (4.3.2), при $y|_{t=t_0} = y_0$. Функция $\bar{\Phi}$ в общем случае зависит от x и от начальных значений t_0, y_0 , однако, как показано в [13], общий случай замены редуцируется к важному частному случаю, когда зависимость $\bar{\Phi}$ от начальных значений отсутствует, что и предполагается. Итак, предположим, что средние значения (4.3.3) зависят только от x . Если среднее $\bar{\Phi}$ зависит от t_0, y_0 , то процедура усреднения существенно усложняется. Строится замена переменных

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} + \varepsilon u_1(t, \bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon^2 u_2(t, \bar{x}, \bar{y}) + \dots, \\ y &= \bar{y} + \varepsilon v_1(t, \bar{x}, \bar{y}) + \dots, \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

которая приводит систему (4.3.1) к усредненной форме вида

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \varepsilon A(\bar{x}, \varepsilon) = \varepsilon A_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 A_2(\bar{x}) + \dots, \\ \dot{\bar{y}} &= Y_0(\bar{x}, \bar{y}, t) + \varepsilon B(\bar{x}, \varepsilon) = Y_0(\bar{x}, \bar{y}, t) + \varepsilon B_1(\bar{x}) + \dots \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

В системе (4.3.5) медленные движения \bar{x} интегрируются независимо от \bar{y} , поэтому система (4.3.5) существенно проще исходной системы (4.3.1). Если Y_0 не зависит от y, t (как, например, в уравнениях (4.2.5), где $Y_0 = \omega(x)$), то быстрые переменные y и время t исключаются из правых частей системы (4.3.5). Интегрируя первое уравнение (4.3.5), можно определить \bar{x} с любой точностью на интервале $t \sim \varepsilon^{-1}$, а затем вычислить приближения для \bar{y} . После этого по формулам (4.3.4) вычисляются приближения

для решений (4.3.1). При этом, как показано в [13], в общем случае медленные переменные с каждым приближением рассчитываются на порядок (относительно ε) точнее, чем быстрые движения.

Для расчетов по приведенной схеме нужно знать коэффициенты u_k , v_{k-1} , A_k , B_{k-1} . Правила определения этих величин разработаны и обоснованы в [13].

Для вычислений достаточно знать решение порождающей системы (4.3.2), с помощью которого находятся средние значения (4.3.3). Коэффициент A_1 оказывается равным \overline{X}_1 , поэтому система первого приближения для \overline{x} имеет вид

$$\dot{\overline{x}} = \varepsilon \overline{X}_1(\overline{x}) = \varepsilon \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} X_1(x, \varphi, t) dt. \quad (4.3.6)$$

Схема усреднения системы с вращающейся фазой — это частный случай приведенной общей схемы усреднения. В системе (4.2.5) порождающее уравнение типа (4.3.2) записывается следующим образом: $\dot{y} = \omega$, его решение имеет вид $y = \omega(t - t_0) + y_0$. Поэтому для таких систем средние значения (4.3.3) совпадают со средними по y за период

$$\begin{aligned} \overline{\Phi(x, y)} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \Phi(x, y_0 + \omega(t - t_0)) dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T\omega} \int_{\omega t_0}^{\omega(t_0+T)} \Phi(x, y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(x, y) dy. \end{aligned}$$

Таким образом, формула (4.2.11) и другие уравнения метода усреднения системы (4.2.5) вытекают как частный случай из формул (4.3.6) и других соотношений метода усреднения [13].

§ 4. Схема усреднения высших степеней в системах с быстрыми и медленными фазами

В нелинейных колебательных системах часто возникают ситуации, когда эволюция оскулирующих переменных происходит с различными сред-

ними скоростями по отношению к степеням некоторого естественного малого параметра. Такими механическими системами описывается ряд задач теории колебаний механических систем (осцилляторов и маятников), динамики твердых тел и гироскопов, орбитальных движений и вращений естественных и искусственных небесных тел. В теоретическом и прикладном аспектах представляет значительный интерес исследование эволюции системы на достаточно большом промежутке времени, приводящем к существенному изменению оскулирующих переменных, в том числе самых медленных.

Оказывается, что для многих важных случаев можно применить и обосновать модифицированную схему метода усреднения Крылова–Боголюбова и разделения движений (замены переменных [12, 13, 18, 276, 277]) на относительно больших интервалах времени [278].

Рассматривается стандартная по Н. Н. Боголюбову система [12, 13] для двух медленных векторов x , y произвольных размерностей, причем предполагаются выполненными следующие требования относительно средних по t :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon X(t, x, y), & x(0) &= x^0, & X_0(x, y) &= M_t\{X\} \equiv 0, \\ \dot{y} &= \varepsilon Y(t, x, y), & y(0) &= y^0, & Y_0(x, y) &= M_t\{Y\} \neq 0. \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

Функции X , Y считаются кусочно-непрерывными, 2π -периодическими по t и достаточно гладкими по $(x, y) \in D_x \times D_y$, где D_x , D_y — замкнутые ограниченные множества. Здесь M_t означает усреднение по аргументу (быстрой фазе) t : $M_t\{X\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(t, x, y) dt$. В первом приближении по ε средняя скорость изменения x равна нулю, т. е. $|x - x^0| = O(\varepsilon)$, а y — порядка $O(\varepsilon)$, т. е. $|y - y^0| = O(1)$, $t \sim \varepsilon^{-1}$. Для приложений представляет интерес существенная эволюция при $t \sim \varepsilon^{-2}$ относительно более медленной переменной x , характеризующей основные параметры колебательной системы (энергии, амплитуды). Более быстрая переменная y обычно обусловлена эволюцией фазы или угловой переменной и может значительно влиять на изменение вектора x .

В общем случае системы вида (4.4.1) применение и обоснование стандартной процедуры метода усреднения на интервале $t \sim \varepsilon^{-2}$ затруднительно. Поэтому рассматривается часто встречающаяся в задачах ситуация, когда усредненная система для y при постоянном $x = \xi$ допускает полное семейство одночастотных вращательно-колебательных движе-

ний [12, 13, 276, 277]:

$$x = \xi \in D_x, \quad y = \eta_0(\varphi, \zeta, \xi) \in D_y, \quad \dot{\varphi} = \varepsilon\omega(\zeta, \xi). \quad (4.4.2)$$

Здесь φ — медленная фаза ($\dot{\varphi} \sim \varepsilon$); ζ — медленная переменная ($\dot{\zeta} \sim \varepsilon^2$), суммарная размерность векторов $\zeta, \varphi \pmod{2\pi}$ совпадает с размерностью y .

Заменой $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$, близкой к тождественной, система (4.4.1) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \varepsilon^2 \Xi(t, \xi, \eta, \varepsilon), \quad \xi(0) = x^0, \quad \xi \in D_x, \\ \dot{\eta} &= \varepsilon Y_0(\xi, \eta) + \varepsilon^2 H(t, \xi, \eta, \varepsilon), \quad \eta(0) = y^0, \quad \eta \in D_y, \\ x &= \xi + \varepsilon \int_0^t X(s, \xi, \eta) ds, \quad y = \eta + \varepsilon \int_0^t [Y(s, \xi, \eta) - Y_0(\xi, \eta)] ds. \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

Функции Ξ, H удовлетворяют требуемым условиям гладкости и периодичности. Отбрасывание слагаемых $O(\varepsilon^2)$ в (4.4.3) приводит к выражениям (4.4.2) для ξ, η . Отметим, что в силу замены (4.4.2) имеет место тождество

$$\left(\frac{\partial \eta_0}{\partial \varphi} \right) \omega(\xi, \zeta) \equiv Y_0(\xi, \eta_0) \quad (4.4.4)$$

по переменным φ, ζ, ξ . Замена $y = \eta \rightarrow (\zeta, \varphi)$ согласно (4.4.2) с учетом величин $O(\varepsilon^2)$ и тождества (4.4.4) приводит к системе с быстрой t и медленной φ фазами вида

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \varepsilon^2 A(t, \alpha, \varphi, \varepsilon), \quad \alpha(0) = \alpha^0, \quad \alpha = (\xi^T, \zeta^T)^T, \\ \dot{\varphi} &= \varepsilon\omega(\alpha) + \varepsilon^2 \Phi(t, \alpha, \varphi, \varepsilon), \quad \varphi(0) = \varphi^0 \pmod{2\pi}, \\ A &= (\Xi^T, Z^T)^T, \quad (\Phi, Z^T)^T = \left\| \frac{\partial \eta_0}{\partial \varphi}, \frac{\partial \eta_0}{\partial \zeta} \right\|^{-1} \left(H - \frac{\partial \eta_0}{\partial \xi} \Xi \right). \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

Функции A, ω, Φ достаточно гладкие по $\alpha, \varphi, \varepsilon$, кусочно-непрерывные по t и 2π -периодические по t и φ . Начальные значения α^0, φ^0 определяются заменой $y \rightarrow (\zeta, \varphi)$ (4.4.2). Система (4.4.5) подлежит дальнейшему исследованию на интервале $0 \leq t \leq \frac{T}{\varepsilon^2}$, на котором медленная переменная α может получить, вообще говоря, приращение $\delta\alpha \sim 1$. При этом с заданной степенью точности по ε производится отделение быстрой фазы —

аргумента t , а относительно медленной фазы φ и переменная α связаны. «Усредненная» система допускает введение аргумента $\tau = \varepsilon t$, $0 \leq \tau \leq \frac{T}{\varepsilon}$, и далее может быть подвергнута стандартному асимптотическому анализу [11–13, 18, 276, 277, 279]. В случае скалярной фазы φ применяется процедура усреднения [12, 13], разработанная для систем с быстро вращающейся фазой. Как и в классическом методе Крылова–Боголюбова, предлагаемая схема усреднения высших степеней исходит из требований, чтобы асимптотические разложения не содержали сингулярных слагаемых типа $(\varepsilon^2 t)^k$ на расширенном интервале $0 \leq t \leq \frac{T}{\varepsilon^2}$. Частная ситуация, когда y отсутствует, исследована ранее в [280].

При отделении быстрой фазы t используется замена $(\alpha, \varphi) \rightarrow (\beta, \psi)$ такая, что уравнения не содержат t с требуемой степенью точности по ε :

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta + \varepsilon^2 \Pi(t, \beta, \psi, \varepsilon), \quad \varphi = \psi + \varepsilon^2 \Gamma(t, \beta, \psi, \varepsilon), \\ \dot{\beta} &= \varepsilon^2 B(\beta, \psi, \varepsilon), \quad \dot{\psi} = \varepsilon\omega(\beta) + \varepsilon^2 \Psi(\beta, \psi, \varepsilon). \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

Неизвестные 2π -периодические по t, ψ функции замены Π, Γ и не содержащие t (усредненные) функции B, Ψ в правых частях системы (4.4.6) могут быть определены приближенно асимптотическими разложениями или последовательными приближениями по степеням ε решений уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} (I + \varepsilon^2 \Pi'_\beta) B + \Pi'_\psi (\varepsilon\omega + \varepsilon^2 \Psi) &= A(t, \beta + \varepsilon^2 \Pi, \psi + \varepsilon^2 \Gamma, \varepsilon) - \Pi'_t, \\ \varepsilon^3 \Gamma'_\beta B + (1 + \varepsilon^2 \Gamma'_\psi) (\omega(\beta) + \varepsilon\psi) &= \\ = \omega(\beta + \varepsilon^2 \Pi) + \varepsilon \Phi(t, \beta + \varepsilon^2 \Pi, \psi + \varepsilon^2 \Gamma, \varepsilon) - \varepsilon \Gamma'_t. \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

В частности, первые коэффициенты разложений, определяющие существенную эволюцию переменных, равны

$$\begin{aligned} B_0 &= M_t \{A(t, \beta, \psi, 0)\}, \quad \Pi_0(t, \beta, \psi) = \int_0^t ((A) - M_t \{(A)\}) ds, \\ \psi_0 &= M_t \{\Phi(t, \beta, \psi, 0)\}, \quad \Gamma_0(t, \beta, \psi) = \int_0^t ((\Phi) - M_t \{(\Phi)\}) ds, \\ B_1 &= M_t \{(A'_\varepsilon)\} - \omega(\beta) M_t \{\Pi'_{0\varphi}\}, \quad \dots \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

Здесь M_t означает усреднение по явно входящему аргументу t , а выражения типа $(A), (\Phi)$ отвечают значениям $\alpha = \beta, \varphi = \psi, \varepsilon = 0$. Последую-

шие коэффициенты $V_j, \Pi_{j-1}, \Psi_{j-1}, \Gamma_{j-1}, j \geq 2$, вычисляются рекуррентно. По аналогии с классической схемой усреднения при построении j -го приближения на интервале $t \sim \varepsilon^{-2}$ требуется определять функции вплоть до $V_{j-1}, \Pi_{j-2}, \Psi_{j-2}, \Gamma_{j-3}$. В частности, задача Коши первого приближения имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= \varepsilon^2 A_0(\beta, \psi), & \beta(0) &= \alpha^0; \\ \dot{\psi} &= \varepsilon \omega(\beta), & \psi(0) &= \varphi^0; & 0 \leq t \leq L\varepsilon^{-2}. \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

Система (4.4.9) подлежит дальнейшему аналитическому или численному исследованию. Она существенно проще, чем исходная система (4.4.5), допускает введение медленного времени $\tau = \varepsilon t$ и запись в стандартной форме «с быстрой фазой» ψ [11–13, 276, 277, 279]. Если функция $\omega(\beta)$ отделена от нуля, то фаза ψ является вращающейся, и в первом приближении к системе применим метод усреднения по переменной ψ на интервале времени $0 \leq \tau \leq \frac{L}{\varepsilon}$, т.е. $t \sim \varepsilon^{-2}$.

§ 5. Уравнения возмущенного движения твердого тела, близкого к случаю Эйлера

Рассмотрим влияние малых возмущений на движение твердого тела, близкое к случаю Эйлера. Обратимся к выбору эволюционных переменных в этом случае.

Заметим, что при движении свободного твердого тела сохраняется его кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2}(A_1 p^2 + A_2 q^2 + A_3 r^2) = \frac{1}{2}(\mathbf{G}, \boldsymbol{\omega}) \quad (4.5.1)$$

и модуль кинетического момента G

$$G^2 = A_1 p^2 + A_2 q^2 + A_3 r^2 = (J\boldsymbol{\omega})^2. \quad (4.5.2)$$

Здесь $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$ — вектор угловой скорости, p, q, r — его проекции на оси подвижной системы координат $Oxyz$, направленные вдоль главных осей инерции тела для неподвижной точки O ; \mathbf{G} — вектор кинетического момента тела относительно точки O ; $J = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$ — тензор инерции, имеющий в связанных осях диагональный вид. Не ограничивая общности, предположим, что $A_1 > A_2 > A_3$.

Если рассматривать движение вектора кинетического момента в связанных с телом осях, то конец вектора \mathbf{G} движется вдоль линии пересечения эллипсоида и сферы, уравнения которых получаются из равенств (4.5.1), (4.5.2), выраженных через компоненты G_1, G_2, G_3 вектора \mathbf{G} :

$$G_1^2 A_1^{-1} + G_2^2 A_2^{-1} + G_3^2 A_3^{-1} = 2T, \quad (4.5.3)$$

$$G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 = G^2. \quad (4.5.4)$$

Пересечение эллипсоида и сферы обеспечивается неравенствами

$$2T A_1 \geq G^2 \geq 2T A_3. \quad (4.5.5)$$

При изучении движения вектора \mathbf{G} в связанных осях исследуют траектории его конца на единичной сфере (см. [113, 121, 122, 281]). При этом для описания положения вектора кинетического момента на сфере вводится положительный параметр $k^2 = k^2(T, G^2)$, $0 \leq k^2 \leq 1$ (см. § 3 главы 2). Например, в области $2T A_1 \geq G^2 > 2T A_2$ параметр k^2 представлен в виде (2.3.6):

$$k^2 = \frac{(A_2 - A_3)(2T A_1 - G^2)}{(A_1 - A_2)(G^2 - 2T A_3)}, \quad 0 \leq k^2 \leq 1. \quad (4.5.6)$$

Значение $k^2 = 0$ соответствует вращению твердого тела вокруг оси с моментом инерции A_1 , а $k^2 = 1$ — движению по сепаратрисе (см. рис. 6). При переходе в область $2T A_2 > G^2 \geq 2T A_3$ нужно поменять местами A_1 и A_3 в выражении для k^2 . Здесь k имеет смысл модуля эллиптических функций движения Эйлера–Пуансо.

При наличии малых возмущений движение твердого тела описывается возмущенными динамическими уравнениями Эйлера:

$$\dot{\mathbf{G}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G} = \varepsilon \mathbf{L}, \quad \boldsymbol{\omega}(t_0) = \boldsymbol{\omega}_0, \quad \varepsilon \ll 1. \quad (4.5.7)$$

Предполагается, что \mathbf{L} — возмущающий момент сил, а движение рассматривается на асимптотически большом интервале времени $t - t_0 \sim \varepsilon^{-1}$.

При отсутствии возмущений ($\varepsilon = 0$) твердое тело совершает движение Эйлера–Пуансо. В этом случае сохраняются величины T, G и k^2 , а угловые скорости вращения тела выражаются через эллиптические функции (см. § 3 главы 2).

Так, в области $2T A_1 \geq G^2 > 2T A_2$ решение выражается через эллиптические функции Якоби формулами (2.3.7). При этом

$$\eta = \frac{2\pi}{N}(t - t_0) + \eta_0. \quad (4.5.8)$$

Здесь η — фаза, период N изменения угловых скоростей движения Эйлера–Пуансо по времени имеет вид

$$N = 4K(k) \sqrt{\frac{A_1 A_2 A_3}{(A_1 - A_2)(G^2 - 2TA_3)}}, \quad (4.5.9)$$

$K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

В области $2TA_2 > G^2 \geq 2TA_3$ во всех формулах (2.3.7), а кроме того, в (4.5.6) нужно поменять местами A_1 и A_3 .

Для изучения эволюции движения твердого тела методом усреднения естественно перейти от переменных p, q, r к эволюционным переменным G^2, T, η или G^2, k^2, η , где G^2, T, k^2 являются медленными переменными, а фаза η — быстрая переменная. Уравнения для медленных переменных в силу уравнения (4.5.7) имеют вид

$$\begin{aligned} (G^2)^\cdot &= 2\varepsilon(\mathbf{GL}), & \dot{T} &= \varepsilon(\boldsymbol{\omega}\mathbf{L}), \\ (k^2)^\cdot &= \varepsilon \left(2 \frac{\partial k^2}{\partial G^2} \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \frac{\partial k^2}{\partial T} \boldsymbol{\omega}, \mathbf{L} \right). \end{aligned} \quad (4.5.10)$$

Уравнение для фазы имеет вид

$$\dot{\eta} = \frac{2\pi}{N} + O(\varepsilon). \quad (4.5.11)$$

Конкретный вид функции $O(\varepsilon)$ не приводится из-за громоздкости и из-за того, что оно не используется при построении решения первого приближения. Правые части уравнений для медленных переменных периодичны по η с периодом 2π .

Поскольку G^2, T, k^2 являются медленно меняющимися функциями времени, то в первом приближении в правые части уравнений (4.5.10) вместо p, q, r можно подставить их значения (2.3.7) из невозмущенного движения Эйлера–Пуансо. Усредняя затем по быстрой фазе η и считая при этом медленные переменные постоянными, получим в общем виде

$$\begin{aligned} (\overline{G^2})^\cdot &= 2\varepsilon M_\eta \{(\mathbf{G}_0, \mathbf{L}_0)\}, & \dot{\overline{T}} &= \varepsilon M_\eta \{(\boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{L}_0)\}, \\ (\overline{k^2})^\cdot &= \varepsilon M_\eta \left\{ \left(2 \frac{\partial k^2}{\partial G^2} \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_0 + \frac{\partial k^2}{\partial T} \boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{L}_0 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.5.12)$$

Здесь $\mathbf{L}_0, \boldsymbol{\omega}_0$ — известные функции аргумента η для нулевого приближения (при подстановке решений в случае Эйлера).

Конкретный вид правых частей уравнений (4.5.12) зависит от вида возмущающего момента $\varepsilon\mathbf{L}$. Черточками сверху обозначены соответствующие усредненные переменные $\overline{G^2}, \overline{T}, \overline{k^2}$. Усреднение любой функции F в (4.5.12) по η проводится по схеме

$$M_\eta \{F\} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F d\eta. \quad (4.5.13)$$

Обсудим введение систем координат для описания возмущенного движения твердого тела. Рассмотрим сначала быстрое движение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки, когда роль возмущения играет момент силы тяжести [55].

Начало всех систем координат O совместим с неподвижной точкой твердого тела. Ось Ox_3 неподвижной системы координат $Ox_1x_2x_3$ направим вертикально вверх. Ось Oy_3 системы $Oy_1y_2y_3$ направим по вектору кинетического момента \mathbf{G} тела. Ось Oy_1 перпендикулярна Oy_3 , а ось Oy_2 перпендикулярна Oy_1 и Oy_3 (рис. 13).

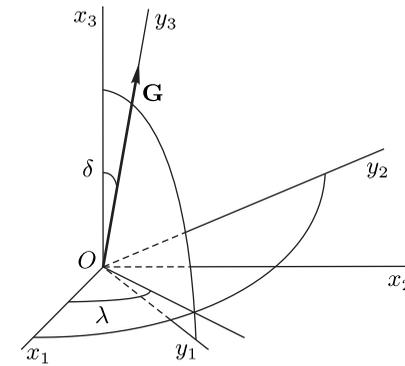


Рис. 13

Положение вектора кинетического момента \mathbf{G} в системе координат $Ox_1x_2x_3$ определяется углами δ и λ , где δ — угол между осью Ox_3 и вектором \mathbf{G} , а λ — угол между осью Ox_1 и проекцией вектора \mathbf{G} на плоскость Ox_1x_2 .

Введем главные центральные оси инерции тела $Oz_1z_2z_3$. Взаимное положение осей $Oz_1z_2z_3$ и $Oy_1y_2y_3$ определим углами Эйлера (рис. 14).

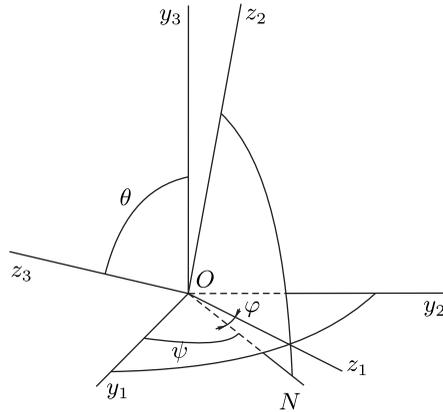


Рис. 14

Вектор кинетического момента тела \mathbf{G} постоянен по величине и направлению в невозмущенном движении. Поэтому величины G , δ и λ будут постоянны в невозмущенном движении и переменны в возмущенном движении.

В качестве переменных, описывающих возмущенное движение, выбираются G , δ , λ , θ , φ , ψ . Дифференциальные уравнения возмущенного движения записываются для величины кинетического момента G и углов δ , λ , θ , φ , ψ . Эти переменные удобны тем, что в невозмущенном движении Эйлера–Пуансо G , λ , δ постоянны, а углы Эйлера θ , φ , ψ описывают движения по известным формулам.

§ 6. Уравнения возмущенного движения спутника относительно центра масс

Рассмотрим твердое тело (спутник), совершающее произвольное движение в пространстве. Введем три правые декартовы системы координат, начало которых, в отличие от введенных в § 5, совместим с центром инерции спутника. Система координат $Ox_1x_2x_3$ движется поступательно вместе с центром инерции спутника. Ось Ox_1 параллельна радиус-вектору перигея орбиты, ось Ox_2 параллельна вектору скорости центра масс спутника в перигее, ось Ox_3 направлена по нормали к плоскости орбиты.

Ось Oy_3 системы координат $Oy_1y_2y_3$ направим по вектору кинетического момента \mathbf{G} спутника относительно центра инерции, ось Oy_1 перпен-

дикулярна Oy_3 и лежит в плоскости Ox_3y_3 , а ось Oy_2 перпендикулярна Oy_1 и Oy_3 и, следовательно, лежит в плоскости орбиты Ox_1x_2 (рис. 13). Переход от системы координат $Ox_1x_2x_3$ к системе $Oy_1y_2y_3$ осуществляется двумя поворотами: на угол λ вокруг оси Ox_3 и на угол δ вокруг оси Oy_2 . Углы λ и δ определяют ориентацию вектора \mathbf{G} в неподвижном пространстве.

Оси связанной системы координат $Oz_1z_2z_3$ совместим с главными центральными осями инерции спутника. Их ориентацию относительно системы координат $Oy_1y_2y_3$ определим углами Эйлера θ , φ , ψ (рис. 14) и направляющими косинусами $\alpha_{ik} = \mathbf{y}_i \mathbf{z}_k$, $i, k = 1, 2, 3$. Здесь \mathbf{y}_i — орты системы $Oy_1y_2y_3$, а \mathbf{z}_k — орты системы $Oz_1z_2z_3$. Соотношения между направляющими косинусами и углами Эйлера даются выражениями (1.5.4):

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \cos \varphi \cos \psi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi, \\ \alpha_{12} &= -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \theta, \quad \alpha_{13} = \sin \psi \sin \theta, \\ \alpha_{21} &= \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta, \\ \alpha_{22} &= -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta, \\ \alpha_{23} &= -\cos \psi \sin \theta, \\ \alpha_{31} &= \sin \varphi \sin \theta, \quad \alpha_{32} = \cos \varphi \sin \theta, \quad \alpha_{33} = \cos \theta. \end{aligned} \quad (4.6.1)$$

Составим уравнения движения спутника относительно центра масс, взяв в качестве шести искомым функций величину кинетического момента G и углы δ , λ , θ , φ , ψ . Теорема об изменении кинетического момента в векторной форме имеет вид (см. (1.3.7))

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \mathbf{L}_0, \quad (4.6.2)$$

где \mathbf{L}_0 — момент возмущающих сил относительно центра инерции спутника.

Проектируя векторное уравнение (4.6.2) на оси системы координат $Oy_1y_2y_3$, получим

$$\frac{dG}{dt} = L_3, \quad \frac{d\delta}{dt} = \frac{L_1}{G}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{L_2}{G \sin \delta}, \quad (4.6.3)$$

где L_i — проекции момента возмущающих сил относительно центра инерции на оси Oy_i .

Выведем уравнения для углов θ , φ , ψ . Вектор $\boldsymbol{\omega}$ абсолютной угловой скорости вращения спутника относительно системы координат $Ox_1x_2x_3$

складывается из пяти угловых скоростей вращений, соответствующих поворотам на углы δ , λ , θ , φ , ψ . Учитывая направления этих составляющих (рис. 13, 14), найдем

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\delta}\mathbf{y}_2 + \dot{\lambda}(\cos\delta\mathbf{y}_3 - \sin\delta\mathbf{y}_1) + \dot{\theta}(\cos\varphi\mathbf{z}_1 - \sin\varphi\mathbf{z}_2) + \dot{\psi}\mathbf{y}_3 + \dot{\varphi}\mathbf{z}_3. \quad (4.6.4)$$

Спроектируем равенство (4.6.4) на оси $Oz_1z_2z_3$ и учтем, что $\alpha_{ik} = \mathbf{y}_i\mathbf{z}_k$. Тогда

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= p\mathbf{z}_1 + q\mathbf{z}_2 + r\mathbf{z}_3, \\ p &= \dot{\delta}\alpha_{21} + \dot{\lambda}(\alpha_{31}\cos\delta - \alpha_{11}\sin\delta) + \dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\alpha_{31}, \\ q &= \dot{\delta}\alpha_{22} + \dot{\lambda}(\alpha_{32}\cos\delta - \alpha_{12}\sin\delta) - \dot{\theta}\sin\varphi + \dot{\psi}\alpha_{32}, \\ r &= \dot{\delta}\alpha_{33} + \dot{\lambda}(\alpha_{33}\cos\delta - \alpha_{13}\sin\delta) + \dot{\varphi} + \dot{\psi}\alpha_{33}. \end{aligned} \quad (4.6.5)$$

С другой стороны, проектирование вектора кинетического момента \mathbf{G} на оси связанной системы координат $Oz_1z_2z_3$ дает

$$\begin{aligned} G_1 &= A_1p = G\sin\theta\sin\varphi, \\ G_2 &= A_2q = G\sin\theta\cos\varphi, \\ G_3 &= A_3r = G\cos\theta, \end{aligned} \quad (4.6.6)$$

где A_1, A_2, A_3 — главные центральные моменты инерции спутника относительно осей Oz_1, Oz_2, Oz_3 соответственно.

Подставим в уравнения (4.6.5) p, q, r из (4.6.6), $\dot{\delta}, \dot{\lambda}$ из (4.6.3) и α_{ij} из (4.6.1) и разрешим их относительно производных эйлеровых углов θ, φ, ψ :

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= G\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2}\right) + \frac{L_2\cos\psi - L_1\sin\psi}{G}, \\ \dot{\varphi} &= G\cos\theta\left(\frac{1}{A_3} - \frac{\sin^2\varphi}{A_1} - \frac{\cos^2\varphi}{A_2}\right) + \frac{L_1\cos\psi + L_2\sin\psi}{G\sin\theta}, \\ \dot{\psi} &= G\left(\frac{\sin^2\varphi}{A_1} + \frac{\cos^2\varphi}{A_2}\right) - \frac{L_1\cos\psi + L_2\sin\psi}{G}\operatorname{ctg}\theta - \frac{L_2}{G}\operatorname{ctg}\delta. \end{aligned} \quad (4.6.7)$$

Уравнения (4.6.3), (4.6.7) образуют систему уравнений возмущенного движения в форме, удобной для применения асимптотических методов. Уравнения (4.6.3) описывают изменение вектора кинетического момента, а уравнения (4.6.7) — движение спутника относительно этого вектора.

Рассмотрим спутник, моменты инерции которого произвольны: $A_1 \geq A_2 \geq A_3$, $A_1 \leq A_2 + A_3$. Предположим, что угловая скорость ω движения спутника относительно центра масс существенно больше угловой скорости орбитального движения ω_0 (другими словами, приложенные моменты сил малы), и положим

$$\varepsilon = \frac{\omega_0}{\omega} \sim \frac{A_1\omega_0}{G} \ll 1, \quad \frac{L}{A_1\omega^2} \ll \mu \quad \left(\omega \sim \frac{G}{A_1}\right). \quad (4.6.8)$$

Таким образом, скорость движения спутника относительно центра масс характеризуется двумя независимыми малыми параметрами. Первый из них ε — отношение угловой скорости орбитального движения к угловой скорости относительного движения. Второй малый параметр μ равен отношению работы моментов приложенных сил за характерное время относительного движения (время оборота спутника вокруг его центра масс) к средней кинетической энергии относительного движения.

Предположим, что единица измерения времени и период относительного движения $\frac{2\pi}{\omega}$ имеют одинаковый порядок, тогда $\omega_0 \sim \varepsilon$. Для гравитационных моментов эти малые параметры связаны соотношением $\mu = \varepsilon^2$ [18] и моменты возмущающих сил $L_i \sim \varepsilon^2$.

В общем случае параметры μ, ε могут быть связаны и по-другому, и перед анализом быстрых движений спутника под действием возмущающих моментов какого-либо конкретного вида нужно задать или оценить относительную величину малых параметров, чтобы при построении асимптотического решения ограничиться нужной точностью.

В невозмущенном движении ($\varepsilon = 0$) возмущающие моменты обращаются в нуль, и это движение является движением Эйлера–Пуансо. Величины G, δ, λ и кинетическая энергия T движения спутника относительно центра масс постоянны. Имеем

$$T = \frac{1}{2}(A_1p^2 + A_2q^2 + A_3r^2) = \frac{G^2}{2} \left[\left(\frac{\sin^2\varphi}{A_1} + \frac{\cos^2\varphi}{A_2} \right) \sin^2\theta + \frac{\cos^2\theta}{A_3} \right]. \quad (4.6.9)$$

При $\varepsilon = 0$ углы Эйлера θ, φ, ψ переменны, причем функцию $\psi = \psi(t)$ можно представить в виде $\psi = \psi_1(t) + \psi_2(t)$. При этом, как было отмечено в конце § 3 главы 2, функции $\theta(t), \varphi(t), \psi_1(t)$ или периодичны по t с периодом τ (период $\tau = \tau(G, T)$ — время движения вектора \mathbf{G} по замкнутой траектории), или получают за время τ приращение 2π . Функция $\psi_2(t)$

равна

$$\psi_2(t) = \frac{2\pi}{\tau'}(t + t_0), \quad t_0 = \text{const.}$$

Периоды $\tau' = \tau'(G, T)$ и τ , вообще говоря, несоизмеримы [52, 265].

Введем две переменные (фазы) соотношениями

$$y_1 = \omega_1(t + t_1), \quad y_2 = \omega_2(t + t_2), \quad (4.6.10)$$

где t_1, t_2 — произвольные постоянные, а

$$\omega_1(G, T) = \frac{2\pi}{\tau}, \quad \omega_2(G, T) = \frac{2\pi}{\tau'}. \quad (4.6.11)$$

Тогда в движении Эйлера–Пуансо углы θ, φ, ψ будут определенными функциями этих переменных (фаз), а также величин G и T (от углов δ и λ они не зависят в силу изотропности различных направлений в пространстве при $L_1 = L_2 = L_3 = 0$).

Запишем эти функции, используя равенство $\psi_2 = y_2$, в виде

$$\theta = \theta(G, T, y_1), \quad \varphi = \varphi(G, T, y_1), \quad \psi = \psi_1(G, T, y_1) + y_2. \quad (4.6.12)$$

При увеличении y_1 на 2π функции θ, φ, ψ_1 в (4.6.12) либо не меняются, либо получают приращения 2π . Заметим, что приращения 2π за период несущественны, так как в уравнениях всюду фигурируют тригонометрические функции углов.

В возмущенном движении ($\varepsilon \neq 0$) медленными переменными будут G, δ и λ , а быстрыми — θ, φ, ψ .

Рассмотрим движение спутника относительно центра масс под действием возмущающих моментов. С точностью до величин порядка квадрата отношения линейных размеров спутника к размерам орбиты можно считать, что движение спутника относительно центра масс не влияет на движение самого центра масс. Центр масс движется по кеплеровскому эллипсу с эксцентриситетом e и периодом обращения Q_0 . Зависимость истинной аномалии (полярного угла) ν от времени t дается соотношением [17–19]

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{\omega_0(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}}, \quad \nu(t + Q_0) = \nu(t) + 2\pi, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{Q_0}. \quad (4.6.13)$$

Уравнения движения (4.6.3), (4.6.7) и уравнение (4.6.13) при условиях $\omega_0 = O(\varepsilon), L_i = O(\varepsilon^2)$ примут вид

$$\dot{x} = \varepsilon^2 X(x, y, \nu), \quad \dot{y} = Y_0(x, y) + \varepsilon^2 Y_1(x, y, \theta), \quad \dot{\nu} = \varepsilon f(\nu), \quad (4.6.14)$$

где $f(\nu)$ — правая часть уравнения (4.6.13).

Здесь x — вектор медленных переменных, включающий переменные G, δ, λ , а y — вектор быстрых переменных, содержащий переменные θ, φ, ψ .

Систему (4.6.14) можно упростить, сделав замену переменных по формулам (4.6.12). Вместо трех быстрых переменных θ, φ, ψ при этом вводятся две быстрые y_1 и y_2 и одна медленная T (постоянная в движении Эйлера–Пуансо). Фазы y_1, y_2 в возмущенном движении уже не определяются формулами (4.6.10), а являются новыми искомыми функциями, причем скорости их изменения в первом приближении равны ω_1, ω_2 соответственно. Поэтому система уравнений движения запишется в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon^2 X(x, y_1, y_2, \nu), \quad \dot{\nu} = \varepsilon f(\nu), \\ \dot{y}_1 &= \omega_1(x) + \varepsilon^2 Z_1(x, y_1, y_2), \quad \dot{y}_2 = \omega_2(x) + \varepsilon^2 Z_2(x, y_1, y_2). \end{aligned} \quad (4.6.15)$$

Здесь x, X — 4-мерные вектор-функции, соответствующие переменным G, T, δ, λ , а остальные функции — скалярные.

Функции X, Z_1, Z_2 периодичны по y_1, y_2 с периодами 2π .

Таким образом, уравнения возмущенного движения спутника приведены к системе с двумя вращающимися фазами.

Опишем схему усреднения, предложенную Ф. Л. Черноушко в [18] для изучения движения несимметричного спутника под действием гравитационного момента сил при выполнении условий (4.6.8). В этой работе показано, что усреднение периодической функции $F(\theta, \varphi, \psi)$ по t с учетом зависимости переменных $\theta = \theta(t), \varphi = \varphi(t), \psi = \psi_1(t) + \psi_2(t)$ можно разбить на два независимых этапа: усреднение по переменной ψ и усреднение по времени t с учетом зависимости переменных $\theta(t), \varphi(t)$ от t .

Действительно, в силу несоизмеримости периодов τ и τ' имеем

$$\begin{aligned} M_t\{F(\theta, \varphi, \psi)\} &= \frac{1}{\tau\tau'} \int_0^\tau \int_0^{\tau'} F\left(\theta(t), \varphi(t), \psi_1(t) + \frac{2\pi t'}{\tau'}\right) dt' dt = \\ &= \frac{1}{2\pi\tau} \int_0^\tau \int_0^{2\pi} F(\theta(t), \varphi(t), \psi) d\psi dt = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta, \varphi, \psi) d\psi \right\} dt = \\ &= M_1\{M_\psi[F(\theta, \varphi, \psi)]\}. \end{aligned} \quad (4.6.16)$$

Здесь M_ψ означает усреднение по ψ , а M_1 — по θ и φ , связанным соотношением (4.6.9), проводимое по замкнутым траекториям вектора кинетического момента в движении Эйлера–Пуансо (рис. 6).

Погрешность усредненного решения для медленных переменных составляет величину порядка ε на интервале времени, за который тело совершит $\sim \varepsilon^{-1}$ оборотов. Резонансный случай, в котором τ и τ' соизмеримы, требует дополнительного рассмотрения.

Система (4.6.14) относится к нелинейным колебательным системам, содержащим быструю и относительно медленную фазы [278]. В [278] и в § 4 главы 4 предлагается модифицированный метод усреднения для ситуации, когда усредненные переменные не изменяются. Излагается и обосновывается процедура разделения переменных на существенно больших по малому параметру интервалах времени, на которых происходит значительная эволюция всех переменных.

§ 7. Процедура усреднения для тела с близкими моментами инерции

Рассмотрим, следуя [18], случай, когда главные центральные моменты инерции спутника близки друг к другу и представимы в виде

$$A_1 = J_0 + \varepsilon A'_1, \quad A_2 = J_0 + \varepsilon A'_2, \quad A_3 = J_0 + \varepsilon A'_3, \quad (4.7.1)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$ — малый параметр. Применим асимптотический метод усреднения систем, содержащих медленные и быстрые движения, к уравнениям относительного движения спутника (4.6.3), (4.6.7), (4.6.13).

При $\varepsilon = 0$ эти уравнения описывают движение сферически симметричного спутника. В этом случае в невозмущенном движении получается, что $L_1 = L_2 = L_3 = 0$, и из системы (4.6.3), (4.6.7) находим, что $G, \delta, \lambda, \theta$ и φ постоянны, а

$$\psi = GJ_0^{-1}t + \psi_0, \quad (4.7.2)$$

т. е. спутник равномерно вращается вокруг поступательно движущегося вектора кинетического момента.

При $\varepsilon \neq 0$ в системе семи уравнений (4.6.3), (4.6.7) роль медленных переменных играют $G, \delta, \lambda, \theta, \varphi$, а роль быстрых — ψ и ν . Для получения решения в первом приближении достаточно просто усреднить правые части уравнений (4.6.3), (4.6.7), подставив в них ν из решения уравнения (4.6.13) и ψ из (4.7.2).

Отметим, что правые части уравнений для медленных переменных являются суммами членов вида $\sin \psi, \cos \psi, \sin \nu, \cos \nu$. Предполагается, что

для частот ω_0 и GJ_0^{-1} не выполняются резонансные соотношения $m\omega_0 + nGJ_0^{-1} \neq 0$, где m и n — любые целые числа.

При этом предположении усреднение правых частей уравнений (4.6.3), (4.6.7) по времени можно заменить независимым усреднением по переменным ψ и $\nu(t)$. Пусть $f(x, \nu, \psi)$ — функция переменных $x \{G, \delta, \lambda, \theta, \varphi\}$, ν и ψ , периодически зависящая от ν и ψ , причем переменные x, ν и ψ являются решениями невозмущенной системы, т. е. $G = \text{const}, \delta = \text{const}, \lambda = \text{const}, \theta = \text{const}, \varphi = \text{const}, \nu = \nu(t), \psi = GJ_0^{-1}t + \psi_0$. Функция $f\{x, \nu(t), \psi\}$ имеет период $\frac{2\pi}{\omega_0}$ по t , а по ψ — период 2π и может быть разложена в ряд Фурье по аргументам t и ψ .

Таким образом, при фиксированных значениях медленных переменных правые части уравнений, подлежащие усреднению, будут суммами членов вида $f_1(\psi)f_2(\nu)$, где функции f_1, f_2 периодичны по своим аргументам с периодами 2π . Кроме того, разложение $f_1(\psi)$ в ряд Фурье содержит гармоники не выше третьей. Поэтому разложение правых частей уравнений (4.6.3), (4.6.7) в двойной ряд Фурье (по ψ и ν), после подстановки ψ и ν как функций времени, будет суммой членов вида

$$C_{mn} \cos[m(LJ_0^{-1}t + \psi_0)] \cos n\omega_0\psi, \quad m = 0, 1, 2, 3; \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

и подобных им, где один или оба косинуса могут быть заменены на синусы. Пусть ни при каком натуральном n не выполняется ни одно из равенств

$$G = nJ_0\omega_0, \quad G = \frac{1}{2}nJ_0\omega_0, \quad G = \frac{1}{3}nJ_0\omega_0. \quad (4.7.3)$$

В этом случае интегрирование по времени всех членов двойного ряда Фурье, кроме члена с $m = n = 0$, даст тригонометрические функции t . В силу их ограниченности после предельного перехода по формуле (4.3.3) получим для этих рядов нулевой предел, а для члена с $m = n = 0$ предел равен c_{00} . Поэтому результат усреднения запишется в виде $M_t\{f_1(\psi)f_2(\nu)\} = c_{00}$, причем он не зависит от ψ_0 . Коэффициент Фурье c_{00} , с другой стороны, может быть найден путем независимого усреднения функций f_1 и f_2 , рассматриваемых как функции времени. Усреднение $f_1(\psi)$ по времени сводится, очевидно, к усреднению по ψ , так как в невозмущенном движении ψ является линейной функцией времени (4.7.2).

Итак, при невыполнении ни одного из равенств (4.7.3) усреднение правых частей уравнений движения по времени можно заменить независимым

усреднением по ψ и по ν , как функции t , причем результат усреднения не зависит от начального значения ψ_0 .

Если выполняется хоть одно из равенств (4.7.3), то имеют место резонансные эффекты, которые здесь не рассматриваются.

Усреднение по времени функций, зависящих от ν , сводится в силу (4.6.13) к усреднению по ν следующим образом:

$$\begin{aligned} M_t\{F(\nu)\} &= \frac{1}{Q_0} \int_0^{Q_0} F(\nu(t)) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-e^2)^{3/2} F(\nu) d\nu}{(1+e \cos \nu)^2} = \\ &= (1-e^2)^{3/2} M_\nu \left\{ \frac{F(\nu)}{(1+e \cos \nu)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (4.7.4)$$

Уравнения возмущенного движения спутника (4.6.3), (4.6.7) носят общий характер. Однако часто встречаются задачи, в которых моменты действующих сил обладают силовой функцией

$$U = U(\lambda, \delta, \theta, \varphi, \psi, t).$$

Здесь λ, δ — углы, определяющие ориентацию вектора кинетического момента \mathbf{G} в неподвижном пространстве (см. рис. 13); θ, φ, ψ — углы Эйлера.

Тогда уравнения (4.6.3), (4.6.7) преобразуются к виду [17, 19]

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= \frac{1}{G \sin \delta} \frac{\partial U}{\partial \delta}, \quad \dot{\delta} = -\frac{1}{G \sin \delta} \frac{\partial U}{\partial \lambda} + \frac{1}{G} \operatorname{ctg} \delta \frac{\partial U}{\partial \psi}, \\ \dot{G} &= \frac{\partial U}{\partial \psi}, \quad \dot{\theta} = G \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi (A_1^{-1} - A_2^{-1}) - \frac{1}{G \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{1}{G} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial U}{\partial \psi}, \\ \dot{\varphi} &= G \cos \theta (A_3^{-1} - A_1^{-1} \sin^2 \varphi - A_2^{-1} \cos^2 \varphi) + \frac{1}{G \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \theta}, \\ \dot{\psi} &= G (A_1^{-1} \sin^2 \varphi + A_2^{-1} \cos^2 \varphi) - \frac{1}{G} \left(\frac{\partial U}{\partial \delta} \operatorname{ctg} \delta + \frac{\partial U}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta \right). \end{aligned} \quad (4.7.5)$$

Схемы усреднения для исследования движения быстро вращающегося симметричного и трехосного спутника для возмущений, имеющих силовую функцию, предложены в [17, 19].

В случае быстро вращающегося спутника с трехосным эллипсоидом инерции имеются три быстрые частоты: орбитальная ω_0 , прецессии ω_ψ

и частота периодического движения по полюдиям ω_θ . Силовую функцию U поэтому нужно усреднять трижды: по $\nu(t)$, по ψ и вдоль полюдии невозмущенного движения. Отметим только, что вблизи сепаратрисы (рис. 6) вектор \mathbf{G} движется медленно, и поэтому усреднять движение вдоль полюдии можно везде, кроме некоторой окрестности сепаратрисы.

§ 8. Уравнения возмущенного вращательного движения твердого тела, близкого к случаю Лагранжа

8.1. Общий случай

Рассматривается возмущенное движение относительно неподвижной точки динамически симметричного тяжелого твердого тела в случае возмущений произвольной природы. В отличие от § 5 момент силы тяжести здесь не рассматривается как возмущающий момент, а относится к невозмущенному движению, которое представляет собой движение в случае Лагранжа (см. § 1 главы 3). Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} A_1 \dot{p} + (A_3 - A_1)qr &= mgl \sin \theta \cos \varphi + \varepsilon L_1, \\ A_1 \dot{q} + (A_1 - A_3)pr &= -mgl \sin \theta \sin \varphi + \varepsilon L_2, \\ A_3 \dot{r} &= \varepsilon L_3, \quad L_i = L_i(p, q, r, \varphi, \theta, \psi), \quad i = 1, 2, 3, \\ \dot{\theta} &= p \cos \varphi - q \sin \varphi, \\ \dot{\psi} &= (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{cosec} \theta, \\ \dot{\varphi} &= r - (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta. \end{aligned} \quad (4.8.1)$$

Динамические уравнения в (4.8.1), написанные в основе общих уравнений (1.4.5), составлены в проекциях на главные оси инерции тела. Здесь p, q, r — проекции вектора угловой скорости на эти оси, $\varepsilon L_i, i = 1, 2, 3$, — проекции вектора возмущающих моментов на те же оси; ψ, θ, φ — углы Эйлера; ε — малый параметр, характеризующий величину возмущений. В частности, при $\varepsilon = 0$ система (4.8.1) описывает движение в случае Лагранжа (см. также (3.1.2)). Здесь m — масса тела, g — ускорение силы тяжести, l — расстояние от неподвижной точки O до центра тяжести тела, A_1 — экваториальный, A_3 — осевой моменты инерции тела относительно неподвижной точки O .

Ставится задача исследовать поведение решения системы (4.8.1) при значениях малого параметра ε , отличных от нуля, на достаточно большом промежутке времени $t \sim \varepsilon^{-1}$.

Необходимые соотношения для невозмущенного движения, то есть при $\varepsilon = 0$, приведены в § 1 главы 3. Первыми интегралами уравнений движения для невозмущенной системы (4.8.1) служат: G_1 — проекция вектора кинетического момента на вертикаль Oz_1 , H — полная энергия тела, r — проекция вектора угловой скорости на ось динамической симметрии, представленные формулами (3.1.7), (3.1.9), (3.1.10).

Выражение для угла нутации θ в невозмущенном движении как функции времени t , интегралов движения и произвольной фазовой постоянной β известно из (3.1.29). Формула зависимости квадрата модуля эллиптических функций k^2 от вещественных корней u_1, u_2, u_3 кубического многочлена $Q(u)$ (см. (3.1.18)) введена согласно (3.1.24).

Соотношения между корнями многочлена $Q(u)$ и первыми интегралами могут быть записаны, согласно теореме Виета, следующим образом:

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 &= \frac{H}{mgl} - \frac{A_3 r^2}{2mgl} + \frac{A_3^2 r^2}{2A_1 mgl}, \\ u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3 &= \frac{G_1 A_3 r}{A_1 mgl} - 1, \\ u_1 u_2 u_3 &= -\frac{H}{mgl} + \frac{A_3 r^2}{2mgl} + \frac{G_1^2}{2A_1 mgl}. \end{aligned} \quad (4.8.2)$$

Приведем уравнения возмущенного движения (4.8.1) к виду, допускающему применение метода усреднения. Для этого выделим медленные и быстрые переменные. В рассматриваемой задаче первые интегралы (3.1.7), (3.1.9), (3.1.10) будут для возмущенного движения (4.8.1) медленными переменными. Быстрыми переменными являются углы собственного вращения φ , нутации θ и прецессии ψ .

Используя соотношения (3.1.7), (3.1.9), (3.1.10) как формулы преобразования от переменных $(p, q, r, \varphi, \theta, \psi)$ к переменным $(G_1, H, r, \varphi, \theta, \psi)$, приведем первые три уравнения (4.8.1) к виду

$$\begin{aligned} \dot{G}_1 &= \varepsilon[(L_1 \sin \varphi + L_2 \cos \varphi) \sin \theta + L_3 \cos \theta], \\ \dot{H} &= \varepsilon(L_1 p + L_2 q + L_3 r), \\ \dot{r} &= \varepsilon A_3^{-1} L_3, \quad L_i = L_i(p, q, r, \varphi, \theta, \psi), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4.8.3)$$

Здесь и в трех последних (кинематических) уравнениях (4.8.1) подразумевается, что переменные p, q, r при помощи соотношений (3.1.7), (3.1.9), (3.1.10) выражены как функции $G_1, H, r, \varphi, \theta, \psi$ и подставлены

в (4.8.1), (4.8.3). Начальные значения медленных переменных G_1, H, r могут быть вычислены при помощи (3.1.7), (3.1.9), (3.1.10).

Правые части уравнений (4.8.3) содержат три быстрые переменные, что представляет трудность для применения метода усреднения, связанную с возможностью появления нелинейных резонансов. Для исключения этой трудности потребуем, чтобы правые части уравнений (4.8.3) для медленных переменных зависели фактически лишь от одной быстрой переменной — угла нутации θ и были бы периодическими функциями θ с периодом 2π . Тогда уравнения (4.8.3) можно усреднить по θ и получить уравнения первого приближения. Оказывается, что ряд прикладных задач обладают указанным свойством и допускают усреднение по одной переменной — углу нутации θ .

Приведем некоторые достаточные условия возможности усреднения уравнений (4.8.3) только по углу нутации θ . При фиксированных значениях медленных переменных правые части уравнений (4.8.3), подлежащих усреднению, содержат комбинации следующего вида:

$$L_1 \sin \varphi + L_2 \cos \varphi, \quad L_1 p + L_2 q, \quad L_3,$$

где L_i не зависят от t .

Потребуем, чтобы путем тождественных преобразований эти комбинации могли быть представлены как функции от медленных переменных и от угла нутации θ , периодические по θ с периодом 2π , т. е.

$$\begin{aligned} L_1 \sin \varphi + L_2 \cos \varphi &= L_1^*(G_1, H, r, \theta), \\ L_1 p + L_2 q &= L_2^*(G_1, H, r, \theta), \\ L_3 &= L_3^*(G_1, H, r, \theta). \end{aligned} \quad (4.8.4)$$

Заметим, что из соотношений (3.1.7), (3.1.9) вытекают равенства

$$\begin{aligned} p \sin \varphi + q \cos \varphi &= \frac{G_1 - A_3 r \cos \theta}{A_1 \sin \theta}, \\ p^2 + q^2 &= \frac{2(H - mgl \cos \theta) - A_3 r^2}{A_1}. \end{aligned} \quad (4.8.5)$$

Следовательно, комбинации вида (4.8.5) выражаются только через медленные переменные и угол нутации θ , причем они периодичны по θ с периодом 2π . Поэтому комбинации (4.8.5) приводятся в виду (4.8.4).

Сопоставляя соотношения (4.8.4) и (4.8.5), видим, что если возмущающие моменты L_i удовлетворяют условиям

$$L_1 = pf, \quad L_2 = qf, \quad L_3 = L_3^* \quad (4.8.6)$$

или условиям

$$L_1 = F \sin \varphi, \quad L_2 = F \cos \varphi, \quad L_3 = L_3^*, \quad (4.8.7)$$

где произвольные функции f, F, L_3^* имеют вид

$$\begin{aligned} f &= f(G_1, H, r, \theta), \\ F &= F(G_1, H, r, \theta), \\ L_3^* &= L_3^*(G_1, H, r, \theta) \end{aligned} \quad (4.8.8)$$

и периодичны по θ с периодом 2π , то налагаемые требования (4.8.4) выполняются.

Таким образом, достаточными условиями возможности усреднения медленных переменных системы (4.8.3) по углу нутации θ для возмущенного движения Лагранжа являются требования (4.8.6) или (4.8.7), налагаемые на моменты приложенных сил. В дальнейшем предполагаются выполненными общие (необходимые и достаточные) условия (4.8.4) или, в частности, достаточные условия (4.8.6) или (4.8.7) (вместе с (4.8.8)), что обеспечивает справедливость соотношений (4.8.4). Система (4.8.3) уравнений возмущенного движения твердого тела, близкого к случаю Лагранжа, тогда может быть представлена в форме

$$\begin{aligned} \dot{G}_1 &= \varepsilon F_1(G_1, H, r, \theta), & F_1 &= L_1^* \sin \theta + L_3^* \cos \theta, \\ \dot{H} &= \varepsilon F_2(G_1, H, r, \theta), & F_2 &= L_2^* + L_3^* r, \\ \dot{r} &= \varepsilon F_3(G_1, H, r, \theta), & F_3 &= A_3^{-1} L_3^*. \end{aligned} \quad (4.8.9)$$

Здесь F_1, F_2, F_3 — 2π -периодические функции θ .

Дальнейшее исследование этой системы будет проведено в главе 11.

8.2. Случай различных порядков малости проекций вектора возмущающего момента

Рассмотрим другой возможный вариант применения метода усреднения для возмущенного движения в случае, близком к случаю Лагранжа.

Уравнения движения динамически симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки O под действием восстанавливающего и возмущающего моментов (динамические и кинематического уравнения Эйлера) имеют вид

$$\begin{aligned} A_1 \dot{p} + (A_3 - A_1)qr &= k \sin \theta \cos \varphi + L_1, \\ A_1 \dot{q} + (A_1 - A_3)pr &= -k \sin \theta \sin \varphi + L_2, \\ A_3 \dot{r} &= L_3, \quad L_i = L_i(p, q, r, \varphi, \theta, \psi), \quad i = 1, 2, 3, \\ \dot{\psi} &= (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{cosec} \theta, \\ \dot{\theta} &= p \cos \varphi - q \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= r - (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta. \end{aligned} \quad (4.8.10)$$

Динамические уравнения (4.8.10) записаны в проекциях на главные оси инерции тела, проходящие через точку O . Здесь p, q, r — проекции вектора угловой скорости тела на эти оси, $L_i, i = 1, 2, 3$, — проекции вектора возмущающего момента на те же оси, являющиеся периодическими функциями углов Эйлера ψ, θ, φ с периодами 2π , ψ — угол прецессии, θ — угол нутации, φ — угол собственного вращения, A_1 — экваториальный, а A_3 — осевой моменты инерции тела относительно точки O , $A_1 \neq A_3$. Предполагается, что на тело действует восстанавливающий момент, максимальная величина которого равна k и который создается постоянной по величине и направлению силой, приложенной в некоторой фиксированной точке оси динамической симметрии. В случае тяжелого волчка имеем

$$k = mgl. \quad (4.8.11)$$

Здесь m — масса тела, g — ускорение силы тяжести, l — расстояние от неподвижной точки O до центра тяжести тела. Восстанавливающий момент может быть также обусловлен аэродинамическими силами.

Возмущающие моменты L_i в (4.8.10) предполагаются известными функциями своих аргументов. При $L_i = 0, i = 1, 2, 3$, уравнения (4.8.10) отвечают случаю Лагранжа.

Сделаем следующие исходные предположения:

$$p^2 + q^2 \ll r^2, \quad A_3 r^2 \gg k, \quad |L_i| \ll k, \quad i = 1, 2, \quad L_3 \sim k, \quad (4.8.12)$$

которые означают, что направление угловой скорости тела близко к оси динамической симметрии, угловая скорость достаточно велика, так что кинетическая энергия тела много больше потенциальной энергии, обусловленной восстанавливающим моментом, две проекции вектора возмущающего

момента на главные оси инерции тела малы по сравнению с восстанавливающим моментом, а третья — одного с ним порядка. Неравенства (4.8.12) позволяют ввести малый параметр ε и положить

$$\begin{aligned} p &= \varepsilon P, \quad q = \varepsilon Q, \quad k = \varepsilon K, \quad \varepsilon \ll 1, \\ L_i &= \varepsilon^2 L_i^*(P, Q, r, \psi, \theta, \varphi), \quad i = 1, 2, \\ L_3 &= \varepsilon L_3^*(P, Q, r, \psi, \theta, \varphi). \end{aligned} \quad (4.8.13)$$

Новые переменные P, Q , а также переменные и постоянные $r, \psi, \theta, \varphi, K, A_1, A_3, L_i^*, i = 1, 2, 3$, предполагается ограниченными величинами порядка единицы при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Ставится задача исследования асимптотического поведения решения системы (4.8.10) при малом ε , если выполнены условия (4.8.12), (4.8.13). Будет использован метод усреднения. Совокупность сделанных упрощающих предположений (4.8.12) или (4.8.13) позволяет получить в общем случае сравнительно простую схему усреднения и исследовать ряд примеров.

Сделаем в системе (4.8.10) замену переменных (4.8.13); сократив обе части первых двух уравнений (4.8.10) на ε , получим

$$\begin{aligned} A_1 \dot{P} + (A_3 - A_1)Qr &= K \sin \theta \cos \varphi + \varepsilon L_1^*, \\ A_1 \dot{Q} + (A_1 - A_3)Pr &= -K \sin \theta \sin \varphi + \varepsilon L_2^*, \\ A_3 \dot{r} &= \varepsilon L_3^*, \\ \dot{\psi} &= \varepsilon(P \sin \varphi + Q \cos \varphi) \operatorname{cosec} \theta, \\ \dot{\theta} &= \varepsilon(P \cos \varphi - Q \sin \varphi), \\ \dot{\varphi} &= r - \varepsilon(P \sin \varphi + Q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta. \end{aligned} \quad (4.8.14)$$

Рассмотрим систему нулевого приближения и положим $\varepsilon = 0$ в (4.8.14). Тогда из последних четырех уравнений (4.8.14) получим

$$r = r_0, \quad \psi = \psi_0, \quad \theta = \theta_0, \quad \varphi = r_0 t + \varphi_0. \quad (4.8.15)$$

Здесь $r_0, \psi_0, \theta_0, \varphi_0$ — постоянные, равные начальным значениям соответствующих переменных при $t = 0$. Подставим равенства (4.8.15) в первые два уравнения системы (4.8.14) при $\varepsilon = 0$ и проинтегрируем полученную систему двух линейных уравнений для P, Q . Решение представим

в виде

$$\begin{aligned} P &= a \cos \gamma_0 + b \sin \gamma_0 + K A_3^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \sin(r_0 t + \varphi_0), \\ Q &= a \sin \gamma_0 - b \cos \gamma_0 + K A_3^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \cos(r_0 t + \varphi_0), \\ a &= P_0 - K A_3^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \sin \varphi_0, \\ b &= -Q_0 + K A_3^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \cos \varphi_0, \\ \gamma_0 &= n_0 t, \quad n_0 = (A_3 - A_1) A_1^{-1} r_0 \neq 0, \quad |n_0/r_0| \leq 1. \end{aligned} \quad (4.8.16)$$

Здесь P_0, Q_0 — начальные значения новых переменных P, Q , введенных согласно (4.8.13), а переменная $\gamma = \gamma_0$ имеет смысл фазы колебаний. Система (4.8.14) существенно нелинейна (частота собственных колебаний переменных P, Q зависит от медленной переменной r), поэтому далее вводится дополнительная переменная γ , определяемая уравнением

$$\dot{\gamma} = n, \quad \gamma(0) = 0, \quad n = (A_3 - A_1) A_1^{-1} r. \quad (4.8.17)$$

При $\varepsilon = 0$ имеем $\gamma = \gamma_0 = n_0 t$ в соответствии с (4.8.16). Равенства (4.8.15), (4.8.16) определяют общее решение системы (4.8.14), (4.8.17) при $\varepsilon = 0$. Первые два соотношения (4.8.16) можно, исключив постоянные, с учетом (4.8.15) переписать в эквивалентном виде

$$\begin{aligned} P &= a \cos \gamma + b \sin \gamma + K A_3^{-1} r^{-1} \sin \theta \sin \varphi, \\ Q &= a \sin \gamma - b \cos \gamma + K A_3^{-1} r^{-1} \sin \theta \cos \varphi \end{aligned} \quad (4.8.18)$$

и разрешить относительно a, b :

$$\begin{aligned} a &= P \cos \gamma + Q \sin \gamma - K A_3^{-1} r^{-1} \sin \theta \sin(\gamma + \varphi), \\ b &= P \sin \gamma - Q \cos \gamma + K A_3^{-1} r^{-1} \sin \theta \cos(\gamma + \varphi). \end{aligned} \quad (4.8.19)$$

Соотношения (4.8.18), (4.8.19) можно рассматривать как формулы замены переменных (содержащие переменную γ), определяющие переход от переменных P, Q к переменным типа Ван-дер-Поля [12] a, b и обратно. Пользуясь этими формулами, перейдем в системе (4.8.14), (4.8.17) от переменных $P, Q, r, \psi, \theta, \varphi, \gamma$ к новым переменным $a, b, r, \psi, \theta, \alpha, \gamma$, причем

$$\alpha = \gamma + \varphi. \quad (4.8.20)$$

После преобразований получим более удобную для дальнейшего исследования систему семи уравнений (вместо шести (4.8.14)):

$$\begin{aligned}
\dot{a} &= \varepsilon A_1^{-1} (L_1^\circ \cos \gamma + L_2^\circ \sin \gamma) - \varepsilon K A_3^{-1} r^{-1} \times \\
&\quad \times \cos \theta (b - K A_3^{-1} r^{-1} \sin \theta \cos \alpha) + \varepsilon K A_3^{-2} r^{-2} L_3^\circ \sin \theta \sin \alpha, \\
\dot{b} &= \varepsilon A_1^{-1} (L_1^\circ \sin \gamma + L_2^\circ \cos \gamma) + \varepsilon K A_3^{-1} r^{-1} \times \\
&\quad \times \cos \theta (a + K A_3^{-1} r^{-1} \sin \theta \sin \alpha) - \varepsilon K A_3^{-2} r^{-2} L_3^\circ \sin \theta \cos \alpha, \\
\dot{r} &= \varepsilon A_3^{-1} L_3^\circ, \quad \dot{\theta} = \varepsilon (a \cos \alpha + b \sin \alpha), \\
\dot{\psi} &= \varepsilon \operatorname{cosec} \theta (a \sin \alpha - b \cos \alpha) + \varepsilon K A_3^{-1} r^{-1}, \\
\dot{\alpha} &= A_3 A_1^{-1} r - \varepsilon \operatorname{ctg} \theta (a \sin \alpha - b \cos \alpha) - \varepsilon K A_3^{-1} r^{-1} \cos \theta, \\
\dot{\gamma} &= (A_3 - A_1) A_1^{-1} r.
\end{aligned} \tag{4.8.21}$$

Здесь через L_i° обозначены функции, полученные из L_i^* (см. (4.8.13)) в результате сделанной подстановки (4.8.18)–(4.8.20), т. е.

$$L_i^\circ(a, b, r, \psi, \theta, \alpha, \gamma) = L_i^*(P, Q, r, \psi, \theta, \varphi), \quad i = 1, 2, 3. \tag{4.8.22}$$

Отметим, что переход от двух переменных P, Q к трем a, b, γ вызван соображениями удобства: при $\varepsilon = 0$ система для P, Q имеет вид линейной, а замена (4.8.18) неособая для всех a, b .

Введем вектор x , компонентами которого служат медленные переменные a, b, r, ψ, θ системы (4.8.21). Тогда эту систему можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \varepsilon X(x, \alpha, \gamma), \quad \dot{\alpha} = A_3 A_1^{-1} r + \varepsilon Y(x, \alpha), \\
\dot{\gamma} &= (A_3 - A_1) A_1^{-1} r, \quad x(0) = x_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0, \quad \gamma(0) = 0.
\end{aligned} \tag{4.8.23}$$

Здесь вектор-функция X и скалярная функция Y определяются правыми частями уравнений (4.8.21), начальные условия получаются согласно (4.8.15)–(4.8.17).

Рассмотрим систему (4.8.21) или (4.8.23) с точки зрения применения метода усреднения [12–14]. Система (4.8.21) содержит медленные переменные a, b, r, ψ, θ и две быстрые переменные — фазы α, γ , причем γ входит лишь в первые три уравнения (4.8.21). Система нелинейна, и непосредственное применение метода усреднения весьма затруднено [16].

Решение этой системы будет проведено в главе 11.

8.3. Возмущающие моменты малы по сравнению с восстанавливающим

Рассмотрим, как и в предыдущем подпараграфе 8.2, движение динамически симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки O под действием восстанавливающего и возмущающих моментов. Уравнения движения имеют вид (4.8.10). Все обозначения подпараграфа 8.2 сохраняются. В данном подпараграфе делаются следующие исходные предположения:

$$p^2 + q^2 \ll r^2, \quad A_3 r^2 \gg k, \quad |L_i| \ll k, \quad i = 1, 2, 3, \tag{4.8.24}$$

которые означают, что: а) направление угловой скорости тела близко к оси динамической симметрии; б) угловая скорость достаточно велика, так что кинетическая энергия тела много больше потенциальной энергии, обусловленной восстанавливающим моментом; в) возмущающие моменты малы по сравнению с восстанавливающим. В отличие от подпараграфа 8.2 (см. (4.8.12)) здесь предполагается, что все (а не только первые две) проекции вектора возмущающего момента на главные оси инерции тела малы по сравнению с восстанавливающим моментом.

Неравенства (4.8.24) позволяют ввести малый параметр $\varepsilon \ll 1$ и положить

$$p = \varepsilon P, \quad q = \varepsilon Q, \quad k = \varepsilon K, \tag{4.8.25}$$

$$L_i = \varepsilon^2 L_i^*(P, Q, r, \psi, \theta, \varphi), \quad i = 1, 2, 3.$$

Как и в подпараграфе 8.2, новые переменные P, Q , а также переменные и постоянные $r, \psi, \theta, \varphi, K, A_1, A_3, L_i^*$ предполагаются ограниченными величинами порядка единицы при $\varepsilon \rightarrow 0$. Ставится задача исследования асимптотического поведения системы (4.8.10) при малом ε , если выполнены условия (4.8.24), (4.8.25). Будем пользоваться методом усреднения на интервале времени порядка ε^{-1} .

Сделаем в системе (4.8.10) замену переменных (4.8.25). Сократив обе части первых двух уравнений (4.8.10) на ε , получим

$$\begin{aligned}
A_1 \dot{P} + (A_3 - A_1) Q r &= K \sin \theta \cos \varphi + \varepsilon L_1^*, \\
A_1 \dot{Q} + (A_1 - A_3) P r &= -K \sin \theta \sin \varphi + \varepsilon L_2^*, \\
A_3 \dot{r} &= \varepsilon^2 L_3^*,
\end{aligned} \tag{4.8.26}$$

$$\dot{\psi} = \varepsilon (P \sin \varphi + Q \cos \varphi) \operatorname{cosec} \theta,$$

$$\dot{\theta} = \varepsilon (P \cos \varphi - Q \sin \varphi),$$

$$\dot{\varphi} = r - \varepsilon (P \sin \varphi + Q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta.$$

Все уравнения систем (4.8.26) и (4.8.14), кроме третьего, совпадают.

Рассмотрим сначала систему нулевого приближения и положим $\varepsilon = 0$. В этом случае из последних четырех уравнений (4.8.26) получим формулы (4.8.15). Подставим выражения (4.8.15) в первые два уравнения системы (4.8.26) при $\varepsilon = 0$ и проинтегрируем полученную систему уравнений для P, Q . Решение можно представить в виде (4.8.16). Снова введем дополнительную переменную γ , определяемую уравнением (4.8.17).

При $\varepsilon = 0$ из (4.8.16) следует, что $\gamma = \gamma_0 = n_0 t$. Общее решение системы (4.8.26), (4.8.17) при $\varepsilon = 0$ определяется равенствами (4.8.15), (4.8.16). Первые два выражения (4.8.16) можно, исключая постоянные с учетом (4.8.15), переписать в виде (4.8.18). Разрешив равенства (4.8.18) относительно a и b , получим формулы (4.8.19).

Введем новую переменную δ следующим образом:

$$r = r_0 + \varepsilon \delta. \quad (4.8.27)$$

Обратимся теперь к системе (4.8.26) при $\varepsilon \neq 0$ и будем рассматривать соотношения (4.8.18), (4.8.19), (4.8.27) как формулы замены переменных, определяющие переход от переменных P, Q, r к переменным a, b, δ (в эти формулы входит также новая переменная γ). Пользуясь этими формулами, перейдем в системе (4.8.26), (4.8.17) от переменных $P, Q, r, \psi, \theta, \varphi, \gamma$ к новым переменным $a, b, \delta, \psi, \theta, \alpha, \gamma$, где α определяется согласно (4.8.20).

После преобразований получим более удобную для исследования систему семи уравнений (вместо шести уравнений (4.8.26)):

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon A_1^{-1} (L_1^\circ \cos \gamma + L_2^\circ \sin \gamma) - \\ &\quad - \varepsilon K A_3^{-1} r_0^{-1} \cos \theta (b - K A_3^{-1} r_0^{-1} \sin \theta \cos \alpha) + \\ &\quad + \varepsilon^2 K A_3^{-1} r_0^{-2} \delta \cos \theta (b - 2K A_3^{-1} r_0^{-1} \sin \theta \cos \alpha) + \\ &\quad + \varepsilon^2 K A_3^{-2} r_0^{-2} L_3^\circ \sin \theta \sin \alpha, \\ \dot{b} &= \varepsilon A_1^{-1} (L_1^\circ \sin \gamma - L_2^\circ \cos \gamma) + \\ &\quad + \varepsilon K A_3^{-1} r_0^{-1} \cos \theta (a + K A_3^{-1} r_0^{-1} \sin \theta \sin \alpha) - \\ &\quad - \varepsilon^2 K A_3^{-1} r_0^{-2} \delta \cos \theta (a + 2K A_3^{-1} r_0^{-1} \sin \theta \sin \alpha) - \\ &\quad - \varepsilon^2 K A_3^{-2} r_0^{-2} L_3^\circ \sin \theta \cos \alpha, \\ \dot{\delta} &= \varepsilon A_3^{-1} L_3^\circ, \quad \dot{\theta} = \varepsilon (a \cos \alpha + b \sin \alpha), \quad \dot{\gamma} = n_0 + \varepsilon (A_3 - A_1) A_1^{-1} \delta, \\ \dot{\psi} &= \varepsilon \operatorname{cosec} \theta (a \sin \alpha - b \cos \alpha) + \varepsilon K A_3^{-1} r_0^{-1} - \varepsilon^2 K A_3^{-1} r_0^{-2} \delta, \\ \dot{\alpha} &= A_3 A_1^{-1} r_0 + \varepsilon A_3 A_1^{-1} \delta - \varepsilon \operatorname{ctg} \theta (a \sin \alpha - b \cos \alpha) - \\ &\quad - \varepsilon K A_3^{-1} r_0^{-1} \cos \theta + \varepsilon^2 K A_3^{-1} r_0^{-2} \delta \cos \theta. \end{aligned} \quad (4.8.28)$$

Здесь через L_i° обозначены функции, полученные из L_i^* (см. (4.8.25)) в результате подстановки (4.8.18)–(4.8.20), (4.8.27):

$$L_i^\circ(a, b, \delta, \psi, \theta, \alpha, \gamma) = L_i^*(P, Q, r, \psi, \theta, \varphi), \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.8.29)$$

Рассматриваемая система уравнений (4.8.28) может быть приведена к виду

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon F_1(x, y) + \varepsilon^2 F_2(x, y), & x(0) &= x_0, \\ \dot{y}^1 &= \omega_1 + \varepsilon g_1(x, y) + \varepsilon^2 g_2(x, y), & y^1(0) &= y^{10}, \\ \dot{y}^2 &= \omega_2 + \varepsilon h_1(x, y) + \varepsilon^2 h_2(x, y), & y^2(0) &= y^{20}. \end{aligned} \quad (4.8.30)$$

Здесь вектор-функция $x = (x^1, \dots, x^5)$ составлена из медленных переменных $a, b, \delta, \psi, \theta$; через y^1 и y^2 обозначены быстрые переменные (фазы) α, γ ; ω_1, ω_2 — постоянные частоты, равные $A_3 A_1^{-1} r_0$ и $(A_3 - A_1) A_1^{-1} r_0$ соответственно. Вектор-функции $F_i, g_i, h_i, i = 1, 2$, определяются правыми частями уравнений (4.8.28).

Дальнейшее исследование систем (4.8.28), (4.8.30) проводится в работе [251].

ГЛАВА 5

Возмущающие моменты сил, действующие на твердое тело

В данной главе рассматриваются внешние и внутренние моменты сил различной физической природы, которые могут действовать в качестве возмущающих при движении твердого тела относительно центра масс. Динамика твердых тел под действием этих моментов сил будет исследована в последующих главах.

§ 1. Гравитационные моменты, действующие на спутник

Рассмотрим движение искусственного спутника Земли относительно центра масс под действием гравитационного момента. Пусть R — расстояние от центра притяжения (центра масс Земли) до центра инерции спутника, а l — характерный размер спутника. Предположим, что $l \ll R$ и пренебрежем величинами более высокого порядка, чем $(l/R)^2$. Тогда движение спутника относительно центра масс практически не влияет на движение центра масс. Центр масс спутника движется по эллиптической орбите, уравнение которой имеет вид

$$R = \frac{p_0}{1 + e \cos \nu}, \quad (5.1.1)$$

где, как показано на рис. 15, p_0 — фокальный параметр, e — эксцентриситет орбиты, R и ν — полярные координаты, описывающие положение центра масс спутника относительно центра притяжения, который находится в фокусе F эллипса, O — центр масс спутника. Угол ν в небесной механике называется истинной аномалией.

Зависимость истинной аномалии ν от времени дается соотношением (см. (4.6.13))

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{\omega_0(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{Q_0} = \left[\frac{\mu(1 - e^2)^3}{p_0^3} \right]^{1/2}. \quad (5.1.2)$$

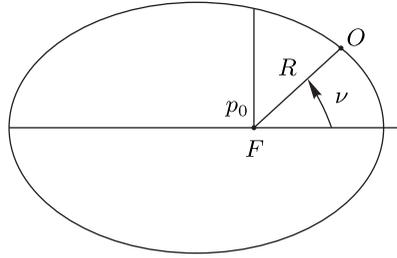


Рис. 15

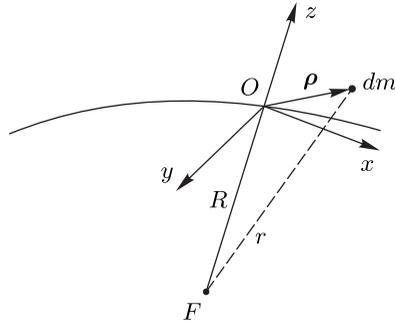


Рис. 16

Здесь ω_0 — средняя угловая скорость движения центра масс по эллиптической орбите, Q_0 — период обращения спутника, μ — произведение постоянной всемирного тяготения на массу Земли.

Введем систему координат $Oxyz$, связанную со спутником (рис. 16): ось Oz направлена по текущему радиус-вектору орбиты, ось Oy параллельна нормали к плоскости орбиты, ось Ox перпендикулярна Oy и Oz .

На частицу спутника с массой dm и координатами x, y, z действует ньютоновская сила $d\mathbf{F}$, направленная к центру притяжения:

$$d\mathbf{F} = -\frac{\mu dm}{x^2 + y^2 + (z + R)^2} \mathbf{r}_0. \quad (5.1.3)$$

Здесь единичный вектор \mathbf{r}_0 определяется направляющими косинусами:

$$\cos(\widehat{x, \mathbf{r}_0}) = \frac{x}{r}, \quad \cos(\widehat{y, \mathbf{r}_0}) = \frac{y}{r}, \quad \cos(\widehat{z, \mathbf{r}_0}) = \frac{z + R}{r}, \quad (5.1.4)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + R)^2}.$$

Так как размеры спутника малы по сравнению с расстоянием R до центра притяжения, то можно считать, что x, y, z малы по сравнению с R . Тогда с точностью до членов второго порядка малости проекции силы $d\mathbf{F}$ на координатные оси Ox, Oy, Oz выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} dF_x &= -\frac{\mu dm}{R^2} \cdot \frac{x}{R}, \\ dF_y &= -\frac{\mu dm}{R^2} \cdot \frac{y}{R}, \\ dF_z &= -\frac{\mu dm}{R^2} + \frac{2\mu dm}{R^2} \cdot \frac{z}{R}. \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

Выражение $-\frac{\mu dm}{R^2}$ в dF_z из (5.1.5) равно элементарной силе, приложенной к элементу dm , которая вызывает движение центра масс спутника по эллиптической орбите. Сила

$$d\mathbf{F}_1 = \left\{ -\frac{\mu x dm}{R^3}, -\frac{\mu y dm}{R^3}, \frac{2\mu z dm}{R^3} \right\}$$

создает вращающий момент $d\mathbf{L}_0$ относительно центра масс спутника O . Подсчитаем этот момент по формуле $d\mathbf{L}_0 = \boldsymbol{\rho} \times d\mathbf{F}_1$, где $\boldsymbol{\rho}\{x, y, z\}$ — радиус-вектор элемента dm относительно точки O . Используя формулы (5.1.5), получим

$$\begin{aligned} d\mathbf{L}_0 &= (dL_x, dL_y, dL_z), \\ dL_x &= 3yz \frac{\mu dm}{R^3}, \quad dL_y = -3xz \frac{\mu dm}{R^3}, \quad dL_z = 0. \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

Для нахождения гравитационного момента \mathbf{L}_0 , действующего на спутник, нужно проинтегрировать выражение (5.1.6) по объему спутника. Для этого предварительно переходим к системе координат $Oz_1z_2z_3$, оси которой направлены по главным осям инерции спутника [19, 265]. Взаимное положение систем координат $Oxyz$ и $Oz_1z_2z_3$ определим таблицей направляющих косинусов:

$$\begin{array}{c|ccc} & z_1 & z_2 & z_3 \\ \hline x & \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ y & \beta & \beta' & \beta'' \\ z & \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{array}. \quad (5.1.7)$$

Отметим следующее свойство матрицы направляющих косинусов (5.1.7): каждый элемент матрицы равен своему алгебраическому дополнению [282, 283]. Например, $\alpha' = \beta''\gamma - \beta\gamma''$.

Найдем проекции момента гравитационных сил $d\mathbf{L}_0$ на оси Oz_i , $i = 1, 2, 3$. Проекция на ось Oz_1 с учетом (5.1.6) и (5.1.7) равна

$$dL_{z_1} = \frac{3\mu dm}{R^3}(yz\alpha - xz\beta) = \frac{3\mu dm}{R^3}z(y\alpha - x\beta).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} y\alpha - x\beta &= (z_1\beta + z_2\beta' + z_3\beta'')\alpha - (z_1\alpha + z_2\alpha' + z_3\alpha'')\beta = \\ &= z_2(\beta'\alpha - \alpha\beta') - z_3(\alpha''\beta - \beta''\alpha) = z_2\gamma'' - z_3\gamma' \end{aligned}$$

согласно приведенному свойству матрицы направляющих косинусов. Таким образом,

$$dL_{z_1} = \frac{3\mu dm}{R^3}(z_1\gamma + z_2\gamma' + z_3\gamma'')(z_2\gamma'' - z_3\gamma').$$

Интегрируя по объему спутника V , получим

$$L_{z_1} = \frac{3\mu}{R^3} \int_V (z_1z_2\gamma\gamma'' + z_2^2\gamma'\gamma'' + z_2z_3\gamma''^2 - z_1z_3\gamma' - z_2z_3\gamma'^2 - z_3^2\gamma'\gamma'') dm. \quad (5.1.8)$$

Так как оси, связанные с твердым телом, направлены по главным центральным осям инерции, то имеем

$$\int_V z_1z_2 dm = \int_V z_2z_3 dm = \int_V z_1z_3 dm = 0. \quad (5.1.9)$$

Главные центральные моменты инерции равны

$$A_1 = \int_V (z_2^2 + z_3^2) dm, \quad A_2 = \int_V (z_1^2 + z_3^2) dm, \quad A_3 = \int_V (z_1^2 + z_2^2) dm. \quad (5.1.10)$$

Подставляя соотношения (5.1.9), (5.1.10) в интеграл (5.1.8), получим

$$L_{z_1} = 3 \frac{\mu}{R^3} (A_3 - A_2) \gamma' \gamma''. \quad (5.1.11)$$

Аналогичные вычисления приводят к следующим выражениям для L_{z_2} , L_{z_3} [19]:

$$L_{z_2} = 3 \frac{\mu}{R^3} (A_1 - A_3) \gamma'' \gamma, \quad L_{z_3} = 3 \frac{\mu}{R^3} (A_2 - A_1) \gamma \gamma'. \quad (5.1.12)$$

Вводя орты $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$ координатной системы $Oz_1z_2z_3$, можно переписать (5.1.11), (5.1.12) следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_0 &= L_{z_1} \mathbf{z}_1 + L_{z_2} \mathbf{z}_2 + L_{z_3} \mathbf{z}_3 = \\ &= \frac{3\mu}{R^3} [(A_3 - A_2) \gamma' \gamma'' \mathbf{z}_1 + (A_1 - A_3) \gamma'' \gamma \mathbf{z}_2 + (A_2 - A_1) \gamma \gamma' \mathbf{z}_3]. \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

Здесь $\gamma, \gamma', \gamma''$ — направляющие косинусы радиус-вектора центра инерции спутника \mathbf{R} , проведенного из неподвижного центра притяжения, с главными центральными осями инерции Oz_i , $i = 1, 2, 3$. Введем вспомогательный вектор

$$\mathbf{I} = A_1 \gamma \mathbf{z}_1 + A_2 \gamma' \mathbf{z}_2 + A_3 \gamma'' \mathbf{z}_3. \quad (5.1.14)$$

Тогда равенство (5.1.13) запишется в виде

$$\mathbf{L}_0 = 3\mu R^{-4} (\mathbf{R} \times \mathbf{I}). \quad (5.1.15)$$

В главе 4 введена система координат $Oy_1y_2y_3$ (рис. 13), а также составлены уравнения движения спутника относительно центра инерции (4.6.3), (4.6.7) в проекциях на оси системы координат $Oy_1y_2y_3$.

Будем проектировать векторное равенство (5.1.15) на оси Oy_i . Направляющие косинусы радиус-вектора \mathbf{R} с осями Oy_i обозначим через σ_i . Справедливы следующие соотношения

$$\begin{aligned} \gamma &= \alpha_{11}\sigma_1 + \alpha_{21}\sigma_2 + \alpha_{31}\sigma_3, \\ \gamma' &= \alpha_{12}\sigma_1 + \alpha_{22}\sigma_2 + \alpha_{32}\sigma_3, \\ \gamma'' &= \alpha_{13}\sigma_1 + \alpha_{23}\sigma_2 + \alpha_{33}\sigma_3. \end{aligned}$$

Здесь α_{ij} — направляющие косинусы, определяющие ориентацию связанной системы координат $Oz_1z_2z_3$ относительно системы координат $Oy_1y_2y_3$ (см., например, выражения (1.5.4)).

Проекция вектора \mathbf{I} из (5.1.14) на оси Oy_i равны

$$I_i = \mathbf{I} \mathbf{y}_i = s_{i1}\sigma_1 + s_{i2}\sigma_2 + s_{i3}\sigma_3, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.1.16)$$

где введено обозначение

$$s_{ij} = A_1 \alpha_{i1} \alpha_{j1} + A_2 \alpha_{i2} \alpha_{j2} + A_3 \alpha_{i3} \alpha_{j3}. \quad (5.1.17)$$

Раскрывая векторное произведение (5.1.15) при помощи (5.1.17) и исключая R и μ с учетом равенства (5.1.1) и второго выражения (5.1.2), получим окончательно

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{3\omega_0^2(1+e\cos\nu)^3}{(1-e^2)^3} \sum_{j=1}^3 (\sigma_2\sigma_j s_{3j} - \sigma_3\sigma_j s_{2j}), \\ L_2 &= \frac{3\omega_0^2(1+e\cos\nu)^3}{(1-e^2)^3} \sum_{j=1}^3 (\sigma_3\sigma_j s_{1j} - \sigma_1\sigma_j s_{3j}), \\ L_3 &= \frac{3\omega_0^2(1+e\cos\nu)^3}{(1-e^2)^3} \sum_{j=1}^3 (\sigma_1\sigma_j s_{2j} - \sigma_2\sigma_j s_{1j}). \end{aligned} \quad (5.1.18)$$

Для вычисления направляющих косинусов σ_i радиус-вектора с осями Oy_i заметим, что радиус-вектор лежит в плоскости орбиты Ox_1x_2 и образует с осью Ox_1 угол истинной аномалии ν . Отсюда сразу следует (см. рис. 13)

$$\sigma_1 = \cos\delta \cos(\nu - \lambda), \quad \sigma_2 = \sin(\nu - \lambda), \quad \sigma_3 = \sin\delta \cos(\nu - \lambda). \quad (5.1.19)$$

§ 2. Твердое тело в среде с сопротивлением

Наличие скорости собственного вращения тела обуславливает появление диссипативных моментов, вызывающих торможение вращения тела. Эти моменты зависят от свойств сопротивляющейся среды, в которой происходят движения, от формы тела, от свойств его поверхности и распределения масс в теле, а также от характеристик движения тела. Поэтому зависимость момента сил сопротивления \mathbf{L}^r от ориентации тела и его угловой скорости может быть весьма сложной и в общем случае требует рассмотрения также движения среды вокруг тела.

Ограничимся здесь некоторыми простыми соотношениями, которые могут качественно описывать сопротивление вращению при небольших угловых скоростях и используются в литературе [46, 47, 49, 51, 62, 65, 67, 74, 230, 243, 246, 248, 284].

Зависимость диссипативного момента сил сопротивления \mathbf{L}^r от вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$ часто принимается линейной:

$$\mathbf{L}^r = -\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}. \quad (5.2.1)$$

Здесь D_{ij} — постоянные коэффициенты момента сил сопротивления.

Тензор \mathbf{D} в (5.2.1) многие авторы принимают диагональным:

$$\mathbf{D} = -\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

Здесь $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — постоянные коэффициенты пропорциональности. В этом случае имеем, согласно (5.2.1), в проекциях на оси подвижной системы координат $Oxyz$ (где O — неподвижная точка)

$$L_x = -\lambda_1 p, \quad L_y = -\lambda_2 q, \quad L_z = -\lambda_3 r.$$

В некоторых работах предполагается, что матрица D , определяющая момент сил сопротивления в (5.2.1), имеет вид

$$D = - \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix} J,$$

где μ_1, μ_2, μ_3 — постоянные коэффициенты, а J — тензор инерции твердого тела. Таким образом, в этом случае компоненты момента сил сопротивления (5.2.1) равны

$$L_x^r = -\mu_1 A_1 p, \quad L_y^r = -\mu_2 A_2 q, \quad L_z^r = -\mu_3 A_3 r, \quad (5.2.3)$$

где A_1, A_2, A_3 — главные центральные моменты инерции твердого тела.

§ 3. Твердое тело с полостью, заполненной жидкостью большой вязкости

В работах [113, 121, 122] рассматривается движение твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью. Число Рейнольдса предполагается малым: $R = l^2 T_*^{-1} \nu^{-1} \ll 1$. Здесь l — характерный линейный размер полости; T_* — характерный масштаб времени относительного движения, обратно пропорциональный характерной угловой скорости ω , а ν — кинематический коэффициент вязкости жидкости. Если l и T_* принимаются за единицы измерения длины и времени, то кинематический коэффициент вязкости — большой параметр, т.е. $\nu = 1/R \gg 1$. Скорость \mathbf{u} жидкости в системе координат, связанной с твердым телом, ищется в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{w} + \mathbf{W}; \quad \mathbf{w}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{w}^0(\mathbf{r}, t) + \nu^{-1} \mathbf{w}^1(\mathbf{r}, t) + \nu^{-2} \dots, \\ \mathbf{W}(\mathbf{r}, \tau) &= \mathbf{W}^0(\mathbf{r}, \tau) + \nu^{-1} \mathbf{W}^1(\mathbf{r}, \tau) + \nu^{-2} \dots, \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

$$\tau = \nu t.$$

Давление ищется в виде аналогичных рядов. Здесь \mathbf{r} — радиус-вектор, отсчитанный от некоторой точки, связанной с твердым телом, t — время, $\tau = \nu t$ — «быстрое» время, а верхние индексы указывают номер приближения. В результате подстановки рядов вида (5.3.1) в уравнения Навье–Стокса получаются краевые задачи для определения коэффициентов этих рядов. Рассмотрение показывает, что тождественно $\mathbf{w}^0 = 0$ и всюду, за исключением малого начального интервала времени, можно принять $\mathbf{u} = \nu^{-1}\mathbf{w}^1 + O(\nu^{-1})$. Определение функции $\mathbf{w}^1(\mathbf{r}, t)$ сводится к решению трех стационарных краевых задач:

$$\Delta \mathbf{z}_i = \nabla s_i + \mathbf{e}_i \times \mathbf{r}, \quad \operatorname{div} \mathbf{z}_i = 0 \text{ в } D; \quad \mathbf{z}_i = 0 \text{ на } S, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.3.2)$$

Здесь \mathbf{e}_i — орты осей координат, D — область полости, S — ее граница, \mathbf{z}_i и s_i — искомые функции, зависящие лишь от формы полости. Через эти функции выражаются скорость и давление жидкости. Кинетический момент \mathbf{G} тела с жидкостью относительно центра инерции системы представляется в виде

$$\mathbf{G} = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} - \frac{\rho}{\nu} \mathbf{P} \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}, \quad (5.3.3)$$

$$P_{ij} = - \int_D \mathbf{e}_j(\mathbf{r} \times \mathbf{z}_i) dv, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Здесь \mathbf{J} — тензор инерции системы относительно центра инерции; $\boldsymbol{\omega}$ — вектор абсолютной угловой скорости твердого тела; ρ — плотность жидкости; точкой обозначается скалярное произведение тензора на вектор. Постоянный тензор \mathbf{P} зависит лишь от формы полости и характеризует диссипацию энергии за счет вязкости жидкости, P_{ij} — его компоненты в системе координат, связанной с телом. В [113, 121, 122] показано, что тензор \mathbf{P} симметричен и соответствует положительно-определенной квадратичной форме. Для полостей, имеющих форму сферы, эллипсоида, цилиндра и некоторых других, в [113, 121, 122] дано решение краевых задач (5.3.2) и вычислены компоненты тензора \mathbf{P} .

Рассмотрим задачу о влиянии вязкой жидкости в полости на динамику твердого тела. Тензор \mathbf{P} считается известным; массовые силы, действующие на жидкость, — потенциальными. Главный момент внешних сил \mathbf{L} может зависеть от координат и скоростей твердого тела, а также от времени и не зависит от внутренних движений жидкости.

Пусть h — вектор-функция любой размерности n , компонентами которой являются: кинематические параметры, характеризующие ориентацию твердого тела (например, углы Эйлера или направляющие косинусы), время t , а также координаты и скорости центра инерции системы, если твердое тело не закреплено.

В [113, 121, 122] теорема об изменении кинетического момента системы \mathbf{G} после ряда преобразований приводится к виду

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}) - \mathbf{L}(\boldsymbol{\omega}, h) &= \mathbf{m}, \\ \mathbf{m} &= \rho \nu^{-1} [\mathbf{P} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})], \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\varepsilon}, \\ \dot{h} &= f(h, \boldsymbol{\omega}). \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

Здесь $\boldsymbol{\varepsilon}$ — угловое ускорение тела, f есть n -мерная вектор-функция, последнее уравнение (5.3.4) включает в себя все кинематические соотношения, уравнения движения центра инерции системы и другие уравнения, не связанные с полостью, заполненной жидкостью.

При $\nu^{-1} = 0$, $\mathbf{m} = 0$ уравнения (5.3.4) описывают движение системы при условии, что жидкость в полости затвердела. Это обычные уравнения для координат и скорости, т. е. для переменных $\boldsymbol{\omega}$ и h .

При $\nu^{-1} \neq 0$ система (5.3.4) содержит малый параметр ν^{-1} при производных $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Из системы следует, что $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \sim \nu$, а тогда через время порядка единицы получим $|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}| \sim \nu \gg 1$. Однако анализ гидродинамических уравнений, проведенный в [113, 121, 122], основан на предположении, что угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon}$ и его производные $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$, $\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ есть величины порядка 1. Поэтому имеет смысл рассматривать только такие решения системы (5.3.4), которые удовлетворяют этому допущению. При этом отбрасываются быстрые процессы установления, которые происходят на малом начальном интервале времени и которые носят характер пограничного слоя по времени.

Имея в виду только «медленные» процессы, в которых $\boldsymbol{\varepsilon} \sim \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \sim \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ограничены (порядка 1) при $\nu \rightarrow \infty$ и при условии, что обратный тензор \mathbf{J}^{-1} существует, получим из первого уравнения (5.3.4)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{J}^{-1} \cdot [\mathbf{L}(\boldsymbol{\omega}, h) - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega})] + \dots \quad (5.3.5)$$

Отброшенные члены и их производные имеют порядок ν^{-1} . Дифференцируя равенство (5.3.5) и подставляя $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ и \dot{h} из (5.3.4), получим

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{J}^{-1} \cdot \left[\frac{d\mathbf{L}}{d\boldsymbol{\omega}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{d\mathbf{L}}{dh} \cdot f - \boldsymbol{\varepsilon} \times (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}) - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \right] + \dots \quad (5.3.6)$$

Здесь $\frac{d\mathbf{L}}{d\boldsymbol{\omega}}$ и $\frac{d\mathbf{L}}{dh}$ — матрицы частных производных размерностей 3×3 и $3 \times n$ соответственно, которые умножаются на векторы соответствующих размерностей. При этом можно подставить $\boldsymbol{\varepsilon}$ из (5.3.5) в (5.3.6), не уменьшая порядка точности.

Равенства (5.3.5), (5.3.6) подставим вместо $\boldsymbol{\varepsilon}$, \dot{h} в уравнение (5.3.4) для \mathbf{m} . При этом в выражение для \mathbf{m} вносится погрешность порядка ν^{-2} . В результате, применяя равенства (5.3.5), (5.3.6), систему (5.3.4) можно заменить следующей:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}) - \mathbf{L}(\boldsymbol{\omega}, h) &= \mathbf{m}, \\ \mathbf{m} &= \rho\nu^{-1}[\mathbf{P} \cdot \mathbf{b} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{P} \cdot \mathbf{a})], \\ \mathbf{a} &= \mathbf{J}^{-1} \cdot [\mathbf{L}(\boldsymbol{\omega}, h) - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega})], \\ \mathbf{b} &= \mathbf{J}^{-1} \cdot \left[\frac{d\mathbf{L}}{d\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{a} + \frac{d\mathbf{L}}{dh} \cdot f - \mathbf{a} \times (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}) - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J} \cdot \mathbf{a}) \right], \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} &= \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \dot{h} = f(h, \boldsymbol{\omega}). \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

Полученная система имеет такой же порядок, что и уравнения динамики при условии затвердения жидкости. В ней \mathbf{m} представляет собой малый возмущающий момент, зависящий от координат и скоростей $\boldsymbol{\omega}$, h . Система (5.3.7), как и приближенное решение гидродинамической задачи [113, 121, 122], неприменима на малом (порядка ν^{-1}) начальном интервале времени, когда движение жидкости в полости существенно нестационарно. По прошествии начального интервала времени движение описывается системой (5.3.7) с погрешностью порядка ν^{-2} на интервале времени порядка единицы. На большом интервале порядка ν погрешность составит величину порядка ν^{-1} .

В работе [123] проведено строгое обоснование изложенной методики и даны оценки погрешности, которые соответствуют приведенным выше.

Рассмотрим частный случай свободного твердого тела и положим $\mathbf{L} = 0$ в (5.3.7). Тогда из (5.3.7) получим, что вектор \mathbf{a} будет однородной квадратичной функцией от компонентов вектора $\boldsymbol{\omega}$, а вектор \mathbf{b} и, следовательно, вектор \mathbf{m} — однородной функцией третьей степени от этих компонентов. Имеем

$$\mathbf{m} = \rho\nu^{-1} \sum_{i,j,k=1}^3 \mathbf{m}_{ijk} \omega_i \omega_j \omega_k. \quad (5.3.8)$$

Здесь \mathbf{m}_{ijk} — постоянные векторные коэффициенты, зависящие от постоянных тензоров \mathbf{J} и \mathbf{P} , ω_i — компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}$ по осям системы коор-

динат, связанной с телом. Таким образом, в простейшем случае свободного твердого тела, содержащего вязкую жидкость при малых числах Рейнольдса (большой вязкости), дополнительный возмущающий момент, действующий на тело, оказывается многочленом третьей степени от угловой скорости тела. Движение тела под действием этого момента исследовано в § 3 главы 7.

Приведем полученное в работах [113, 121, 122] выражение для тензора \mathbf{P} в простейшем случае сферической полости радиуса a :

$$P_{ij} = P_0 \delta_{ij}, \quad P_0 = \frac{8\pi a^7}{525}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (5.3.9)$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера.

Система (5.3.7) может исследоваться аналитическими или численными методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Она содержит малый параметр ν^{-1} , поэтому для ее решения может быть применен метод усреднения. При этом достаточно ограничиться первым приближением, обеспечивающим точность порядка ν^{-1} на интервале времени порядка ν .

§ 4. СЛУЧАЙ ПОДВИЖНЫХ МАСС, СОЕДИНЕННЫХ С ТЕЛОМ УПРУГИМИ СВЯЗЯМИ С ВЯЗКИМ ТРЕНИЕМ

1. Рассмотрим, следуя статье [181], движение системы, состоящей из твердого тела D массы m , относительно которого могут двигаться n материальных точек P_i с массами m_i , $i = 1, \dots, n$. Обозначим через O центр инерции твердого тела, через O_i — некоторые точки, неподвижные относительно тела и представляющие собой «средние» положения точек P_i . Положение точек O , O_i будем характеризовать их радиус-векторами \mathbf{R}_0 , \mathbf{R}_i относительно неподвижного полюса, а положения точек P_i — их смещениями $\mathbf{r}_i = \mathbf{O}_i P_i$ относительно точек O_i . Абсолютные скорости точек O , O_i обозначим через \mathbf{V}_0 , \mathbf{V}_i , абсолютную угловую скорость тела — через $\boldsymbol{\omega}$. Тогда количество движения (импульс) всей системы запишется в виде

$$\mathbf{Q} = m\mathbf{V}_0 + \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{V}_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i + \dot{\mathbf{r}}_i). \quad (5.4.1)$$

Точкой в (5.4.1) обозначено дифференцирование по времени t в системе координат, связанной с телом. Введем в рассмотрение систему D^* ,

состоящую из твердого тела D и точек P_i , все время находящихся в положениях O_i , когда $\mathbf{r}_i = 0$, $i = 1, \dots, n$. Очевидно, D^* — твердое тело с массой

$$M = m + \sum_{i=1}^n m_i, \quad (5.4.2)$$

а его центр инерции C имеет радиус-вектор \mathbf{R}_C относительно неподвижного полюса, определяемый соотношением

$$M\mathbf{R}_C = m\mathbf{R}_0 + \sum_{i=1}^n m_i\mathbf{R}_i. \quad (5.4.3)$$

Соотношение (5.4.1) можно переписать в виде

$$\mathbf{Q} = M\mathbf{V}_C + \mathbf{q}, \quad \mathbf{q} = \sum_{i=1}^n m_i(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i + \dot{\mathbf{r}}_i), \quad (5.4.4)$$

где \mathbf{V}_C — абсолютная скорость точки C . Запишем теперь момент количества движения (момент импульса) всей системы относительно точки C :

$$\mathbf{G}_C = m(\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_C) \times \mathbf{V}_C + \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega} + \sum_{i=1}^n m_i(\boldsymbol{\rho}_i + \mathbf{r}_i) \times (\mathbf{V}_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i + \dot{\mathbf{r}}_i). \quad (5.4.5)$$

Здесь \mathbf{J}_C — тензор инерции твердого тела D относительно точки C , а $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{R}_i - \mathbf{R}_C$. Первые два слагаемых представляют собой момент количества движения тела D относительно точки C . Представляя \mathbf{V}_i в виде $\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_C + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i$ и преобразуя выражение (5.4.5) с учетом равенств (5.4.2), (5.4.3), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_C &= \mathbf{G} + \mathbf{g}, \\ \mathbf{G} &= \mathbf{J}_C^* \cdot \boldsymbol{\omega}, \\ \mathbf{g} &= \sum_{i=1}^n m_i \{ \mathbf{r}_i \times [\mathbf{V}_C + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\rho}_i + \mathbf{r}_i) + \dot{\mathbf{r}}_i] + \boldsymbol{\rho}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i + \dot{\mathbf{r}}_i) \}. \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

Через \mathbf{G} обозначен момент количества движения твердого тела D^* относительно точки C , а через \mathbf{J}_C^* — его тензор инерции относительно C . При этом слагаемые \mathbf{q} , \mathbf{g} в соотношениях (5.4.4), (5.4.6) обращаются в нуль, если относительные движения точек отсутствуют и $\mathbf{r}_i = 0$, $i = 1, \dots, n$.

Теоремы об изменении импульса и момента импульса системы относительно точки P_i имеют вид

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{F}, \quad \frac{d\mathbf{G}_C}{dt} = \mathbf{L}_C + \mathbf{Q} \times \mathbf{V}_C. \quad (5.4.7)$$

Здесь \mathbf{F} — главный вектор всех внешних сил, \mathbf{L}_C — главный момент этих сил относительно точки C . Будем считать, что \mathbf{F} и \mathbf{L}_C не зависят от движения точек P_i . После подстановки формул (5.4.4), (5.4.6) в соотношение (5.4.7) получим

$$\begin{aligned} M \frac{d\mathbf{V}_C}{dt} &= \mathbf{F} + \mathbf{f}, \quad \frac{d\mathbf{G}_C}{dt} = \mathbf{L}_C + \mathbf{l}_C, \\ \mathbf{f} &= -\frac{d\mathbf{q}}{dt}, \quad \mathbf{l}_C = \mathbf{q} \times \mathbf{V}_C - \frac{d\mathbf{g}}{dt}. \end{aligned} \quad (5.4.8)$$

Уравнения (5.4.8), полученные в [181], можно рассматривать как уравнения движения твердого тела D^* , тогда величины \mathbf{f} и \mathbf{l}_C представляют собой возмущающую силу и возмущающий момент, обусловленные внутренними движениями. Выражения для \mathbf{f} и \mathbf{l}_C в развернутом виде получим, подставляя в (5.4.8) выражения для \mathbf{q} из (5.4.4) и \mathbf{g} из (5.4.6) и пользуясь равенством

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \dot{\mathbf{a}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}, \quad (5.4.9)$$

имеющим место для любого вектора \mathbf{a} . Аналогичные уравнения в иной форме получены в книге [7]. Если внутренние движения заданы, т. е. зависимости $\mathbf{r}_i(t)$ известны, то уравнения (5.4.8), (5.4.4), (5.4.6) вместе с кинематическими соотношениями образуют систему уравнений движения тела D^* . В противном случае эти уравнения нужно дополнить уравнениями движения точек P_i .

2. Рассмотрим, следуя работе [181], движение свободного твердого тела, к которому в точке O_1 при помощи упругой связи прикреплена одна точка P массы m . Движение этой точки не задано и должно быть найдено. Пользуемся обозначениями п. 1 и опускаем индекс i , так что $\boldsymbol{\rho}$ — радиус-вектор неподвижно связанной с телом точки O_1 , а \mathbf{r} — радиус-вектор точки P относительно O_1 . Так как тело свободно ($\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{L}_C = 0$), то инерциальную систему координат можно выбрать так, чтобы в ней $\mathbf{Q} = \text{const} = 0$. Тогда согласно (5.4.4) получим

$$\mathbf{V}_C = -\left(\frac{m}{M}\right)(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}}). \quad (5.4.10)$$

После подстановки равенств (5.4.10) в соотношения (5.4.6), (5.4.7) находим

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_C &= \mathbf{G} + \mathbf{g} = \text{const}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{J}_C^* \cdot \boldsymbol{\omega}, \\ \mathbf{g} &= m \left\{ \boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}}) + \mathbf{r} \times \left[\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + \left(1 - \frac{m}{M}\right) (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.4.11)$$

Пусть подвижная точка P соединена с точкой O_1 твердого тела упругой связью с жесткостью c и коэффициентом вязкого трения δ . В этом случае уравнение относительно движения точки P примет вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} + \delta\dot{\mathbf{r}} + c\mathbf{r} = -m \left\{ \frac{d\mathbf{V}_C}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\rho} + \mathbf{r})] + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\boldsymbol{\rho} + \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} \right\}. \quad (5.4.12)$$

Подставляя в уравнение (5.4.12) скорость \mathbf{V}_C из (5.4.10) и раскрывая полную производную \mathbf{V}_C , согласно (5.4.9), приведем уравнение (5.4.12) к виду

$$\begin{aligned} \lambda\dot{\mathbf{r}} + \Omega^2\mathbf{r} &= -\{\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho} + \\ &+ \left(1 - \frac{m}{M}\right) [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{r}}]\}. \end{aligned} \quad (5.4.13)$$

Здесь величины Ω и λ , имеющие размерность t^{-1} , определены равенствами

$$\Omega^2 = \frac{c}{m}, \quad \lambda = \frac{\delta}{m} \quad (5.4.14)$$

и характеризуют частоту и время затухания свободных колебаний.

Уравнения (5.4.12), (5.4.13) рассматриваются в системе координат, связанной с телом, $\boldsymbol{\rho}$ — постоянный вектор, $\boldsymbol{\omega}$ — функция времени. Решение линейного относительно \mathbf{r} уравнения (5.4.13) можно представить как сумму свободных и вынужденных движений. Если выполнено условие $\lambda \gg \omega$, то свободные колебания точки P затухнут гораздо быстрее, чем тело совершит оборот. Поэтому при исследовании эволюции движения твердого тела свободными колебаниями точки P можно пренебречь и учитывать лишь ее вынужденные движения относительно тела. Если выполнено дополнительное условие $\Omega^2 \gg \omega\lambda$, то вынужденное решение уравнения (5.4.13) можно искать в виде разложения по степеням Ω^{-2} . Можно считать, что единица измерения времени выбрана порядка времени оборота тела, так что $\omega \sim 1$, и тогда принятые выше условия имеют вид

$$\Omega^2 \gg \lambda \gg 1. \quad (5.4.15)$$

Вычисляя первые члены разложения вынужденного решения уравнения (5.4.13) по степеням Ω^{-2} при выполненных условиях (5.4.15), получим

$$\mathbf{r} = -\Omega^{-2}\mathbf{a} + \lambda\Omega^{-4}\dot{\mathbf{a}} + O(\Omega^{-4}, \lambda^2\Omega^{-6}). \quad (5.4.16)$$

Здесь

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho}, \quad (5.4.17)$$

а точкой всюду обозначены производные в системе координат, связанной с телом. Выражение (5.4.11) для \mathbf{g} с учетом соотношений (5.4.15), (5.4.16) примет вид

$$\mathbf{g} = m[\boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}}) + \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})] + O(\Omega^{-4}, \lambda^2\Omega^{-6}). \quad (5.4.18)$$

Условие (5.4.11) постоянства вектора \mathbf{G}_C запишем в форме

$$\mathbf{J}_C^* \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}_C^* \cdot \boldsymbol{\omega}) = -(\dot{\mathbf{g}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}). \quad (5.4.19)$$

Уравнение (5.4.19) можно преобразовать к виду

$$\mathbf{J}_C^* \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}_C^* \cdot \boldsymbol{\omega}) = \Phi(\boldsymbol{\omega}) + O(\Omega^{-4}, \lambda^2\Omega^{-6}), \quad (5.4.20)$$

где вектор-функция Φ содержит члены порядков Ω^{-2} и $\lambda\Omega^{-4}$. Чтобы вычислить явно эту функцию, нужно подставить выражение (5.4.17) в (5.4.16), затем (5.4.16) в (5.4.18), а (5.4.18) — в правую часть (5.4.19). Производные $\dot{\boldsymbol{\omega}}$, $\ddot{\boldsymbol{\omega}}$ и т.д., которые войдут в правую часть уравнения (5.4.19), следует выразить через $\boldsymbol{\omega}$, пользуясь равенством

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = -(\mathbf{J}_C^*)^{-1} \cdot [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}_C^* \cdot \boldsymbol{\omega})] + O(\Omega^{-2}), \quad (5.4.21)$$

вытекающим из (5.4.19) и из приведенных оценок. В итоге получим векторное уравнение (5.4.20), описывающее изменение вектора $\boldsymbol{\omega}$ в системе координат, связанной с телом. Функция $\Phi(\boldsymbol{\omega})$ представляет собой полином, содержащий четвертые и пятые степени $\boldsymbol{\omega}$; ввиду громоздкости это выражение не приводится. В [113, 121, 122] получено аналогичное уравнение, когда $\Phi(\boldsymbol{\omega})$ — полином третьей степени от $\boldsymbol{\omega}$ (см. § 3 главы 5). Уравнение (5.4.20) можно решать методом усреднения.

§ 5. Тело с упругими и диссипативными элементами

В данном параграфе рассматривается более общий, чем в § 4, случай системы, состоящей из твердого тела и точек, связанных с телом упругими и диссипативными элементами.

1. Рассмотрим, следуя работе [182], движение системы S , состоящей из твердого тела D массы m и N материальных точек P_i с массами m_i , $i = 1, \dots, N$. Точки P_i связаны с телом D и одна с другой при помощи идеальных связей и линейных упругих связей с линейными демпфированием. Пусть O_i — равновесные положения точек P_i в случае, когда система покоится и внешние силы отсутствуют.

Введем три декартовы системы координат: неподвижную систему $O'X'_1X'_2X'_3$, систему $Ox_1x_2x_3$, жестко связанную с телом, и систему $Ox_1X_2X_3$, начало которой O связано с твердым телом, а оси движутся поступательно и параллельно осям системы $O'X'_1X'_2X'_3$. Введем обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_0 &= \mathbf{O}'\mathbf{O}, \quad \boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{O}\mathbf{O}_i, \quad \mathbf{r}_i = \mathbf{O}_i\mathbf{P}_i, \\ \mathbf{R}_i &= \mathbf{O}'\mathbf{P}_i = \mathbf{R}_0 + \boldsymbol{\rho}_i + \mathbf{r}_i, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (5.5.1)$$

Производные скалярных величин по времени будем обозначать точками. Для произвольного трехмерного вектора \mathbf{a} обозначим через \mathbf{a}' и $\dot{\mathbf{a}}$ его производные по времени в системах координат $Ox_1x_2x_3$ и $O'X'_1X'_2X'_3$ соответственно. Имеем

$$\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}, \quad (5.5.2)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор абсолютной угловой скорости тела D , т. е. системы координат $Ox_1x_2x_3$. Заметим, что так как точки O и O_i жестко связаны с телом D , то $\boldsymbol{\rho}'_i = 0$ при $i = 1, \dots, N$. Имеем, очевидно, $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega}'$.

Составим уравнения движения системы S . Сначала рассмотрим движение точек P_i относительно тела D . Предположим, что совокупность точек P_i имеет n степеней свободы относительно тела D , и ее положение в системе координат $Ox_1x_2x_3$ может быть охарактеризовано n -мерным вектором q обобщенных координат q_1, \dots, q_n . Примем, что в случае малых колебаний векторы смещений \mathbf{r}_i линейно выражаются через обобщенные координаты q_j :

$$\mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \mathbf{H}_{ij} q_j, \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.5.3)$$

Здесь \mathbf{H}_{ij} — векторы, постоянные в системе координат $Ox_1x_2x_3$. Кинетическая энергия движения точек P_i относительно системы координат $Ox_1x_2x_3$ с учетом равенств (5.5.3) имеет вид

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}'_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad a_{jk} = \sum_{i=1}^N m_i H_{ij} H_{ik}, \quad j, k = 1, \dots, n. \quad (5.5.4)$$

Уравнения малых колебаний точек P_i относительно тела D запишем в форме уравнений Лагранжа

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = Q. \quad (5.5.5)$$

Здесь A , B , C — постоянные симметрические матрицы размерности $n \times n$ (считаем их положительно-определенными). Матрица $A = \|a_{jk}\|$ характеризует кинетическую энергию (см. (5.5.4)), матрица $B = \|b_{jk}\|$ — диссипацию, а $C = \|c_{jk}\|$ — упругую потенциальную энергию.

Через Q в уравнении (5.5.5) обозначен n -мерный вектор обобщенных сил Q_1, \dots, Q_n , обусловленных действием на точки P_i внешних сил F_i и сил инерции в системе координат $Ox_1x_2x_3$. Они равны

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{H}_{ij} \cdot \{ \mathbf{F}_i - m_i [\ddot{\mathbf{R}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\rho}_i + \mathbf{r}_i)) + (\boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\rho}_i + \mathbf{r}_i)) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i] \}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (5.5.6)$$

Внешние силы \mathbf{F}_i , действующие на каждую точку P_i , предполагаются зависящими от ее абсолютного положения, скорости и времени

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{R}_i, \dot{\mathbf{R}}_i, t) = \mathbf{F}_i(\mathbf{R}_0 + \boldsymbol{\rho}_i + \mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{R}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\rho}_i + \mathbf{r}_i) + \mathbf{r}'_i, t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.5.7)$$

Здесь использованы соотношения (5.5.1), (5.5.2) и равенства $\boldsymbol{\rho}'_i = 0$, $i = 1, \dots, n$.

Запишем уравнение моментов для всей системы S относительно полюса O , рассматривая ее движение в системе координат $Ox_1X_2X_3$. Имеем

$$\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{L} + \mathbf{L}_1. \quad (5.5.8)$$

Здесь \mathbf{G} — кинетический момент системы S относительно полюса O в ее движении относительно системы координат $Ox_1X_2X_3$, \mathbf{L} и \mathbf{L}_1 — главные моменты относительно полюса O всех внешних сил и сил инерции соответственно, действующих на систему S . Указанные величины по определению равны

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\boldsymbol{\rho}_{\alpha} + \mathbf{r}_{\alpha}) \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_{\alpha} + \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}), \\ \mathbf{L} &= \sum_{\alpha} (\boldsymbol{\rho}_{\alpha} + \mathbf{r}_{\alpha}) \times \mathbf{F}_{\alpha}, \\ \mathbf{L}_1 &= - \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\boldsymbol{\rho}_{\alpha} + \mathbf{r}_{\alpha}) \times \ddot{\mathbf{R}}_0. \end{aligned} \quad (5.5.9)$$

Здесь использованы формулы (5.5.1), (5.5.2), а суммирование распространяется на все точки \mathbf{R}_α системы S . Для точек твердого тела D в (5.5.9) нужно принять $\mathbf{r}_\alpha \equiv 0$.

Для дальнейших рассуждений удобно ввести в рассмотрение вспомогательную систему S^* , состоящую из твердого тела D и точек P_i , жестко закрепленных в своих равновесных положениях O_i . Таким образом, S^* — твердое тело массы

$$m^* = m + \sum_{i=1}^N m_i \quad (5.5.10)$$

и для него все $\mathbf{r}_i = 0$. Центр инерции тела S^* обозначим через C , а его тензор инерции относительно точки O через \mathbf{J} . Очевидно, тензор \mathbf{J} постоянен в системе координат $Ox_1x_2x_3$. Величины (5.5.9) могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} + \sum_{i=1}^N m_i [\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i + \dot{\mathbf{r}}_i) + \boldsymbol{\rho}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i], \\ \mathbf{L} &= \mathbf{L}^* + \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \boldsymbol{\rho}_i \times (\mathbf{F}_i - \mathbf{F}_i^*)], \\ \mathbf{L}_1 &= \mathbf{L}_1^* - \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times \ddot{\mathbf{R}}_0. \end{aligned} \quad (5.5.11)$$

Здесь и далее звездочка означает, что соответствующие величины вычисляются для твердого тела S^* , т. е. при $\mathbf{r}_i \equiv 0$, $i = 1, \dots, N$.

Моменты сил \mathbf{L}^* , \mathbf{L}_1^* равны

$$\mathbf{L}^*(\mathbf{R}_0, \dot{\mathbf{R}}_0, \boldsymbol{\omega}, \sigma, t) = \sum_{\alpha} \boldsymbol{\rho}_\alpha \times \mathbf{F}_\alpha^*, \quad \mathbf{L}_1^* = - \sum_{\alpha} m_\alpha \boldsymbol{\rho}_\alpha \times \ddot{\mathbf{R}}_0. \quad (5.5.12)$$

Момент \mathbf{L}^* может зависеть от переменных, характеризующих движение твердого тела S^* , а именно от \mathbf{R}_0 , $\dot{\mathbf{R}}_0$, $\boldsymbol{\omega}$, t и от векторного параметра σ , определяющего ориентацию системы $Ox_1x_2x_3$ относительно системы $OX_1X_2X_3$. В качестве компонентов вектора σ могут фигурировать, например, углы Эйлера или направляющие косинусы системы $Ox_1x_2x_3$ относительно $OX_1X_2X_3$. Вектор σ удовлетворяет обычным кинематическим уравнениям для твердого тела (например, кинематическим уравнениям Эйлера), которые запишем в виде

$$\dot{\sigma} = f(\sigma, \boldsymbol{\omega}). \quad (5.5.13)$$

Пусть движение точки O задано, т. е. $\mathbf{R}_O(t)$ — известная функция времени. Например, это имеет место, если у тела D есть неподвижная точка. Тогда движение системы S полностью описывается уравнениями (5.5.5), (5.5.8), (5.5.13) и соотношениями (5.5.1)–(5.5.4), (5.5.6), (5.5.7), (5.5.11), (5.5.12). В этом случае момент сил инерции \mathbf{L}_1^* из (5.5.12) зависит лишь от ориентации σ и от t посредством $\ddot{\mathbf{R}}_O(t)$.

Если движение точки O не задано, то к указанным уравнениям нужно добавить уравнение импульсов для системы S . В этом случае в качестве полюса O удобно выбирать центр инерции C тела S^* .

Тогда, учитывая второе равенство (5.5.12), имеем

$$\sum_{\alpha} m_\alpha \boldsymbol{\rho}_\alpha \equiv 0, \quad \mathbf{L}_1^* = 0. \quad (5.5.14)$$

Уравнение изменения импульса примет вид

$$m^* \ddot{\mathbf{R}}_0 = \mathbf{F}^* + \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - \mathbf{F}_i^* - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i). \quad (5.5.15)$$

Здесь m^* дано формулой (5.5.10), а $\mathbf{F}^* = \mathbf{F}^*(\mathbf{R}_0, \dot{\mathbf{R}}_0, \boldsymbol{\omega}, \sigma, t)$ — главный вектор всех внешних сил, действующих на твердое тело S^* , т. е. при условии $\mathbf{r}_i \equiv 0$, $i = 1, \dots, N$. Полученные уравнения движения будут исследованы и упрощены на основе принимаемых ниже допущений.

2. Введем в рассмотрение три характерных масштаба времени: характерный период T_1 свободных колебаний точек P_i относительно тела D , характерное время T_2 затухания этих колебаний и характерное время T_3 движения системы как целого. Например, можно считать, что $T_3 \sim \omega^{-1}$. Предполагаем, что введенные масштабы времени связаны неравенствами

$$T_1 \ll T_2 \ll T_3. \quad (5.5.16)$$

Если выполнены условия (5.5.16), то свободные упругие колебания затухнут за время T_2 , много меньшее времени T_3 оборота тела вокруг центра масс. Поэтому при исследовании эволюции движения системы на интервалах времени T_3 (и больших) свободными колебаниями можно пренебречь, учитывая лишь вынужденные движения точек P_i под действием внешних сил и сил инерции. Чтобы выполнялись условия (5.5.16), как будет показано ниже, достаточно положить в уравнениях (5.5.6)

$$C = \varepsilon^{-2} C^0, \quad B = \delta \varepsilon^{-1} B^0. \quad (5.5.17)$$

Здесь C^0, B^0 — матрицы с ограниченными элементами, а ε и δ — безразмерные малые параметры, подчиненные условиям

$$0 < \varepsilon \ll \delta \ll 1. \quad (5.5.18)$$

В предельном случае $\varepsilon \rightarrow 0$, соответствующем бесконечно большой жесткости упругих связей, равенства (5.5.5), (5.5.17) дают $q \equiv 0$. Из соотношений (5.5.3) получаем тогда $r_i \equiv 0$ для $i = 1, \dots, N$. Следовательно, уравнения (5.5.8), (5.5.11), (5.5.15) с учетом (5.5.2) при $\varepsilon = 0$ дают

$$\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}' + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{L}^* + \mathbf{L}_1^*, \quad m^* \ddot{\mathbf{R}}_0 = \mathbf{F}^*. \quad (5.5.19)$$

Уравнения (5.5.19) представляют собой уравнения движения твердого тела S^* , в которое превращается система S при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В случае малых положительных ε, δ уравнение (5.5.5) при условиях (5.5.17) приобретает вид

$$\varepsilon^2 A \ddot{q} + \delta \varepsilon B^0 \dot{q} + C^0 q = \varepsilon^2 Q. \quad (5.5.20)$$

Приближенное решение уравнения (5.5.20) с малыми параметрами при производных с учетом (5.5.18) может быть построено при помощи асимптотических методов и состоит из регулярной части и решения типа пограничного слоя, быстро затухающего при удалении от начального момента времени.

Рассмотрим сначала свободные упругие колебания, описываемые однородной системой (5.5.20) при $Q = 0$. Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$\det(\varepsilon^2 \lambda^2 A + \delta \varepsilon \lambda B^0 + C^0) = 0. \quad (5.5.21)$$

Перейдем от обобщенных координат q к нормальным координатам, в которых две положительно-определенные матрицы A и C^0 одновременно приводятся к диагональному виду [285]. Матрица A при этом преобразовании переходит в единичную матрицу I , матрица C^0 — в диагональную матрицу C_1^0 с положительными диагональными элементами, а матрица B^0 — в некоторую положительно-определенную матрицу B_1^0 . Характеристическое уравнение (5.5.21) принимает вид

$$\det(\Lambda^2 I + \delta \Lambda B_1^0 + C_1^0) = 0, \quad \Lambda = \varepsilon \lambda \sim 1. \quad (5.5.22)$$

Корни уравнения (5.5.22) найдем в виде разложений по малому параметру δ . Получим

$$\Lambda_j = \pm i (C_1^0)_{jj}^{1/2} - \frac{1}{2} \delta (B_1^0)_{jj} + O(\delta^2), \quad j = 1, \dots, n. \quad (5.5.23)$$

Здесь индексы jj указывают диагональные элементы матриц; эти элементы положительны. Возвращаясь к переменной λ из (5.5.22), получим из (5.5.23)

$$\lambda_j = \pm i \Omega_j - \frac{1}{2} \delta \varepsilon^{-1} (B_1^0)_{jj} + O(\delta \varepsilon^{-1}), \quad \Omega_j = \varepsilon^{-1} (C_1^0)_{jj}^{1/2}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (5.5.24)$$

Величины Ω_j — это собственные частоты колебаний консервативной системы, в которую переходит система (5.5.5) при $B = 0$. Из равенств (5.5.24) следуют оценки

$$T_1^{-1} = O(\varepsilon^{-1}), \quad T_2^{-1} = O(\varepsilon^{-1} \delta), \quad T_3 = O(1). \quad (5.5.25)$$

Последняя оценка (5.5.25) вытекает из независимости T_3 от параметров ε, δ . Из соотношений (5.5.25), (5.5.18) следует, что неравенства (5.5.16) выполнены. Тем самым сделанные допущения (5.5.17) оправданы. Свободные колебания, отвечающие собственным числам (5.5.24), представляют собой быстро затухающую часть решения типа пограничного слоя. Этими колебаниями можно пренебречь вдали от начального момента времени, т. е. на временах порядка T_3 и больших.

Регулярную по ε, δ часть решения уравнения (5.5.20) найдем в виде разложения по степеням величин ε^2 и $\varepsilon \delta$. Учитывая неравенства (5.5.18), запишем

$$q = \varepsilon^2 q^{(0)} + \varepsilon^3 \delta q^{(1)} + O(\varepsilon^4). \quad (5.5.26)$$

Подставляя разложение (5.5.26) в уравнение (5.5.20) и приравнявая коэффициенты при степенях параметров ε, δ , получим

$$q^{(0)} = (C^0)^{-1} Q^*, \quad q^{(1)} = -(C^0)^{-1} B^0 \dot{q}^{(0)}. \quad (5.5.27)$$

Здесь Q^* — вектор обобщенных сил, в которых нужно положить $q \equiv 0$. Следовательно, силы Q_j^* отвечают твердому телу S^* и подсчитываются по формулам (5.5.6), (5.5.7) при $r_i \equiv 0, i = 1, \dots, N$. Из этих формул имеем

$$Q_j^* = \sum_{i=1}^N H_{ij} \{ \mathbf{F}_i^* - m_i [\ddot{\mathbf{R}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i) + \boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{\rho}_i] \}, \quad (5.5.28)$$

$$\mathbf{F}_i^* = \mathbf{F}_i(\mathbf{R}_0 + \boldsymbol{\rho}_i, \dot{\mathbf{R}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i, t),$$

$$i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, n.$$

Возвращаясь к исходным обозначениям (5.5.17), запишем решение (5.5.26), (5.5.27) в виде

$$q = C^{-1}[Q^* - BC^{-1}\dot{Q}^*] + O(\varepsilon^4). \quad (5.5.29)$$

Это решение описывает малые вынужденные движения точек P_i относительно тела D .

3. Чтобы получить упрощенные уравнения движения системы S при сделанных предположениях, нужно подставить решение (5.5.29) в соотношения (5.5.8), (5.5.11), (5.5.15). Заметим, что согласно (5.5.17) вектор q из (5.5.29) имеет величину порядка ε^2 . Таков же порядок и векторов \mathbf{r}_i , определяемых формулой (5.5.3). Учитывая это, приведем уравнения (5.5.8), (5.5.11), (5.5.15) к виду

$$\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}' + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{L}^* + \mathbf{L}_1^* + \boldsymbol{\mu}, \quad m^* \ddot{\mathbf{R}}_0 = \mathbf{F}^* + \boldsymbol{\eta}, \quad (5.5.30)$$

$$\boldsymbol{\mu} = \sum_{i=1}^N \left\{ \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^* + \boldsymbol{\rho}_i \times \left(\frac{\partial \mathbf{F}_i^*}{\partial \mathbf{R}_i} \mathbf{r}_i + \frac{\partial \mathbf{F}_i^*}{\partial \dot{\mathbf{R}}_i} \dot{\mathbf{r}}_i \right) - m_i (\mathbf{r}_i \times \ddot{\mathbf{R}}_0) - m_i [\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i) + \dot{\mathbf{r}}_i] \right\} + O(\varepsilon^4), \quad (5.5.31)$$

$$\boldsymbol{\eta} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \mathbf{F}_i^*}{\partial \mathbf{R}_i} \mathbf{r}_i + \frac{\partial \mathbf{F}_i^*}{\partial \dot{\mathbf{R}}_i} \dot{\mathbf{r}}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \right) + O(\varepsilon^4).$$

Здесь $\frac{\partial \mathbf{F}_i^*}{\partial \mathbf{R}_i}$ и $\frac{\partial \mathbf{F}_i^*}{\partial \dot{\mathbf{R}}_i}$ — матрицы частных производных функций \mathbf{F}_i^* из (5.5.28) по компонентам их векторных аргументов.

Уравнения (5.5.30) аналогичны уравнениям движения (5.5.19) твердого тела S^* и отличаются от них слагаемыми $\boldsymbol{\mu}$ и $\boldsymbol{\eta}$. Эти слагаемые можно трактовать соответственно как главный момент относительно точки O и главный вектор сил, действующих на твердое тело S^* и обусловленных наличием упругих и диссипативных элементов. Векторы $\boldsymbol{\mu}$ и $\boldsymbol{\eta}$ в (5.5.31) линейно зависят от векторов \mathbf{r}_i и их производных и содержат слагаемые порядков ε^2 и $\varepsilon^3\delta$. Слагаемые $O(\varepsilon^2)$ отвечают внутренним упругим силам, а слагаемые $O(\varepsilon^3\delta)$ — диссипативным силам.

Покажем, что векторы $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\eta}$ с точностью до величин порядка ε^4 могут быть выражены только через переменные \mathbf{R}_0 , $\dot{\mathbf{R}}_0$, σ , $\boldsymbol{\omega}$, t , характеризующие движение твердого тела S^* . Для этого сначала заменим в (5.5.31) производные $\dot{\mathbf{r}}_i$, $\ddot{\mathbf{r}}_i$ при помощи формулы (5.5.2), затем выразим получающиеся при

этом векторы \mathbf{r}_i , \mathbf{r}'_i , \mathbf{r}''_i через q , \dot{q} , \ddot{q} при помощи формулы (5.5.3). При дифференцировании (5.5.3) следует учесть, что векторы \mathbf{H}_{ij} постоянны в системе координат $Ox_1x_2x_3$. После этого векторы $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\eta}$ будут зависеть от вектора q и его производных, которые исключим при помощи формул (5.5.29) и (5.5.28). В результате получим векторы $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\eta}$ как функции векторов \mathbf{R}_0 , $\boldsymbol{\omega}$ и их производных, а также от векторов \mathbf{H}_{ij} , $\boldsymbol{\rho}_i$, которые известны и постоянны в системе координат $Ox_1x_2x_3$. В выражения для $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\eta}$ войдут высшие производные векторов \mathbf{R}_0 , $\boldsymbol{\omega}$, так что уравнения (5.5.30) формально будут иметь более высокий порядок, чем обычные уравнения динамики твердого тела. Однако, не нарушая точности, эти высшие производные можно исключить.

Для этого заметим, что уравнения движения (5.5.19) твердого тела S^* всегда можно разрешить относительно высших производных, т. е. относительно $\boldsymbol{\omega}'$ и $\ddot{\mathbf{R}}_0$, получив зависимости

$$\boldsymbol{\omega}' = f_1(\mathbf{R}_0, \dot{\mathbf{R}}_0, \sigma, \boldsymbol{\omega}, t), \quad \ddot{\mathbf{R}}_0 = f_2(\mathbf{R}_0, \dot{\mathbf{R}}_0, \sigma, \boldsymbol{\omega}, t). \quad (5.5.32)$$

Дифференцируя равенства (5.5.32) с учетом (5.5.13), можно получить выражения также для высших производных $\boldsymbol{\omega}''$, $\ddot{\mathbf{R}}_0$ и т. д. через те же переменные \mathbf{R}_0 , $\dot{\mathbf{R}}_0$, σ , $\boldsymbol{\omega}$, t . Так как полученные уравнения движения деформируемого тела (5.5.30) отличаются от уравнений движения твердого тела (5.5.19) слагаемыми $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\eta}$ порядка ε^2 , то выражения (5.5.32) и их производные будут справедливы также и для уравнений (5.5.30) с погрешностью $O(\varepsilon^2)$. Поэтому подстановка выражений (5.5.32) и их производных в формулы (5.5.31) для величин $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\eta}$, которые сами имеют порядок ε^2 , приведет к погрешности $O(\varepsilon^4)$, что лежит в пределах точности равенств (5.5.31).

Итак, исключая производные $\boldsymbol{\omega}'$, $\boldsymbol{\omega}''$, $\ddot{\mathbf{R}}_0$, $\ddot{\mathbf{R}}_0$ и т. д. при помощи равенств (5.5.32) и их производных, получим искомые зависимости вида

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{R}_0, \dot{\mathbf{R}}_0, \sigma, \boldsymbol{\omega}, t), \quad \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{R}_0, \dot{\mathbf{R}}_0, \sigma, \boldsymbol{\omega}, t) \quad (5.5.33)$$

с погрешностью $O(\varepsilon^4)$. Функции (5.5.33) подобно моменту \mathbf{L}^* из (5.5.12) и силе \mathbf{F}^* из (5.5.15) зависят только от параметров движения твердого тела S^* . Поэтому уравнения (5.5.30) вместе с (5.5.33), (5.5.13) образуют замкнутую систему, аналогичную уравнениям движения твердого тела. Эти уравнения описывают движения деформируемой системы S на интервалах времени, много больших времени затухания собственных упругих колебаний. Величины $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\eta}$ здесь играют роль малых возмущений, поэтому для

интегрирования полученной системы можно использовать различные методы малого параметра, в частности метод усреднения.

Явный вид зависимостей (5.5.33) не приводится ввиду его громоздкости, однако описанная выше процедура преобразований, использующая соотношения (5.5.31), (5.5.2), (5.5.3), (5.5.28), (5.5.29), (5.5.19), (5.5.32), позволяет однозначно построить функции (5.5.33).

Ограничимся двумя примерами, в которых установим структуру функций (5.5.33). В обоих примерах предполагаем, что момент \mathbf{L}^* , а также все внешние силы \mathbf{F}_i , действующие на точки P_i , равны нулю. Тогда согласно (5.5.28), (5.5.31) имеем

$$Q_j^* = - \sum_{i=1}^N \mathbf{H}_{ij} m_i [\ddot{\mathbf{R}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i) + \boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{\rho}_i], \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\boldsymbol{\mu} = - \sum_{i=1}^N \{ \mathbf{r}_i \times \ddot{\mathbf{R}}_0 + [\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i) + \boldsymbol{\rho}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i] \}, \quad \boldsymbol{\varphi} = - \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i. \quad (5.5.34)$$

В первом примере, кроме того, будем считать, что точка O неподвижна, $\mathbf{R}_0 \equiv 0$, и тогда согласно (5.5.12) имеем, $\mathbf{L}_1^* = 0$.

Во втором примере вся система предполагается свободной от внешних сил, $\mathbf{F}^* = 0$. Выбирая здесь в качестве полюса O центр инерции S^* системы, имеем согласно (5.5.14), что $\mathbf{L}_1^* = 0$.

Таким образом, в обоих примерах $\mathbf{L}^* = \mathbf{L}_1^* = 0$ и первое уравнение (5.5.30) дает

$$\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}' + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\mu} = O(\varepsilon^2). \quad (5.5.35)$$

Первое равенство (5.5.32) принимает вид

$$\boldsymbol{\omega}' = -\mathbf{J}^{-1} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}) + O(\varepsilon^2). \quad (5.5.36)$$

Дифференцируя равенство (5.5.36), получим, что k -я производная $\boldsymbol{\omega}^{(k)}$ будет с точностью до членов порядков ε^2 однородным многочленом степени $k+1$ от компонентов вектора $\boldsymbol{\omega}$, где $k = 0, 1, \dots$

Для первого примера ($\mathbf{R}_0 \equiv 0$) из первого равенства (5.5.34) заключаем, что Q_j^* — однородные многочлены от $\boldsymbol{\omega}$ второй степени, имеющие порядок $m_0 l \omega^2$. Здесь m_0 — характерная масса точек P_i , а l — характерный линейный размер порядка $\boldsymbol{\rho}_i$. Тогда из равенства (5.5.29) следует, что q —

сумма однородных многочленов второй и третьей степеней от $\boldsymbol{\omega}$, имеющих порядок $m_0 l c^{-1} \omega^2$ и $m_0 l c^{-2} b \omega^3$ соответственно. Здесь c — характерная жесткость упругих связей (величина порядка элементов матрицы C), b — характерный коэффициент диссипации (величина порядка элементов матрицы B). Такую же структуру имеют векторы \mathbf{r}_i , $i = 1, \dots, N$, определяемые по формуле (5.5.3). Отметим, что каждое дифференцирование повышает согласно (5.5.36) степени многочленов от $\boldsymbol{\omega}$ на единицу. Поэтому вектор $\boldsymbol{\mu}$ из (5.5.34) при $\mathbf{R}_0 \equiv 0$ — сумма однородных многочленов четвертой и пятой степеней от компоненты ω_j вектора $\boldsymbol{\omega}$, а именно:

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_4(\boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\mu}_5(\boldsymbol{\omega}) + O(\varepsilon^4),$$

$$\boldsymbol{\mu}_4(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{j,k,l,m=1}^3 D_{jklm} \omega_j \omega_k \omega_l \omega_m = O\left(\frac{m_0 l^2 \omega^4}{c}\right) = O(\varepsilon^2),$$

$$\boldsymbol{\mu}_5(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{j,k,l,m,n=1}^3 E_{jklmn} \omega_j \omega_k \omega_l \omega_m \omega_n = O\left(\frac{m_0 l b \omega^3}{c^2}\right) = O(\varepsilon^3 \delta). \quad (5.5.37)$$

Порядки величин в (5.5.37) указаны в соответствии с порядками (5.5.17). Коэффициенты D_{jklm} , E_{jklmn} постоянны в системе координат, связанной с твердым телом, и выражаются через постоянные m_j , \mathbf{J} , C^0 , B^0 , \mathbf{H}_{ij} , $\boldsymbol{\rho}_i$. Многочлен $\boldsymbol{\mu}_4$ есть момент упругих сил, а $\boldsymbol{\mu}_5$ — момент диссипативных сил.

Обратимся ко второму примеру ($\mathbf{F}^* = 0$). Здесь из второго уравнения (5.5.30) получим $\ddot{\mathbf{R}}_0 = O(\varepsilon^2)$. Поэтому величины Q_j^* , $\boldsymbol{\mu}$ из (5.5.34) с принятой точностью $O(\varepsilon^4)$ имеют тот же вид, что и в первом примере. Возмущающий момент $\boldsymbol{\mu}$ снова представляется формулами (5.5.37), а возмущающая сила $\boldsymbol{\varphi}$ из (5.5.34) — аналогичными соотношениями как сумма однородных многочленов четвертой и пятой степени от $\boldsymbol{\omega}$.

Уравнения (5.5.35), (5.5.37) для случая одной точки P_i на упругой связи ($N = 1$) были первоначально получены в работе [181] (см. § 4 этой главы).

Для некоторых частных случаев (твердое тело S^* обладает симметрией) выражения (5.5.37) явно вычислены, а уравнение (5.5.35) с моментом (5.5.37) проинтегрировано в работе [181].

В статьях [184, 286] рассматривается задача динамики твердого тела, несущего упругие и диссипативные элементы в постановке, предложенной в [181, 182] (§ 4, 5 данной главы). Коэффициенты жесткости и демпфи-

вания предлагаются достаточно большими. На основе метода сингулярных возмущений даются строгое математическое обоснование и оценка погрешности асимптотического подхода, предложенного в [181, 182].

§ 6. Вязкоупругое твердое тело

1. Следуя работе [183], рассмотрим движение механической системы S , состоящей из двух частей: абсолютно твердого тела D_0 и деформируемого тела D , которые жестко соединены друг с другом. Сначала предположим, что тело имеет неподвижную точку O , связанную с D_0 , и на него не действуют внешние силы и моменты (кроме реакции связи в точке O). Обозначим через \mathbf{r} текущий радиус-вектор, отсчитанный от точки O , через $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ — вектор смещения точек системы S в системе координат $Ox_1x_2x_3$, связанной с телом D_0 . Введем вспомогательную систему S_0 — абсолютно твердое тело, в котором деформации отсутствуют ($\dot{\mathbf{u}} = 0$). Его тензор инерции относительно точки O обозначим через \mathbf{J} . Тензор \mathbf{J} постоянен в системе координат $Ox_1x_2x_3$.

Примем, что деформируемое тело D подчиняется уравнениям линейной вязкоупругой среды Кельвина–Фойгта [287]:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= G_0[\boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{u}) + \tau\boldsymbol{\sigma}''(\dot{\mathbf{u}})], \\ \sigma'_{ij} &= 2e_{ij} + 2\mu(1 - 2\mu)^{-1}\delta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad i, j = 1, 2, 3, \\ \sigma''_{ij} &= 2\dot{e}_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij} \operatorname{div} \dot{\mathbf{u}}, \\ e_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).\end{aligned}\quad (5.6.1)$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений, складывающийся из упругих и вязких напряжений, G_0 — модуль сдвига, μ — коэффициент Пуассона, τ — постоянная размерности времени (время релаксации при сдвиге). Точка в (5.6.1) далее всюду обозначает частную производную по t в системе координат $Ox_1x_2x_3$. Уравнение движения среды (5.6.1) в области D запишем в подвижной системе координат $Ox_1x_2x_3$ с учетом сил инерции:

$$\begin{aligned}\rho G_0^{-1}[\ddot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{u}}] &= \\ &= \Delta \mathbf{u} + (1 - 2\mu)^{-1} \operatorname{div} \mathbf{u} + \tau \left(\Delta \dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{3} \nabla \operatorname{div} \dot{\mathbf{u}} \right).\end{aligned}\quad (5.6.2)$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости системы $Ox_1x_2x_3$, ρ — плотность среды в недеформированном состоянии. Граничные условия имеют вид

$$\mathbf{u} = 0 \text{ на } \Gamma_1, \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ на } \Gamma_2, \quad (5.6.3)$$

где Γ_1 — граница тел D и D_0 , Γ_2 — свободная часть границы тела D , \mathbf{n} — нормаль к D .

Обозначим через $OX_1X_2X_3$ неподвижную систему координат, начало которой находится в точке O , а оси движутся поступательно. Кинетический момент \mathbf{G} системы S относительно полюса O равен

$$\begin{aligned}\mathbf{G} &= \int_{D_0+D'} \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \dot{\mathbf{u}}) \rho' dv = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{g}, \\ \mathbf{g} &= \int_{D'} \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \dot{\mathbf{u}}) \rho' dv - \int_D \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \rho dv.\end{aligned}\quad (5.6.4)$$

Здесь ρ , D — плотность среды и занимаемая ею область в недеформированном состоянии, штрихи относятся к деформированному состоянию.

В рассматриваемом случае малых деформаций имеем $\rho' = \rho(1 - \operatorname{div} \mathbf{u})$, и выражение (5.6.4) для \mathbf{g} преобразуется к виду

$$\mathbf{g} = \int_D [\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{r}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \operatorname{div} \mathbf{u}] \rho dv + \oint_{\Gamma} \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})(\mathbf{un}) \rho dS,$$

где \mathbf{n} — орт внешней нормали к границе Γ области D . Заменяя интегрирование по Γ интегрированием по D , получим после преобразований

$$\begin{aligned}\mathbf{g} &= \int_D [\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \cdot (\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}))] \rho dv = \\ &= \int_D [\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) + \mathbf{u} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] \rho dv.\end{aligned}\quad (5.6.5)$$

Кинетический момент \mathbf{G} системы S сохраняется, поэтому в подвижной системе $Ox_1x_2x_3$ справедливо уравнение

$$\mathbf{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{L}, \quad \mathbf{L} = -\dot{\mathbf{g}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}.\quad (5.6.6)$$

Здесь \mathbf{g} определено равенством (5.6.5). Величина \mathbf{L} в (5.6.6) имеет смысл возмущающего момента, действующего на вспомогательное твердое тело S_0 , и обусловлено собственной упругостью и диссипацией.

2. Составим уравнения, аналогичные (5.6.2), (5.6.6), в другом случае движения, когда тело S свободно: на него не действуют внешние силы и моменты. В качестве точки O , связанной с телом D_0 , возьмем центр инерции вспомогательного тела S_0 , так что

$$\int_{D_0+D} \mathbf{r} \rho dv = 0. \quad (5.6.7)$$

Начало систем координат $OX_1X_2X_3$ и $Ox_1x_2x_3$ теперь движется с ускорением \mathbf{w}_0 точки O , поэтому в уравнение (5.6.2) добавляется одно слагаемое и это уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} \rho G_0^{-1}[\mathbf{w}_0 + \ddot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{u}}] = \\ = \Delta \mathbf{u} + (1 - 2\mu)^{-1} \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \tau \left(\Delta \dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{3} \nabla \operatorname{div} \dot{\mathbf{u}} \right). \end{aligned} \quad (5.6.8)$$

Кинетический момент \mathbf{G} имеет прежний вид (5.6.4), но теперь он представляет собой момент импульса системы S относительно полюса O в системе координат $OX_1X_2X_3$, оси которой движутся поступательно. Поэтому в правую часть уравнения моментов (5.6.6) следует добавить главный момент относительно точки O сил инерции, обусловленных движением системы $OX_1X_2X_3$. Этот момент равен

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{w}_0 \times \int_{D_0+D'} \mathbf{r} \rho' dv = \mathbf{w}_0 \times \mathbf{r}_c, \quad (5.6.9)$$

где \mathbf{r}_c — радиус-вектор центра инерции системы S относительно точки O .

Преобразованиями, аналогичными тем, которые применялись при выводе формулы (5.6.5) для \mathbf{g} , нетрудно получить

$$\mathbf{r}_c = \int_{D_0+D'} \mathbf{r} \rho' dv = \int_D \mathbf{u} \rho dv. \quad (5.6.10)$$

Здесь использовано условие (5.6.7). В рассматриваемом случае движения абсолютное ускорение центра инерции равно нулю. Представляя его как ускорение сложного движения, получим равенство для \mathbf{w}_0 :

$$\mathbf{w}_0 = -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_c) - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_c - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_c - \ddot{\mathbf{r}}_c. \quad (5.6.11)$$

Итак, дополнительный член \mathbf{w}_0 в уравнении (5.6.8) выражается через \mathbf{u} соотношениями (5.6.10), (5.6.11). В рамках малых деформаций вектор \mathbf{u} и его производные по \mathbf{r} , t считаются малыми первого порядка, а малыми второго порядка следует пренебречь. Но из (5.6.10), (5.6.11) следует, что \mathbf{r}_c , \mathbf{w}_0 — малые первого порядка, поэтому величина \mathbf{L}_1 в (5.6.9) есть малая второго порядка. Следовательно, в уравнении (5.6.6) не появляются дополнительных слагаемых и оно применимо и в рассматриваемом случае. Ниже оба случая движения (движение вокруг неподвижной точки O и свободное движение) рассматриваются параллельно.

3. Предполагаем, что справедливы соотношения

$$G = \varepsilon^{-2} G^0, \quad \tau = \varepsilon \delta \tau^0, \quad \omega^{-1} \sim \tau^0, \quad \varepsilon \ll \delta \ll 1, \quad (5.6.12)$$

где G^0 , τ^0 — ограниченные величины, а ε , δ — безразмерные малые параметры. Из (5.6.12) вытекает, что наибольший период T_1 собственных упругих колебаний, характерное время их затухания T_2 и характерное время T_3 движения системы как целого связаны соотношениями

$$T_1 \sim \varepsilon \tau^0, \quad T_2 \sim \varepsilon \delta^{-1} \tau^0, \quad T_3 \sim \omega^{-1} \sim \tau^0, \quad T_1 \ll T_2 \ll T_3. \quad (5.6.13)$$

Эти соотношения аналогичны условиям (5.5.16), (5.5.25).

Условиям (5.6.13) можно придать вид $c \gg l T_2^{-1} \gg V$, где c — характерная скорость упругих волн, V — линейная скорость вращения тела, l — его линейный размер. Отметим, что условия (5.6.12), (5.6.13) исключают возможность резонанса между упругими колебаниями тела и его вращениями как целого.

При условиях (5.6.12), (5.6.13) свободные упругие колебания системы S быстро затухнут и вдали от начального момента времени t_0 , при $t - t_0 \sim T_3$, ими можно пренебречь. Решение системы (5.6.2) или (5.6.8), (5.6.10), (5.6.11) с граничными условиями (5.6.3) при заданном $\boldsymbol{\omega}(t)$ сведется к вынужденным движениям, которые можно на основании (5.6.12) представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon^2 \mathbf{u}^0 + \varepsilon^3 \delta \mathbf{u}^1 + O(\varepsilon^4) = \\ = \rho G_0^{-1}[\mathbf{u}^0(\mathbf{r}, t) + \tau \mathbf{u}^1(\mathbf{r}, t)] + O(\varepsilon^4). \end{aligned} \quad (5.6.14)$$

Подставим разложение (5.6.14) в уравнения (5.6.2) (или (5.6.8), (5.6.10), (5.6.11)) и граничные условия (5.6.3). Получим, что функ-

ции \mathbf{u}^0 , \mathbf{u}^1 удовлетворяют квазистатическим задачам теории упругости:

$$\Delta \mathbf{u}^0 + (1 - 2\mu)^{-1} \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}^0 = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}, \quad (5.6.15)$$

$$\mathbf{u}^0 = 0 \text{ на } \Gamma_1, \quad \boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{u}^0) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ на } \Gamma_2,$$

$$\Delta \mathbf{u}^1 + (1 - 2\mu)^{-1} \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}^1 = -\Delta \dot{\mathbf{u}}^0 - \frac{1}{3} \nabla \operatorname{div} \dot{\mathbf{u}}^0, \quad (5.6.16)$$

$$\mathbf{u}^1 = 0 \text{ на } \Gamma_1, \quad \boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{u}^1) \cdot \mathbf{n} = -\boldsymbol{\sigma}''(\dot{\mathbf{u}}^0) \cdot \mathbf{n} \text{ на } \Gamma_2.$$

Время входит здесь как параметр. Отметим, что слагаемые $\ddot{\mathbf{u}}$, $2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{u}}$, \mathbf{w}_0 в левых частях уравнений (5.6.2), (5.6.8) не влияют на первые два члена разложения (5.6.14), (5.6.16). Поэтому в дальнейшем оба случая не различаются.

Решив задачи (5.6.15), (5.6.16), подставим решение (5.6.14) в соотношения (5.6.5), (5.6.6). Получим $\mathbf{g} \sim \varepsilon^2$, $\mathbf{L} \sim \varepsilon^2$, поэтому согласно (5.6.6)

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\mathbf{J}^{-1} \cdot [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega})] + O(\varepsilon^2). \quad (5.6.17)$$

При помощи равенства (5.6.17) можно выразить производные $\dot{\boldsymbol{\omega}}$, $\ddot{\boldsymbol{\omega}}$ и т. д. через $\boldsymbol{\omega}$ с погрешностью $\sim \varepsilon^2$ вдали от начального момента времени. Тогда правая часть уравнения (5.6.15) будет однородной квадратичной формой от $\boldsymbol{\omega}$, и поэтому такую же структуру будет иметь и решение \mathbf{u}^0 задачи (5.6.15). Аналогичные рассуждения показывают (с учетом (5.6.17)), что \mathbf{u}^1 — однородный многочлен 3-й степени от $\boldsymbol{\omega}$, вектор \mathbf{g} из (5.6.5) содержит многочлены 3-й и 4-й степени от $\boldsymbol{\omega}$. Возмущающий момент \mathbf{L} в (5.6.6) представляется в виде

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_4(\boldsymbol{\omega}) + \mathbf{L}_5(\boldsymbol{\omega}) + O(\varepsilon^2),$$

$$\mathbf{L}_4(\boldsymbol{\omega}) = \rho G_0^{-1} \sum_{i,j,k,l=1}^3 \mathbf{A}_{ijkl} \omega_i \omega_j \omega_k \omega_l = O(\varepsilon^2), \quad (5.6.18)$$

$$\mathbf{L}_5(\boldsymbol{\omega}) = \tau \rho G_0^{-1} \sum_{i,j,k,l,m=1}^3 \mathbf{B}_{ijklm} \omega_i \omega_j \omega_k \omega_l \omega_m = O(\varepsilon^3 \delta).$$

Величины \mathbf{A}_{ijkl} , \mathbf{B}_{ijklm} постоянны в системе координат, связанной с телом. Для их вычисления нужно решить статические задачи теории упругости (5.6.15), (5.6.16) и затем вычислить \mathbf{g} , \mathbf{L} , как указано выше. Поэтому \mathbf{A}_{ijkl} , \mathbf{B}_{ijklm} аналогичны присоединенным массам в случае идеальной жидкости и вязким присоединенным массам, введенным в [113, 121, 122]; они зависят от формы области D , от границ Γ_0 , Γ_1 в (5.6.3), а также от \mathbf{J} и μ .

Для сравнения отметим, что в случае тела с полостью, содержащей жидкость при больших числах Рейнольдса [113, 121, 122] (см. также § 3 этой главы), аналогичный возмущающий момент есть многочлен 3-й степени от $\boldsymbol{\omega}$. Для некоторых областей — эллипсоида [288], а также для стержней и пластин — решения задач (5.6.15), (5.6.16) известны или могут быть построены в явном виде.

После вычисления \mathbf{A}_{ijkl} , \mathbf{B}_{ijklm} задача сводится к интегрированию уравнений (5.6.6) движения твердого тела S_0 вокруг неподвижной точки при наличии возмущающих моментов (5.6.18). Решение таких уравнений строилось в [181], где исследовалось движение тела с конечным числом внутренних степеней свободы. В результате диссипации энергии движение тела перестраивается, стремясь к единственному устойчивому движению — вращению вокруг оси наибольшего момента инерции. Характерное время этого переходного процесса оценено в [181] и равно $T \sim \Omega^4 \omega^{-4} \lambda^{-1}$, где Ω — низшая частота собственных упругих колебаний, $\lambda = T_2^{-1}$, где T_2 — характерное время их затухания. В обозначениях (5.6.12), (5.6.13) получим следующие равносильные оценки времени переходного процесса:

$$T \sim \frac{T_3^4 T_2}{T_1^4} \sim \frac{\tau^0}{\varepsilon^3 \delta} \sim \frac{\Omega^2}{\omega^4 \tau}. \quad (5.6.19)$$

Здесь предполагается, что все главные моменты инерции и их разности — величины одного порядка; в противном случае формула (5.6.19) содержит дополнительный коэффициент (см. [181]).

Движение вязкоупругого твердого тела под действием сил и моментов общего вида может быть рассмотрено аналогично. В результате получается система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих движение вспомогательного твердого тела S_0 с возмущающими силами и моментами. Зависимость этих сил и моментов носит сложный характер. Подобный вывод для случая тела с конечным числом степеней свободы дан в [181].

§ 7. Влияние подвижной массы, соединенной с телом упругой связью с квадратичным трением

1. Рассматриваем, следуя работе [186], свободное движение твердого тела, к которому в некоторой неподвижной относительно тела точке O_1 прикрепена точечная масса m . Предполагается, что при относительном

движении на точку m действует возвращающая упругая сила с коэффициентом жесткости c , а также сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости — квадратичное трение с коэффициентом μ . Тогда векторное уравнение относительного движения согласно методике работы [181] (см. § 4 данной главы) можно представить в виде

$$\lambda_1 |\dot{\mathbf{r}}| \dot{\mathbf{r}} + \Omega^2 \mathbf{r} = -\{\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho} + (1 - m/M)[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{r}}]\}. \quad (5.7.1)$$

Здесь $\Omega^2 = c/m$, $\lambda_1 = \mu/m$, $\boldsymbol{\rho}$ — радиус-вектор точки O_1 , \mathbf{r} — радиус-вектор точки m относительно O_1 , $\boldsymbol{\omega}$ — абсолютная угловая скорость тела, M — суммарная масса твердого тела и подвижной массы, точка означает производную по времени t в связанной с телом системе координат, тогда $\boldsymbol{\rho}$ — постоянный вектор, $\boldsymbol{\omega}$ — некоторая неизвестная пока функция времени.

Ставится задача исследовать движение системы, т. е. найти описывающие его векторы \mathbf{r} и $\boldsymbol{\omega}$ как функции времени при заданных произвольных начальных условиях. В общем случае решение задачи построить не удастся. Однако если предположить коэффициенты связи λ_1 и Ω таковыми, что «свободные» движения точки m , вызванные начальными отклонениями, затухают значительно быстрее, чем тело совершит оборот, то в этом случае движение твердого тела близко к движению Эйлера–Пуансо, а относительные колебания точки, вынуждаемые этим движением, будут малыми.

Если взять

$$\lambda_1 = \Lambda \Omega^3, \quad \Omega \gg \omega \quad (\omega = |\boldsymbol{\omega}|),$$

то «вынужденное» движение системы (5.7.1) приближенно записывается в виде разложения

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= -\Omega^2 \mathbf{a} + \Lambda \Omega^{-3} |\dot{\mathbf{a}}| \dot{\mathbf{a}} + O(\Omega^{-4}), \\ \mathbf{a} &= \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho}. \end{aligned} \quad (5.7.2)$$

Точка, как отмечалось, означает дифференцирование в связанной с телом системе координат. Далее предполагается, что начало этой системы находится в точке C — центре инерции твердого тела и массы m . Тогда уравнение, определяющее искомый вектор $\boldsymbol{\omega}(t)$, находится из условия постоянства момента количества движения системы относительно точки O и может быть представлено в форме [181]

$$\mathbf{J}_C^* \dot{\boldsymbol{\omega}} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}_C^* \boldsymbol{\omega}) = -(\dot{\mathbf{g}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}). \quad (5.7.3)$$

Здесь \mathbf{J}_C^* — тензор инерции твердого тела вместе с массой m , находящейся в точке O_1 , относительно центра инерции C . Величину \mathbf{g} условно можно назвать вектором момента количества движения подвижной массы m : она обращается в нуль, если внутренние движения отсутствуют, т. е. при $\dot{\mathbf{r}} \equiv 0$, $\mathbf{r} \equiv 0$.

В общем случае с учетом (5.7.2) вектор \mathbf{g} равен

$$\mathbf{g} = m[\boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}}) + \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})] + O(\Omega^{-4}). \quad (5.7.4)$$

Здесь величина \mathbf{r} вычисляется приближенно согласно (5.7.2), а производная $\dot{\mathbf{r}}$, которая выражается через $\dot{\boldsymbol{\omega}}$, находится из соотношения, следующего непосредственно из (5.7.3):

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = -(\mathbf{J}_C^*)^{-1}[\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}_C^* \cdot \boldsymbol{\omega})] + O(\Omega^{-2}). \quad (5.7.5)$$

Таким образом, величина $\dot{\mathbf{r}}$ определяется с нужной степенью точности как функция $\boldsymbol{\omega}$. Аналогично находятся последующие производные $\ddot{\mathbf{r}}$, $\ddot{\boldsymbol{\omega}}$. В результате для определения вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ из (5.7.3) на основе (5.7.4), (5.7.5) получается искомое уравнение вида [181]

$$\mathbf{J}_C^* \dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}_C^* \cdot \boldsymbol{\omega})] = \Phi(\boldsymbol{\omega}) + O(\Omega^{-4}). \quad (5.7.6)$$

Здесь функция $\Phi(\boldsymbol{\omega})$ является полиномом, содержащим четвертые и восьмые степени вектора $\boldsymbol{\omega}$, и состоит из слагаемых, величины которых имеют порядок Ω^{-2} и Ω^{-3} . В общем случае функция Φ имеет довольно громоздкий вид, и ее выражение не приводится.

Впоследствии для конкретной задачи будет приведено выражение для возмущенного момента $\Phi(\boldsymbol{\omega})$ и построено решение системы уравнений движения.

§ 8. Момент сил светового давления

При движении искусственного космического тела по орбите вокруг Земли и особенно вокруг Солнца возможно существенное влияние силы светового давления на его движение. В книге [17] проведена оценка величин моментов различных сил, действующих на спутник. Для спутника Земли с характеристиками, соответствующими спутникам типа 3-го советского спутника, оказывается, что моменты сил светового давления больше гравитационных на высотах, превышающих 35 000–40 000 км. Для космического

аппарата, движущегося по орбите вокруг Солнца, моменты сил светового давления на несколько порядков больше гравитационных.

Приведем выражения для моментов сил светового давления, действующих на поверхность спутника, следуя работам [17, 89, 90]. Величина светового давления p_c на расстоянии R от центра Солнца определяется по формуле

$$p_c = \frac{E_0}{c} \left(\frac{R_0}{R} \right)^2, \quad (5.8.1)$$

где c — скорость света, E_0 — величина потока энергии светового давления на расстоянии R_0 от центра Солнца. Если R_0 — радиус орбиты Земли, то $p_c = \frac{E_0}{c} = 4,64 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$.

Для спутников, представляющих собой тело вращения, приближенно момент сил светового давления может быть вычислен по формуле [17, 90]

$$\mathbf{L} = \frac{a_c(\varepsilon_s) R_0^2}{R^2} \mathbf{e}_r \times \mathbf{k}'. \quad (5.8.2)$$

Здесь \mathbf{e}_r — единичный вектор по направлению радиус-вектора спутника, \mathbf{k}' — единичный вектор оси симметрии спутника, ε_s — угол между векторами \mathbf{e}_r и \mathbf{k}' , так что $|\mathbf{e}_r \times \mathbf{k}'| = \sin \varepsilon_s$, R — текущее расстояние от центра Солнца до центра масс спутника (рассматривается спутник Солнца); R_0 — некоторое фиксированное значение R ; $a_c(\varepsilon_s)$ — коэффициент момента сил светового давления.

Считаем, что $a_c = a_c(\cos \varepsilon_s)$, и будем аппроксимировать a_c полиномами по степеням $\cos \varepsilon_s$. Конкретные выражения $a_c(\cos \varepsilon_s)$ рассмотрены для спутника в виде тела вращения в [17, 90], а для более общих случаев — в [102–104].

Для случая полного поглощения имеем

$$a_c(\varepsilon_s) \frac{R_0^2}{R^2} = p_c S(\varepsilon_s) z'_0(\varepsilon_s). \quad (5.8.3)$$

Здесь S — площадь «тени» на плоскости, нормальной к потоку; z'_0 — расстояние от центра масс до центра давления. Размерности a_c и L совпадают.

Приведенное выше соотношение (5.8.2) дает приближенное аналитическое выражение для момента сил светового давления. Более точный учет этих сил требует описания геометрии аппарата, свойств его поверхности и условий освещения. Такого рода исследования выполнены в ряде недавно опубликованных работ [86, 95, 101].

ГЛАВА 6

Движение спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов

В работе [18] рассмотрены два случая движения спутника под действием гравитационных моментов, когда наличие малого параметра позволяет применить метод усреднения и получить асимптотические решения.

В первом случае, представленном в § 1 этой главы, значения трех главных моментов инерции спутника предполагаются близкими, хотя и различными; эксцентриситет орбиты и угловая скорость вращения спутника произвольны.

В § 2 исследуется быстрое движение спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов в случае, когда на эксцентриситет орбиты и на моменты инерции ограничений не накладывается.

В § 3, основанном на статье [289], рассматриваются некоторые резонансные явления в динамике относительного движения спутника в плоскости орбиты.

§ 1. Движение трехосного спутника с близкими моментами инерции

В § 6 главы 4 введены три правые системы координат, начало которых совмещено с центром инерции спутника (рис. 13, 14), а также составлены уравнения движения спутника относительно центра инерции (см. (4.6.3), (4.6.7)). В обозначениях, принятых в § 6 главы 4, эти уравнения имеют вид

$$\frac{dG}{dt} = L_3, \quad \frac{d\delta}{dt} = \frac{L_1}{G}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{L_2}{G \sin \delta}, \quad (6.1.1)$$

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= G \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) + \frac{L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi}{G}, \\ \dot{\varphi} &= G \cos \theta \left(\frac{1}{A_3} - \frac{\sin^2 \varphi}{A_1} - \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} \right) + \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G \sin \theta}, \\ \dot{\psi} &= G \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A_1} + \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} \right) - \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G} \operatorname{ctg} \theta - \frac{L_2}{G} \operatorname{ctg} \delta.\end{aligned}\quad (6.1.2)$$

Пусть главные центральные моменты инерции спутника близки друг к другу, т. е. представимы в виде (4.7.1):

$$A_1 = J_0 + \varepsilon A'_1, \quad A_2 = J_0 + \varepsilon A'_2, \quad A_3 = J_0 + \varepsilon A'_3, \quad (6.1.3)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$ — малый параметр.

При $\varepsilon = 0$ из (5.1.17), (6.1.3) следует $s_{ij} = J_0 \delta_{ij}$ (δ_{ij} — символ Кронекера), и тогда из (5.1.18) получаем $L_1 = L_2 = L_3 = 0$.

Действительно, например, для L_1 имеем

$$\begin{aligned}L_1 &= \frac{3\omega_0^2(1+e\cos\nu)^3}{(1-e^2)^3} \sum_{j=1}^3 (\sigma_2 \sigma_j s_{3j} - \sigma_3 \sigma_j s_{2j}) = \\ &= \frac{3\omega_0^2(1+e\cos\nu)^3}{(1-e^2)^3} J_0 \sum_{j=1}^3 (\sigma_2 \sigma_j \delta_{3j} - \sigma_3 \sigma_j \delta_{2j}) = \\ &= \frac{3\omega_0^2(1+e\cos\nu)^3}{(1-e^2)^3} J_0 (\sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_2) = 0.\end{aligned}$$

Из системы (6.1.1), (6.1.2) в этом случае получим, что G , δ , λ , θ и φ постоянны, а

$$\psi = G J_0^{-1} t + \psi_0, \quad (6.1.4)$$

т. е. спутник равномерно вращается вокруг поступательно движущейся оси кинетического момента.

Процедура усреднения в этом случае кратко описана в § 7 главы 4.

Для усреднения правых частей (6.1.1), (6.1.2) вычислим сначала средние по ψ значения функций s_{ij} , $s_{ij} \cos \psi$, $s_{ij} \sin \psi$, $i, j = 1, 2, 3$, которые потребуются в дальнейшем. Обозначим операцию усреднения по ψ через M_ψ :

$$M_\psi \{F(\psi)\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\psi) d\psi. \quad (6.1.5)$$

Используя формулы (5.1.17) и (1.5.4), найдем

$$\begin{aligned}M_\psi(s_{11}) &= M_\psi(s_{22}) = \frac{1}{2} [A_1 (\cos^2 \varphi + \cos^2 \theta \sin^2 \varphi) + \\ &\quad + A_2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \theta \cos^2 \varphi) + A_3 \sin^2 \theta], \\ M_\psi(s_{33}) &= A_1 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + A_2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + A_3 \cos^2 \theta, \\ M_\psi(s_{ij}) &= 0, \quad i \neq j, \\ M_\psi(s_{ii} \cos \psi) &= M_\psi(s_{ii} \sin \psi) = M_\psi(s_{12} \cos \psi) = \\ &= M_\psi(s_{12} \sin \psi) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \\ M_\psi(s_{13} \cos \psi) &= M_\psi(s_{23} \sin \psi) = \frac{1}{2} (A_1 - A_2) \sin \theta \cos \varphi \sin \varphi, \\ M_\psi(s_{23} \cos \psi) &= -M_\psi(s_{13} \sin \psi) = \\ &= \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta (A_1 \sin^2 \varphi + A_2 \cos^2 \varphi - A_3).\end{aligned}\quad (6.1.6)$$

Теперь, подставляя (6.1.6) в (5.1.18) и учитывая, что все σ_i не зависят от ψ согласно (5.1.19), выразим средние значения по ψ проекции внешнего момента L_i и их комбинаций, входящих в уравнения движения:

$$\begin{aligned}M_\psi(L_1) &= \frac{3\omega_0^2(1+e\cos\nu)^3}{(1-e^2)^3} \sigma_2 \sigma_3 M_\psi(s_{33} - s_{22}), \\ M_\psi(L_2) &= \frac{3\omega_0^2(1+e\cos\nu)^3}{(1-e^2)^3} \sigma_1 \sigma_3 M_\psi(s_{11} - s_{33}), \\ M_\psi(L_3) &= 0, \\ M_\psi(L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi) &= \\ &= \frac{3\omega_0^2(1+e\cos\nu)^3}{(1-e^2)^3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_3^2) M_\psi(s_{23} \cos \psi), \\ M_\psi(L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi) &= \\ &= \frac{3\omega_0^2(1+e\cos\nu)^3}{(1-e^2)^3} (2\sigma_3^2 - \sigma_1^2 - \sigma_2^2) M_\psi(s_{13} \cos \psi).\end{aligned}\quad (6.1.7)$$

Усреднение по времени функций, зависящих от истинной аномалии ν , сводится к усреднению по ν согласно (4.7.4).

Усредняя правые части уравнений (6.1.1), (6.1.2) с учетом (5.1.17), (5.1.18) и (4.6.1) сначала по ψ , а затем по ν согласно (4.7.4), получим

уравнения первого приближения в виде

$$\begin{aligned}
\dot{G} &= 0, \quad \dot{\delta} = 0, \quad \dot{\psi} = GJ_0^{-1} + O(\varepsilon), \\
\dot{\lambda} &= \frac{3\omega_0^2 \cos \delta}{4G(1-e^2)^{3/2}} \{A_1 + A_2 + A_3 - \\
&\quad - 3[(A_1 \sin^2 \varphi + A_2 \cos^2 \varphi) \sin^2 \theta + A_3 \cos^2 \theta]\}, \\
\dot{\theta} &= G \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) + \\
&\quad + \frac{3\omega_0^2(1-3\cos^2 \delta)}{4G(1-e^2)^{3/2}} (A_1 - A_2) \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi, \\
\dot{\varphi} &= G \cos \theta \left(\frac{1}{A_3} - \frac{\sin^2 \varphi}{A_1} - \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} \right) - \\
&\quad - \frac{3\omega_0^2(1-3\cos^2 \delta)}{4G(1-e^2)^{3/2}} \cos \theta (A_1 \sin^2 \varphi + A_2 \cos^2 \varphi - A_3).
\end{aligned} \tag{6.1.8}$$

Для дальнейшего упрощения этих уравнений заметим, что с точностью до величин порядка ε^2 в силу (6.1.3) имеем $\frac{1}{A_1} = \frac{2}{J_0} - \frac{A_1}{J_0^2}$, $A_1 = 2J_0 - \frac{J_0^2}{A_1}$, и аналогично для моментов инерции A_2, A_3 .

Используя эти приближенные равенства, преобразуем уравнения (6.1.8), не уменьшая их порядка точности по ε :

$$\begin{aligned}
\dot{G} &= 0, \quad \dot{\delta} = 0, \quad \dot{\psi} = \omega + O(\varepsilon), \quad \dot{\lambda} = \frac{3\omega_0^2 \Phi \cos \delta}{4G(1-e^2)^{3/2}}, \\
\dot{\theta} &= G \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) D = O(\varepsilon), \\
\dot{\varphi} &= G \cos \theta \left(\frac{1}{A_3} - \frac{\sin^2 \varphi}{A_1} - \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} \right) D = O(\varepsilon).
\end{aligned} \tag{6.1.9}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\Phi &= \frac{6TJ_0^2}{G^2} - J_0^2 \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} + \frac{1}{A_3} \right) \sim \varepsilon, \\
D &= 1 - \frac{3\omega_0^2(1-3\cos^2 \delta)}{4\omega^2(1-e^2)^{3/2}}, \quad \omega = \frac{G}{J_0} \sim 1,
\end{aligned} \tag{6.1.10}$$

где кинетическая энергия T движения спутника относительно центра масс определена формулой (4.6.9).

Решение системы (6.1.9), (6.1.10) аппроксимирует точное решение системы (6.1.1), (6.1.2) на интервале времени порядка $T_0\varepsilon^{-1}$, много большем периода оборота спутника, с погрешностью порядка ε для медленных переменных $G, \delta, \lambda, \theta, \varphi$ и с погрешностью порядка 1 для ψ . Зависимость истинной аномалии ν от времени определяется уравнением (4.6.13), которое легко интегрируется.

Относительное движение спутника, описываемое уравнениями (6.1.9), распадается на три части: быстрое движение (переменная ψ) и два медленных движения (переменные θ, φ и G, δ, λ).

Быстрое движение представляет собой вращение спутника вокруг вектора кинетического момента с угловой скоростью $\omega = GJ_0^{-1}$, постоянной в силу первого уравнения (6.1.9).

Уравнения для переменных θ, φ описывают движение вектора кинетического момента относительно спутника. Проекции G_i этого вектора на главные центральные оси инерции Oz_i определяются формулами (4.6.6).

Рассматриваемые уравнения (последние два в системе (6.1.9)) отличаются от уравнений для θ, φ в случае движения тела по инерции (первые два уравнения (6.1.2) при $L_1 = L_2 = L_3 = 0$, случай Эйлера–Пуансо) лишь множителем D из (6.1.10), постоянным в данном приближении. Поэтому уравнения для θ, φ допускают интеграл энергии $T = \text{const}$, в чем легко убедиться и непосредственным усреднением правой части уравнения для производной кинетической энергии, полученной из (4.6.9) при помощи (6.1.1), (6.1.2):

$$\begin{aligned}
\dot{T} &= \frac{2T}{G} L_3 + G \sin \theta \left[\cos \theta \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A_1} + \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} - \frac{1}{A_3} \right) (L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi) + \right. \\
&\quad \left. + \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) (L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi) \right].
\end{aligned} \tag{6.1.11}$$

Таким образом, действие гравитационных моментов лишь изменяет (в постоянное число D раз) скорость перемещения вектора кинетического момента \mathbf{G} вдоль траекторий его движения в случае Эйлера–Пуансо. Эти траектории определяются соотношениями, вытекающими из (4.6.6), (4.6.9) (см. также (4.5.3), (4.5.4)):

$$G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 = G^2, \quad G_1^2 A_1^{-1} + G_2^2 A_2^{-1} + G_3^2 A_3^{-1} = 2T,$$

причем G и T постоянны. Ряд таких траекторий при фиксированном T и различных G изображен на рис. 6, где стрелками указано направление

движения в случае Эйлера–Пуансо и принято $A_1 > A_2 > A_3$. Величина D в (6.1.10) может изменяться в широких пределах, принимая как положительные, так и отрицательные значения, что соответствует изменению направления движения на рис. 6. При $\frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow \infty$ имеем $D \rightarrow 1$, т. е. при быстром вращении относительно центра инерции движение спутника переходит в движение Эйлера–Пуансо. Отметим, что, как и в случае Эйлера–Пуансо, перманентными осями вращения являются главные оси инерции, причем вращение вокруг оси Oz_2 неустойчиво, а вокруг Oz_1, Oz_3 устойчиво (см. рис. 6; это справедливо как при $D > 0$, так и при $D < 0$).

Однако при выполнении условия

$$\omega = \frac{G}{J_0} = \sqrt{\frac{3(1 - 3\cos^2 \delta)}{4(1 - e^2)^{3/2}}} \omega_0 \quad (6.1.12)$$

получим $D = 0$ в (6.1.10), и вращение спутника будет стационарным при любой ориентации оси вращения относительно спутника. В этом случае моменты центробежных и гравитационных сил в первом приближении уравновешиваются и вектор кинетического момента \mathbf{G} не перемещается относительно тела. Условие (6.1.12) показывает, что за счет выбора величины кинетического момента $G = J_0 \omega$ этого можно добиться при любой его ориентации в пространстве, если только угол $\frac{\pi}{2} - \delta$ между вектором кинетического момента и плоскостью орбиты удовлетворяет неравенству

$$\left| \frac{\pi}{2} - \delta \right| \leq \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 54^\circ 44'.$$

Движение вектора кинетического момента в пространстве описывается первыми тремя уравнениями (6.1.9). В силу постоянства G, δ, T и Φ из (6.1.10) это движение представляет собой равномерное вращение вектора постоянной величины G вокруг нормали к плоскости орбиты на постоянном угловом расстоянии δ от нее. Угловая скорость вращения $\dot{\lambda}$ — величина порядка $\varepsilon \omega_0^2 \omega^{-1}$ (так как $\Phi \sim \varepsilon J_0$), а знак ее зависит от характера движения \mathbf{G} относительно спутника. Например, если $\delta < \pi/2$, то при вращении спутника вокруг оси наибольшего момента инерции Oz_1 ($G^2 = 2TA_1$) из (6.1.10) получим $\Phi < 0, \dot{\lambda} < 0$ (вращение \mathbf{G} в сторону, противоположную орбитальному движению), а при $G^2 = 2TA_3$ (вращение вокруг Oz_3) имеем $\dot{\lambda} > 0$. Если же вектор кинетического момента лежит в плоскости орбиты ($\delta = \pi/2$), то он остается неподвижным в пространстве ($\dot{\lambda} = \text{const}$).

Подчеркнем, что проведенный в данном параграфе анализ основан на единственном предположении (6.1.3) о близости друг к другу главных центральных моментов инерции спутника. Величина угловой скорости ω может быть больше, меньше или одного порядка с угловой скоростью орбитального движения ω_0 . Эксцентриситет орбиты также является произвольным ($0 \leq e < 1$).

§ 2. Быстрые вращения спутника с трехосным эллипсоидом инерции

Рассмотрим теперь спутник, моменты инерции которого произвольны ($A_1 > A_2 > A_3$), в предположении, что угловая скорость ω движения спутника относительно центра масс существенно больше угловой скорости орбитального движения ω_0 , т. е. будем считать, что $\varepsilon = \frac{\omega}{\omega_0} \sim \frac{A_1 \omega_0}{G} \ll 1$. В этом случае кинетическая энергия вращения спутника велика по сравнению с работой гравитационных моментов за время оборота спутника вокруг центра масс.

Предположим, что единица измерения времени и период относительного движения $\frac{2\pi}{\omega}$ имеют одинаковый порядок, тогда $\omega_0 \sim \varepsilon$ и $L_i = O(\varepsilon^2)$, $i = 1, 2, 3$.

Невозмущенное движение ($\varepsilon = 0$) будет движением Эйлера–Пуансо, величины G, δ, λ, T при этом постоянны.

Медленными переменными (x) (по терминологии гл. 4) в возмущенном движении ($\varepsilon \neq 0$) будут G, δ, λ и T , а быстрыми (y) — φ, θ, ψ .

Как показано в главе 4, уравнения возмущенного движения спутника приводятся к системе (4.6.14) с двумя вращающимися фазами вида (4.6.15). Если бы в системе (4.6.15) ν было бы фиксированной постоянной, то в качестве малого параметра можно было бы взять ε^2 . Тогда в первом приближении по ε^2 решение для медленных переменных определялось бы, согласно (4.3.5), (4.3.6), системой

$$\dot{x} = \varepsilon^2 M_t \{X(x, \omega_1(t + t_1), \omega_2(t + t_2), \nu)\}. \quad (6.2.1)$$

Здесь M_t определяется согласно (4.3.3), вместо y_1, y_2 подставлены их значения (4.6.10) в невозмущенном движении. Предполагается, что результат усреднения в (6.2.1) не зависит от произвольных постоянных t_1, t_2 , тогда погрешность первого приближения имеет порядок ε^2 на интервале порядка ε^{-2} .

Покажем, что система (6.2.1) с той же точностью аппроксимирует уравнения для медленных переменных в (4.6.15) и в том случае, когда ν не постоянно, а определяется (4.6.15). Решение для переменных x, y_1, y_2 системы (4.6.15) ищем в виде (4.3.4):

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} + \varepsilon u_1(\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \nu) + \varepsilon^2 u_2(\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \nu) + \dots, \\ y_1 &= \bar{y}_1 + \varepsilon v_1(\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \nu) + \dots, \\ y_2 &= \bar{y}_2 + \varepsilon w_1(\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \nu) + \dots \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

Функции u_i, v_i, w_i считаем периодическими по \bar{y}_1, \bar{y}_2 с периодами 2π .

Переменную ν в ряд не разлагаем. Новые переменные $\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2$ (первая из них — векторная) должны удовлетворять системе уравнений (аналогично (4.3.5))

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \varepsilon A_1(\bar{x}, \nu) + \varepsilon^2 A_2(\bar{x}, \nu) + \varepsilon^3 A_3(\bar{x}, \nu) + \dots, \\ \dot{\bar{y}}_1 &= \omega_1(\bar{x}) + \varepsilon B_1(\bar{x}, \nu) + \dots, \\ \dot{\bar{y}}_2 &= \omega_2(\bar{x}) + \varepsilon C_1(\bar{x}, \nu) + \dots \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

Подставим (6.2.2) в (4.6.15), выразим производные $\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2$ согласно (6.2.3) (а также учтем уравнение для ν в (4.6.15)), а затем приравняем в полученных уравнениях коэффициенты при последовательных степенях ε . Приравняв коэффициенты при ε^n , получим уравнения

$$\begin{aligned} \omega_1 \frac{\partial u_n}{\partial \bar{y}_1} + \omega_2 \frac{\partial u_n}{\partial \bar{y}_2} &= P_n(\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \nu) - A_n(\bar{x}, \nu), \\ \omega_1 \frac{\partial v_n}{\partial \bar{y}_1} + \omega_2 \frac{\partial v_n}{\partial \bar{y}_2} &= Q_n(\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \nu) - B_n(\bar{x}, \nu), \\ \omega_1 \frac{\partial w_n}{\partial \bar{y}_1} + \omega_2 \frac{\partial w_n}{\partial \bar{y}_2} &= R_n(\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \nu) - C_n(\bar{x}, \nu). \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

Здесь функции P_n, Q_n, R_n зависят от $f, A_k, B_k, C_k, u_k, v_k, w_k, k = 1, 2, \dots, n-1$, и их производных. Кроме того, P_n зависит от функции X и ее производных, а Q_n, R_n — от Z_1, Z_2, w_1, w_2 и их производных, а также от u_n . Таким образом, на каждом шаге из системы (6.2.4) нужно сначала определить A_n и u_n из первого (векторного) уравнения, а затем B_n, v_n, C_n, w_n .

Все уравнения (6.2.4) имеют вид следующего скалярного уравнения:

$$\omega_1 \frac{\partial u}{\partial \bar{y}_1} + \omega_2 \frac{\partial u}{\partial \bar{y}_2} = P(\bar{y}_1, \bar{y}_2) - A, \quad (6.2.5)$$

где P периодична по своим аргументам с периодом 2π . Зависимость от \bar{x} и ν опускаем, так как эти переменные входят в уравнения (6.2.4) как параметры. Разложим функцию P и искомую функцию u , которая ищется как периодическая функция \bar{y}_1, \bar{y}_2 с периодами 2π , в двойной ряд Фурье в комплексной форме

$$\begin{aligned} P &= \sum_{m,s} P_{ms} \exp(im\bar{y}_1 + is\bar{y}_2), \\ u &= \sum_{m,s} u_{ms} \exp(im\bar{y}_1 + is\bar{y}_2). \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

Суммирование в (6.2.6) ведется по всем целым m, s . Подставляя (6.2.6) в (6.2.5) и приравнявая коэффициенты при одинаковых гармониках, найдем

$$A = P_{00} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\bar{y}_1, \bar{y}_2) d\bar{y}_1 d\bar{y}_2, \quad (6.2.7)$$

$$i(\omega_1 m + \omega_2 s) u_{ms} = P_{ms} \quad (m^2 + s^2 \neq 0). \quad (6.2.8)$$

Из (6.2.8) видно, что если частоты ω_1, ω_2 несоизмеримы, т. е.

$$m\omega_1 + s\omega_2 \neq 0 \quad (6.2.9)$$

при всех целых m, s , не равных нулю одновременно, то коэффициенты Фурье функции u могут быть определены, и сама эта функция находится с точностью до произвольной постоянной. Формула (6.2.7) определяет величину A .

Таким образом, при условии (6.2.9) функции $A_n, B_n, C_n, u_n, v_n, w_n$ могут быть определены из (6.2.4), а асимптотическое решение (6.2.2), (4.6.12) находится в любом приближении. Произвольные функции от \bar{x} и ν , появляющиеся на каждом шаге (аналогично произвольной постоянной при решении (6.2.5)), можно выбирать любыми, на окончательный результат они не повлияют [13].

Так как частоты ω_1, ω_2 зависят от \bar{x} , то условие их несоизмеримости (6.2.9) может нарушаться (резонансные явления). Но резонансы при больших (по модулю) числах m, s будут выражены слабо. Это достаточно очевидно из физических соображений и связано с тем, что амплитуды высших гармоник ряда Фурье для правых частей уравнений движения малы. Будем считать, что условие (6.2.9) выполнено для небольших по модулю m, s в начальный момент времени с некоторым запасом, т. е. правая

часть (6.2.9) не близка к нулю. Ниже показано, что переменные G и T , от которых зависят частоты ω_1, ω_2 , в первом приближении постоянны. Тогда условие (6.2.9) для малых m, s будет выполнено на всем интервале движения. Таким образом, здесь, как и в § 1 данной главы, резонансные явления не рассматриваются. Отметим, что такой подход (игнорирование высших резонансов) не является вполне строгим, но он оправдан физически.

Запишем первое уравнение (6.2.4) для $n = 1$. Для этого уравнения после сделанных преобразований получим $P_1 = 0$, и уравнение примет вид

$$\omega_1 \frac{\partial u_1}{\partial \bar{y}_1} + \omega_2 \frac{\partial u_1}{\partial \bar{y}_2} = -A_1(\bar{x}, \nu).$$

Отсюда видно, что можно положить

$$A_1 = 0, \quad u_1 = 0. \quad (6.2.10)$$

Второе и третье уравнения (6.2.4) для $n = 1$ с учетом (6.2.10) дают

$$\begin{aligned} \omega_1 \frac{\partial v_1}{\partial \bar{y}_1} + \omega_2 \frac{\partial v_1}{\partial \bar{y}_2} &= -B_1(\bar{x}, \nu), \\ \omega_1 \frac{\partial w_1}{\partial \bar{y}_1} + \omega_2 \frac{\partial w_1}{\partial \bar{y}_2} &= -C_1(\bar{x}, \nu), \end{aligned}$$

откуда следует

$$B_1 = C_1 = 0, \quad v_1 = w_1 = 0. \quad (6.2.11)$$

При $n = 2$ первое уравнение (6.2.4) примет вид (с учетом (6.2.10), (6.2.11))

$$\omega_2 \frac{\partial u_2}{\partial \bar{y}_1} + \omega_2 \frac{\partial u_2}{\partial \bar{y}_2} = X(\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \nu) - A_2(\bar{x}, \nu).$$

Откуда, в соответствии с (6.2.7), получим

$$A_2(\bar{x}, \nu) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \nu) d\bar{y}_1 d\bar{y}_2, \quad (6.2.12)$$

а произвольную функцию, входящую в u_2 , выберем так, чтобы выполнялось условие

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u_2(\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \nu) d\bar{y}_1 d\bar{y}_2 = 0 \quad (6.2.13)$$

тождественно по \bar{x}, ν . Выпишем еще первое уравнение (6.2.4) при $n = 3$ с учетом (6.2.10), (6.2.11):

$$\omega_1 \frac{\partial u_3}{\partial \bar{y}_1} + \omega_2 \frac{\partial u_3}{\partial \bar{y}_2} = -\frac{\partial u_2}{\partial \nu} f(\nu) - A_3(\bar{x}, \nu).$$

Отсюда определим A_3 согласно (6.2.7):

$$A_3(\bar{x}, \nu) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\nu) \frac{\partial}{\partial \nu} u_2(\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \nu) d\bar{y}_1 d\bar{y}_2.$$

Вынося дифференцирование за знак интеграла и принимая во внимание равенство (6.2.13), получим

$$A_3 = 0. \quad (6.2.14)$$

Решение для x будем искать в виде

$$x = \bar{x}, \quad \dot{\bar{x}} = \varepsilon^2 A_2(\bar{x}, \nu). \quad (6.2.15)$$

При этом в правой части первого уравнения (6.2.3) отброшены члены порядка ε^4 (так как $A_1 = A_3 = 0$), и поэтому ошибка в определении \bar{x} не будет превышать ε^2 на интервале порядка ε^{-2} . Из разложения (6.2.2) видно, что \bar{x} аппроксимирует x с погрешностью порядка ε^2 (так как $u_1 = 0$). Но система (6.2.15) при условии (6.2.12) совпадает с системой (6.2.1). Итак, решение системы (6.2.1) или (6.2.15) действительно аппроксимирует x с погрешностью порядка ε^2 на интервале времени порядка ε^{-2} , что соответствует числу оборотов спутника по орбите порядка ε^{-1} (так как скорость изменения угла ν имеет порядок ε).

Для построения усредненной системы (6.2.1) нужно усреднять правые части уравнений движения (при фиксированных медленных переменных и ν) по фазам y_1, y_2 как по независимым переменным (см. (6.2.12)). Другими словами, нужно вычислить интегралы типа

$$M_t \{F(\theta, \varphi, \psi)\} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta(y_1), \varphi(y_1), \psi_1(y_1) + y_2) dy_1 dy_2,$$

где зависимость углов Эйлера от y_1, y_2 дается формулами движения Эйлера–Пуансо (4.6.12), а зависимость от медленных переменных опускает-

ся. Заменяя переменные интегрирования (y_2 на ψ , а затем y_1 на t согласно (4.6.10)), получим (см. (4.6.16))

$$\begin{aligned} M_t\{F(\theta, \varphi, \psi)\} &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\tau \int_0^{2\pi} F(\theta(y_1), \varphi(y_1), \psi) dy_1 d\psi = \\ &= \frac{1}{2\pi\tau} \int_0^\tau \int_0^{2\pi} F(\theta(t), \varphi(t), \psi) d\psi dt = M_1\{M_\psi[F(\theta, \varphi, \psi)]\}. \end{aligned} \quad (6.2.16)$$

Здесь M_ψ означает усреднение по ψ согласно (6.1.5), а M_1 — по θ и φ , связанным соотношением (4.6.9), производимое по замкнутым траекториям вектора кинетического момента в движении Эйлера–Пуансо при фиксированных G, T (рис. 6).

Усредним правые части уравнений (6.1.1), (6.1.11) по схеме (6.2.16), пользуясь формулами (6.1.6), (6.1.7), где уже проведено необходимое усреднение по ψ . Получим усредненную систему вида

$$\begin{aligned} \dot{G} &= 0, \quad \dot{T} = \frac{3\omega_0^2(1+e\cos\nu)^3}{2(1-e^2)^3} (2\sigma_3^2 - \sigma_1^2 - \sigma_2^2) \times \\ &\times \frac{(A_1 - A_2)(A_2 - A_3)(A_3 - A_1)}{A_1 A_2 A_3 G^2} M_1\{G_1 G_2 G_3\}, \\ \dot{\delta} &= -\frac{3\omega_0^2(1+e\cos\nu)^3}{2G(1-e^2)^3} \sigma_2 \sigma_3 N, \\ \dot{\lambda} &= \frac{3\omega_0^2(1+e\cos\nu)^3}{2G(1-e^2)^3 \sin\delta} \sigma_1 \sigma_3 N. \end{aligned} \quad (6.2.17)$$

Здесь G_i — проекции кинетического момента на оси Oz_i (4.6.6), а

$$\begin{aligned} N &= 2M_1 M_\psi (s_{11} - s_{33}) = M_1\{A_1 + A_2 + A_3 - \\ &- 3[(A_1 \sin^2 \varphi + A_2 \cos^2 \varphi) \sin^2 \theta + A_3 \cos^2 \theta]\}. \end{aligned} \quad (6.2.18)$$

В силу симметрии траекторий вектора \mathbf{G} относительно координатных плоскостей системы координат $Oz_1 z_2 z_3$ при движении Эйлера–Пуансо имеем

$$M_1\{G_1 G_2 G_3\} = 0, \quad T = \text{const.}$$

Величина N из (6.2.18) при близких друг к другу моментах инерции A_1, A_2, A_3 (условие (6.1.3)) совпадает с Φ из (6.1.10). В общем случае, пользуясь (4.6.6) и (4.6.9), ее можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} N &= A_1 + A_2 + A_3 - 3G^{-2} M_1\{A_1^3 p^2 + A_2^3 q^2 + A_3^3 r^2\} = A_2 - 2A_1 - \\ &- 2A_3 + 6A_1 A_3 T G^{-2} + 3A_2(A_1 - A_2)(A_2 - A_3) G^{-2} M_1(q^2). \end{aligned} \quad (6.2.19)$$

Подставим в равенство (6.2.19) величину $q(t)$ из (2.3.7) для движения Эйлера–Пуансо и усредним функцию q^2 по ее периоду. Окончательно для траекторий (рис. 6) вектора G , охватывающих ось Oz_1 ($2TA_1 \geq G^2 > 2TA_2$), имеем

$$\begin{aligned} N &= A_2 + A_3 - 2A_1 + \\ &+ 3 \left(\frac{2TA_1}{G^2} - 1 \right) \left[A_3 + (A_2 - A_3) \frac{K(k) - E(k)}{k^2 K(k)} \right]. \end{aligned} \quad (6.2.20)$$

Здесь $K(k), E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно и

$$k^2 = \frac{(A_2 - A_3)(2TA_1 - G^2)}{(A_1 - A_2)(G^2 - 2TA_3)}. \quad (6.2.21)$$

Для траекторий вектора G , охватывающих ось Oz_3 ($2TA_2 > G^2 \geq 2TA_3$), нужно просто поменять местами A_1 и A_3 в формулах (6.2.20), (6.2.21).

Величина N зависит от моментов инерции спутника и от отношения G^2/T , которое определяет траекторию рис. 6 и в рассматриваемом приближении постоянно. При вращении спутника вокруг осей Oz_1 ($G^2 = 2TA_1$) и Oz_3 ($G^2 = 2TA_3$) из (6.2.20) получим соответственно

$$N = A_2 + A_3 - 2A_1 < 0, \quad N = A_2 + A_1 - 2A_3 > 0.$$

В случае динамической симметрии ($A_1 = A_2$) формулы (6.2.19) и (4.6.9) дают

$$\begin{aligned} N &= 6A_1 A_3 T G^{-2} - A_1 - 2A_3 = (A_1 - A_3)(2 - 3\sin^2 \theta), \\ \theta &= \text{const.} \end{aligned} \quad (6.2.22)$$

В рассматриваемом приближении относительное движение спутника складывается из движения Эйлера–Пуансо вокруг вектора кинетического момента \mathbf{G} (при постоянных G и T) и движения самого вектора \mathbf{G} в пространстве, описываемого уравнениями (6.2.17) для δ, λ . Изучим эти уравнения, взяв в качестве независимой переменной истинную аномалию ν .

Учитывая (5.1.19), (4.6.13), (6.2.17), запишем уравнения для δ , λ в виде

$$\begin{aligned}\frac{d\delta}{d\nu} &= \chi(1 + e \cos \nu) \sin \delta \sin(\lambda - \nu) \cos(\lambda - \nu), \\ \frac{d\lambda}{d\nu} &= \chi(1 + e \cos \nu) \cos \delta \cos^2(\lambda - \nu), \\ \chi &= \frac{3\omega_0 N}{2(1 - e^2)^{3/2} G}.\end{aligned}\quad (6.2.23)$$

Очевидно, что введенная безразмерная постоянная величина χ имеет порядок ε и постоянна в рассматриваемом приближении (в силу постоянства G , T и N).

В случае круговой орбиты ($e = 0$) уравнения (6.2.23) имеют первый интеграл

$$\cos \delta + \frac{1}{2}\chi \sin^2 \delta \cos^2(\lambda - \nu) = \text{const}$$

и их интегрирование сводится к квадратуре.

Проще, однако, для решения (6.2.23) вновь воспользоваться асимптотическими методами. Как указывалось выше, выведенные усредненные уравнения определяют величины δ , λ с погрешностью порядка ε^2 (или χ^2) на интервале $\Delta\nu \sim \varepsilon^{-1} \sim \chi^{-1}$. Поэтому достаточно решить с этой точностью уравнения (6.2.23), для чего нужно найти асимптотическое решение во втором приближении по χ .

Система (6.2.23) имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{d\delta}{d\nu} &= \chi X(\nu, \delta, \lambda), \\ \frac{d\lambda}{d\nu} &= \chi Y(\nu, \delta, \lambda), \quad |\chi| \ll 1,\end{aligned}$$

где X , Y — периодичны по ν с периодом 2π , и относятся к системам в стандартной форме [13]. Ее решение во втором приближении ищется в виде

$$\delta = \xi + \chi u(\nu, \xi, \eta), \quad \lambda = \eta + \chi w(\nu, \xi, \eta), \quad (6.2.24)$$

где u , w удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\nu} &= X(\nu, \xi, \eta) - M_\nu\{X(\nu, \xi, \eta)\}, \\ \frac{dw}{d\nu} &= Y(\nu, \xi, \eta) - M_\nu\{Y(\nu, \xi, \eta)\}, \\ M_\nu\{u(\nu, \xi, \eta)\} &= M_\nu\{w(\nu, \xi, \eta)\} = 0,\end{aligned}$$

причем M_ν означает усреднение по ν за период 2π . Функции ξ , η удовлетворяют системе второго приближения

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{d\nu} &= \chi M_\nu(X) + \chi^2 M_\nu\left(u \frac{dX}{d\xi} + w \frac{dX}{d\eta}\right), \\ \frac{d\eta}{d\nu} &= \chi M_\nu(Y) + \chi^2 M_\nu\left(u \frac{dY}{d\xi} + w \frac{dY}{d\eta}\right).\end{aligned}$$

Для системы (6.2.23) получим

$$M_\nu(X) = 0, \quad M_\nu(Y) = \frac{1}{2} \cos \xi,$$

$$u = \frac{\sin \xi}{12} [3 \cos(2\nu - 2\eta) + 3e \cos(\nu - 2\eta) + e \cos(3\nu - 2\eta)], \quad (6.2.25)$$

$$w = \frac{\cos \xi}{12} [3 \sin(2\nu - 2\eta) + 6e \sin \nu + 3e \sin(\nu - 2\eta) + e \sin(3\nu - 2\eta)],$$

а уравнения второго приближения примут вид

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{d\nu} &= \frac{1}{8}\chi^2 e^2 \sin \xi \cos \xi \sin 2\eta, \\ \frac{d\eta}{d\nu} &= \frac{1}{2}\chi \cos \xi + \frac{1}{16}\chi^2 (3 \cos^2 \xi - 1) \left(1 + \frac{2}{3}e^2 + e^2 \cos 2\eta\right).\end{aligned}\quad (6.2.26)$$

Разделив второе уравнение (6.2.26) на первое, получим линейное уравнение для $\cos 2\eta$ как функции ξ . Интегрируя его, найдем первый интеграл системы (6.2.26):

$$\sin^2 \xi \left[1 + \frac{1}{4}\chi \left(1 + \frac{2}{3}e^2 + e^2 \cos 2\eta\right) \cos \xi\right] = \text{const},$$

после чего интегрирование системы сводится к квадратуре.

Однако решение системы (6.2.26) с необходимой точностью (погрешность порядка χ^2 на интервале порядка χ^{-1}) может быть найдено с помощью следующего общего приема.

Пусть требуется найти решение системы второго приближения

$$\frac{dz}{dt} = \chi A_1(z) + \chi^2 A_2(z), \quad (6.2.27)$$

где z , A_1 , A_2 — вектор-функции, $\chi \ll 1$ — малый параметр, при начальном условии $z(0) = z_0$, причем погрешность решения не должна превышать по порядку χ^2 на интервале времени порядка χ^{-1} . Общее решение системы первого приближения

$$\frac{dz}{dt} = \chi A_1(z) \quad (6.2.28)$$

считаем известным и обозначим через $z_1(t)$ ее частное решение, удовлетворяющее условию $z_1(0) = z_0$. Поскольку правые части систем (6.2.27) и (6.2.28) отличаются на величины порядка χ^2 , то решения этих систем, совпадающие при $t = 0$, будут отличаться на величину порядка χ на интервале времени порядка χ^{-1} , то есть $z - z_1 = O(\chi)$. Учитывая эту оценку, можно переписать систему (6.2.27) в виде

$$\frac{dz}{dt} = \chi A_1(z) + \chi A_1'(z_1)(z - z_1) + \chi^2 A_2(z_1), \quad (6.2.29)$$

где опущены члены порядка χ^3 в правой части, что внесет в решение погрешность, не превышающую требуемого предела. Член $A_1'(z_1)(z - z_1)$ здесь обозначает произведение матрицы частных производных на вектор. Система (6.2.29) проще исходной (6.2.27), так как она линейна и ее решение может быть найдено методом вариации произвольных постоянных, если известно общее решение однородной системы. Но соответствующая системе (6.2.29) однородная система является системой в вариациях для уравнений первого приближения (6.2.28) и ее фундаментальная система решений получается дифференцированием общего решения системы (6.2.28) по начальным данным (см., например, [290]).

Таким образом, решение системы второго приближения с указанной точностью сводится к решению системы первого приближения и к квадратурам. Аналогичные упрощения имеют место и для систем высших приближений.

Возвращаясь к системе (6.2.26), найдем сначала, что решение системы первого приближения, удовлетворяющее произвольным начальным данным

$$\xi(0) = \xi_0, \quad \eta(0) = \eta_0, \quad (6.2.30)$$

имеет вид

$$\xi = \xi_0, \quad \eta = \eta_0 + \frac{1}{2}\chi\nu \cos \xi_0. \quad (6.2.31)$$

Упростим систему (6.2.26) с помощью (6.2.31) по схеме (6.2.29)

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\nu} &= \frac{1}{8}\chi^2 e^2 \sin \xi_0 \cos \xi_0 \sin(2\eta_0 + \chi\nu \cos \xi_0), \\ \frac{d\eta}{d\nu} &= \frac{1}{2}\chi \cos \xi_0 - \frac{1}{2}\chi(\xi - \xi_0) \sin \xi_0 + \\ &+ \frac{1}{16}\chi^2(3 \cos^2 \xi_0 - 1) \left[1 + \frac{2}{3}e^2 + e^2 \cos(2\eta_0 + \chi\nu \cos \xi_0) \right]. \end{aligned} \quad (6.2.32)$$

Решение системы (6.2.32), удовлетворяющее поставленным начальным условиям (6.2.30), находится двумя квадратурами и имеет вид

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + \frac{1}{8}\chi^2 e^2 \sin \xi_0 [\cos 2\eta_0 - \cos(2\eta_0 + \chi\nu \cos \xi_0)], \\ \eta &= \eta_0 + \frac{1}{2}\chi\nu \cos \xi_0 + \\ &+ \frac{1}{16}\chi^2 \nu \left[(3 \cos^2 \xi_0 - 1) \left(1 + \frac{2}{3}e^2 \right) - e^2 \sin^2 \xi_0 \cos 2\eta_0 \right] + \\ &+ \frac{1}{8}\chi e^2 \cos \xi_0 [\sin(2\eta_0 + \chi\nu \cos \xi_0) - \sin 2\eta_0]. \end{aligned} \quad (6.2.33)$$

Подставляя (6.2.25) и (6.2.33) в (6.2.24), получим искомые выражения для δ , λ (асимптотическое решение системы (6.2.23)) в виде

$$\begin{aligned} \delta &= \xi_0 + \frac{1}{24}\chi \sin \xi_0 \{ 6 \cos[(2 - \chi \cos \xi_0)\nu - 2\eta_0] + \\ &+ 6e \cos[(1 - \chi \cos \xi_0)\nu - 2\eta_0] + 2e \cos[(3 - \chi \cos \xi_0)\nu - 2\eta_0] + \\ &+ 3e^2 \cos 2\eta_0 - 3e^2 \cos(\chi\nu \cos \xi_0 + 2\eta_0) \}, \\ \lambda &= \eta_0 + \frac{1}{2}\chi\nu \cos \xi_0 + \\ &+ \frac{1}{16}\chi^2 \nu \left[(3 \cos^2 \xi_0 - 1) \left(1 + \frac{2}{3}e^2 \right) - e^2 \sin^2 \xi_0 \cos 2\eta_0 \right] + \\ &+ \frac{1}{24}\chi \cos \xi_0 \{ 6 \sin[(2 - \chi \cos \xi_0)\nu - 2\eta_0] + 12e \sin \nu + \\ &+ 6e \sin[(1 - \chi \cos \xi_0)\nu - 2\eta_0] + 2e \sin[(3 - \chi \cos \xi_0)\nu - 2\eta_0] + \\ &+ 3e^2 \sin(\chi\nu \cos \xi_0 + 2\eta_0) - 3e^2 \sin 2\eta_0 \}. \end{aligned} \quad (6.2.34)$$

Это решение отличается от точного на величины порядка χ^2 на интервале $\Delta\nu \sim \chi^{-1}$, а ξ_0 и η_0 — произвольные постоянные. Они связаны со значениями δ , λ при $\nu = 0$ (которые мы обозначим через δ_0 , λ_0) формулами, вытекающими из (6.2.34):

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \delta_0 - \frac{1}{24}\chi \sin \delta_0 (6 \cos 2\lambda_0 + 6e \cos 2\lambda_0 + 2e \cos 2\lambda_0) + O(\chi^2), \\ \eta_0 &= \lambda_0 + \frac{1}{24}\chi \cos \delta_0 (6 \sin 2\lambda_0 + 6e \sin 2\lambda_0 + 2e \sin 2\lambda_0) + O(\chi^2). \end{aligned}$$

Если же ограничиться точностью порядка χ , то решение (6.2.34) упрощается и примет вид

$$\delta = \xi_0, \quad \lambda = \eta_0 + \frac{1}{2}\chi\nu \cos \xi_0. \quad (6.2.35)$$

Это решение первого приближения описывает вращение вектора кинетического момента при постоянстве δ вокруг нормали к плоскости орбиты со скоростью, равной, согласно (6.2.23),

$$\dot{\lambda} = \frac{3\omega_0^2 N \cos \delta}{4G(1 - e^2)^{3/2}}. \quad (6.2.36)$$

В частности, при $A_1 = A_2$ и $e = 0$, используя выражение (6.2.22) для N , приходим к формуле, выведенной в [17].

Траектории следа вектора кинетического момента на единичной сфере, неподвижной в системе координат $Ox_1x_2x_3$, в первом приближении представляют собой окружности $\delta = \text{const}$. Во втором приближении появляются колебания углов δ и λ , причем при увеличении среднего значения δ (т. е. ξ_0) от 0 до $\pi/2$ амплитуда колебаний δ растет, а амплитуда колебаний λ , как и средняя угловая скорость вращения (6.2.36), убывает. Суммарная скорость $\dot{\lambda}$ при $\delta \neq \pi/2$ не меняет знака и обращается в нуль лишь в отдельных точках, где и $\dot{\delta} = 0$ (см. (6.2.23)). При $\delta \sim \pi/2$ изменения λ будут величинами второго порядка малости по сравнению с изменениями δ . Траектории вектора \mathbf{G} на единичной сфере, неподвижной относительно $Ox_1x_2x_3$, с учетом указанных свойств изображены на рис. 17, где принято $\chi > 0$ (при $\chi < 0$ изменится лишь направление движения вдоль этих траекторий, указанное стрелками).

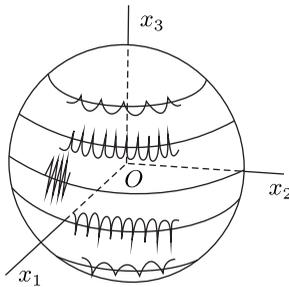


Рис. 17

На круговой орбите ($e = 0$) колебания δ и λ почти синусоидальны с угловой частотой, равной удвоенной угловой скорости орбитального движения, а кривые рис. 17 близки к циклоидам, подвергнутым сжатию или растяжению вдоль осей координат. В случае эллиптической орбиты колебания δ и λ усложняются: появляются первая и третья гармоники, а также существенная зависимость формы колебаний от начального данного η_0 , но основные свойства траекторий рис. 17 (в частности, наличие у них заострений, направленных к полюсам) сохраняются.

Области применимости асимптотических решений § 1 и § 2, очевидно, пересекаются: при $\omega \gg \omega_0$ (быстрое относительное движение) и близких A_1, A_2, A_3 результаты § 1 совпадают с первым приближением § 2.

§ 3. Резонансные явления при плоском движении спутника относительно центра масс

При движении спутника по орбите, достаточно удаленной от поверхности Земли, главное воздействие на него оказывают гравитационные силы и моменты. С большой степенью точности (с точностью до величин порядка квадрата линейных размеров спутника к размерам орбиты) можно считать, что движение вокруг центра инерции не влияет на движение самого центра инерции, который движется по кеплеровской орбите (эллипсу).

Момент гравитационных сил относительно центра масс, вызванный неоднородностью гравитационного поля, зависит как от ориентации спутника, так и от положения его на орбите.

Относительное равновесие и либрация спутника, движущегося на круговой орбите, были изучены В. В. Белецким [291]. Им также отмечена возможность резонанса при колебаниях спутника на эллиптической орбите.

Отметим, что полученные ниже решения являются первыми членами асимптотических разложений по малому параметру. Принципиально могут быть получены и следующие члены этих разложений. Амплитуда колебаний не предполагается малой. Применяемый метод позволит рассмотреть существенно нелинейные колебания и вращения спутника.

Рассмотрим плоское движение спутника относительно центра инерции, движущегося по эллиптической орбите в центральном гравитационном поле. Пусть главная центральная ось инерции спутника, момент инерции относительно которой равен A_2 , все время перпендикулярна плоскости орбиты. Моменты инерции относительно двух других главных центральных осей инерции обозначим через A_1, A_3 ($A_1 \geq A_3$).

С точностью до величин порядка отношения размеров спутника к размерам орбиты уравнение движения спутника относительно центра масс имеет вид [291]

$$(1 + e \cos \nu) \frac{d^2 \delta}{d\nu^2} - 2e \sin \nu \frac{d\delta}{d\nu} + 3a^2 \sin \delta = 4e \sin \nu. \quad (6.3.1)$$

Здесь $\delta = 2\theta$ — удвоенный угол между радиус-вектором центра масс и осью инерции, момент инерции относительно которой равен A_3 ; $a^2 = (A_1 - A_3)/A_2$; e — эксцентриситет орбиты; ν — угловое расстояние радиус-вектора от перигея орбиты (рис. 18). Отметим, что из известного неравенства для моментов инерции $A_1 \leq A_2 + A_3$ следует, что $a \leq 1$.

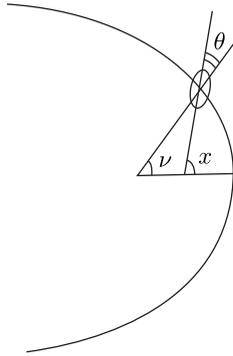


Рис. 18

Уравнение (6.3.1) представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, содержащее два числовых параметра a , e , лежащих в интервале $[0, 1]$. В случае круговой орбиты ($e = 0$) уравнение (6.3.1) сводится к уравнению движения маятника и интегрируется в эллиптических функциях. В случае $a = 0$ (спутник — тело динамической симметрии, $A_1 = A_3$, ось симметрии которого перпендикулярна плоскости орбиты) уравнение (6.3.1) интегрируется в элементарных функциях. Момент гравитационных сил при этом обращается в нуль, и движение спутника представляет собой равномерное вращение вокруг оси динамической симметрии.

Ниже, следуя работе [289], исследуются три случая, в которых построено асимптотическое решение:

- 1) $e \ll 1$ — орбита близка к круговой;

- 2) $a \ll 1$ — спутник близок к телу динамической симметрии;
- 3) $|d\delta/d\nu| \gg 1$ — угловая скорость вращения спутника много больше угловой скорости радиус-вектора его центра инерции.

Третий случай (быстрое вращение спутника), в отличие от первых двух, не является резонансным.

1. В случае малого e перепишем уравнение (6.3.1) в виде

$$\frac{d^2 \delta}{d\nu^2} + 3a^2 \sin \delta = e \left(4 \sin \nu + 2 \sin \nu \frac{d\delta}{d\nu} + 3a^2 \cos \nu \sin \delta \right) + O(e^2). \quad (6.3.2)$$

Рассмотрение этого пункта следует схеме работы [292].

Общее решение уравнения (6.3.2) при $e = 0$ описывает колебательные, вращательные или аperiодические движения и зависит от двух произвольных постоянных c , ν_0 , одна из которых — ν_0 — аддитивна к независимой переменной ν . Исключая из рассмотрения аperiодические движения и обозначая угловую частоту колебаний или вращений через $\omega(c)$, запишем известное общее решение уравнения (6.3.2) при $e = 0$ в форме

$$\delta = Q(\varphi, c), \quad (6.3.3)$$

$$\varphi = \omega(c)(\nu + \nu_0). \quad (6.3.4)$$

При любом c функция Q обладает свойством

$$Q(\varphi + 2\pi, c) = Q(\varphi, c) + \gamma, \quad (6.3.5)$$

причем в случае колебаний $\gamma = 0$, а в случае вращений $\gamma = 2\pi$. Частные производные Q по φ , c периодичны по фазе φ с периодом 2π . Подставляя (6.3.3), (6.3.4) в (6.3.2), найдем, что функция $Q(\varphi, c)$ удовлетворяет уравнению

$$\omega^2(c) \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} + 3a^2 \sin Q = 0 \quad (6.3.6)$$

тождественно по φ , c .

Введем еще интеграл действия для уравнения (6.3.2):

$$J(c) = \frac{\omega(c)}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_\varphi^2(\varphi, c) d\varphi. \quad (6.3.7)$$

Здесь индекс внизу обозначает частную производную.

Можно доказать [292], что производная от интеграла действия $J(c)$ в данном случае равна

$$J'(c) = \frac{\partial(Q, \omega Q_\varphi)}{\partial(\varphi, c)}, \quad (6.3.8)$$

причем последнее выражение не зависит от φ .

Решение уравнения (6.3.2) при $e \neq 0$ ищем в виде (6.3.3), полагая дополнительно

$$\frac{d\delta}{d\nu} = \omega Q_\varphi(\varphi, c). \quad (6.3.9)$$

После подстановки (6.3.3) в (6.3.2), (6.3.9) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для новых искомым функций φ, c . Разрешая эту систему относительно производных искомым функций и пользуясь тождествами (6.3.6), (6.3.8), получим

$$\begin{aligned} \frac{dc}{d\nu} &= \frac{e}{J'(c)} F(\theta, \varphi, c) Q_\varphi(\varphi, c), \\ \frac{d\varphi}{d\nu} &= \omega(c) - \frac{e}{J'(c)} F(\theta, \varphi, c) Q_c(\varphi, c). \end{aligned} \quad (6.3.10)$$

Здесь через F обозначен множитель при e в правой части уравнения (6.3.2), в который вместо δ и $d\delta/d\nu$ подставлены их выражения согласно (6.3.3), (6.3.9). Членами $O(e^2)$ в уравнении (6.3.2) пренебрегаем.

Правые части уравнений (6.3.10) периодичны по φ и ν с периодом 2π ; c — медленно меняющаяся величина.

Рассмотрим сначала нерезонансный случай: частота $\omega(c)$ не близка к 1 (или к другому рациональному числу r/s , где r, s — небольшие взаимно простые числа). В этом случае, чтобы получить решение в первом приближении, нужно усреднить правые части системы (6.3.10) по ν и φ как по независимым переменным. Однако легко видеть, что усреднение F по ν даст нуль (см. уравнение (6.3.2)). Следовательно, в нерезонансном случае возмущающий момент, вызванный эллиптичностью орбиты, в первом приближении не меняет амплитуды c и частоты $\omega(c)$.

Наибольший интерес представляет резонансный случай: $\omega(c)$ близко к r/s (r, s — взаимно простые натуральные числа), точнее

$$\omega(c) - \frac{r}{s} = O(e). \quad (6.3.11)$$

Введем новую переменную α (сдвиг фазы) соотношением

$$\varphi = \frac{r}{s}(\nu + \alpha). \quad (6.3.12)$$

Из (6.3.10), (6.3.12) при соблюдении условия (6.3.11) следует, что α — медленно меняющаяся переменная: $d\alpha/d\nu = O(e)$. Разрешим уравнения (6.3.10) относительно производных c и α с помощью (6.3.12) и усредним их правые части, считая c и α постоянными, по периоду быстрого движения, который равен $2\pi s$ по переменной ν (или $2\pi r$ по переменной φ).

Обозначим через c_0 то значение c , при котором происходит точный резонанс

$$\omega(c_0) = \frac{r}{s}. \quad (6.3.13)$$

Тогда условие (6.3.11) равносильно условию $c - c_0 = O(e)$ (в существенно нелинейной системе $\omega' \neq 0$ всюду, кроме, может быть, отдельных точек). Поэтому, не уменьшая порядка точности по e , усредненную систему можно записать в следующем виде (промежуток интегрирования может быть заменен другим длины $2\pi r$):

$$\begin{aligned} \frac{dc}{d\nu} &= \frac{e}{2\pi r J'(c_0)} \int_0^{2\pi r} F\left(\frac{s\varphi}{r} - \alpha, \varphi, c_0\right) Q_\varphi(\varphi, c_0) d\varphi, \\ \frac{d\alpha}{d\nu} &= \frac{s}{r} \omega'(c_0)(c - c_0) - \frac{cs}{2\pi r^2 J'(c_0)} \int_0^{2\pi r} F\left(\frac{s\varphi}{r} - \alpha, \varphi, c_0\right) Q_c(\varphi, c_0) d\varphi. \end{aligned} \quad (6.3.14)$$

Решение усредненной системы, как обычно, будет отличаться от решения точного уравнения на величину порядка e на интервале изменения аргумента порядка $1/e$, если на этом интервале выполнено условие $c - c_0 = O(e)$. Выполнение этого условия можно проверять исходя из решения усредненной системы.

Переходя к отысканию в явном виде функций, входящих в (6.3.14), запишем общее решение уравнения (6.3.2) при $e = 0$ (см. [266, 292]):

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 2 \arcsin \left\{ k_1 \operatorname{sn} \left[\sqrt{3}a(\nu + \nu_0), k_1 \right] \right\}, \quad 0 \leq k_1 \leq 1, \\ \delta_2 &= 2 \operatorname{am} \left[\frac{\sqrt{3}a}{k_2}(\nu + \nu_0), k_2 \right], \quad 0 \leq k_2 \leq 1. \end{aligned} \quad (6.3.15)$$

Индекс 1 относится к колебательным ($|\delta_1| \leq \pi$), индекс 2 — к вращательным движениям (когда δ_2 монотонно возрастает), а роль постоянной c

играют модули эллиптических функций k_1, k_2 . При $k_1 = k_2 = 1$ оба решения (6.3.15) совпадают и описывают аperiodическое движение. Частоты колебаний и вращений равны соответственно (см. [266, 292])

$$\omega_1(k_1) = \frac{\pi\sqrt{3}a}{2K(k_1)}, \quad \omega_2(k_2) = \frac{\pi\sqrt{3}a}{k_2 K(k_2)}, \quad (6.3.16)$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

Выпишем функцию Q из равенства (6.3.3):

$$Q_1(\varphi, k_1) = 2 \arcsin \left\{ k_1 \operatorname{sn} \left[\frac{2K(k_1)}{\pi} \varphi, k_1 \right] \right\}, \quad (6.3.17)$$

$$Q_2(\varphi, k_2) = 2 \operatorname{am} \left[\frac{K(k_2)}{\pi} \varphi, k_2 \right].$$

Вычислим их производные по фазе φ по правилам дифференцирования эллиптических функций:

$$Q_{1\varphi}(\varphi, k_1) = \frac{4k_1 K(k_1)}{\pi} \operatorname{cn} \left[\frac{2K(k_1)}{\pi} \varphi, k_1 \right], \quad (6.3.18)$$

$$Q_{2\varphi}(\varphi, k_2) = \frac{2K(k_2)}{\pi} \operatorname{dn} \left[\frac{K(k_2)}{\pi} \varphi, k_2 \right].$$

Найдем функции ω', J' , входящие в систему (6.3.14), для чего воспользуемся соотношениями (6.3.8), (6.3.16)–(6.3.18) и формулами для производных полных эллиптических интегралов по модулю (см. [266]). После некоторых преобразований при помощи свойств эллиптических функций получим

$$\omega'_1(k_1) = -\frac{\pi a \sqrt{3} [E_1 - (1 - k_1^2) K_1]}{2k_1 (1 - k_1^2) K_1^2},$$

$$\omega'_2(k_2) = -\frac{\pi a \sqrt{3} E_2}{k_2^2 (1 - k_2^2) K_2^2}, \quad (6.3.19)$$

$$J'_1(k_1) = \frac{8a\sqrt{3}}{\pi} k_1 K_1, \quad J'_2(k_2) = -\frac{4a\sqrt{3} K_2}{\pi k_2^2},$$

$$K_i = K(k_i), \quad E_i = E(k_i), \quad i = 1, 2,$$

где $E(k)$ — полный эллиптический интеграл второго рода.

Интегралы, входящие в (6.3.14), после простых преобразований и интегрирования по частям с учетом четности и периодичности подынтегральных функций могут быть приведены к виду

$$\int_{-\pi r}^{\pi r} \cos \frac{s\varphi}{r} \Phi(\varphi) d\varphi,$$

где $\Phi(\varphi)$ — некоторая четная функция φ . Разлагая ее в ряд Фурье по косинусам и полагая $\varphi = r\beta$, получим под интегралом сумму выражений вида $a_n \cos s\beta \cos nr\beta$ (n — целое). Поэтому весь интеграл отличен от нуля, если только $s = nr$ при некотором целом n .

Так как s, r — взаимно простые натуральные числа, то это возможно лишь при $r = 1$. Значит, если $r \neq 1$, то резонансные члены в уравнениях (6.3.14) отсутствуют (это связано с тем, что возмущающая сила F является чисто синусоидальной функцией ν). Ниже рассматривается лишь случай $r = 1$.

Итак, после указанных преобразований с использованием первого интеграла уравнения (6.3.6), то есть выражения $\omega^2 Q_\varphi^2 - 6a^2 \cos Q = \text{const}$, система (6.3.14) запишется в виде

$$\frac{dc}{d\nu} = \frac{e \sin \alpha}{J'(c_0)} M_s(c_0), \quad (6.3.20)$$

$$\frac{d\alpha}{d\nu} = s\omega'(c_0)(c - c_0) - \frac{e \cos \alpha}{J'(c_0)} N_s(c_0),$$

где введены обозначения

$$M_s(c) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \cos s\varphi \left[8Q_\varphi(\varphi, c) + \frac{3}{s} Q_\varphi^2(\varphi, c) \right] d\varphi, \quad (6.3.21)$$

$$N_s(c) = -\frac{\partial M_s}{\partial c} + \frac{\omega'(c)}{\pi} \int_0^\pi \cos s\varphi Q_\varphi^2(\varphi, c) d\varphi.$$

Интегралы в формулах (6.3.21) можно вычислить при помощи известных разложений эллиптических функций в ряды Фурье [266]. Приведем результат в случае главного резонанса $s = 1$; второй индекс $i = 1, 2$ у M_{si}, N_{si}

относится соответственно к колебаниям и вращениям:

$$\begin{aligned}
 M_{11}(k_1) &= -\frac{16\sqrt{q_1}}{1+q_1}, & N_{11}(k_1) &= \frac{4\pi^2\sqrt{q_1}(1-q_1)}{k_1(1-k_1^2)K_1^2(1+q_1)^2}, \\
 M_{12}(k_2) &= -\frac{14q_2}{1+q_2^2} - 12\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_2^{2n+1}}{(1+q_2^{2n})(1+q_2^{2n+2})}, \\
 N_{12} &= \frac{4\pi^2q_2}{k_2(1-k_2^2)K_2^2} \left\{ \frac{3(1-q_2^2)}{(1+q_2^2)^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_2^{2n}[3q_2^{2n}(1-q_2^2) + (2n+1)(1-q_2^{4n+2})]}{(1+q_2^{2n})^2(1+q_2^{2n+2})^2} \right\}, \\
 q_i &= q(k_i) = \exp \left[-\frac{\pi K(\sqrt{1-k_i^2})}{K(k_i)} \right], \quad i = 1, 2.
 \end{aligned} \tag{6.3.22}$$

Численные расчеты могут быть сделаны при помощи имеющихся таблиц полных эллиптических интегралов K , E и функции q [267].

Переходим к анализу усредненной системы (6.3.20). Стационарные резонансные режимы (α_*, c_*) соответствуют особым точкам системы и определяются путем приравнивания нулю ее правых частей:

$$\alpha_* = m\pi, \quad c_* - c_0 = \frac{e(-1)^m N_s(c_0)}{s\omega'(c_0)J'(c_0)}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{6.3.23}$$

При фиксированных натуральных s и $a \in [0, 1]$ из (6.3.13) находим c_0 (полагаем $r = 1$); график зависимости $c_0(a)$ назовем скелетной кривой. После этого из (6.3.23) определяются два различных стационарных значения амплитуды c_* ; кривую $c_*(a)$ называют резонансной. Из (6.3.23) видно, что резонансная кривая распадается на две ветви, лежащие по разные стороны от скелетной кривой и приближающиеся к ней при $e \rightarrow 0$. Выше в качестве c рассматривались модули эллиптических функций k_1 ; теперь удобнее ввести переменную Ω , положив $\Omega = k_1$ в области колебаний, $\Omega = k_2^{-1}$ — в области вращений. Тогда в плоскости (a, Ω) область $\Omega < 1$ соответствует колебаниям, $\Omega > 1$ — вращениям.

Скелетная кривая состоит из двух ветвей, имеющих асимптоты $a = 0$ и $\Omega = 1$; при $a = 1/(s\sqrt{3})$ ветвь, соответствующая колебаниям, пересекает под прямым углом ось a . Качественный ход скелетных и резонансных кривых в случае главного резонанса ($s = 1$) изображен на рис. 19.

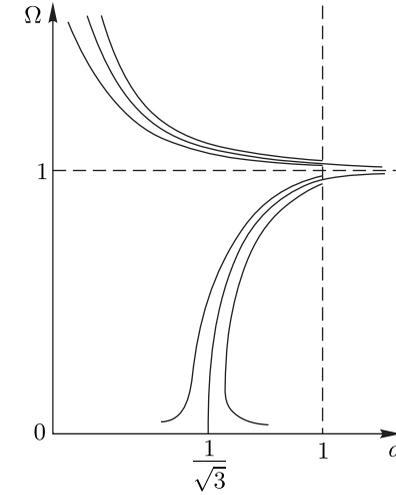


Рис. 19

При $s \neq 1$ скелетные кривые получаются из кривой рис. 19 сжатием по оси a в s раз; резонансные кривые в случае $s \neq 1$ касаются скелетной при $\Omega \rightarrow 0$, а в остальном их вид остается тем же.

Поведение резонансных кривых для колебаний при главном резонансе вблизи точки $a = 1/\sqrt{3}$, $\Omega = 0$ определяется формулой

$$3a^2 - 1 = \frac{1}{2}\Omega^2 \pm 2e\Omega^{-1},$$

причем Ω здесь имеет смысл амплитуды колебаний угла $\theta = \delta/2$. Резонансные режимы, соответствующие верхнему знаку этой формулы (правая ветвь кривой рис. 19), существуют лишь при условии

$$3a^2 - 1 \geq \frac{3}{2}(2e)^{3/2}.$$

Для исследования нестационарных резонансных режимов нужно интегрировать усредненную систему (6.3.20) при различных начальных данных. Легко найти первый интеграл этой системы, после него нахождение ее общего решения сведется к квадратуре. Разделим второе уравнение (6.3.20) на первое; получится линейное уравнение относительно $\cos \alpha$ как функ-

ции c (c_0 рассматривается как параметр). Первый интеграл имеет вид

$$\cos \alpha = \frac{s\omega'(c_0)J'(c_0)M_s(c_0)}{eN_s^2(c_0)} \left[1 + \frac{N_s(c_0)}{M_s(c_0)}(c - c_0) \right] + \text{const} \cdot \exp \left[\frac{N_s(c_0)}{M_s(c_0)}(c - c_0) \right]. \quad (6.3.24)$$

Характер особых точек (α_*, c_*) из (6.3.23) можно установить, пользуясь (6.3.24). Проще линеаризовать систему (6.3.20) в окрестности особой точки (α_*, c_*) :

$$\begin{aligned} \frac{d(c - c_*)}{d\nu} &= \frac{eM_s(c_0)}{J'(c_0)}(-1)^m(\alpha - \alpha_*), \\ \frac{d(\alpha - \alpha_*)}{d\nu} &= s\omega'(c_0)(c - c_*). \end{aligned} \quad (6.3.25)$$

Составим характеристическое уравнение системы (6.3.25):

$$\lambda^2 = \frac{seM_s(c_0)(-1)^m\omega'(c_0)}{J'(c_0)}. \quad (6.3.26)$$

Отсюда сразу видно, что в случае колебаний особые точки с четным m ($\Omega < \Omega_0$, нижняя часть резонансной кривой) являются седлами (неустойчивый режим), а точки с нечетными m ($\Omega > \Omega_0$, верхняя часть резонансной кривой) — центрами (устойчивый режим). Здесь $\Omega_0(a)$ соответствует скелетной кривой. В случае вращений неустойчивым режимам (седло) соответствует верхняя часть резонансной кривой (m нечетно, $\Omega > \Omega_0$), а устойчивым (центр) — нижняя (m четно, $\Omega < \Omega_0$). Кроме того, из (6.3.26) следует, что частота колебаний вокруг центра и показатель экспоненциального роста решения вблизи седла имеют порядок \sqrt{e} ($|\lambda| \sim \sqrt{e}$). Фазовая плоскость α, c периодична по α с периодом 2π .

Таким образом, в случае малого e найдены стационарные резонансные режимы колебаний и вращений спутника и исследована их устойчивость.

2. Обратимся к случаю $a \ll 1$ (спутник близок к телу динамической симметрии); эксцентриситет орбиты произволен $0 \leq e < 1$.

Удобно сделать замену независимой переменной и искомой функции в уравнении (6.3.1). В качестве независимой переменной возьмем время τ ,

отсчитанное от перигея и отнесенное к периоду обращения спутника, деленному на 2π :

$$\tau = 2 \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\nu}{2} - \frac{e\sqrt{1-e^2} \sin \nu}{1+e \cos \nu}, \quad \tau(\nu + 2\pi) = \tau(\nu) + 2\pi. \quad (6.3.27)$$

В качестве новой искомой функции возьмем угол x между главной центральной осью инерции (момент инерции относительно которой равен A_3) и радиус-вектором перигея (рис. 18):

$$x = \theta + \nu = \nu + \frac{\delta}{2}. \quad (6.3.28)$$

После замены переменных уравнение движения примет вид

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{3a^2}{2} \frac{(1+e \cos \nu)^3}{(1-e^2)^3} \sin 2(x - \nu) = 0, \quad (6.3.29)$$

где ν рассматривается как функция τ , определенная равенством (6.3.27).

Из уравнения (6.3.29) видно, что тело динамической симметрии ($a = 0$) совершает равномерное вращение вокруг центра симметрии ($x = C_1\tau + C_2$). При малом a движение спутника будет близко к равномерному вращению.

Заменим уравнение (6.3.29) эквивалентной ему системой

$$\frac{dx}{d\tau} = y, \quad \frac{dy}{d\tau} = -\frac{3a^2}{2} \frac{(1+e \cos \nu)^3}{(1-e^2)^3} \sin 2(x - \nu) \quad (6.3.30)$$

и будем искать ее решение в виде

$$x = \Omega\tau + \varphi, \quad y = \Omega + az, \quad (6.3.31)$$

где Ω — постоянная, а φ, z — новые искомые функции, вводимые вместо x, y . Подстановка (6.3.31) в (6.3.30) приводит к системе

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = az, \quad \frac{dz}{d\tau} = -\frac{3a}{2} \frac{(1+e \cos \nu)^3}{(1-e^2)^3} \sin 2(\Omega\tau + \varphi - \nu). \quad (6.3.32)$$

Так как в правых частях уравнений (6.3.32) стоит малый параметр a , то φ и z — медленно меняющиеся переменные. Поэтому в первом приближении можно усреднить по τ правые части уравнений (6.3.32), считая φ и z постоянными. Правая часть второго уравнения (6.3.32) имеет вид

$$f(\tau) = f_1(\tau) \sin 2\Omega\tau + f_2(\tau) \cos 2\Omega\tau, \quad (6.3.33)$$

где f_1, f_2 — периодические функции τ периода 2π . Разложим их в ряды Фурье. Эти ряды сходятся абсолютно и равномерно в силу непрерывной дифференцируемости $f_1(\tau), f_2(\tau)$ [293]. Подставим полученные ряды в (6.3.33) и проинтегрируем $f(\tau)$ по τ от τ_0 до T . Если 2Ω — не целое число, то ряд, полученный в результате интегрирования, будет содержать лишь тригонометрические функции T и поэтому будет ограничен при $T \rightarrow \infty$ (его абсолютная сходимость следует из абсолютной сходимости рядов Фурье для $f_1(\tau), f_2(\tau)$). Тогда имеем для усредненного значения

$$M_\tau\{f\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\tau_0}^T f(\tau) d\tau = 0,$$

откуда в первом приближении следует $z = \text{const}$, $x = C_1\tau + C_2$. В этом случае гравитационный возмущающий момент не оказывает влияния на равномерное движение спутника в первом приближении.

Рассмотрим более интересный случай $2\Omega = m$, где m — целое число (при $m = 2$ имеем главный резонанс: период вращения спутника близок к периоду обращения его по орбите). Правая часть второго уравнения (6.3.32) при этом периодична по τ с периодом 2π , и усреднение нужно проводить по этому периоду. После усреднения система (6.3.32) примет вид

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = az, \quad \frac{dz}{d\tau} = -\frac{3a}{2}\Phi_m(e) \sin 2\varphi, \quad (6.3.34)$$

где введено обозначение

$$\Phi_m(e) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 + e \cos \nu)^3}{(1 - e^2)^3} \cos(m\tau - 2\nu) d\nu. \quad (6.3.35)$$

Из системы (6.3.34) для φ получим уравнение

$$\frac{d^2(2\varphi)}{d\tau^2} + 3a^2\Phi_m(e) \sin 2\varphi = 0, \quad (6.3.36)$$

совпадающее с уравнением движения маятника. Его решение хорошо известно и выражается в эллиптических функциях (см. решение (6.3.15) уравнения (6.3.2) при $e = 0$).

Асимптотическое решение уравнения (6.3.29) определяется первой из формул (6.3.31), в которую нужно подставить $\Omega = m/2$ и φ из решения

уравнения (6.3.36). Оно описывает вращение с угловой скоростью Ω , на которое накладываются медленные вращения или колебания. Это асимптотическое решение справедливо с точностью до величин порядка a на интервале времени порядка $1/a$ (много больше периода обращения спутника).

Положениями равновесия для уравнения (6.3.36) являются точки $\varphi = \frac{n\pi}{2}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Они соответствуют, как видно из связи между x и φ (6.3.31), вращению с постоянной угловой скоростью. Отметим, что в момент прохождения через перигей ($\tau = 2k\pi$) значение φ равно углу между главной осью инерции с моментом A_3 и радиус-вектором перигея.

Таким образом, вращение спутника с постоянной угловой скоростью $\Omega = m/2$ возможно лишь при условии, что в перигее одна из главных центральных осей инерции, лежащих в плоскости орбиты, будет направлена по радиус-вектору.

Устойчивость положений равновесия зависит от знака $\Phi_m(e)$. Если $\Phi_m(e) > 0$, то положения $\varphi = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) устойчивы, а остальные положения равновесия неустойчивы. При $\Phi_m(e) < 0$, наоборот, положения $\varphi = n\pi$ неустойчивы, а остальные устойчивы. Следовательно, в случае $\Phi_m(e) > 0$ при устойчивом стационарном вращении ось наименьшего момента инерции A_3 , лежащая в плоскости орбиты, в перигее направлена по радиус-вектору, а в случае $\Phi_m(e) < 0$ — по касательной к орбите (при $\nu = 0$ имеем $\theta = 0$ или $\theta = \pi/2$ соответственно; см. рис. 18). Частота малых колебаний относительно устойчивого режима вращения равна $a\sqrt{3|\Phi_m(e)|}$.

Обратимся к исследованию функции $\Phi_m(e)$, знак которой определяет устойчивость режимов вращения.

Взяв ν в качестве переменной интегрирования в (6.3.35), получим

$$\Phi_m(e) = \frac{1}{\pi(1 - e^2)^{3/2}} \int_0^\pi (1 + e \cos \nu) \cos[m\tau(\nu) - 2\nu] d\nu, \quad (6.3.37)$$

где $\tau(\nu)$ определено формулой (6.3.27). Разлагая подынтегральное выражение по степеням e (при малых e), найдем

$$\begin{aligned} \Phi_1(e) &= -\frac{1}{2}e + O(e^2), & \Phi_2(e) &= 1 - \frac{5}{2}e^2 + O(e^2), \\ \Phi_3(e) &= \frac{7}{2}e + O(e^2), & \Phi_4(e) &= \frac{17}{2}e^2 + O(e^2), \\ \Phi_m(e) &= O(e^2), & m &\neq 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (6.3.38)$$

Кроме того, $\Phi_0(e) \equiv 0$. Из формул (6.3.38) следует, что для орбит, близких к круговым, наиболее существен главный резонанс ($m = 2$); в остальных случаях вращение спутника будет почти равномерным, так как $\Phi_m(e)$ мало. В случае круговой орбиты и $m = 2$ ($e = 0$, $\nu = \tau$, $\varphi = \theta = \delta/2$) усредненное уравнение (6.3.36) совпадает с точным уравнением относительного движения (например, с (6.3.1) при $e = 0$).

Функция $\Phi_2(e)$ была подсчитана численно для различных $e \in [0, 1]$. Оказалось, что она монотонно убывает и проходит через нуль при $e_0 \approx 0,682$ (см. рис. 20). Таким образом, стационарный режим вращения спутника с периодом вращения, равным периоду обращения его по орбите, устойчив, если в перигее ось наименьшего момента инерции направлена:

при $e < e_0$ — по радиус-вектору;

при $e > e_0$ — по касательной к орбите.

Отметим, что для случая круговой орбиты и орбиты, близкой к круговой, этот результат совпадает с известным [291].

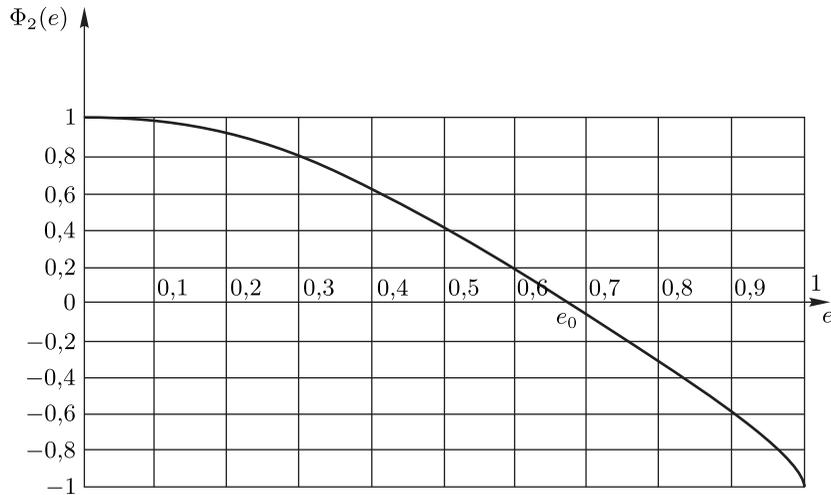


Рис. 20

В работах [294, 295] изложены результаты изучения периодических и обобщенно периодических решений уравнения (6.3.1), описывающего плоские колебания и вращения спутника вокруг центра масс, движущегося по эллиптической орбите.

3. Рассмотрим случай быстрого вращения спутника в плоскости орбиты: период вращения много меньше периода обращения спутника по орбите, e и a произвольны. Будем исходить из уравнения (6.3.29), которое для краткости запишем в виде

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + g(x, \tau) = 0. \quad (6.3.39)$$

Функция $g(x, \tau)$ периодична по x с периодом π и имеет среднее значение за период, равное нулю, при любом τ .

Введем обозначения

$$G_1(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \int_0^\xi g(\eta, \tau) d\eta d\xi, \quad (6.3.40)$$

$$G_2(\lambda, \tau) = \int_0^\lambda \int_0^\xi g(\eta, \tau) d\eta d\xi.$$

Тогда асимптотическое представление общего решения уравнения (6.3.39) для быстрых вращений можно представить в виде [296]

$$x = \Omega(\tau + \tau_0) + \frac{1}{\Omega^2} \{ \Omega(\tau + \tau_0) G_1(\tau) - G_2[\Omega(\tau + \tau_0), \tau] \} + O\left(\frac{1}{\Omega^3}\right). \quad (6.3.41)$$

Здесь Ω и τ_0 — произвольные постоянные ($\Omega \gg 1$) и разложение (6.3.41) справедливо на интервале $\Delta\tau \sim 1$ (на интервале времени порядка периода вращения спутника по орбите).

Вычисляя интегралы G_1 и G_2 из (6.3.40) (функция $g(x, \tau)$ определяется уравнением (6.3.29)), получим окончательно

$$x = \Omega(\tau + \tau_0) + \frac{3a^2(1 + e \cos \nu)^3}{8\Omega^2(1 - e^2)^3} \{ \sin 2[\Omega(\tau + \tau_0) - \nu] - \sin 2\nu \} + O\left(\frac{1}{\Omega^3}\right). \quad (6.3.42)$$

Связь между ν и τ по-прежнему задается соотношением (6.3.27).

Асимптотическое решение (6.3.42) состоит из трех слагаемых. Первое из них описывает быстрое вращение с частотой $\Omega \gg 1$, третье (второй член в фигурных скобках) — медленные колебания частоты 1, а второе (первый член в фигурных скобках) — быстропериодические колебания частоты 2Ω , амплитуда и фаза которых медленно меняются с частотами 1 и 2 соответственно. Амплитуда быстропериодических колебаний принимает наибольшее значение в перигее ($\theta = 0$), а наименьшее — в апогее орбиты, и отношение наибольшей амплитуды к наименьшей равно $(1 + e)^3(1 - e)^{-3}$.

ГЛАВА 7

Движение твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью

В этой главе рассмотрены движения относительно центра масс твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью. Предполагается, что вязкость жидкости достаточно велика, так что соответствующее число Рейнольдса является малым. Момент сил, действующих на тело со стороны вязкой жидкости в полости, определен по методике, развитой в работах [113, 121, 122] и изложенной в § 3 главы 5.

В § 1 данной главы приводятся и обсуждаются общие уравнения движения твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса. В § 2 рассмотрено плоское движение маятника, содержащего вязкую жидкость в полости. В § 3 исследуется свободное пространственное движение тела с полостью, содержащей вязкую жидкость. § 4 посвящен движению твердого тела, содержащего один или несколько демпферов, то есть тел, расположенных внутри несущего тела и взаимодействующих с ним посредством сил вязкого трения. Эти силы порождаются смазочным слоем, который находится в узком слое между несущим телом и демпферами. Оказывается, что подобные механические системы при определенных допущениях описываются уравнениями, аналогичными уравнениям для тела с вязкой жидкостью в полости. В § 5 изучается устойчивость движения твердого тела с демпферами.

§ 1. Уравнения движения тела с вязкой жидкостью в полости

Уравнения движения тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью при малых числах Рейнольдса, имеют вид (5.3.7). Все обозначения в этой системе подробно описаны в § 3 главы 5. Система (5.3.7) может исследоваться и решаться обычными аналитическими и численными методами

теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Она содержит малый параметр ν^{-1} , где $\nu = \frac{1}{R}$ — безразмерная вязкость, обратная числу Рейнольдса, $\nu \gg 1$. Для решения системы (5.3.7) может быть применен метод усреднения, причем достаточно ограничиться первым приближением, обеспечивающим точность порядка ν^{-1} на интервале времени порядка ν .

Отметим одну особенность системы (5.3.7). Возмущающий момент \mathbf{m} , обусловленный влиянием вязкой жидкости, зависит также от момента L .

Подсчитаем, исходя из уравнений (5.3.7), мощность момента \mathbf{m} :

$$\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega} = \rho\nu^{-1}[(\mathbf{P} \cdot \mathbf{b}) \cdot \boldsymbol{\omega}].$$

Из равенств (5.3.5)–(5.3.7) следуют равенства

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{a} + O(\nu^{-1}), \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{b} + O(\nu^{-1}),$$

с помощью которых формула для $\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}$ с точностью до членов порядка ν^{-2} преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega} &= \rho\nu^{-1} \left\{ \frac{d}{dt} [(\mathbf{P} \cdot \mathbf{b}) \cdot \boldsymbol{\omega}] - (\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \right\} = \\ &= \rho\nu^{-1} \left\{ \frac{d}{dt} [(\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}) \cdot \boldsymbol{\omega}] - (\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} \right\}. \end{aligned} \quad (7.1.1)$$

Так как квадратичная форма $(\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a}$ положительно-определенна, то второе слагаемое в формуле (7.1.1) всегда отрицательно и соответствует диссипации энергии за счет вязкости. Первое слагаемое может иметь любой знак и связано с передачей кинетической энергии от тела к жидкости и обратно. Пусть невозмущенное движение, т. е. движение тела с затвердевшей жидкостью, периодически (представляет собой колебания или вращения). Тогда векторы $\boldsymbol{\omega}$, \mathbf{L} , \mathbf{a} периодичны в невозмущенном движении и среднее значение за период первого слагаемого равенства (5.3.8) равно нулю.

Рассмотрим важный частный случай, когда невозмущенная система (система при условии затвердения жидкости, т. е. при $\nu = \infty$, $\mathbf{m} = 0$) консервативна. Тогда полная энергия невозмущенной системы

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{\omega} + \Pi(h), \quad (7.1.2)$$

где Π — потенциальная энергия, сохраняется. При $\mathbf{m} \neq 0$ справедливо уравнение $\frac{dH}{dt} = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}$, причем в случае возмущенного движения функция H

из (7.1.2) уже не является полной энергией системы (H — энергия при условии затвердения жидкости). Пусть в невозмущенном движении система совершает периодическое движение (колебания или вращения) и $\boldsymbol{\omega}$, \mathbf{L} , \mathbf{a} периодичны. В возмущенном движении H будет медленно меняющейся переменной, и, согласно методу усреднения, в первом приближении можно усреднить скорость изменения H по периоду невозмущенного движения. Усреднение равенства (7.1.2) даст

$$\frac{dH}{dt} = M_t \{ \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega} \} = -\rho\nu^{-1} M_t \{ (\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} \} < 0. \quad (7.1.3)$$

Здесь M_t — операция усреднения за период вдоль движений невозмущенной системы, причем функция H и другие первые интегралы невозмущенной системы считаются при усреднении постоянными. Уравнение (7.1.3) получено в первом приближении метода усреднения и имеет точность порядка ν^{-1} на интервале времени порядка ν . Соотношение (7.1.3) показывает диссипативный характер влияния вязкой жидкости в полости на динамику твердого тела.

Полученная система (5.3.7) может использоваться для исследования различных случаев движения тел с жидкостью. Ниже рассматриваются некоторые конкретные задачи.

§ 2. Плоское движение маятника с вязкой жидкостью

Рассмотрим плоское движение тела с полостью, наполненной вязкой жидкостью, вокруг неподвижной оси. Пусть ось O_1y_3 — ось неподвижной системы координат $O_1y_1y_2y_3$, вокруг которой вращается тело. Систему $Ox_1x_2x_3$, связанную с телом, выберем так, чтобы ось Ox_3 была параллельна оси вращения O_1y_3 . В качестве единственной переменной y возьмем угол φ поворота тела вокруг оси, отсчитанной от неподвижного направления. Обозначим через J момент инерции тела с жидкостью вокруг оси вращения O_1y_3 , а через $P = P_{33} > 0$ — компоненту тензора \mathbf{P} , соответствующую оси Ox_3 . Векторные уравнения (5.3.7) в этом случае приводятся к скалярному уравнению второго порядка:

$$J\ddot{\varphi} - L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{\rho P}{\nu J} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \frac{L}{J} + \frac{\partial L}{\partial \varphi} \dot{\varphi} \right). \quad (7.2.1)$$

Здесь $L(\varphi, \dot{\varphi})$ — заданный момент внешних сил относительно оси O_1y_3 , точка означает производную по времени. Если невозмущенная

система консервативна (L не зависит от $\dot{\varphi}$), то уравнение (7.2.1), равенство (7.1.2), а также усредненное уравнение (7.1.3) преобразуются к виду

$$J\ddot{\varphi} - L(\varphi) = \frac{\rho P}{\nu J} \frac{dL}{d\varphi} \dot{\varphi},$$

$$H = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 + \Pi(\varphi), \quad \Pi(\varphi) = - \int_{\varphi_0}^{\varphi} L(\varphi) d\varphi, \quad (7.2.2)$$

$$\dot{H} = - \frac{\rho P}{\nu J^2} M_t \{L^2(\varphi)\} < 0.$$

Здесь $\Pi(\varphi)$ — потенциальная энергия. Пусть система находится в однородном поле тяжести, т. е. представляет собой физический маятник с вязкой жидкостью, причем φ — угол отклонения маятника от нижнего положения равновесия. Тогда равенства (7.2.2) дадут

$$L = -G_0 l_0 \sin \varphi, \quad H = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 - G_0 l_0 (1 + \cos \varphi),$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{G_0 l_0}{J} \sin \varphi = - \frac{\rho P G_0 l_0}{\nu J^2} \cos \varphi \dot{\varphi}. \quad (7.2.3)$$

Здесь G_0 — вес системы; l_0 — расстояние от оси подвеса до центра инерции системы. Произвольная постоянная энергии выбрана так, что $\Pi = 0$ в верхнем положении равновесия. Тогда при $0 > H > -2G_0 l_0$ невозмущенная система (т. е. система при $\nu = \infty$) совершает колебания, при $H > 0$ — вращения, равенство $H = -2G_0 l_0$ соответствует нижнему положению равновесия, а равенство $H = 0$ — аperiodическому движению маятника.

Решение невозмущенного ($\nu = \infty$) уравнения (7.2.3) (уравнения движения маятника) выражается в эллиптических функциях [266]

$$\varphi_1 = 2 \arcsin \{k_1 \operatorname{sn}[c(t + t_0)], k_1\}, \quad c = \sqrt{\frac{G_0 l_0}{J}},$$

$$\varphi_2 = 2 \operatorname{am} \left[\frac{c(t + t_0)}{k_2}, k_2 \right], \quad 0 \leq k_i \leq 1. \quad (7.2.4)$$

Здесь t_0 и k_i — произвольные постоянные, индекс 1 всюду соответствует колебаниям, 2 — вращениям, а при $k_1 = k_2 = 1$ оба решения описывают аperiodическое движение. Приведем известные [266] формулы, связывающие модули k_i эллиптических функций с энергией (7.2.3), периодами колебаний и вращениями, а также с амплитудой колебаний угла φ_0 и макси-

мальной угловой скоростью при вращении ω_0 :

$$1 + \frac{H_1}{2G_0 l_0} = k_1^2, \quad T_1 = \frac{4K(k_1)}{c}, \quad \varphi_0 = 2 \arcsin k_1,$$

$$1 + \frac{H_2}{2G_0 l_0} = \frac{1}{k_2^2}, \quad T_2 = \frac{2k_2 K(k_2)}{c}, \quad \omega_0 = \frac{2c}{k_2}. \quad (7.2.5)$$

Здесь $K(k)$ — полный эллиптический интеграл 1-го рода.

Подставим решение (7.2.4) в выражение (7.2.3) для L и выполним усреднение согласно (7.2.2) по периоду невозмущенного движения:

$$M_t \{L^2(\varphi_i(t))\} = \frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} L^2(\varphi_i(t)) dt, \quad i = 1, 2.$$

При вычислениях интегралов воспользуемся известными [268] формулами для интегралов от эллиптических функций, причем k_i , однозначно связанные с энергией H_i , считаются постоянными при усреднении. Затем в полученных усредненных уравнениях выразим H через k_i согласно (7.2.5) и получим окончательно следующие уравнения для k_i :

$$\frac{dk_1^2}{d\xi} = -(1 - k_1^2) + (1 - 2k_1^2) \frac{E(k_1)}{K(k_1)},$$

$$\frac{dk_2^2}{d\xi} = -2(1 - k_2^2) + (2 - k_2^2) \frac{E(k_2)}{K(k_2)}, \quad (7.2.6)$$

$$\xi = \frac{t - t_*}{T_0}, \quad T_0 = \frac{3\nu J^2}{2\rho P G_0 l_0} > 0.$$

Произвольную постоянную t_* выберем так, чтобы момент $t = t_*$, $\xi = 0$ соответствовал переходу от вращений к колебаниям, т. е. при $t < t_*$, $\xi < 0$ в системе происходят вращения, а при $t > t_*$, $\xi > 0$ — колебания. Тогда в качестве начальных условий для системы (7.2.6) следует принять $k_1^2(0) = k_2^2(0) = 1$, так как значения $k_1 = k_2 = 1$ отвечают границе между колебаниями и вращениями. Уравнения (7.2.6), очевидно, интегрируются в квадратурах. Эти уравнения были проинтегрированы численно при начальных условиях $k_1^2(0) = k_2^2(0) = 1$, соответствующих переходу от вращений к колебаниям. Функция $k_1^2(\xi)$ определялась лишь при $\xi \geq 0$, а $k_2^2(\xi)$ — при $\xi \leq 0$. При возрастании $|\xi|$ от 0 до ∞ обе функции монотонно убывают от 1 до 0, причем $k_1'(0) = k_2'(0) = 0$, что непосредственно следует из уравнений (7.2.6). На рис. 21 изображены графики функций: $k_1^2(\xi)$ — кривая 1, $k_2^2(-\xi)$ — кривая 2 и $k_2^2(-10\xi)$ — кривая 2'.

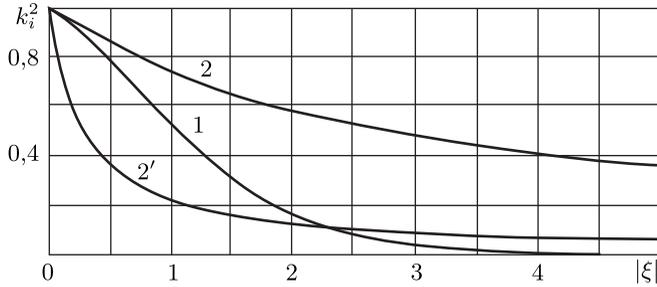


Рис. 21

Используя разложения полных эллиптических интегралов в ряды по k^2 при малых k (см. [268]), можно упростить правые части уравнений (7.2.6), после чего они легко интегрируются. Приведем полученные асимптотические решения, отвечающие малым k^2 или большим $|\xi|$,

$$k_1^2 = C_1 \exp(-3\xi/2) \text{ при } \xi \rightarrow +\infty, \quad k_2^2 = -\frac{8}{3\xi} \text{ при } \xi \rightarrow -\infty. \quad (7.2.7)$$

Численное решение (см. рис. 21) подтвердило асимптотические формулы (7.2.7). Кроме того, из сравнения с численным решением определилась постоянная $C_1 = 3,57$.

Асимптотические решения (7.2.7) описывают затухание малых колебаний и быстрых вращений. Подставляя равенства (7.2.7) в соотношения (7.2.5) и учитывая обозначения (7.2.6) для ξ , T_0 , получим законы затухания энергии и амплитуды малых колебаний при $t \rightarrow +\infty$, а также законы затухания энергии и максимальной угловой скорости быстрых вращений при $t \rightarrow -\infty$:

$$\begin{aligned} H_1 &= -2G_0 l_0 + 2G_0 l_0 C_1 \exp\left[-\frac{(t-t_*)\rho P G_0 l_0}{\nu J^2}\right], \\ \varphi_0 &= 2\sqrt{C_1} \exp\left[-\frac{(t-t_*)\rho P G_0 l_0}{2\nu J^2}\right], \quad t \rightarrow +\infty, \\ H_2 &= -\frac{3G_0 l_0 \xi}{4} = \frac{(t-t_*)\rho P G_0^2 l_0^2}{2\nu J^2}, \\ \omega_0 &= \sqrt{-\frac{3G_0 l_0 \xi}{2J}} = \sqrt{\frac{(t_*-t)\rho P G_0^2 l_0^2}{\nu J^3}}, \quad t \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (7.2.8)$$

Закон (7.2.8) затухания амплитуды φ_0 малых колебаний можно получить также, решая непосредственно линеаризованное уравнение (7.2.3).

Найденные функции $k_1^2(\xi)$, $k_2^2(\xi)$, изображенные на рис. 21, являются универсальными. По ним путем простого пересчета по формулам (7.2.6) для ξ , T_0 и (7.2.5) можно найти закон изменения во времени амплитуды и энергии движения в каждом конкретном случае. Этот пересчет осуществляется следующим образом. Пусть в момент $t = t_1$ задано, что маятник совершает вращения (или колебания) с заданной энергией или амплитудой. Тогда по формулам (7.2.5) находим начальное значение k_2 (или k_1). По графикам $k_2^2(\xi)$ (или $k_1^2(\xi)$) определяем начальное значение ξ , соответствующее данному k_2 (или k_1). Зная ξ и постоянную T_0 , можно найти t_* по формуле (7.2.6). В случае вращений будет $t_* > t_1$, а в случае колебаний $-t_* < t_1$. Дальнейший ход процесса, в том числе и переход от вращений к колебаниям, описывается функциями $k_1^2(\xi)$, $k_2^2(\xi)$ и формулами (7.2.5). Все постоянные в этих формулах, в том числе и t_* , уже найдены. В момент $t = t_*$, $\xi = 0$ нужно перейти от формул с индексом $i = 2$ к формулам с индексом $i = 1$. Отметим, что согласно общим теоремам метода усреднения [12, 13] погрешность решения для энергии или амплитуды составит величину порядка ν^{-1} на интервале времени порядка ν . Асимптотическое решение для угла φ в первом приближении определяется формулами (7.2.4), в которые нужно подставить медленно меняющиеся переменные k_i . Полученные соотношения описывают весь ход изменения движения от вращений до малых колебаний, т. е. убывание энергии H от ∞ до $-2G_0 l_0$. Характерное время затухания движения равно T_0 .

§ 3. Свободное пространственное движение тела с вязкой жидкостью

Рассмотрим свободное ($\mathbf{L} = 0$) пространственное движение твердого тела с жидкостью относительно центра инерции. Пусть $O_1 y_1 y_2 y_3$ — поступательно движущаяся система координат, начало которой связано с центром инерции системы. Тензор \mathbf{P} для простоты зададим в виде $P_{ij} = P_0 \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера, а $P_0 > 0$. Такой вид тензор \mathbf{P} имеет, например, в случае сферической полости, для которой имеем согласно (5.3.9) $P_0 = 8\pi a^7/525$, где a — радиус полости. Обозначим через A_1, A_2, A_3 главные центральные моменты инерции системы, через p, q, r — проекции абсолютной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на соответствующие главные центральные оси

инерции. Уравнения (5.3.7) при $\mathbf{L} = 0$ запишем в проекциях на главные центральные оси инерции (точка обозначает производную по времени):

$$A_1 \dot{p} + (A_3 - A_2)qr = \frac{\rho P_0}{\nu A_1 A_2 A_3} p [A_3(A_1 - A_3)(A_1 + A_3 - A_2)r^2 + A_2(A_1 - A_2)(A_1 + A_2 - A_3)q^2]. \quad (7.3.1)$$

Остальные уравнения получаются из (7.3.1) циклической перестановкой букв A_1, A_2, A_3 и p, q, r . Кинематические соотношения не выписываем, так как уравнения (7.3.1) образуют замкнутую систему.

Умножая уравнение (7.3.1) на $A_1 p$, остальные уравнения движения — на $A_2 q$ и $A_3 r$ и затем складывая их, убедимся в том, что эти уравнения имеют первый интеграл

$$G^2 = A_1^2 p^2 + A_2^2 q^2 + A_3^2 r^2 = \text{const}, \quad G = |\mathbf{G}|, \quad (7.3.2)$$

выражающий постоянство кинетического момента \mathbf{G} тела с затвердевшей жидкостью.

Вычисляя производную по времени от кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2}(A_1 p^2 + A_2 q^2 + A_3 r^2), \quad (7.3.3)$$

в силу уравнений движения (7.3.1) получим

$$\begin{aligned} \dot{T} = & -\frac{\rho P_0}{\nu A_1 A_2 A_3} [(A_1 + A_3 - A_2)(A_1 - A_3)^2 p^2 r^2 + \\ & + (A_1 + A_2 - A_3)(A_1 - A_2)^2 p^2 q^2 + \\ & + (A_2 + A_3 - A_1)(A_2 - A_3)^2 q^2 r^2] \leq 0, \end{aligned} \quad (7.3.4)$$

т. е. кинетическая энергия, как и следовало ожидать, убывает.

Выразим проекции кинетического момента \mathbf{G} тела с затвердевшей жидкостью на главные центральные оси инерции:

$$\begin{aligned} A_1 p &= G \sin \theta \sin \varphi, \\ A_2 q &= G \sin \theta \cos \varphi, \\ A_3 r &= G \cos \theta. \end{aligned} \quad (7.3.5)$$

Здесь $G = |\mathbf{G}|$, θ — угол нутации, φ — угол чистого вращения, эти углы определяют ориентацию вектора \mathbf{G} относительно твердого тела.

Разберем сначала случай динамической симметрии $A_1 = A_2 \neq A_3$ и перейдем в уравнениях (7.3.1) к переменным G, θ, φ согласно формулам (7.3.5). Получим систему

$$\dot{G} = 0, \quad \dot{\theta} = \frac{\rho P_0 (A_1 - A_3) G^2 \sin \theta \cos \theta}{\nu A_1^3 A_3}, \quad \dot{\varphi} = \frac{A_1 - A_3}{A_1 A_3} G \cos \theta.$$

Эта система легко интегрируется и дает

$$\begin{aligned} \text{tg } \theta &= \text{tg } \theta_0 \exp \left[\frac{\rho P_0 (A_1 - A_3) G^2 t}{\nu A_1^3 A_3} \right], \\ \varphi &= \frac{(A_1 - A_3) G}{A_1 A_3} \int_{t_0}^{t \rightarrow \infty} \frac{dt}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta_0 \exp \left[\frac{\rho P_0 (A_1 - A_3) G^2 t}{\nu A_1^3 A_3} \right]}} + \varphi_0, \end{aligned} \quad (7.3.6)$$

где G, θ_0, φ_0 — произвольные постоянные. Здесь принято без нарушения общности, что θ лежит в 1-й четверти; в противном случае можно изменить направления осей на противоположные.

Из формул (7.3.6) видно, что при $A_1 > A_3$ угол θ растет и стремится к $\frac{\pi}{2}$ при $t \rightarrow \infty$, а угол φ также растет и экспоненциально приближается при $t \rightarrow \infty$ к некоторой постоянной, зависящей от начальных условий. Окончательное движение будет вращением вокруг оси, перпендикулярной оси динамической симметрии.

В случае $A_1 < A_3$ угол θ убывает, и при $t \rightarrow \infty$ имеем $\theta \rightarrow 0$, $\varphi \rightarrow (A_1 - A_3)G / (A_1 A_3)$. Окончательным движением здесь будет вращение вокруг оси динамической симметрии. Характерное время переходного процесса в обоих случаях по порядку величины равно $\nu A_1^3 A_3 / (\rho P_0 G^2 |A_1 - A_3|)$.

Пусть теперь моменты инерции различны. Не нарушая общности, предположим, что $A_1 > A_2 > A_3$. Переходя в (7.3.1) к переменным G, θ, φ согласно (7.3.5), получим систему вида

$$\dot{G} = 0, \quad \dot{\theta} = f_1(G, \theta, \varphi), \quad \dot{\varphi} = f_2(G, \theta, \varphi). \quad (7.3.7)$$

Автономная система второго порядка для θ, φ может быть легко исследована обычными методами качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Можно найти особые точки системы, соответствующие стационарным движениям, исследовать характер особых точек (в частности, их устойчивость) и построить качественную картину фазовых траекторий. Результаты удобно изобразить в виде следа вектора кинетиче-

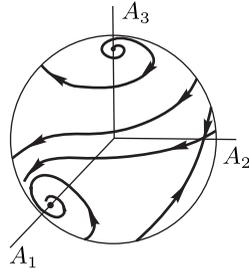


Рис. 22

ского момента \mathbf{G} на единичной сфере, связанной с твердым телом, центр которой помещен в центре инерции системы O_1 .

На рис. 6 главы 2 изображены траектории вектора \mathbf{G} в случае Эйлера (свободное твердое тело без жидкости, см., например, [265]), а на рис. 22 даны эти траектории для рассматриваемого случая тела с жидкостью (уравнения (7.3.7) или (7.3.1)). Стрелки на этих рисунках указывают направление возрастания времени, а буквы A_1, A_2, A_3 обозначают главные центральные оси с соответствующими моментами инерции.

Рассмотрим движение тела с вязкой жидкостью, временно отказываясь от условия $A_1 > A_2 > A_3$. В этом случае стационарные движения также суть вращения вокруг главных осей инерции, что видно из уравнений (7.3.1).

Рассмотрим движение в окрестности стационарного вращения вокруг оси A_3 , полагая $r = r_0 + x$ и считая $r_0 > 0$ постоянной, а величины p, q, x — малыми первого порядка. В случае стационарного вращения имеем $p = q = x = 0$. Тогда уравнения (7.3.1), линеаризованные в окрестности решения $p = q = x = 0$, примут вид

$$\begin{aligned} A_1 \dot{p} + (A_3 - A_2)r_0 q &= \alpha p, & A_2 \dot{q} + (A_1 - A_3)r_0 p &= \beta q, & \dot{x} &= 0, \\ \alpha &= \frac{\rho P_0}{\nu A_1 A_2} (A_1 - A_3)(A_1 + A_3 - A_2)r_0^2, \\ \beta &= \frac{\rho P_0}{\nu A_1 A_2} (A_2 - A_3)(A_2 + A_3 - A_1)r_0^2. \end{aligned} \quad (7.3.8)$$

Запишем характеристическое уравнение для первой пары уравнений (7.3.8):

$$A_1 A_2 \lambda^2 - (\alpha A_2 + \beta A_1) \lambda + \alpha \beta + (A_2 - A_3)(A_1 - A_3)r_0^2 = 0.$$

В этом уравнении α и β — величины порядка ν^{-1} (см. (7.3.8)). Решая характеристическое уравнение с учетом значений α, β из (7.3.8), получим с точностью до членов порядка ν^{-2} :

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \\ &= \frac{\rho P_0 r_0^2 [A_2(A_1 - A_3)(A_1 + A_3 - A_2) + A_1(A_2 - A_3)(A_2 + A_3 - A_1)]}{2\nu A_1^2 A_2^2} \pm \\ &\pm i r_0 \sqrt{\frac{(A_1 - A_3)(A_2 - A_3)}{A_1 A_2}}, \quad \lambda_3 = 0. \end{aligned} \quad (7.3.9)$$

Корень $\lambda_3 = 0$ соответствует третьему уравнению (7.3.8). Из (7.3.9) видно, что при $A_1 > A_3, A_2 > A_3$ имеем $\text{Re } \lambda_{1,2} > 0, \text{Im } \lambda_{1,2} \neq 0$, что отвечает неустойчивой особой токе типа фокуса.

При $A_1 > A_3, A_2 < A_3$ или $A_1 < A_3, A_2 > A_3$ корни λ_1 и λ_2 — вещественны и разных знаков, что отвечает неустойчивой особой точке типа седла. При $A_1 < A_3, A_2 < A_3$ получим из (7.3.9), что $\text{Re } \lambda_{1,2} < 0, \text{Im } \lambda_{1,2} \neq 0$, что соответствует устойчивому фокусу для переменных p, q . Однако в силу наличия нулевого корня $\lambda_3 = 0$ отсюда еще не следует устойчивости по отношению к переменным p, q, r .

Для доказательства устойчивости составим функцию Ляпунова

$$V = 2A_3 T - G^2 + (G^2 - A_3^2 r_0^2)^2. \quad (7.3.10)$$

Здесь T в G^2 определены равенствами (7.3.3) и (7.3.2). Нетрудно убедиться с помощью формул (7.3.3), (7.3.2), что функция V обращается в нуль в стационарном движении, то есть при $p = q = r - r_0 = 0$. Полагая $r = r_0 + x$, запишем V в виде

$$V = A_1(A_3 - A_1)p^2 + A_2(A_3 - A_2)q^2 + (A_1^2 p^2 + A_2^2 q^2 + A_3^2 x^2 + 2A_3^2 r_0 x)^2,$$

откуда следует, что при $A_3 > A_1, A_3 > A_2$ функция V при достаточно малых x является положительно-определенной функцией p, q, x . С другой стороны, из равенств (7.3.4) и $G = 0$ следует, что $\dot{V} \leq 0$ в силу уравнений движения (7.3.1). Отсюда по теореме Ляпунова заключаем об устойчивости решения $p = q = 0, r = r_0$ при $A_3 > A_1, A_3 > A_2$. Этот результат, полученный для малых чисел Рейнольдса, вполне согласуется с известным результатом исследования устойчивости стационарных вращений тела с вязкой жидкостью при произвольных числах Рейнольдса [108].

Результаты исследования уравнений движения тела с вязкой жидкостью (7.3.1) или (7.3.7), т.е. траектории вектора \mathbf{G} на единичной сфере, изображены на рис. 22, где принято $A_1 > A_2 > A_3$. Вращение вокруг оси среднего момента инерции A_2 неустойчиво (особая точка типа седла), вращение вокруг оси наименьшего момента инерции A_3 также неустойчиво (особая точка — неустойчивый фокус), а вращение вокруг оси наибольшего момента инерции A_1 устойчиво (особая точка — устойчивый фокус). Это — единственное устойчивое стационарное движение системы. Сепаратрисы, выходящие из седел, попадают в один из фокусов.

Перейдем к количественному исследованию нелинейного переходного процесса, приводящего к устойчивому движению. Наибольший интерес представляет получить закон убывания во времени кинетической энергии или другой связанной с ней величины.

Рассмотрим сначала движение при условии $2TA_1 \geq G^2 > 2TA_2$, соответствующем траекториям на рис. 6, охватывающим ось A_1 . Введем функцию

$$k^2 = \frac{(A_2 - A_3)(2TA_1 - G^2)}{(A_1 - A_2)(G^2 - 2TA_3)}, \quad 0 \leq k \leq 1, \quad (7.3.11)$$

однозначно связанную с энергией T . Значение $k = 0$ соответствует вращению вокруг оси A_1 , а $k = 1$ — движению по сепаратрисе (см. рис. 6). При помощи формул (7.3.11), (7.3.4) можно выразить производную dk^2/dt через p , q , r и постоянный момент G . Функции p , r затем выразим через G , T , q из уравнений (7.3.2), (7.3.3), после чего T выразим через k^2 и G из формулы (7.3.11). Окончательно получим

$$\frac{dk^2}{dt} = \nu^{-1} f(G, k^2, q), \quad (7.3.12)$$

где функция f есть некоторый многочлен четвертой степени относительно q .

Функция k^2 , так же как T , есть медленно меняющаяся переменная. Поэтому в первом приближении можно подставить в (7.3.12) функцию $q(t)$ из невозмущенного движения Эйлера–Пуансо [265] (см. также (2.3.7)):

$$q = \sqrt{\frac{2TA_1 - G^2}{A_2(A_1 - A_2)}} \operatorname{sn} \left[\frac{t - t_0}{\tau} 4K(k), k \right]. \quad (7.3.13)$$

Здесь τ — период движения, зависящий от T , G , а t_0 — произвольная постоянная. Подставим (7.3.13) в (7.3.12), исключим снова T при помощи (7.3.11) и усредним правую часть уравнения (7.3.12) по периоду τ

движения Эйлера–Пуансо. При усреднении медленную переменную k^2 , как обычно, считаем постоянной. Опуская громоздкие промежуточные выкладки, использующие формулы для интегралов от эллиптических функций [268], получим аналогично уравнению (7.2.6) усредненное уравнение в виде

$$\begin{aligned} \frac{dk^2}{d\xi} &= (1 - \chi)(1 - k^2) - [(1 - \chi) + (1 + \chi)k^2] \frac{E(k)}{K(k)}, \\ \chi &= \frac{3A_2[(A_1^2 + A_3^2) - A_2(A_1 + A_3)]}{(A_1 - A_3)[A_2(A_1 + A_3 - A_2) + 2A_1A_3]}, \\ \xi = \frac{t - t_*}{N}, \quad N &= \frac{3\nu A_1^2 A_2^2 A_3^2}{\rho P_0 G^2 (A_1 - A_3)[A_2(A_1 + A_3 - A_2) + 2A_1A_3]}. \end{aligned} \quad (7.3.14)$$

Произвольную постоянную t_* выберем так, чтобы момент $t = t_*$ соответствовал переходу через сепаратрису, т.е. $k = 1$, $2TA_2 = G^2$ при $\xi = 0$. До сих пор принималось, что $2TA_2 < G^2$. Это условие будет, в силу монотонного убывания T , выполнено при $t > t_*$, т.е. при $\xi > 0$. Поэтому нужно найти для $\xi \geq 0$ решение уравнения (7.3.14) при начальном условии $k^2(0) = 1$. Это решение $k^2(\chi, \xi)$, зависящее от безразмерного параметра χ , было определено численно для различных χ . Нетрудно проверить, что для величины χ на (7.3.14) справедливы равенства

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{\chi_1 - \chi_2}{\chi_1 + \chi_2}, \quad \chi_1 = (A_1 - A_2)[A_3(A_1 + A_2 - A_3) + 2A_1A_2] > 0, \\ \chi_2 &= (A_2 - A_3)[A_1(A_2 + A_3 - A_1) + 2A_2A_3] > 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что $|\chi| \leq 1$ при любых физически допустимых A_1, A_2, A_3 . При всех допустимых χ функция k^2 монотонно убывает от 1 до 0 при росте ξ от 0 до ∞ , а при $\xi = 0$ имеем $dk^2/d\xi = 0$. На рис. 23 изображены полученные в результате расчетов графики функций $k^2(\chi, \xi)$ при $\chi = 1; -0,5; 0; 0,5; 1$, причем большим χ соответствуют более быстро убывающие функции.

Аналогично (7.2.7) можно найти асимптотику решения уравнения (7.3.14) для малых k^2 , т.е. для больших ξ :

$$k^2(\chi, \xi) = C_2 \exp[-(3 + \chi)\xi/2], \quad C_2 > 0, \quad \xi \rightarrow +\infty. \quad (7.3.15)$$

Найденные функции $k^2(\chi, \xi)$ и формулы (7.3.11), (7.3.14) описывают движение при $t \geq t_*$, т.е. убывание T от $G^2/2A_2$ до $G^2/2A_1$.

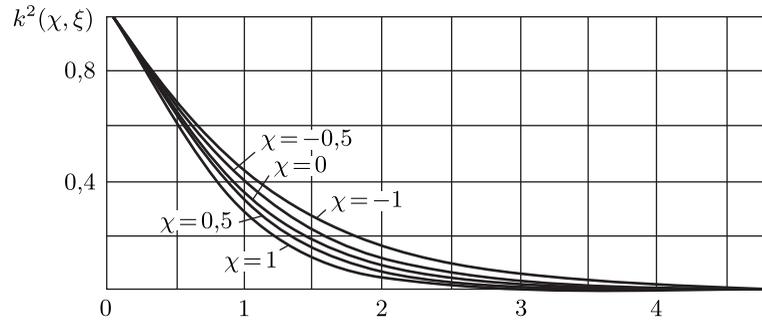


Рис. 23

При $t < t_*$ выполняются неравенства $2TA_2 > G^2 \geq 2TA_3$, соответствующие траекториям (см. рис. 6), охватывающими ось A_3 . Этот случай рассматривается аналогично, причем для получения решения нужно просто поменять местами буквы A_1 и A_3 во всех формулах (7.3.11), (7.3.13), (7.3.14).

Так как при такой замене χ и N просто меняют знаки, то можно сохранить формулы (7.3.14) для χ и N неизменными, но зато заменить χ на $-\chi$ в уравнении (7.3.14) для k^2 и, кроме того, изменить связь между ξ и t , положив в (7.3.11)

$$\xi = (t_* - t)/N.$$

Следовательно, для описания движения при $t \leq t_*$ нужно найти решение уравнения (7.3.14) для $\xi \geq 0$, $t \leq t_*$ при начальном условии $k(0) = 1$. Поэтому можно воспользоваться уже найденными решениями, полагая $k^2 = k^2(-\chi, \xi)$. Значение $k = 0$ соответствует здесь вращению вокруг оси с моментом инерции A_3 , а $k = 1$ отвечает, как ранее, движению по сепаратрисе.

Изменение энергии T в любом конкретном случае можно получить из найденных соотношений простым пересчетом. Сначала нужно по заданным $A_1, A_2, A_3, \rho, \nu, P_0$ вычислить постоянные χ, N из (7.3.14) и взять из приведенных графиков или снова рассчитать функции $k^2(\chi, \xi)$ и $k^2(-\chi, \xi)$, удовлетворяющие уравнению (7.3.14) и условию $k(0) = 1$. По функции $k^2(\chi, \xi)$ при помощи (7.3.11) и формулы $t - t_* = N\xi$ можно найти $T(t)$ при $t \geq t_*$, т. е. в случае $T \leq G^2/2A_2$. По функции $k^2(-\chi, \xi)$ при помощи формул, аналогичных (7.3.11) и (7.3.14):

$$k^2 = \frac{(A_2 - A_1)(2TA_3 - G^2)}{(A_3 - A_2)(G^2 - 2TA_1)}, \quad t_* - t = N\xi, \quad (7.3.16)$$

определяем $T(t)$ при $t \leq t_*$, т. е. в случае $T \geq G^2/2A_2$. Постоянная t_* определяется, как и в § 2 данной главы, если задана энергия T в некоторый фиксированный момент времени. Тем самым функция $T(t)$ будет полностью определена. Таким образом, получаем описание всего нелинейного переходного процесса, который представляет собой движение Эйлера–Пуансо с медленно меняющейся энергией. В частности, используя (7.3.15), найдем при помощи (7.3.11) и (7.3.16) асимптотику $T(t)$:

$$T = \frac{G^2}{2A_1} + \frac{G^2(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)}{2A_1^2(A_2 - A_3)} C_2 \exp\left[-\frac{(3 + \chi)(t - t_*)}{2N}\right], \quad t \rightarrow +\infty,$$

$$T = \frac{G^2}{2A_3} - \frac{G^2(A_2 - A_3)(A_1 - A_3)}{2A_3^2(A_1 - A_2)} C_2 \exp\left[\frac{(3 - \chi)(t - t_*)}{2N}\right], \quad t \rightarrow -\infty.$$

Решение для угловых скоростей в данном приближении определяется формулами движения Эйлера–Пуансо типа (7.3.13) (см. [265]), в которые нужно подставить найденные медленно меняющиеся функции $T(t)$ или $k^2(t)$. Характерное время переходного процесса имеет порядок N из (7.3.14). Движение тела в конце концов стремится к единственному устойчивому стационарному движению — вращению вокруг оси наибольшего момента инерции A_1 .

На рис. 24 приведены для примера графики изменения безразмерной энергии $T_1 = 2TA_1G^{-2}$ как функции безразмерного времени $\xi_1 = (t - t_*)N^{-1}$. Для всех кривых рис. 24 принято $A_1 = 8, A_3 = 4$, а $A_2 = 5, 6, 7$ — для кривых 1, 2, 3 соответственно. Значение $T_1 = 2$ соответствует вращению вокруг оси A_3 (неустойчивое движение), $T_1 = 1$ — вращению вокруг оси A_1 (устойчивое движение). Отметим, что при $\xi_1 = 0$ (переход через сепаратрису) кривые на рис. 24 имеют горизонтальную касательную (точки перегиба).

Заметим, что рассмотренное выше движение свободного твердого тела с полостью, заполненной жидкостью большой вязкости, может служить качественной моделью движения планет, которые содержат расплавленные массы магмы.

Полученные выше общие уравнения (5.3.7) позволяют исследовать и другие задачи динамики тела с полостями, содержащими жидкость.

Обсудим здесь качественно вопрос о движении относительно центра масс спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, под действием гравитационных моментов на кеплеровой орбите. Анализ этой задачи дается в статье [136].

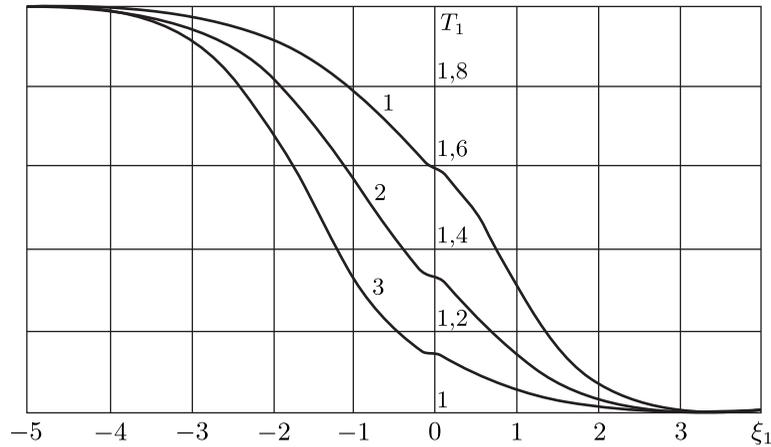


Рис. 24

Как следует из результатов главы 6, в случае спутника, являющегося твердым телом, его движение вокруг центра масс складывается из движения Эйлера–Пуансо вокруг вектора кинетического момента \mathbf{G} и из перемещения самого вектора \mathbf{G} в пространстве. Этот вектор совершает прецессионное движение вокруг нормали к плоскости орбиты, на которое накладываются более тонкие колебательные эффекты. При этом величина кинетической энергии T движения спутника относительно центра масс и величина его кинетического момента \mathbf{G} относительно центра масс остаются постоянными с высокой степенью точности.

С другой стороны, если на спутник действуют только моменты вязких сил со стороны жидкости (число Рейнольдса считаем малым), то величина и направление вектора \mathbf{G} не меняются, а энергия T монотонно убывает. При совместном действии моментов гравитационных и вязких сил суммарное движение будет представлять собой суперпозицию этих двух движений. Для его приближенного расчета можно поступить следующим образом. Сначала из решения, полученного в данном параграфе, найдем закон убывания кинетической энергии $T(t)$, а затем подставим его в усредненные уравнения, выведенные в § 2 главы 6, например в уравнения (6.2.23), (6.2.36). Эти уравнения описывают перемещение вектора \mathbf{G} в пространстве. По прошествии достаточно большого времени спутник будет вращаться вокруг оси наибольшего главного центрального момента инерции, вдоль

которой и будет направлен вектор \mathbf{G} . Сам же вектор \mathbf{G} будет в дальнейшем перемещаться в пространстве практически так же, как и в случае спутника — твердого тела.

В работе [136] исследуется быстрое вращательное движение спутника со сферической полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью при малых числах Рейнольдса, под действием гравитационного момента. Получена система уравнений движения, содержащая медленные и быстрые переменные. Применяются процедура усреднения по движению Эйлера–Пуансо и модифицированный метод усреднения, описанные в § 6 и § 4 главы 4 нашей книги. Определенно, что вектор кинетического момента \mathbf{G} останется величиной постоянной, наклоненной под постоянным углом δ к вертикали плоскости орбиты. В этом случае конец вектора \mathbf{G} движется по сфере постоянного радиуса G_0 сначала против хода часовой стрелки за счет имеющейся начальной кинетической энергии, а затем по ходу часовой стрелки. При этом кинетическая энергия убывает до значения, равного единице и соответствующего устойчивому вращению спутника вокруг наибольшей оси инерции A_1 . Проведен анализ вращательного движения спутника в окрестности наибольшего момента инерции.

§ 4. О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА, СОДЕРЖАЩЕГО ДЕМПФЕР

Для моделирования движения твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, М. А. Лаврентьевым была предложена следующая модель (см. [297]). Рассматривается твердое тело со сферической полостью, в которой находится другое твердое тело сферической формы. Между сферой и стенками полости имеется узкий зазор, в котором действуют вязкие силы (смазочный слой). Эта модель с конечным числом степеней свободы имеет некоторые механические свойства тела с полостью, содержащей вязкую жидкость. Поэтому ее изучение представляет интерес. Кроме того, системы подобного рода интересны и с прикладной точки зрения, так как позволяют, в принципе, осуществлять демпфирование относительного движения тела за счет внутренних сил.

Ниже, в § 4–5, изучаются некоторые свойства описанной системы, которую будем называть «твердое тело с демпфером».

Пусть твердое тело G массы m_1 имеет сферическую полость D радиуса a . В полости находится твердая сфера массы m_0 и радиуса, близкого к a , распределение масс в которой обладает сферической симметрией (на-

пример, однородно). Толщину зазора h между сферой и стенками полости считаем постоянной и малой ($h \ll a$), так что смещением центра сферы относительно центра O полости D можно пренебречь (рис. 25). Составим уравнения движения системы.

Уравнение движения центра инерции имеет вид $(m_1 + m_0)\mathbf{w}_c = \mathbf{R}$, где \mathbf{w}_c — ускорение центра инерции системы, \mathbf{R} — главный вектор всех внешних сил, действующих на систему.

Пусть O_1 — любая точка, жестко связанная с твердым телом (например, центр инерции системы или неподвижная точка, если она имеется). Введем две декартовы системы координат: $O_1y_1y_2y_3$, оси которой движутся произвольным заданным образом (например, поступательно), и $O_1x_1x_2x_3$, жестко связанную с твердым телом (см. рис. 25).

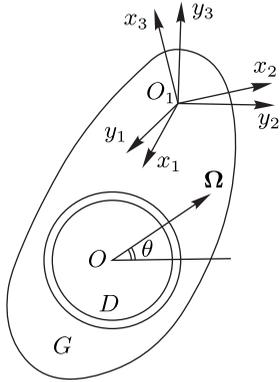


Рис. 25

Запишем уравнение моментов в системе $O_1y_1y_2y_3$

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{M}; \quad \mathbf{K} = \int_{G+D} \mathbf{r}_1 \times \mathbf{v} dm. \quad (7.4.1)$$

Здесь \mathbf{K} — кинетический момент тела с демпфером относительно точки O_1 при его движении относительно системы координат $O_1y_1y_2y_3$; \mathbf{M} — главный момент относительно точки O_1 всех внешних сил, действующих на тело с демпфером в этой же системе; \mathbf{r}_1 — радиус-вектор, отсчитанный от точки O_1 ; \mathbf{v} — скорость в системе координат $O_1y_1y_2y_3$, dm — элемент массы. В момент \mathbf{M} входит, в частности, момент сил инерции, обусловленный

движением системы координат $O_1y_1y_2y_3$. Скорость \mathbf{v} какой-либо точки системы равна $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1 + \mathbf{u}_1$, где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела относительно системы $O_1y_1y_2y_3$, \mathbf{u}_1 — скорость этой точки относительно системы координат $O_1x_1x_2x_3$. Для точек твердого тела, очевидно, $\mathbf{u} = 0$, и поэтому формула (7.4.1) для \mathbf{K} примет вид

$$\mathbf{K} = \int_{G+D} \mathbf{r}_1 \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1) dm + \mathbf{L} = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{L}; \quad \mathbf{L} = \int_D \mathbf{r}_1 \times \mathbf{u} dm. \quad (7.4.2)$$

Здесь \mathbf{J} — тензор инерции всей системы относительно точки O_1 , компоненты которого постоянны в системе $O_1x_1x_2x_3$. Гиросtatический момент \mathbf{L} представляет собой кинетический момент демпфера в системе координат $O_1x_1x_2x_3$. Легко видеть, что он не зависит от выбора полюса и в данном случае равен

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\Omega}; \quad \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}, \quad (7.4.3)$$

где I — момент инерции демпфера относительно его диаметра, $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\Omega}$ — угловые скорости демпфера в системах координат $O_1y_1y_2y_3$ и $O_1x_1x_2x_3$ соответственно.

Предположим, что внешние силы, действующие на демпфер, не создают момента относительно его центра O . Момент \mathbf{M}_1 сил взаимодействия демпфера с телом (относительно точки O) считаем равным $(-k\boldsymbol{\Omega})$, где k — постоянный коэффициент пропорциональности. Тогда уравнение движения демпфера относительно его центра примет вид

$$I \frac{d\boldsymbol{\omega}_1}{dt} = \mathbf{M}_1 = -k\boldsymbol{\Omega}, \quad k > 0. \quad (7.4.4)$$

Отметим, что из величин, входящих в уравнение (7.4.4), можно составить безразмерный критерий $R_1 = I/(kT)$, аналогичный числу Рейнольдса R для тела с полостью, содержащей жидкость. Здесь постоянная T — характерное время процесса.

Уравнения (7.4.1)–(7.4.4) описывают движение тела с демпфером в системе координат $O_1y_1y_2y_3$. К ним нужно, вообще говоря, добавить еще обычные кинематические соотношения, а также уравнения движения центра инерции и, возможно, другие замыкающие уравнения. Перепишем уравнения (7.4.1)–(7.4.4), обозначая точкой производные в системе координат $O_1x_1x_2x_3$, связанной с твердым телом:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} &= \mathbf{M}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} + I(\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}), \\ I\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + I\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}_1 &= -k(\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}). \end{aligned} \quad (7.4.5)$$

Вычислим еще величину k , считая, что взаимодействие демпфера с телом происходит через тонкий сферический слой несжимаемой вязкой жидкости плотности ρ_1 и кинематической вязкости ν_1 . В системе координат $O_1x_1x_2x_3$ тело покоится, а демпфер вращается с угловой скоростью Ω . Точка его диаметра, составляющего угол θ с вектором Ω (см. рис. 25), имеет в системе $O_1x_1x_2x_3$ скорость $\Omega a \sin \theta$. При этом в слое жидкости толщины h возникает градиент скорости $\Omega a \sin \theta / h$, вызывающий касательное напряжение на поверхности демпфера, равное $\rho_1 \nu_1 \Omega a \sin \theta / h$. Подсчитаем величину момента, создаваемого этими напряжениями относительно точки O , а затем, сравнив ее с формулой (7.4.4), определим k :

$$M_1 = \int_0^\pi \frac{\rho_1 \nu_1 \Omega a \sin \theta}{h} a \sin \theta \cdot 2\pi a \sin \theta \cdot a d\theta = \frac{8\pi}{3} \frac{\rho_1 \nu_1 a^4}{h} \Omega, \quad (7.4.6)$$

$$k = \frac{8\pi \rho_1 \nu_1 a^4}{h}.$$

Пусть угловые скорости ω и ω_1 — величины порядка T^{-1} , где T — характерное время процесса, и пусть их производные $\dot{\omega}$, $\dot{\omega}_1$ в системе координат $O_1x_1x_2x_3$ имеют порядок T^{-2} , а $\ddot{\omega}$, $\ddot{\omega}_1$ — порядок T^{-3} . Кроме того, предположим, что число R_1 мало: $R_1 \ll 1$. Не нарушая общности, можно в качестве единицы времени взять T , в качестве единицы длины — радиус демпфера a , а в качестве единицы массы — величину I/a^2 (массу демпфера, приведенную к его радиусу). Тогда момент инерции I , угловые скорости ω , ω_1 и их первые и вторые производные — величины порядка единицы, а $R_1 = I/k$, причем $k \gg 1$ (вязкость смазки велика). Перепишем уравнение (7.4.4), а затем продифференцируем обе его части по времени в системе $O_1x_1x_2x_3$:

$$I\dot{\omega}_1 + I\omega \times \omega_1 = -k\Omega, \quad I\ddot{\omega}_1 + I\dot{\omega} \times \omega_1 + I\omega \times \dot{\omega}_1 = -k\dot{\Omega}. \quad (7.4.7)$$

Согласно сделанным допущениям левые части уравнений (7.4.7) — величины порядка единицы, и поэтому $|\Omega| \sim |\dot{\Omega}| \sim k^{-1} \ll 1$. Подставим теперь равенство $\omega_1 = \omega + \Omega$ в первое уравнение (7.4.7) и выразим из него Ω с точностью до малых высшего порядка:

$$\Omega = -Ik^{-1}\dot{\omega} + O(k^{-2}), \quad k \gg 1.$$

Подставляя эту формулу в равенства (7.4.2) и (7.4.3), получим для кинетического момента \mathbf{K} представление

$$\mathbf{K} = \mathbf{J} \cdot \omega + \mathbf{L}, \quad \mathbf{L} = -I^2 k^{-1} \dot{\omega} + O(k^{-2}), \quad k \gg 1. \quad (7.4.8)$$

Сравним полученное выражение с выражением (5.3.3) для кинетического момента \mathbf{G} тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью при малых числах Рейнольдса R :

$$\mathbf{G} = \mathbf{J} \cdot \omega - \frac{\rho}{\nu} \mathbf{P} \cdot \dot{\omega}, \quad R = \frac{a^2}{\nu T} \ll 1. \quad (7.4.9)$$

Здесь \mathbf{P} — тензор, введенный в § 3 главы 5, a — характерный линейный размер полости, ν — кинематическая вязкость жидкости, T — характерное время процесса, равное по порядку величины ω^{-1} . Напомним, что согласно (5.3.9) для сферической полости радиуса a тензор \mathbf{P} является шаровым, а его диагональные элементы P_0 равны

$$P_0 = \frac{8\pi a^7}{525}. \quad (7.4.10)$$

Сопоставляя соотношения (7.4.8) и (7.4.9), видим, что при наложенных допущениях (безразмерные числа $R = I/kT$ и $R = a^2/\nu T$ малы) тело со сферическим демпфером динамически эквивалентно телу со сферической полостью, заполненной несжимаемой вязкой жидкостью. Эти системы описываются одинаковыми уравнениями. Для полной механической эквивалентности систем (при одном и том же твердом теле, одном и том же радиусе полости a , одинаковых внешних силах и внешних моментах) нужно потребовать, чтобы были равны:

- 1) массы демпфера и жидкости в полости (для эквивалентности уравнений движения центра инерции);
- 2) моменты инерции демпфера и жидкости относительно диаметра;
- 3) коэффициенты при $d\omega/dt$ в равенствах (7.4.8) и (7.4.9), т. е. $I^2 k^{-1} = \rho \nu^{-1} P_0$.

Массой и моментом инерции смазочного слоя пренебрегаем.

Отсюда получаем равенства, необходимые и достаточные (при сделанных предположениях) для эквивалентности систем

$$m_0 = \frac{4}{3} \pi \rho a^3, \quad I = \frac{8}{15} \pi \rho a^5, \quad k = \frac{\nu I^2}{\rho P_0} = \frac{56}{3} \pi \rho \nu a^3. \quad (7.4.11)$$

В равенствах (7.4.11) учтено значение P_0 из (7.4.10).

Воспользовавшись формулой (7.4.6), последнему равенству (7.4.11) можно придать вид

$$\frac{\rho_1 \nu_1}{h} = \frac{7\rho \nu}{a}.$$

Эта формула, как и (7.4.6), справедлива при $h \ll a$. Если выполнены условия эквивалентности (7.4.11), то, как нетрудно проверить, между числами Рейнольдса существует связь:

$$R = 35R_1 \left(R_1 = \frac{I}{kT}, \quad R = \frac{a^2}{\nu T} \right).$$

Если отказаться от условия тождественности твердых тел при моделировании, то тело со сферическим демпфером при $R_1 \ll 1$ может моделировать тело с вязкой жидкостью при $R \ll 1$ для тех форм полостей, у которых тензор \mathbf{P} имеет вид $\mathbf{P} = P\mathbf{E}_0$, где P — скаляр, \mathbf{E}_0 — единичный тензор (например, для полостей в форме сферы, куба и др.).

Рассмотрим еще демпферы не сферической, а осесимметричной формы: твердое тело вращения, помещенное в полость такой же формы (между телом и стенками в полости по-прежнему имеется смазочный слой). Пусть в твердом теле имеется s полостей, в которых находятся такие осесимметричные демпферы. Обозначим через \mathbf{d}_j орт, направленный по оси j -го демпфера, через I_j — его момент инерции вокруг оси вращения, через ω_j и Ω_j — угловые скорости j -го демпфера в системах координат $O_1y_1y_2y_3$ и $O_1x_1x_2x_3$ соответственно, через \mathbf{L}_j — гиристатический момент j -го демпфера, через $\mathbf{M}_j = -k_j\Omega_j$ — момент вязких сил, действующих на j -й демпфер со стороны тела, причем k_j — постоянные коэффициенты пропорциональности, $j = 1, 2, \dots, s$. Тогда выражения для кинетического момента \mathbf{K} и гиристатического момента \mathbf{L} примут вид аналогично (7.4.2), (7.4.3):

$$\mathbf{K} = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{L}, \quad \mathbf{L} = \sum_{j=1}^s \mathbf{L}_j, \quad \mathbf{L}_j = I_j \Omega_j, \quad \Omega_j = \omega_j - \boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}_j \Omega_j, \quad j = 1, \dots, s. \quad (7.4.12)$$

Здесь учтено, что вектор Ω_j коллинеарен оси демпфера \mathbf{d}_j . Уравнение движения j -го демпфера вокруг его оси вращения \mathbf{d}_j можно записать в виде, аналогичном (7.4.4):

$$I_j \mathbf{d}_j \frac{d\omega_j}{dt} = -\mathbf{M}_j \mathbf{d}_j = -k_j \Omega_j, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (7.4.13)$$

Продифференцируем обе части уравнения (7.4.13) по времени в системе координат $O_1x_1x_2x_3$, связанной с телом. Учитывая, что в этой систе-

ме \mathbf{d}_j — постоянный вектор, получим аналогично (7.4.7)

$$\begin{aligned} I_j \mathbf{d}_j (\dot{\omega}_j + \boldsymbol{\omega} \times \omega_j) &= -k_j \Omega_j, \\ I_j \mathbf{d}_j (\ddot{\omega}_j + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \omega_j + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\omega}_j) &= -k_j \dot{\Omega}_j, \end{aligned} \quad (7.4.14)$$

$$j = 1, \dots, s.$$

Примем, как и выше, что $\boldsymbol{\omega}$, ω_j имеют порядок T^{-1} ; $\dot{\boldsymbol{\omega}}$, $\dot{\omega}_j$ — порядок T^{-2} ; $\ddot{\boldsymbol{\omega}}$, $\ddot{\omega}_j$ — порядок T^{-3} , где T — характерное время процесса, $j = 1, \dots, s$. Числа Рейнольдса $R_j = I_j/(k_j T)$ для всех демпферов считаем малыми при $j = 1, \dots, s$, то есть $R_j \ll 1$.

За счет выбора единиц измерения можно, как и выше, считать, что $\boldsymbol{\omega}$, ω_j и их производные — величины порядка единицы, а все $k_j \gg 1$ при $j = 1, \dots, s$. Тогда из равенств (7.4.14) получим, что Ω_j и $\dot{\Omega}_j$ — малые порядка k_j^{-1} . Подставляя $\omega_j = \boldsymbol{\omega} + \mathbf{d}_j \Omega_j$ в первое уравнение (7.4.14) и учитывая приведенные оценки, получим с точностью до малых высшего порядка

$$\Omega_j = -(I_j/k_j) \dot{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{d}_j, \quad j = 1, \dots, s.$$

Полученное равенство подставим в формулу (7.4.12), учитывая также соотношение $\dot{\boldsymbol{\omega}} = d\boldsymbol{\omega}/dt$

$$\mathbf{L} = \sum_{j=1}^s \mathbf{L}_j = - \sum_{j=1}^s \frac{I_j^2}{k_j} \mathbf{d}_j \left(\mathbf{d}_j \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right).$$

Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — орты осей O_1x_1, O_1x_2, O_1x_3 , а $\alpha_j = \mathbf{d}_j \cdot \mathbf{e}_k$ — направляющие косинусы ортов \mathbf{d}_j в этих осях, $j = 1, \dots, s$; $k = 1, 2, 3$. Тогда предыдущую формулу для \mathbf{L} можно записать в виде

$$\mathbf{L} = -\mathbf{Q} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}; \quad Q_{ik} = \sum_{j=1}^s \frac{I_j^2}{k_j} \alpha_{ji} \cdot \alpha_{jk}, \quad i, k = 1, 2, 3. \quad (7.4.15)$$

Здесь \mathbf{Q} — тензор, Q_{ik} — его компоненты в системе координат $O_1x_1x_2x_3$. Эти компоненты, как и величины α_{jk} , постоянны, причем, очевидно, $Q_{jk} = Q_{ki}$. Нетрудно показать, что квадратичная форма, определенная матрицей Q_{ik} , неотрицательно определена. В самом деле,

$$\sum_{i,k=1}^3 Q_{ik} \xi_i \xi_k = \sum_{j=1}^s I_j^2 k_j^{-1} \left(\sum_{i,k=1}^3 \alpha_{ji} \xi_i \alpha_{jk} \xi_k \right) = \sum_{j=1}^s I_j^2 k_j^{-1} \left(\sum_{i=1}^3 \alpha_{ji} \xi_i \right)^2 \geq 0.$$

Сопоставляя равенства (7.4.9) и (7.4.15), находим, что твердое тело с полостью произвольной формы, заполненной вязкой жидкостью при $R \ll 1$, можно моделировать при помощи твердого тела, содержащего несколько осесимметричных демпферов при $R_j \ll 1$. Для эквивалентности этих систем достаточно, чтобы тензоры \mathbf{P} и \mathbf{Q} в равенствах (7.4.9), (7.4.15) были связаны соотношением $\mathbf{P} = \lambda \mathbf{Q}$, где λ — коэффициент пропорциональности. При этом для моделирования тела с полостью произвольной формы достаточно трех демпферов (маховиков с вязким демпфированием), оси которых взаимно-перпендикулярны и параллельны главным осям тензора \mathbf{P} . Параметры систем, как нетрудно видеть из формул (7.4.9), (7.4.15), должны быть при этом связаны соотношениями, аналогичными (7.4.11):

$$\frac{P_{j_i} k_j}{I_j^2} = \lambda = \text{const}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Итак, уравнения движения твердого тела, содержащего сферические или осесимметрические демпферы, в случае малых чисел Рейнольдса эквивалентны уравнениям движения тела с полостью, заполненной жидкостью большой вязкости. В частности, результаты, полученные в §§ 1–3 данной главы, полностью применимы, при сделанных допущениях, и к телу с демпферами. Так, из результатов § 3 главы 7 следует, что единственным устойчивым стационарным вращением свободного твердого тела со сферическим демпфером при $R_1 \ll 1$ является вращение вокруг оси наибольшего главного центрального момента инерции всей системы.

§ 5. Устойчивость движения твердого тела с демпфером

Изучение движения твердого тела с демпфером, помимо аналогий с телом, содержащим вязкую жидкость, представляет и определенный самостоятельный интерес. Рассмотрим движение свободного твердого тела со сферическим демпфером, не ограничиваясь больше условием $R_1 \ll 1$. Полагая $\mathbf{M} = 0$ в уравнениях (7.4.5) и вычитая из первого уравнения третье, получим (точка по-прежнему означает производную вектора в системе координат $O_1 x_1 x_2 x_3$, связанной с телом)

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_0 \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}_0 \cdot \boldsymbol{\omega}) &= k(\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}), \\ I \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + I(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}_1) &= -k(\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}), \\ \mathbf{J}_0 &= \mathbf{J} - I\mathbf{E}_0. \end{aligned} \quad (7.5.1)$$

Здесь \mathbf{E}_0 — единичный тензор, \mathbf{J}_0 — тензор инерции системы относительно точки O_1 при условии, что вся масса демпфера сосредоточена

в его центре. Уравнения (7.5.1) образуют замкнутую систему. Они описывают движение свободного твердого тела с демпфером относительно центра инерции системы. При этом O_1 — центр инерции тела с демпфером, а система координат $O_1 y_1 y_2 y_3$ движется поступательно.

Свяжем систему координат $O_1 x_1 x_2 x_3$ с главными осями тензора инерции \mathbf{J} системы относительно точки O_1 . Очевидно, эти оси будут главными и для тензора \mathbf{J}_0 . Обозначим через p, q, r проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ на оси $O_1 x_1, O_1 x_2, O_1 x_3$ соответственно, через p_1, q_1, r_1 — проекции вектора $\boldsymbol{\omega}_1$ на эти же оси, через A_1, A_2, A_3 — главные моменты инерции всей системы относительно этих осей, а через A_{10}, A_{20}, A_{30} — главные значения тензора \mathbf{J}_0 в этих же осях, равные соответственно $A_1 - I, A_2 - I, A_3 - I$. Уравнения (7.5.1) в скалярной записи примут вид

$$\begin{aligned} A_{10} \dot{p} + (A_{30} - A_{20})qr &= k(p_1 - p), & I(\dot{p}_1 + qr_1 - rp_1) &= k(p - p_1), \\ A_{20} \dot{q} + (A_{10} - A_{30})rp &= k(q_1 - q), & I(\dot{q}_1 + rp_1 - pr_1) &= k(q - q_1), \\ A_{30} \dot{r} + (A_{20} - A_{10})pq &= k(r_1 - r), & I(\dot{r}_1 + pq_1 - qp_1) &= k(r - r_1). \end{aligned} \quad (7.5.2)$$

Определим возможные стационарные движения тела. Если $\boldsymbol{\omega}$ постоянно ($\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$), то из первого уравнения (7.5.1) следует, что $\boldsymbol{\omega}_1$ также постоянно и $\boldsymbol{\omega}_1 = 0$. Тогда, умножая обе части второго уравнения (7.5.1) скалярно на $\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}$, получим $\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}$. Из уравнений (7.5.2) видно, что такое движение возможно лишь в том случае, когда вращение происходит вокруг одной из главных осей инерции системы. Таким образом, единственно возможные стационарные движения системы, как и для тела с вязкой жидкостью, — это равномерные вращения системы как твердого целого вокруг одной из главных осей инерции.

Исследуем устойчивость этих движений. Пусть невозмущенное движение — вращение системы вокруг оси $O_1 x_1$ с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_0 \neq 0$, описываемое равенствами

$$p = p_1 = \omega_0, \quad q = q_1 = r = r_1 = 0. \quad (7.5.3)$$

Положим в возмущенном движении $p = \omega_0 + x, p_1 = \omega_0 + y$ и линеаризуем уравнения (7.5.2) около решения (7.5.3):

$$\begin{aligned} A_{10} \dot{x} &= k(y - x), & I \dot{y} &= k(x - y), \\ A_{20} \dot{q} + (A_{10} - A_{30})\omega_0 r &= k(q_1 - q), & I \dot{q}_1 + I\omega_0(r - r_1) &= k(q - q_1), \\ A_{30} \dot{r} + (A_{20} - A_{10})\omega_0 q &= k(r_1 - r), & I \dot{r}_1 + I\omega_0(q_1 - q) &= k(r - r_1). \end{aligned} \quad (7.5.4)$$

Верхние два уравнения (7.5.4) независимы от остальных четырех уравнений, и поэтому характеристическое уравнение для системы (7.5.4) распадается на два уравнения. После раскрытия определителей характеристические уравнения приводятся к виду

$$\begin{aligned} A_{10}I\lambda^2 + k(A_{10} + I)\lambda, \quad a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0, \\ a_0 = A_{20}A_{30}I^2, \quad a_1 = Ik(2A_{20}A_{30} + A_{20}I + A_{30}I), \\ a_2 = I^2\omega_0^2[(A_{10} - A_{20})(A_{10} - A_{30}) + A_{20}A_{30}] + k^2(A_{20} + I)(A_{30} + I), \\ a_3 = I\omega_0^2k[2(A_{10} - A_{20})(A_{10} - A_{30}) + I(A_{10} - A_{20}) + I(A_{10} - A_{30})], \\ a_4 = (I^2\omega_0^2 + k^2)(A_{10} - A_{20})(A_{10} - A_{30})\omega_0^2. \end{aligned} \quad (7.5.5)$$

Нулевой корень первого уравнения (7.5.5) соответствует тому, что начальное возмущение кинетического момента всей системы будет сохраняться постоянным. Ввиду наличия нулевого корня из рассмотрения линеаризованной системы (7.4.4) можно получить лишь необходимые, но не достаточные условия устойчивости движения (7.4.3). Для устойчивости необходимо, чтобы вещественные части всех корней λ уравнений (7.5.5) были неположительны: $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$. Для корней первого уравнения (7.5.5) это условие выполняется при $k \geq 0$. Чтобы оно имело место и для второго уравнения, необходимо, чтобы были выполнены условия Льенара–Шипара [298], в которых можно допустить знаки равенства, так как требуются неравенства $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$, а не $\operatorname{Re} \lambda < 0$, как обычно. Поскольку $a_0 > 0$, условия Льенара–Шипара для второго уравнения (7.5.5) примут вид

$$a_1 \geq 0, \quad a_2 \geq 0, \quad a_4 \geq 0, \quad a_1a_2a_3 \geq a_0a_3^2 + a_1^2a_4. \quad (7.5.6)$$

Используя формулы (7.5.5), последнее неравенство (7.5.6) после громоздких, но элементарных алгебраических преобразований можно привести к виду

$$\begin{aligned} 2I^2\omega_0^2(A_{10} - A_{20} - A_{30})^2[A_{20}(A_{10} - A_{30}) + A_{30}(A_{10} - A_{20})] + \\ + k^2(2A_{20}A_{30} + A_{20}I + A_{30}I)[(A_{10} - A_{20})(A_{20} + I) + \\ + (A_{10} - A_{30})(A_{30} + I)] \geq 0. \end{aligned} \quad (7.5.7)$$

Из условия $a_4 \geq 0$ следует, что необходимо либо $A_{10} \leq A_{20}$ и $A_{10} \leq A_{30}$, либо $A_{10} \geq A_{20}$ и $A_{10} \geq A_{30}$. Но в первом случае, как легко видеть, нарушается условие (7.3.7), а во втором случае при $k \geq 0$ все

условия (7.5.6), (7.5.7) оказываются выполненными. Неравенства $k \geq 0$, $A_{10} \geq A_{20}$, $A_{10} \geq A_{30}$ являются необходимыми условиями устойчивости движения (7.5.3).

Переходя к достаточным условиям, заметим, что система (7.5.2) имеет первый интеграл

$$\begin{aligned} K^2 = (\mathbf{J}_0 \cdot \boldsymbol{\omega} + I\boldsymbol{\omega}_1)^2 = \\ = (A_{10}p + Ip_1)^2 + (A_{20}q + Iq_1)^2 + (A_{30}r + Ir_1)^2 = \text{const}, \end{aligned} \quad (7.5.8)$$

выражающий сохранение кинетического момента всей системы. Кинетическая энергия H , определяемая равенством

$$2H = A_{10}p^2 + A_{20}q^2 + A_{30}r^2 + I(p_1^2 + q_1^2 + r_1^2), \quad (7.5.9)$$

как нетрудно проверить, не возрастает при движении в силу уравнений (7.5.2), т. е. $\dot{H} \leq 0$, если $k \geq 0$. Составим, следуя идее метода Н. Г. Чадаева, функцию Ляпунова:

$$V = 2(A_{10} + I)H - K^2 + [K^2 - (A_{10} + I)^2\omega_0^2]^2. \quad (7.5.10)$$

Нетрудно убедиться, что функция V обращается в нуль в невозмущенном движении (7.5.3). В возмущенном движении сделаем, как и выше, замену $p = \omega_0 + x$, $p_1 = \omega_0 + y$ в равенствах (7.5.8), (7.5.9) и запишем V из (7.5.10) как функцию переменных x , y , q , q_1 , r , r_1 . При этом линейные члены взаимно уничтожаются, и после группировки подобных членов получим

$$\begin{aligned} V = [A_{10}I(x - y)^2 + 4\omega_0^2(A_{10} + I)^2(A_{10}x + Iy)^2] + \\ + [A_{20}(A_{10} + I - A_{20})q^2 - 2A_{20}Iqq_1 + A_{10}Iq_1^2] + \\ + [A_{30}(A_{10} + I - A_{30})r^2 - 2A_{30}Irr_1 + A_{10}Ir_1^2] + \dots \end{aligned} \quad (7.5.11)$$

Точками обозначены члены третьего и высших порядков малости. Первая квадратная скобка в (7.5.11) — положительно-определенная (при $\omega_0 \neq 0$) квадратичная форма от x , y . Для положительной определенности двух других квадратичных форм в (7.5.11) достаточно потребовать

$$A_{10}(A_{10} + I - A_{20}) > A_{20}I, \quad A_{10}(A_{10} + I - A_{30}) > A_{30}I.$$

Раскрывая скобки и сокращая на множитель $(A_{10} + I)$, приведем эти неравенства к виду $A_{10} > A_{20}$, $A_{10} > A_{30}$. При этих условиях функция V

будет положительно-определенной. Так как $\dot{K} = 0$, а $\dot{H} \leq 0$ при $k \geq 0$, то производная функции (7.5.10) в силу уравнений движения неположительна, $\dot{V} \leq 0$, при $k \geq 0$. Поэтому по теореме Ляпунова движение при указанных условиях ($\omega_0 \neq 0$, $k \geq 0$, $A_{10} > A_{20}$, $A_{10} > A_{30}$) будет устойчивым. Заметим, что неравенства $A_{10} > A_{20}$, $A_{10} > A_{30}$ эквивалентны неравенствам $A_1 > A_2$, $A_1 > A_3$ для главных моментов инерции всей системы.

Таким образом, для устойчивости стационарного вращения свободного твердого тела с демпфером вокруг оси O_1x_1 (движение (7.5.3)) при $\omega_0 \neq 0$, $k \geq 0$ необходимо выполнение условий $A_1 \geq A_2$, $A_1 \geq A_3$ и достаточно, чтобы имели место строгие неравенства $A_1 > A_2$, $A_1 > A_3$. Другими словами, устойчивое стационарное вращение свободного твердого тела с демпфером может происходить только вокруг оси наибольшего главного момента инерции.

Полученные стационарные движения и условия их устойчивости (необходимые и достаточные) полностью согласуются с соответствующими условиями для тела с полостью, заполненной жидкостью большой вязкости (см. § 3 данной главы). Такие достаточные условия ($A_1 > A_2$, $A_1 > A_3$) имеют место и в общем случае свободного твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью (см. [108]).

ГЛАВА 8

Эволюция вращений твердого тела в среде

Схема асимптотического решения, предложенная в § 6 главы 4 и в § 2 главы 6, применима не только к задачам движения искусственного спутника относительно центра масс, но и к другим задачам быстрого движения твердого тела. В § 1 данной главы рассматривается быстрое движение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки [55].

В § 2 исследуется быстрое вращательное движение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки при наличии внешнего сопротивления [61, 62].

В § 3, следуя работам [63, 64], рассмотрим движение относительно центра масс спутника под действием гравитационного момента и момента сил сопротивления.

§ 1. Быстрое движение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки

Рассмотрим быстрое движение вокруг неподвижной точки несимметричного тяжелого твердого тела. Быстрыми движениями будем называть такие, для которых момент приложенных сил относительно неподвижной точки мал по сравнению с текущим значением кинетической энергии вращений.

Будем использовать те же обозначения и системы координат, что и в § 5 главы 4 и на рис. 13, 14. Начало всех систем координат O берется в неподвижной точке тела. Ось Ox_3 неподвижной системы координат $Ox_1x_2x_3$ направлена вверх.

Предполагаем, что на тело действует сила тяжести. Положение центра масс определим его координатами (l_1, l_2, l_3) в связанной системе координат

нат $Oz_1z_2z_3$, а также радиус-вектором \mathbf{r}_0 , проведенным из неподвижной точки O . Момент силы тяжести равен

$$\mathbf{L} = mg\mathbf{x}_3 \times \mathbf{r}_0, \quad (8.1.1)$$

где m — масса тела, g — ускорение силы тяжести, \mathbf{x}_3 — единичный вектор, направленный вдоль оси Ox_3 .

Спроектируем равенства (8.1.1) на оси системы координат $Oy_1y_2y_3$ (рис. 13), пользуясь направляющими косинусами α_{ij} из (1.5.4). Получим

$$\begin{aligned} L_1 &= -mg \cos \delta \sum_{j=1}^3 l_j \alpha_{2j}, & L_2 &= mg \sum_{j=1}^3 l_j (\alpha_{3j} \sin \delta + \alpha_{1j} \cos \delta), \\ L_3 &= -mg \sin \delta \sum_{j=1}^3 l_j \alpha_{2j}. \end{aligned} \quad (8.1.2)$$

Подставляя равенства (8.1.2) в уравнения (4.6.3), (4.6.7), получим замкнутую систему уравнений движения. Малые параметры ε , μ (см. (4.6.8)) в данном случае равны

$$\varepsilon = 0, \quad \mu \sim \frac{mgr_0}{A_1 \omega^2} \sim \frac{\omega_1^2}{\omega^2},$$

где ω — величина угловой скорости вращения вокруг неподвижной точки, ω_1 — угловая частота малых колебаний твердого тела относительно устойчивого положения равновесия (как физического маятника). Параметр μ считаем малым и построим решение в первом приближении по μ . Роль медленных переменных играют G , δ , λ , T . Для получения уравнений первого приближения для этих переменных усредним правые части уравнений (4.6.3), (6.1.11) по схеме (4.6.16).

Усредним сначала по ψ проекции момента L_i из (8.1.2), входящие в правые части уравнений (4.6.3), а также правую часть уравнения (6.1.11), которую обозначим через f . Величины направляющих косинусов α_{ij} подставляем в (8.1.2) из (1.5.4). Результат выразим через проекции G_i вектора кинетического момента (4.6.6). Получим

$$\begin{aligned} M_\psi(L_1) &= M_\psi(L_3) = 0, \\ M_\psi(L_2) &= mgG^{-1} \sin \delta (l_1 G_1 + l_2 G_2 + l_3 G_3), \\ M_\psi(f) &= \frac{mg \cos \delta}{G} \left[\left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_3} \right) l_1 G_2 G_3 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{A_3} - \frac{1}{A_1} \right) l_2 G_1 G_3 + \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) l_3 G_1 G_2 \right]. \end{aligned} \quad (8.1.3)$$

Усредним соотношения (8.1.3) еще по траекториям вектора кинетического момента (рис. 6), учитывая, что эти траектории симметричны относительно координатных плоскостей. Поэтому второе усреднение функции f даст нуль.

Примем для определенности, как и ранее, $A_1 > A_2 > A_3$ и будем рассматривать траектории вектора кинетического момента, охватывающие ось Oz_1 (на них $G^2 > 2TA_2$, а G_1 не меняет знак вдоль траектории).

Подставляя усредненные выражения (8.1.3) в уравнения (4.6.3), (6.1.11), получим систему первого приближения

$$\begin{aligned} \dot{G} &= 0, & \dot{\delta} &= 0, & \dot{T} &= 0, \\ \dot{\lambda} &= \frac{mg}{G^2} l_1 M_1(G_1). \end{aligned} \quad (8.1.4)$$

Теперь усредним проекцию G_1 по движению Эйлера–Пуансо. Эта проекция для траекторий с $G^2 > 2TA_2$ по модулю равна [265]

$$|G_1| = A_1 \sqrt{\frac{G^2 - 2TA_3}{A_1(A_1 - A_3)}} \operatorname{dn} \left(\frac{t - t_0}{\tau} 4K(k), k \right), \quad (8.1.5)$$

где τ — период движения, t_0 — произвольная постоянная, k — модуль эллиптических функций. Среднее значение эллиптической функции в (8.1.5) равно [267]

$$M_u(\operatorname{dn} u) = \frac{\pi}{2K(k)}. \quad (8.1.6)$$

Учитывая соотношения (8.1.5), (8.1.6), запишем последнее уравнение (8.1.4) в виде

$$\dot{\lambda} = \frac{\pi m g l_1 A_1}{2G^2 K(k)} \sqrt{\frac{G^2 - 2TA_3}{A_1(A_1 - A_3)}} \operatorname{sgn} G_1. \quad (8.1.7)$$

Таким образом, вектор кинетического момента медленно вращается вокруг вертикали. Величины G , δ и T в этом приближении постоянны, а постоянная угловая скорость вращения вектора кинетического момента определена согласно (8.1.7) (где k^2 задано равенством (4.5.6)) для случая $G^2 > 2TA_2$. При $G^2 < 2TA_2$ нужно поменять местами A_1 и A_3 в формулах (4.5.6), (8.1.7), а также заменить в (8.1.7) l_1 на l_3 . Асимптотическое

решение справедливо с точностью до μ (для G, δ, λ, T) на интервале времени порядка

$$\Delta t \sim \frac{1}{\omega\mu} = \frac{\omega}{\omega_1^2}.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи формулы (8.1.7). При вращении тела вокруг оси Oz_1 имеем

$$G = A_1\omega, \quad T = \frac{1}{2}A_1\omega^2, \quad k = 0,$$

и тогда из (8.1.7) следует

$$\dot{\lambda} = \pm \frac{mgl_1}{A_1\omega}$$

при вращении в положительном и отрицательном направлениях соответственно. Аналогичный вид формула примет и при вращении вокруг других главных осей инерции.

В случае динамической симметрии ($A_1 = A_2$) придем к известной формуле для быстрого волчка в поле тяжести [265]:

$$\dot{\lambda} = \frac{mgl_3 \cos \theta}{G},$$

где θ — угол нутации (между вектором кинетического момента и осью динамической симметрии), который в данном случае остается постоянным в первом приближении.

§ 2. Вращение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в вязкой среде

2.1. Постановка задачи и процедура усреднения

Рассмотрим быстрое движение вокруг неподвижной точки несимметричного тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде, следуя работам [61, 62].

Будем использовать те же обозначения и системы координат, что и в § 5 главы 4 и на рис. 13, 14. Начало всех систем координат O берется в неподвижной точке твердого тела, ось Ox_3 неподвижной системы координат $Ox_1x_2x_3$ направим вертикально вверх.

Соотношения между направляющими косинусами и углами Эйлера представлены формулами (1.5.4).

Уравнения движения тела относительно неподвижной точки запишем в форме [18] (см. также (4.6.3), (4.6.7), (6.1.1), (6.1.2))

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= L_3, & \frac{d\delta}{dt} &= \frac{L_1}{G}, & \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{L_2}{G \sin \delta}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= G \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) + \frac{L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi}{G}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= G \cos \theta \left(\frac{1}{A_3} - \frac{\sin^2 \varphi}{A_1} - \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} \right) + \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G \sin \theta}, \\ \frac{d\psi}{dt} &= G \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A_1} + \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} \right) - \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G} \operatorname{ctg} \theta - \frac{L_2}{G} \operatorname{ctg} \delta. \end{aligned} \quad (8.2.1)$$

Здесь L_i — моменты приложенных сил относительно осей Oy_i , $i = 1, 2, 3$, G — величина кинетического момента, A_1, A_2, A_3 — главные моменты инерции тела относительно осей системы координат $Oz_1z_2z_3$, связанной с главными осями инерции тела.

Проекция вектора \mathbf{G} на оси связанной системы координат $Oz_1z_2z_3$ представлены формулами (2.3.11).

Как и выше, будет удобно наряду с введенными переменными, которые образуют полный набор, использовать в качестве переменной важную характеристику — кинетическую энергию T (см. (2.1.7)), производная по времени которой имеет вид (6.1.11)

$$\begin{aligned} \dot{T} &= \frac{2T}{G} L_3 + G \sin \theta \left[\cos \theta \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A_1} + \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} - \frac{1}{A_3} \right) (L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi) + \right. \\ &\quad \left. + \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) (L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi) \right]. \end{aligned} \quad (8.2.2)$$

Предполагаем, что на тело действуют силы тяжести и сопротивления среды. Положение центра масс определим его координатами (l_1, l_2, l_3) в связанной системе координат $Oz_1z_2z_3$, а также радиус-вектором \mathbf{r}_0 , проведенным из неподвижной точки O . Момент силы тяжести \mathbf{L}^g записывается согласно (8.1.1).

Зависимость диссипативного момента сил сопротивления от вектора угловой скорости вращения твердого тела $\boldsymbol{\omega}$ принимается линейной.

Следуя (5.2.1), запишем в связанной системе координат $Oz_1z_2z_3$ выражения для компонент момента сил вязкого трения:

$$\mathbf{L}^r = - \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}. \quad (8.2.3)$$

Здесь I_{ij} — постоянные коэффициенты момента сил сопротивления вращению тела. В выражении (8.2.3) матрица диссипации считается положительно-определенной и зависящей от формы тела и свойств среды. Полный момент приложенных сил равен $\mathbf{L} = \mathbf{L}^g + \mathbf{L}^r$.

Спроектируем соотношения (8.1.1), (8.2.3) на оси системы координат $Oy_1y_2y_3$, пользуясь направляющими косинусами α_{ij} из (1.5.4):

$$\begin{aligned} L_1 &= -mg \cos \delta \sum_{j=1}^3 l_j \alpha_{2j} - G \sum_{i=1}^3 \left(\frac{I_{i1}}{A_1} \alpha_{31} \alpha_{1i} + \frac{I_{i2}}{A_2} \alpha_{32} \alpha_{1i} + \frac{I_{i3}}{A_3} \alpha_{33} \alpha_{1i} \right), \\ L_2 &= mg \sum_{j=1}^3 l_j (\alpha_{3j} \sin \delta + \alpha_{1j} \cos \delta) - \\ &\quad - G \sum_{i=1}^3 \left(\frac{I_{i1}}{A_1} \alpha_{31} \alpha_{2i} + \frac{I_{i2}}{A_2} \alpha_{32} \alpha_{2i} + \frac{I_{i3}}{A_3} \alpha_{33} \alpha_{2i} \right), \\ L_3 &= -mg \sin \delta \sum_{j=1}^3 l_j \alpha_{2j} - G \sum_{i=1}^3 \left(\frac{I_{i1}}{A_1} \alpha_{31} \alpha_{3i} + \frac{I_{i2}}{A_2} \alpha_{32} \alpha_{3i} + \frac{I_{i3}}{A_3} \alpha_{33} \alpha_{3i} \right). \end{aligned} \quad (8.2.4)$$

Так как изучается быстрое движение, то предполагается малым отношение $\frac{mgl}{T_0} \sim \varepsilon \ll 1$, где l — расстояние от центра масс до неподвижной точки. Сопротивление среды предполагается слабым того же порядка малости: $\|I\|/G_0 \sim \varepsilon \ll 1$, где $\|I\|$ — норма матрицы коэффициентов сопротивления. Здесь в качестве G_0 можно взять начальное значение G .

Исследуем решение системы (8.2.1), (8.2.2) при малом ε на большом промежутке времени $t \sim \varepsilon^{-1}$. Для решения задачи применим метод усреднения по схеме, предложенной в (4.6.16). Погрешность усредненного решения для медленных переменных составляет величину порядка ε на интервале времени, за который тело совершит $\sim \varepsilon^{-1}$ оборотов.

Рассмотрим сначала невозмущенное движение ($\varepsilon = 0$), при котором моменты внешних сил равны нулю. В этом случае вращение твердого тела

является движением Эйлера–Пуансо. Величины G , δ , λ , T обращаются в постоянные, а θ , φ , ψ — некоторые функции времени t . Медленными переменными в возмущенном движении будут G , T , δ , λ , а быстрыми — углы Эйлера θ , φ , ψ .

Усреднение проводится по движению Эйлера–Пуансо для нерезонансных случаев. Так как частоты движения Эйлера–Пуансо $\omega_1 = \frac{2\pi}{\tau(G, T)}$ и $\omega_2 = \frac{2\pi}{\tau'(G, T)}$ зависят от G , T , то условие их несоизмеримости может нарушаться (резонансные явления). Исследование резонансов требует дополнительного рассмотрения. Однако, так как система «не застревает» на резонансе (ниже показано, что переменные G и T , от которых зависят частоты ω_1 , ω_2 , монотонно убывают), после перехода через резонанс движение тела снова описывается уравнениями для нерезонансного случая. Точность в определении медленных переменных при этом составит на интервале $\Delta t \sim \varepsilon^{-1}$ величину $O(\sqrt{\varepsilon} |\ln \varepsilon|)$ [11, 299], которая стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Примем для определенности $A_1 > A_2 > A_3$ и рассмотрим движение при условии $2TA_1 \geq G^2 > 2TA_2$, соответствующем траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось Oz_1 . Введем величину k^2 согласно (2.3.6), представляющую собой в невозмущенном движении постоянную — квадрат модуля эллиптических функций, описывающих движение Эйлера–Пуансо. В возмущенном движении k^2 будет медленной переменной.

Для построения системы усредненных уравнений первого приближения подставим решение невозмущенного движения Эйлера–Пуансо (2.3.7) в правые части уравнений (8.2.1), (8.2.2) и проведем усреднение по переменной ψ , а затем по времени t с учетом зависимости θ , φ от t . Подобная схема усреднения была использована выше при исследовании движения тела с трехосным эллипсоидом инерции относительно центра масс в главе 6. Для медленных усредненных переменных сохраняются прежние обозначения. В результате, используя формулы для интегралов от эллиптических функций [268], получим

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= \frac{\pi mgl_1}{2G^2 K(k)} \sqrt{\frac{A_1(G^2 - 2TA_3)}{A_1 - A_3}}, \quad \dot{\delta} = 0, \\ \dot{G} &= -\frac{G}{R(k)} \{I_{22}(A_1 - A_3)W(k) + I_{33}(A_1 - A_2)[k^2 - W(k)] + \\ &\quad + I_{11}(A_2 - A_3)[1 - W(k)]\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{T} &= -\frac{2T}{R(k)} \{I_{22}(A_1 - A_3)W(k) + I_{33}(A_1 - A_2)[k^2 - W(k)] + \\ &+ \frac{(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)(A_2 - A_3)}{S(k)} \left\{ \frac{I_{33}}{A_3} [k^2 - W(k)] + \right. \\ &\left. + \frac{I_{22}}{A_2} (1 - k^2)W(k) \right\} + \frac{I_{11}}{A_1} \frac{(A_2 - A_3)R(k)}{S(k)} [1 - W(k)] \}, \\ R(k) &= A_1(A_2 - A_3) + A_3(A_1 - A_2)k^2, \\ W(k) &= 1 - \frac{E(k)}{K(k)}, \quad S(k) = A_2 - A_3 + (A_1 - A_2)k^2. \end{aligned} \quad (8.2.5)$$

Здесь $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

Дифференцируя выражение для k^2 из (2.3.6) и используя уравнения (8.2.5) для \dot{G} и \dot{T} , получим дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{dk^2}{d\xi} &= (1 - \chi)(1 - k^2) - [(1 - \chi) + (1 + \chi)k^2] \frac{E(k)}{K(k)}, \\ \chi &= (2I_{22}A_1A_3 - I_{11}A_2A_3 - I_{33}A_1A_2) / [(I_{33}A_1 - I_{11}A_3)A_2], \\ \xi &= (t - t_*)/N, \quad N = A_1A_3 / (I_{33}A_1 - I_{11}A_3). \end{aligned} \quad (8.2.6)$$

Здесь t_* — постоянная. Значению $k^2 = 1$ отвечает равенство $2TA_2 = G^2$, что соответствует сепаратрисе для движения Эйлера–Пуансо. Если для некоторого решения уравнения (8.2.6) равенство $k^2 = 1$ достигается, то выберем t_* так, чтобы $k^2 = 1$ при $\xi = 0$, $t = t_*$. Отметим, что в зависимости от соотношений между величинами I_{11} , I_{33} , A_1 , A_3 параметр N может принимать положительные и отрицательные значения; он имеет размерность времени.

Из уравнений (8.2.5) следует, что наличие сопротивления среды приводит к эволюции как кинетической энергии тела T , так и величины кинетического момента G . Непосредственно видно, что в первом приближении на изменение T и G оказывает влияние только сила сопротивления среды, причем в уравнения входят лишь диагональные коэффициенты I_{ii} матрицы момента трения, введенной в (8.2.3). Члены, содержащие недиагональные компоненты I_{ij} , $i \neq j$, выпадают при усреднении. Угловая скорость вращения вектора кинетического момента вокруг вертикали $\dot{\lambda}$ зависит как от действия силы тяжести, так и от силы сопротивления среды. Отметим, что

действие этих сил не приводит к изменению угловой переменной δ и отклонение от вертикали остается постоянным в указанном приближении.

Уравнение (8.2.6) описывает усредненное движение конца вектора кинетического момента \mathbf{G} на сфере радиуса G . Третье уравнение (8.2.5) описывает изменение радиуса сферы с течением времени.

Выражение, стоящее в фигурных скобках правой части уравнения для G , положительно (при $A_1 > A_2 > A_3$), так как справедливы неравенства $(1 - k^2)K \leq E \leq K$ (см. [268]). Каждый коэффициент при I_{ii} является неотрицательной функцией k^2 , причем одновременно они все в нуль обратиться не могут. Поэтому $dG/dt < 0$ при $G > 0$, т. е. переменная G строго убывает для любых $k^2 \in [0, 1]$. Аналогично показывается, что кинетическая энергия также строго убывает.

Уравнения (8.2.5), (8.2.6) для G , T , k^2 допускают интегрирование в квадратурах. Запишем эти уравнения в виде

$$\dot{G} = -Gf_G(k^2), \quad \dot{T} = -Tf_T(k^2), \quad (k^2)' = f_k(k^2), \quad (8.2.7)$$

где f_G , f_T и f_k — функции, определенные уравнениями (8.2.5), (8.2.6). Отсюда находим

$$\begin{aligned} G(k^2) &= G_0 \exp \left[- \int_{k_0^2}^{k^2} F_G(s) ds \right], \quad T(k^2) = T_0 \exp \left[- \int_{k_0^2}^{k^2} F_T(s) ds \right], \\ F_{G,T}(k^2) &= \frac{f_{G,T}(k^2)}{f_k(k^2)}, \quad \int_{k_0^2}^{k^2} \frac{ds}{f_k(s)} = t - t_0. \end{aligned} \quad (8.2.8)$$

Оценивая функцию f_G из (8.2.7), находим, что справедливо дифференциальное неравенство

$$-f_{G-} \leq \frac{\dot{G}}{G} \leq -f_{G+}, \quad k^2 \in [0, 1], \quad (8.2.9)$$

где f_{G-} , f_{G+} — положительные постоянные. Следовательно, интегрируя (8.2.8), получим оценку для G

$$G_0 \exp(-f_{G-}t) \leq G \leq G_0 \exp(-f_{G+}t). \quad (8.2.10)$$

Аналогичные (8.2.10) неравенства справедливы для T , они получаются заменой G на T .

2.2. Исследование уравнения для k^2

Основным этапом в исследовании движения тела является анализ уравнения (8.2.6). Интересно, что это уравнение совпадает с уравнением (7.3.14), полученным для случая свободного пространственного движения тела с полостью, заполненной жидкостью большой вязкости [113, 121, 122]. Отметим, что в уравнение (8.2.6) не входит ускорение силы тяжести. На эволюцию k^2 оказывает влияние только сопротивление среды, и в силу того, что это уравнение интегрируется самостоятельно, происходит частичное разделение влияния сопротивления и тяжести. Полное разделение в данном случае не имеет места, так как медленно убывающие переменные G, T входят в правую часть выражения для $\dot{\lambda}$. Заметим, что в § 1 данной главы исследовано влияние возмущающего момента силы тяжести на движение твердого тела (сопротивление отсутствует), в этом случае G, T сохраняются постоянными.

Нетрудно проверить, что величину χ из (8.2.6) можно представить в виде

$$\chi = \frac{A_3\chi_1 - A_1\chi_2}{A_3\chi_1 + A_1\chi_2}, \quad \chi_1 = I_{22}A_1 - I_{11}A_2, \quad \chi_2 = I_{33}A_2 - I_{22}A_3.$$

Так как величины χ_1, χ_2 могут принимать произвольные значения, то в зависимости от параметров задачи величина χ изменяется в диапазоне от $-\infty$ до $+\infty$.

Заметим, что в работах [113, 121, 122], где впервые получено уравнение (8.2.6), выполнялись неравенства $\chi_1 > 0, \chi_2 > 0$ и, следовательно, $|\chi| \leq 1$ (см. § 3 гл. 7). В статье [125] рассматривалось уравнение вида (8.2.6) для твердого тела с полостью произвольной формы, заполненной сильно вязкой жидкостью, где параметр χ изменялся в пределах $|\chi| \leq 3$ (см. § 3 гл. 7). В указанных работах проведено численное интегрирование уравнения (8.2.6) при начальном условии $k^2(0)$, близком к 1. Показано, что функция k^2 монотонно убывает от 1 до 0 с ростом ξ , причем тем быстрее, чем больше χ .

Уравнение вида (8.2.6) получено также в работе [56] при исследовании влияния вихревых токов на вращение и ориентацию спутника с трехосным эллипсоидом инерции и в статье [300] при рассмотрении движения вокруг центра масс быстро вращающегося твердого тела под действием сил, возникающих при движении проводника в однородном магнитном поле.

Далее исследуется семейство решений уравнения (8.2.6), соответствующее различным $\chi \in (-\infty, +\infty)$. Заметим, что для $\chi < -3$ появляются

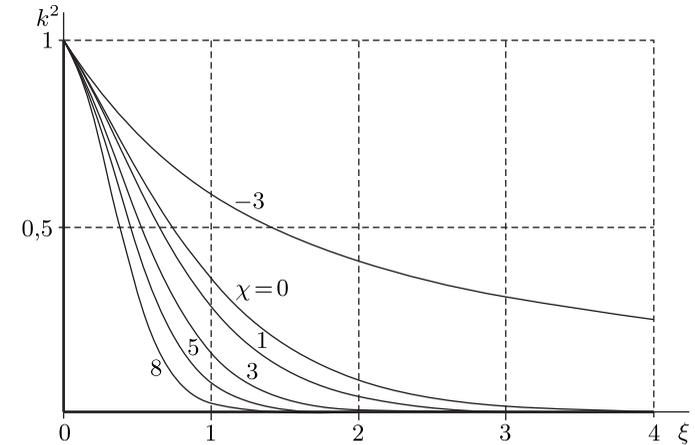


Рис. 26

новые качественные эффекты, а при $\chi > 3$ характер решения тот же, что и при $|\chi| \leq 3$. Действительно, как видно из графиков функций $k^2(\chi, \xi)$, приведенных на рис. 26 для $\chi = -3, 0, 1, 3, 5, 8$, большим χ соответствуют более быстро убывающие функции аргумента ξ .

При $\chi < -3$ уравнение (8.2.6) для k^2 допускает стационарные точки $k^2 = k_*^2$, т. е. независимо от G и T величина k^2 в силу уравнения (8.2.6) остается постоянной при соответствующем выборе начальных условий. Отметим, что при $\chi > -3$ таких стационарных точек (кроме $k = 0, k = 1$) не существует.

Определим квазистационарные решения $k^2 = k_*^2$, для чего приравняем правую часть (8.2.6) нулю. Полученное уравнение разрешим относительно χ :

$$\chi = \frac{k^2 - 1 + (1 + k^2)E(k)/K(k)}{(1 - k^2)[E(k)/K(k) - 1]}. \quad (8.2.11)$$

График зависимости χ от k^2 , определенной численно, изображен кривой 1 на рис. 27, из которой следует, что при любом $\chi < -3$ существует единственное значение $k_*^2 \in (0, 1)$, отвечающее квазистационарному движению $k^2 = k_*^2 = \text{const}$.

Был проведен численный анализ решений уравнения (8.2.6) при $\chi < -3$. Для заданных значений $k_*^2 \in (0, 1)$, отвечающих квазистационарному движению, соответствующие значения χ определялись по форму-

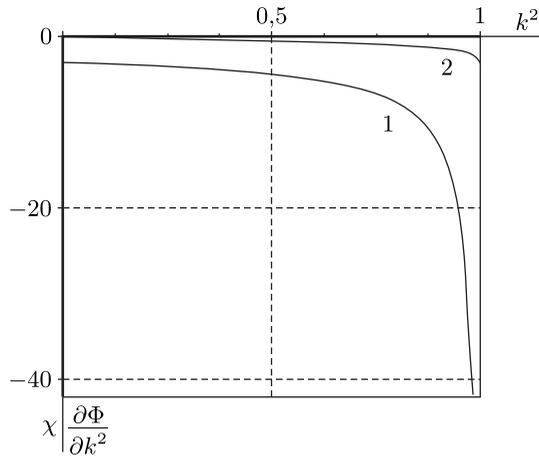


Рис. 27

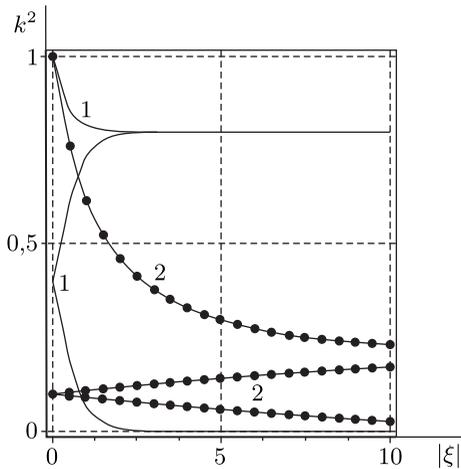


Рис. 28

ле (8.2.11). На рис. 28 изображены типичные графики функций $k^2(\chi, \xi)$, полученные в результате численного интегрирования уравнения (8.2.6). Здесь сплошные кривые отвечают значению $k_*^2 = 0,8$, а кривые с маркерами — значению $k_*^2 = 0,2$. Каждому из этих значений соответствуют три вет-

ви. В качестве начального условия для верхних ветвей выбиралось $k^2(0) = 1 - \delta$, где $\delta \ll 1$. Две нижние ветви на каждом графике были построены при начальных условиях $k^2(0) = 0,5k_*^2$. При этом возрастающая ветвь отвечает интегрированию для $\xi > 0$, а убывающая ветвь является зеркальным отражением относительно прямой $\xi = 0$ зависимости $k^2(\chi, \xi)$, полученной при $\xi < 0$.

Изображенные кривые позволяют для указанных значений параметров построить решение уравнения (8.2.6) при любом начальном условии. Действительно, ввиду автономности уравнения (8.2.6) для k^2 решение $k^2(\chi, \xi)$ при любых начальных условиях определяется сдвигом начала отсчета по оси ξ . Поэтому при любом начальном значении $k^2 = k_0^2$ можно, выбрав соответствующую ветвь графиков, описать дальнейшее изменение k^2 этой ветвью. Если $k_0^2 > k_*^2$, то берется верхняя ветвь, если $0,5k_*^2 \leq k_0^2 < k_*^2$ — средняя.

Если же $k_0^2 < 0,5k_*^2$, то берется нижняя ветвь, движение по которой происходит с ростом ξ в отрицательную сторону до $k^2 = 0,5k_*^2$, после чего переходим на среднюю ветвь. При $k_0^2 = k_*^2$ имеем стационарное решение.

2.3. Качественное исследование частных случаев движения твердого тела

Рассмотрим некоторые частные случаи движения. При $I_{33}A_1 = I_{11}A_3$ в соотношениях (8.2.6) имеем $|N| \rightarrow \infty$, $|\chi| \rightarrow \infty$. После раскрытия неопределенности вместо уравнения (8.2.6) получим

$$\frac{dk^2}{dt} = \frac{2}{A_1 A_2} (I_{11} A_3 - I_{22} A_1) \left[1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right]. \quad (8.2.12)$$

Следовательно, при $I_{11}A_3 > I_{22}A_1$ переменная k^2 возрастает и стремится к единице, при $I_{11}A_3 < I_{22}A_1$ величина k^2 убывает и стремится к нулю, т. е. движение стремится к вращению вокруг оси Oz_1 , соответствующей максимальному моменту инерции A_1 (см. рис. 6).

Из (8.2.6) следует, что решение $k^2 = 0$ удовлетворяет уравнению. Такое квазистационарное движение отвечает замедленному вращению вокруг оси с наибольшим моментом инерции.

Из уравнений (8.2.5), полученных для движений при условии $2TA_1 \geq G^2 > 2TA_2$, для переменных G и T при $k^2 = 0$ получаются выражения

$$G = G_0 \exp\left(-\frac{I_{11}}{A_1}t\right), \quad T = T_0 \exp\left(-2\frac{I_{11}}{A_1}t\right).$$

Формально полагая $k^2 = 1$, что соответствует движению по сепаратрисе случая Эйлера–Пуансо, имеем

$$G = G_0 \exp\left(-\frac{I_{22}t}{A_2}\right), \quad T = T_0 \exp\left(-2\frac{I_{22}t}{A_2}\right).$$

Таким образом, в частных случаях вращения твердого тела вокруг оси Oz_1 и движения по сепаратрисе наличие силы сопротивления среды приводит к тому, что величина кинетического момента и кинетическая энергия убывают по экспоненциальному закону.

Аналогичные рассуждения могут быть проведены в области $2TA_2 > G^2 \geq 2TA_3$. При этом значение $k^2 = 0$ отвечает вращению вокруг оси Oz_3 , соответствующей минимальному моменту инерции A_3 (см. рис. 6).

При малых k^2 , отвечающих движениям твердого тела, близким к вращениям вокруг оси Oz_1 , правую часть уравнения (8.2.6) можно упростить, используя разложения полных эллиптических интегралов в ряды по k^2 [268]. В этом случае уравнение (8.2.6) интегрируется, и его асимптотическое решение записывается в виде

$$k^2 = C_1 \exp\left[-\frac{(3+\chi)\xi}{2}\right] = C_2 \exp\left[-\frac{A_3\chi_1 + A_2(I_{33}A_1 - I_{11}A_3)}{A_1A_2A_3}t\right], \quad (8.2.13)$$

где $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ – постоянные.

В случае малых k^2 аналитические выражения для величины кинетического момента и кинетической энергии (8.2.8) можно получить в явном виде. Так, например, формула (8.2.8) для G в этом случае с погрешностью $O(k^4)$ может быть записана следующим образом:

$$G = G_0 \exp\left\{-\frac{I_{11}t}{A_1} + b_1 \left(\exp\left[-\frac{A_3\chi_1 + A_2(I_{33}A_1 - I_{11}A_3)}{A_1A_2A_3}t\right] - 1\right)\right\},$$

$$b_1 = -\frac{C_2(I_{33}A_1 - I_{11}A_3)}{2(A_1 - A_3)(I_{22}A_1A_3 + I_{33}A_1A_2 - 2I_{11}A_2A_3)}. \quad (8.2.14)$$

Аналогичным образом может быть выражена зависимость $T(t)$.

Для величин k^2 , близких к единице и отвечающих движениям твердого тела вблизи сепаратрисы, правую часть уравнения (8.2.6) можно записать, применяя асимптотические разложения $E(k)$, $K(k)$ при $k^2 \sim 1$ [268]. В результате разложения и последующего интегрирования уравнения (8.2.6) по-

лучим

$$\xi = \frac{(1-k^2)}{2} \left(\ln \frac{4}{\sqrt{1-k^2}} + \frac{1}{2} \right). \quad (8.2.15)$$

Отметим, что производная функции k^2 при $\xi = 0$ равна нулю. Кроме того, уравнение (8.2.6) допускает точное частное решение $k^2 = 1$, поэтому при $k^2 = 1$ теряется единственность решения. Это обстоятельство связано с тем, что при $k^2 = 1$ периодические движения Эйлера–Пуансо вырождаются в аperiodическое движение по сепаратрисе, и условия применимости метода усреднения нарушаются. Однако, как следует из работ [11, 16, 301], метод усреднения пригоден для описания движений при всех начальных условиях, кроме множества малой меры; ухудшается лишь точность метода.

2.4. Исследование устойчивости квазистационарных движений

Устойчивость квазистационарных движений, найденных в пп. 2.2, 2.3 проанализируем в рамках усредненного уравнения (8.2.6). Для этого определим знак функции $\partial\Phi/\partial k^2$ при значении χ , соответствующем квазистационарным движениям (здесь $\Phi(k^2, \chi)$ – правая часть уравнения (8.2.6)). На рис. 27 кривая 2 изображает график функции $\partial\Phi/\partial k^2$, полученный в результате численного расчета. Как следует из графика, $\partial\Phi/\partial k^2 < 0$, т. е. все квазистационарные движения п. 2.2 асимптотически устойчивы по отношению к переменной k^2 (в смысле [302] для $\xi \geq 0$). Это видно также из графика рис. 28.

В истинном времени $t \geq t_*$ имеет место устойчивость при $N > 0$ или $I_{33}A_1 > I_{11}A_3$ (см. (8.2.6)). В обратном случае, при $N < 0$, $I_{33}A_1 < I_{11}A_3$, эти квазистационарные движения неустойчивы.

Асимптотическая устойчивость понимается в том смысле, что при малых отклонениях следа вектора \mathbf{G} на единичной сфере от движения по траектории Эйлера–Пуансо, отвечающей квазистационарному движению, след вектора \mathbf{G} стремится с течением времени возвратиться на эту траекторию.

Квазистационарное движение $k^2 = 0$, согласно (8.2.13), для $\xi > 0$ асимптотически устойчиво при $\chi > -3$ и неустойчиво при $\chi < -3$. В истинном времени для $t \geq t_*$ данное движение может быть как асимптотически устойчивым, так и неустойчивым, в зависимости от величины χ и знака параметра N .

На основе проведенного анализа получаем следующую качественную картину движения. Рассмотрим сначала случай $N > 0$. Функцией (8.2.13), формулами (2.3.6) для k^2 , а также уравнениями и (8.2.5), (8.2.6) движение описывается при $t \geq t_*$, т. е. в области $2TA_1 \geq G^2 > 2TA_2$. При $t \leq t_*$ выполняются неравенства $2TA_2 > G^2 \geq 2TA_3$, соответствующие траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось Oz_3 (рис. 6). В этом случае нужно поменять местами A_1 и A_3 , I_{11} и I_{33} в формулах (2.3.6), (8.2.5), (8.2.6), а также заменить l_1 на l_3 в (8.2.5). Тогда уравнение (8.2.6) сохранит свой вид, но в нем нужно будет заменить χ на $-\chi$, N на $-N$.

Аналогично определяется движение при $N < 0$. Предполагается, что в момент времени $t = t_*$ движение (одна из ветвей на рис. 28) переходит через сепаратрису, однако, как уже отмечалось, здесь возможно «застревание» на неопределенно долгое время для множества начальных данных малой меры [11, 16, 301].

На рис. 29 показан характер изменения величины k^2 в зависимости от χ , N в истинном времени t . Указаны точки, соответствующие квазистационарным движениям, а стрелками показано направление движения. Буквы z_1, z_2, z_3 — оси тела, которым соответствует данное значение k^2 , причем слева от z_2 расположена область, где $2TA_1 \geq G^2 > 2TA_2$, а справа — область, в которой $2TA_2 > G^2 \geq 2TA_3$.

Полученным результатам можно дать следующую интерпретацию. Введем обозначения

$$\mu_i = I_{ii}/A_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad \beta_i = \mu_i/\mu_2, \quad i = 1, 2, 3. \quad (8.2.16)$$

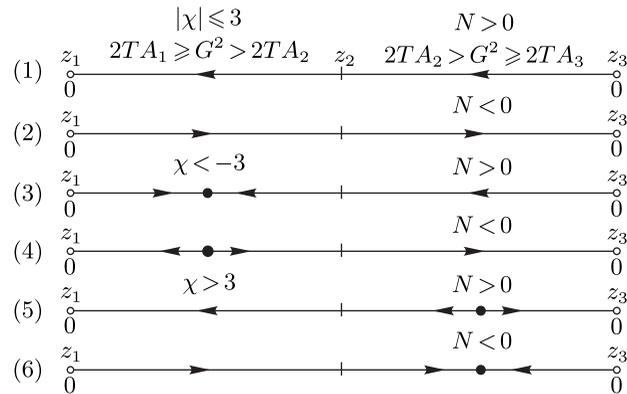


Рис. 29

Вращение тела вокруг одной из главных осей, например Oz_1 , под действием диссипативного момента описывается соотношениями

$$A_1 \frac{d\omega}{dt} = -I_{11}\omega, \quad \omega = \text{const} \cdot \exp(-\mu_1 t).$$

Поэтому величины μ_i в (8.2.16) имеют смысл коэффициентов торможения вращений вокруг осей инерции Oz_i . Безразмерные величины β_i равны соответствующим коэффициентам, отнесенным к μ_2 ; при этом $\beta_2 = 1$. Соотношения (8.2.6) для χ , N перепишем через β_i в виде

$$\chi = \frac{2 - \beta_1 - \beta_3}{\beta_3 - \beta_1}, \quad N = \frac{1}{\mu_2(\beta_3 - \beta_1)}. \quad (8.2.17)$$

В плоскости $\beta_1\beta_3$ проведем прямую $\beta_3 = \beta_1$, на которой N меняет знак, и прямые $1 + \beta_1 = 2\beta_3$ и $1 + \beta_3 = 2\beta_1$, отвечающие согласно (8.2.17) равенствам $\chi = \pm 3$. Эти прямые разбивают квадрант $\beta_1 > 0, \beta_3 > 0$ на шесть областей, изображенных на рис. 30. Номера областей отвечают порядковому номеру качественных картин движения, изображенных на рис. 30. Отсюда видно, что число квазистационарных режимов движения и их устойчивость зависят от относительной величины коэффициентов затухания вращений μ_i вокруг главных осей инерции.

Итак, в рассматриваемом приближении возмущенное движение тела складывается из быстрого движения Эйлера–Пуансо вокруг вектора \mathbf{G} и из медленной эволюции параметров этого движения.

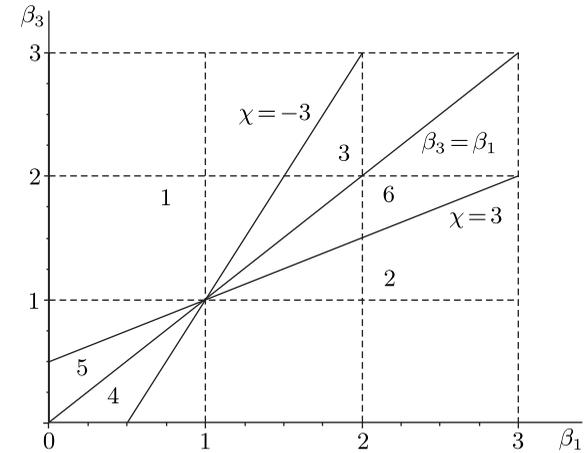


Рис. 30

Величины кинетического момента и кинетической энергии строго убывают, и их изменение зависит только от сопротивления среды. Движение самого вектора \mathbf{G} в пространстве описывается первыми двумя уравнениями системы (8.2.5) и происходит с постоянным отклонением от вертикали, $\delta = \text{const}$. В отличие от случая воздействия только силы тяжести, рассмотренного в § 1 этой главы, скорость вращения вектора \mathbf{G} вокруг вертикали переменна. Эволюция параметров движения Эйлера–Пуансо в системе координат, связанной с телом, описывается уравнением (8.2.6) и качественно представлена на рис. 29, 30.

2.5. Случай динамической симметрии

Для осесимметричного тела ($A_1 = A_2$) система усредненных уравнений (8.2.5) для медленных переменных принимает вид [306]

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= \frac{mgl_3}{G} \cos \theta, \quad \dot{\delta} = 0, \\ \frac{\dot{G}}{G} &= - \left[\frac{\sin^2 \theta}{2A_1} (I_{11} + I_{22}) + \frac{I_{33}}{A_3} \cos^2 \theta \right], \\ \dot{\theta} &= \sin \theta \cos \theta \left(\frac{I_{33}}{A_3} - \frac{I_{11} + I_{22}}{2A_1} \right). \end{aligned} \quad (8.2.18)$$

Уравнения (8.2.18) указывают на то, что сопротивление среды приводит к эволюции переменных G и θ , которые оставались постоянными в § 1 при отсутствии сопротивления среды.

Интегрируя последнее уравнение (8.2.18), получим

$$\text{tg } \theta = \text{tg } \theta_0 \exp \left[\left(\frac{I_{33}}{A_3} - \frac{I_{11} + I_{22}}{2A_1} \right) t \right]. \quad (8.2.19)$$

Из (8.2.19) видно, что при $\frac{I_{33}}{A_3} > \frac{I_{11} + I_{22}}{2A_1}$ угол θ увеличивается и стремится к $\frac{\pi}{2}$. Окончательным движением здесь будет вращение вокруг оси, перпендикулярной оси динамической симметрии.

При $I_{11} = I_{22} = I_{33} = I$ и $A_1 > A_3$ динамически вытянутое тело опрокидывается. Такой результат был получен в [17] для динамически симметричного спутника, находящегося под действием сил аэродинамической диссипации. В случае $\frac{I_{11} + I_{22}}{2A_1} > \frac{I_{33}}{A_3}$ угол θ убывает и стремится к нулю. В этом случае при $I_{11} = I_{22} = I_{33} = I$ выполняется условие устойчивости $A_3 > A_1$, полученное в [303].

Таким образом, динамически сжатое тело стабилизируется вокруг оси симметрии, что также совпадает с выводом [17]. Окончательное движение будет вращением вокруг оси динамической симметрии. Отсюда можно сделать вывод, что движение стремится к вращению вокруг оси с наибольшим моментом инерции.

Третье уравнение (8.2.18) при подстановке выражения (8.2.19) для θ интегрируется в явном виде

$$G^2 = G_0^2 \cos^2 \theta_0 \left[\exp \left(-2 \frac{I_{33}}{A_3} t \right) + \text{tg}^2 \theta_0 \exp \left(-\frac{I_{11} + I_{22}}{A_1} t \right) \right]. \quad (8.2.20)$$

Исследуем скорость вращения $\dot{\lambda}$ вектора кинетического момента вокруг вертикали. Из уравнений (8.2.18) и соотношений (8.2.19), (8.2.20) следует, что

$$\dot{\lambda} = \frac{mgl_3 (1 + \text{tg}^2 \theta_0)^{1/2}}{G_0 \left\{ \exp \left(-\frac{I_{33}}{A_3} t \right) + \text{tg}^2 \theta_0 \exp \left[\left(\frac{I_{33}}{A_3} - \frac{I_{11} + I_{22}}{A_1} \right) t \right] \right\}}. \quad (8.2.21)$$

При этом согласно (8.2.21) в случае $\frac{I_{33}}{A_3} > \frac{I_{11} + I_{22}}{2A_1}$ угловая скорость $\dot{\lambda}$ вращения вектора кинетического момента \mathbf{G} вокруг вертикали убывает и $\dot{\lambda} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Если же $\frac{I_{11} + I_{22}}{2A_1} = \frac{I_{33}}{A_3}$, то $\dot{\lambda} \rightarrow \frac{mgl_3 (1 + \text{tg}^2 \theta_0)^{1/2}}{G_0 \text{tg}^2 \theta_0}$ при $t \rightarrow \infty$. Отметим, что при $\frac{I_{11} + I_{22}}{2A_1} > \frac{I_{33}}{A_3}$ знаменатель выражения (8.2.21) убывает и стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, в этом случае $\dot{\lambda}$ возрастает и $\dot{\lambda} \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, во всех случаях проведен полный анализ движения тела в сопротивляющейся среде при линейном сопротивлении.

В работе [127] рассматривается быстрое движение вокруг неподвижной точки в сопротивляющейся среде тяжелого твердого тела со сферической полостью, заполненной жидкостью большой вязкости.

§ 3. Быстрое вращение спутника относительно центра масс под действием гравитационного момента в среде с сопротивлением

Рассмотрим движение спутника относительно центра масс под действием совместного влияния моментов сил гравитационного притяжения и сил сопротивления [63, 64].

Введем три декартовы системы координат, как указано в § 6 главы 4. Положение вектора кинетического момента \mathbf{G} относительно центра масс спутника в системе координат Ox_i , $i = 1, 2, 3$, связанной с орбитой, определяется углами λ и δ , как показано на рис. 13.

Рассматривается динамически несимметричный спутник, моменты инерции которого для определенности удовлетворяют неравенству $A_1 > A_2 > A_3$ в предположении, что угловая скорость ω движения спутника относительно центра масс существенно больше угловой скорости орбитального движения ω_0 , т. е. $\varepsilon = \omega_0/\omega \sim A_1\omega_0/G \ll 1$. В этом случае кинетическая энергия вращения тела велика по сравнению с моментами возмущающих сил.

Орбита спутника предполагается круговой, поэтому плотность атмосферы можно считать постоянной во время движения.

Уравнения движения тела относительно центра масс запишем в форме (4.6.3), (4.6.7).

Проекция L_i момента внешних сил складывается из гравитационного момента L_i^g и момента сил внешнего сопротивления L_i^r . Проекция этих моментов на оси системы Oy_i , $i = 1, 2, 3$, связанные с вектором кинетического момента (см. рис. 13), записываются в виде (5.1.18) и (5.2.1). Приведем проекцию на ось Oy_1 , проекции на другие оси имеют аналогичный вид:

$$\begin{aligned} L_1 = L_1^g + L_1^r = 3\omega_0^2 \sum_{j=1}^3 (\sigma_2 \sigma_j s_{3j} - \sigma_3 \sigma_j s_{2j}) - \\ - G \sum_{i=1}^3 \left(\frac{I_{i1} \alpha_{1i} \alpha_{31}}{A_1} + \frac{I_{i2} \alpha_{1i} \alpha_{32}}{A_2} + \frac{I_{i3} \alpha_{1i} \alpha_{33}}{A_3} \right), \quad (8.3.1) \\ s_{mj} = \sum_{p=1}^3 A_p \alpha_{jp} \alpha_{mp}, \quad \sigma_1 = \cos(\nu - \lambda) \cos \delta, \\ \nu = \omega_0 t, \quad \sigma_2 = \sin(\nu - \lambda), \quad \sigma_3 = \cos(\nu - \lambda) \sin \delta. \end{aligned}$$

Здесь предполагается, что момент сил сопротивления \mathbf{L}^r может быть представлен в виде $\mathbf{L}^r = -I\omega$, аналогично рассмотренному в § 2 главы 5.

В соотношениях (8.3.1) использованы также формулы (5.1.17) и (5.1.19), причем $\nu = \omega_0 t$ — истинная аномалия, отсчитываемая от произвольной точки круговой орбиты, выбранной в качестве начальной.

Производная кинетической энергии имеет вид (8.2.2). Ставится задача исследовать решение при малом ε на большом промежутке време-

ни $t \sim \varepsilon^{-2}$. Для решения задачи будем применять метод усреднения согласно (4.6.16).

Как в задаче о движении твердого тела вокруг неподвижной точки в вязкой среде (§ 2 главы 7), так и в рассматриваемой задаче в случае невозмущенного движения (движение Эйлера–Пуансо) величины G , δ , λ , T обращаются в постоянные, а φ , ψ , θ — некоторые функции времени t . Медленными переменными в возмущенном движении будут G , δ , λ , T , а быстрыми — углы Эйлера φ , ψ , θ .

Рассмотрим движение при условии $2TA_1 \geq G^2 > 2TA_2$, соответствующем траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось максимального момента инерции Oz_1 . Введем величину k^2 согласно (2.3.6), представляющую собой в невозмущенном движении постоянную — квадрат модуля эллиптических функций, описывающих это движение.

Для построения усредненной системы первого приближения проведем усреднение по переменной ψ , а затем по времени t с учетом зависимости φ , ψ от t , следуя (4.6.16). При этом для медленных переменных δ , λ , G , T сохраняются прежние обозначения. В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{dt} = -\frac{3\omega_0^2}{2G} \sigma_2 \sigma_3 N^*, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{3\omega_0^2}{2G \sin \delta} \sigma_1 \sigma_3 N^*, \\ \frac{dG}{dt} = -\frac{G}{R(k)} \{ I_{22}(A_1 - A_3)W(k) + \\ + I_{33}(A_1 - A_2)[k^2 - W(k)] + I_{11}(A_2 - A_3)[1 - W(k)] \}, \\ \frac{dT}{dt} = -\frac{2T}{R(k)} \{ I_{22}(A_1 - A_3)W(k) + I_{33}(A_1 - A_2)[k^2 - W(k)] + \\ + \frac{(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)(A_2 - A_3)}{S(k)} \left\{ \frac{I_{33}}{A_3} [k^2 - W(k)] + \right. \\ \left. + \frac{I_{22}}{A_2} (1 - k^2)W(k) \right\} + \frac{I_{11}}{A_1} \frac{(A_2 - A_3)R(k)}{S(k)} [1 - W(k)] \}. \quad (8.3.2) \end{aligned}$$

Здесь

$$N^* = A_2 + A_3 - 2A_1 + 3 \left(\frac{2A_1 T}{G^2} - 1 \right) \left[A_3 + (A_2 - A_3) \frac{K(k) - E(k)}{K(k)k^2} \right],$$

а $R(k)$, $W(k)$, $S(k)$ введены согласно (8.2.5).

Третье и четвертое уравнения системы (8.3.2) совпадают с уравнениями изменения кинетического момента и кинетической энергии (8.2.5). Это

объясняется тем, что эволюция этих величин происходит только под действием сопротивления среды.

Дифференциальное уравнение изменения величины k^2 снова имеет вид (8.2.6). Из этого следует, что усредненное движение конца вектора кинетического момента \mathbf{G} на сфере радиуса G имеет одинаковый характер с изученным в § 2 данной главы.

Рассмотрим систему, состоящую из первых двух уравнений системы (8.3.2). С учетом равенств (5.1.19) и $\nu = \omega_0 t$ получим

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= -\frac{3\omega_0^2}{G} N^* \sin \delta \sin(\nu - \lambda) \cos(\nu - \lambda), \\ \dot{\lambda} &= \frac{3\omega_0^2}{2G} N^* \cos \delta \cos^2(\nu - \lambda), \\ \dot{\nu} &= \omega_0. \end{aligned} \quad (8.3.3)$$

Получена система специального вида, для решения которой применяется усреднение по переменной ν , считая δ , λ медленными переменными. Система примет вид

$$\dot{\delta} = 0, \quad \dot{\lambda} = \frac{3\omega_0^2}{4G} N^* \cos \delta. \quad (8.3.4)$$

Таким образом, вектор \mathbf{G} сохраняет постоянный угол δ с нормалью к плоскости орбиты.

Система уравнений, состоящая из уравнений (8.3.4), двух последних уравнений системы (8.3.2) и уравнения (8.2.6), которое перепишем в виде

$$\frac{dk^2}{dt} = \frac{I_{33}A_1 - I_{11}A_3}{A_1A_3} \left\{ (1 - \chi)(1 - k^2) - [(1 - \chi) + (1 + \chi)k^2] \frac{E(k)}{K(k)} \right\}, \quad (8.3.5)$$

была проинтегрирована численно. Интегрирование проводилось при следующих начальных условиях: $k^2(0) = 0,99$; $\delta(0) = 0,785$ рад; $\lambda(0) = 0,785$ рад и значениях главных центральных моментов инерции тела $A_1 = 3,2$; $A_2 = 2,6$; $A_3 = 1,67$. Численный расчет выполнялся для круговой орбиты ($e = 0$). Для коэффициентов сопротивления рассматривались два возможных варианта: $I_{11} = 2,32$, $I_{22} = 1,31$, $I_{33} = 1,43$ и $I_{11} = 0,92$, $I_{22} = 5,23$, $I_{33} = 1,67$. В первом случае величина χ в уравнении (8.3.5) отрицательна и равна $-4,48$, а во втором положительна и равна $3,85$.

Некоторые результаты расчетов в нормализованных безразмерных переменных приведены на рис. 31 и 32, где показаны зависимости G и T от

времени для указанных двух случаев. Кривые 1 отвечают значению $\chi = -4,48$, кривые 2 — значению $\chi = 3,85$. Видно, что функции G и T при $\chi > 0$ убывают быстрее, чем при $\chi < 0$.

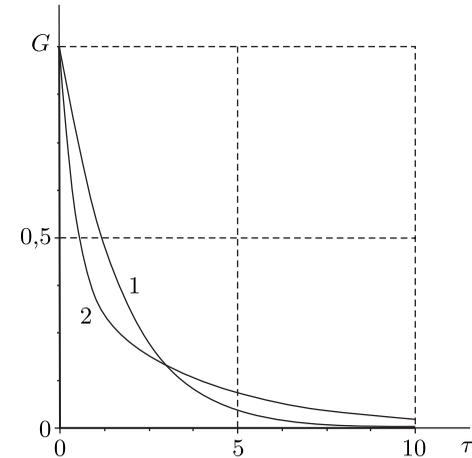


Рис. 31

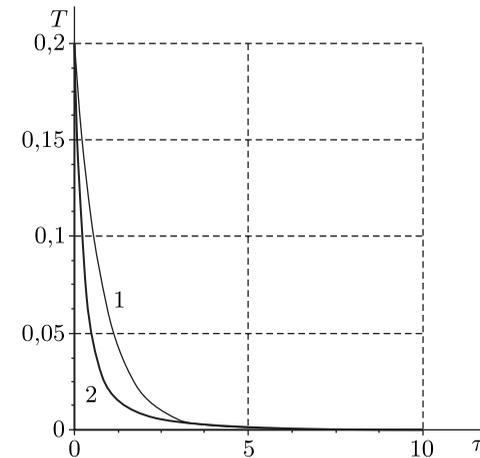


Рис. 32

В случае динамически симметричного спутника ($A_1 = A_2$) уравнения движения существенно упрощаются. Уравнения для величины кинетического момента G и угла нутации θ , усредненные по движению Эйлера–Пуансо, приводятся к виду

$$\begin{aligned} \dot{G} &= -G \left[\frac{\sin^2 \theta}{2A_1} (I_{11} + I_{22}) + \frac{I_{33}}{A_3} \cos^2 \theta \right], \\ \dot{\theta} &= \left(\frac{I_{33}}{A_3} - \frac{I_{11} + I_{22}}{2A_1} \right) \sin \theta \cos \theta, \end{aligned} \quad (8.3.6)$$

совпадающему с уравнениями (8.2.18) для вращения тела вокруг неподвижной точки в сопротивляющейся среде. Таким образом, эволюция величин G и θ происходит только под влиянием сил сопротивления.

Напомним, что эта система (8.3.6) интегрируется аналитически; ее точное решение дается соотношениями (8.2.19) и (8.2.20).

Усредненные уравнения (8.3.4) в рассматриваемом случае $A_1 = A_2$ приобретают вид

$$\dot{\delta} = 0, \quad \dot{\lambda} = \frac{3\omega_0^2 \cos \delta}{2G} (A_1 - A_3) \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right). \quad (8.3.7)$$

Приведем некоторые результаты расчетов для моментов инерции спутника $A_1 = 4,18$, $A_3 = 1,67$ и двух вариантов коэффициентов сопротивления:

$$\begin{aligned} 1) \quad & I_{11} = 2,32, \quad I_{22} = 1,31, \quad I_{33} = 1,42; \\ 2) \quad & I_{11} = 2, \quad I_{22} = 1, \quad I_{33} = 0,5. \end{aligned} \quad (8.3.8)$$

Для первого случая (8.3.8) величина в скобках в уравнении (8.3.6) для θ будет положительной, во втором случае – отрицательной.

На рис. 33, 34 представлены зависимости $G(\tau)$ и $\theta(\tau)$ в зависимости от нормализованного времени τ , причем кривые 1, 2 отвечают вариантам 1, 2 из (8.3.8). Видно, что угол θ возрастает в случае 1 и убывает в случае 2.

Подставляя решение (8.2.19), (8.2.20) в уравнение (8.3.7) для λ , получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{3\omega_0^2 \cos \delta (A_1 - A_3) \left[1 - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \theta_0 \exp(2bt) \right] \exp(\mu t)}{2G_0 \cos \theta_0 [1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0 \exp(2bt)]^{3/2}}, \quad (8.3.9)$$

где введены обозначения

$$b = \frac{I_{33}}{A_3} - \frac{I_{11} + I_{22}}{2A_1}, \quad \mu = \frac{I_{33}}{A_3}.$$

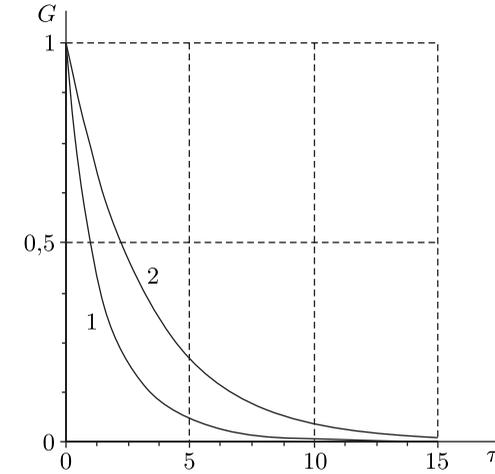


Рис. 33

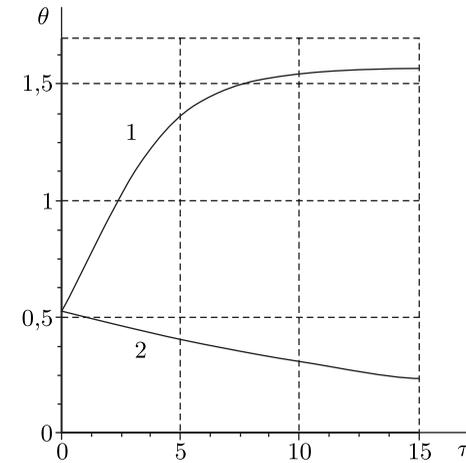


Рис. 34

Результаты решения уравнения (8.3.9) для двух вариантов (8.3.8) приведены на рис. 35 и 36.

Заметим, что направление изменения угла λ , то есть производная $\dot{\lambda}$, согласно второму уравнению (8.3.7) зависит от знака выражения $[1 -$

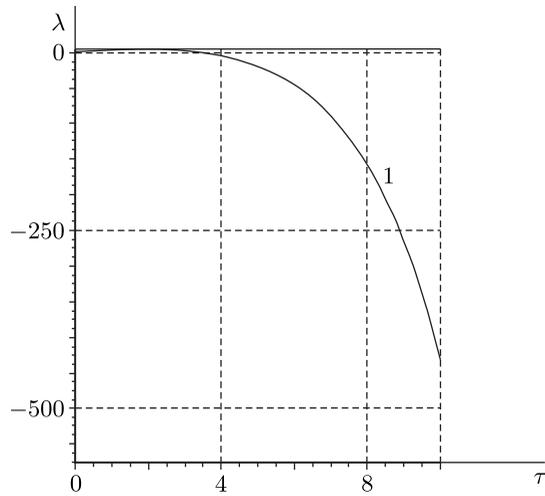


Рис. 35

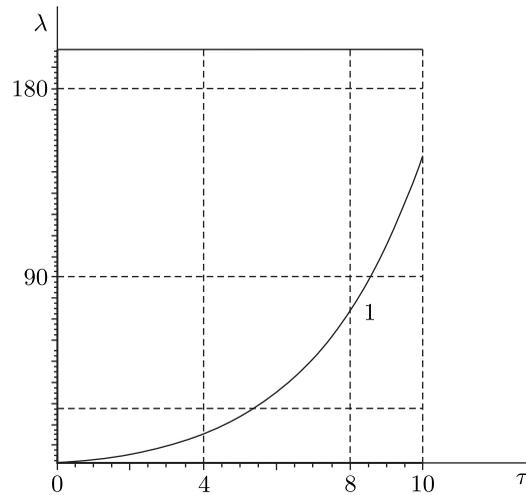


Рис. 36

$-(3/2) \sin^2 \theta$. Если угол θ лежит в интервале $[0, \theta^*]$, где $\theta^* = 0,955$, то данное выражение положительно, а при $\theta > \theta^*$ оно отрицательно. Поэто-

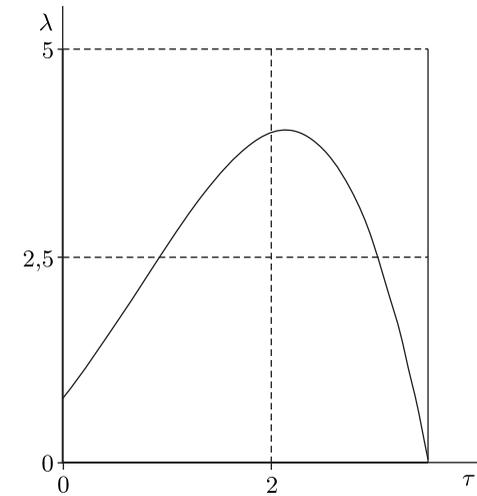


Рис. 37

му для варианта 2 из (8.3.8), для которого θ убывает согласно рис. 34, имеем $\theta < \theta^*$ и угол λ возрастает согласно рис. 36. Более сложным является поведение угла λ в варианте 1 из (8.3.8). Здесь угол θ возрастает (кривая 1 на рис. 34) и проходит через значение $\theta = \theta^*$. Соответственно, угол λ сначала возрастает на небольшом интервале времени, а затем убывает (см. рис. 37, где зависимость $\lambda(\tau)$ представлена в более крупном масштабе).

Таким образом, проведенное исследование позволяет проследить движение спутника относительно центра масс под совместным действием гравитационного момента и момента линейного сопротивления.

ГЛАВА 9

Движение твердого тела с внутренними степенями свободы

В § 1 согласно работе [181] исследуются задачи о движении свободно-го твердого тела, несущего подвижную массу, соединенную с телом упругой связью при наличии вязкого трения. Рассматриваются случаи полной динамической симметрии тела и случай динамически симметричного тела.

В § 2 проводится анализ движения динамически симметричного твердого тела, несущего подвижную точечную массу, соединенную с телом упругой связью с квадратичным трением, следуя статье [186].

§ 1. Динамика твердого тела с подвижной внутренней массой

1.1. Случай полной симметрии тела

Рассмотрим сначала случай полной динамической симметрии тела. Предположим, что твердое тело D^* , в котором материальная точка P помещена в точку O_1 , неподвижно связанную с телом, обладает полной динамической симметрией относительно своего центра инерции C , т. е.

$$\mathbf{J}_C^* = J\mathbf{E}, \quad (9.1.1)$$

где \mathbf{E} — единичный тензор, J — скаляр.

Таким образом, исследуется возмущение свободного движения твердого тела с шаровым эллипсоидом инерции, вызванное тем, что одна из его точек P закреплена не абсолютно жестко. Рассмотрим три случая крепления точки P .

1. Пусть точка P прикреплена к O_1 при помощи упругой связи и имеет относительно тела три степени свободы. Уравнения движения точки P

записаны в виде (5.4.12) (см. также формулы (5.4.13), (5.4.14)). Неравенства (5.4.15) считаются выполненными. При условии (9.1.1) из соотношений (5.4.16)–(5.4.21) последовательно найдем, выполняя действия, описанные в п. 2 § 4 главы 5,

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= O(\Omega^{-2}), \quad \mathbf{r} = -\Omega^{-2}\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) + O(\Omega^{-4}), \\ \mathbf{g} &= m\Omega^{-2}\{\boldsymbol{\omega}[2\omega^2\rho^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\rho})^2] - \rho^2\omega^2(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\rho})\} + O(\Omega^{-4}), \\ \Phi &= m\Omega^{-2}\omega^2(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + O(\Omega^{-4}).\end{aligned}\quad (9.1.2)$$

Члены, содержащие λ , здесь войдут лишь в более высоких приближениях. Уравнение (5.4.20) с принятой точностью запишется в виде

$$\dot{\omega} = m\rho^2\Omega^{-2}J^{-1}\omega^2(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e})\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}. \quad (9.1.3)$$

Здесь \mathbf{e} — орт вектора $\boldsymbol{\rho}$, т. е. $\boldsymbol{\rho} = \rho\mathbf{e}$. Из уравнения (9.1.3) вытекает, что

$$(\omega^2)^\cdot = 2\boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} = 0, \quad (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e})^\cdot = \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{e} = 0, \quad (9.1.4)$$

т. е. вектор $\boldsymbol{\omega}$ сохраняет свою величину и проекцию на направление \mathbf{e} . Положение вектора $\boldsymbol{\omega}$ в системе координат, жестко связанной с твердым телом, будем характеризовать углом θ с вектором \mathbf{e} и углом φ , заключенным между проекцией $\boldsymbol{\omega}$ на плоскость, перпендикулярную \mathbf{e} , и каким-либо фиксированным направлением в этой плоскости. Угол φ отсчитывается в положительном направлении — против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора \mathbf{e} (см. рис. 38).

В этих переменных из уравнения (9.1.3) имеем

$$\omega = \text{const}, \quad \theta = \text{const}, \quad \dot{\varphi} = -m\rho^2\Omega^{-2}J^{-1}\omega^3 \cos \theta = \text{const}, \quad (9.1.5)$$

что соответствует равномерному вращению вектора $\boldsymbol{\omega}$ вокруг орта \mathbf{e} (см. рис. 38). Точками покоя для уравнения (9.1.3) на сфере $\omega = \text{const}$ являются точки $\theta = 0$, $\theta = \pi$, $\theta = \pi/2$, т. е. полюсы и экватор сферы. Эти точки соответствуют стационарным вращениям системы вокруг неподвижной оси.

2. Пусть по-прежнему точка P прикреплена к точке O_1 при помощи упругой связи, но имеет относительно тела лишь одну степень свободы и может перемещаться вдоль прямой, проходящей через точку O_1 в направлении орта \mathbf{h} . Тогда радиус-вектор точки P относительно тела имеет вид $\mathbf{r} = \xi\mathbf{h}$, где ξ — смещение точки. Совершенно аналогично форму-

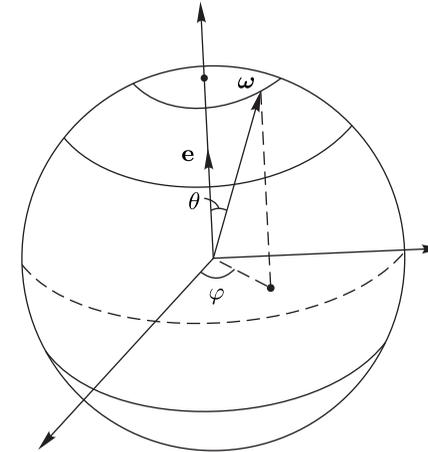


Рис. 38

лам (9.1.2) получим (с теми же оценками погрешности)

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \xi\mathbf{h}, \quad \xi = -\Omega^{-2}[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})] \cdot \mathbf{h} = \Omega^{-2}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}), \\ \mathbf{g} &= m\Omega^{-2}[2\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{h}) - \mathbf{h}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{h})]\xi, \\ \Phi &= m\Omega^{-2}[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\rho}) + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{h})]\xi.\end{aligned}\quad (9.1.6)$$

Подставляя соотношения (9.1.1), (9.1.6) в (5.4.20), получим уравнение для вектора $\boldsymbol{\omega}$, аналогичное (9.1.3):

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = m\rho^2\Omega^{-2}J^{-1}[(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h})][(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e})\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h} + (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{h})\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}]. \quad (9.1.7)$$

Здесь снова обозначено $\boldsymbol{\rho} = \rho\mathbf{e}$. Из уравнения (9.1.7) следует, что $\boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$, поэтому уравнение (9.1.7) имеет первый интеграл $\omega^2 = \text{const}$. Пользуясь уравнением (9.1.7), нетрудно проверить тождество

$$(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{e}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}) + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}) \cdot (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{h}) = 0,$$

из которого вытекает, что уравнение (9.1.7) имеет еще первый интеграл

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}) = \text{const}. \quad (9.1.8)$$

Рассмотрим движение следа вектора $\boldsymbol{\omega}$ по сфере постоянного единичного радиуса, причем центр сферы совмещен с точкой C , а сама сфера жестко связана с твердым телом.

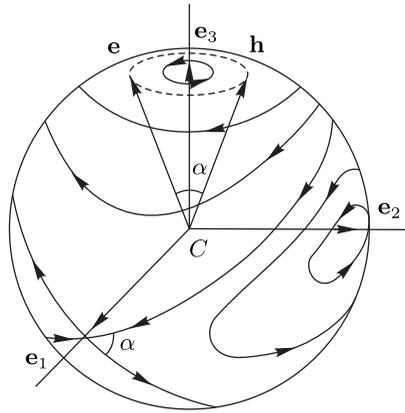


Рис. 39

Векторы \mathbf{e} и \mathbf{h} неподвижны относительно этой сферы. Угол α между ними без нарушения общности можно считать лежащим в пределах $0 \leq \alpha \leq \pi/2$; если $\alpha > \pi/2$, то можно просто обратить направление орта \mathbf{h} . Выберем декартову систему координат, связанную с твердым телом так, что ее орты $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, отложенные из точки C , равны (см. рис. 39):

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{h} \times \mathbf{e} / |\mathbf{h} \times \mathbf{e}|, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 = (\mathbf{e} + \mathbf{h}) / |\mathbf{e} + \mathbf{h}|. \quad (9.1.9)$$

Здесь пока предполагается, что $\alpha > 0$. Векторы \mathbf{e}, \mathbf{h} в этой системе координат представляются в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= -\mathbf{e}_2 \sin(\alpha/2) + \mathbf{e}_3 \cos(\alpha/2), \\ \mathbf{h} &= \mathbf{e}_2 \sin(\alpha/2) + \mathbf{e}_3 \cos(\alpha/2). \end{aligned} \quad (9.1.10)$$

Обозначая через $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ на указанные оси, запишем первый интеграл (9.1.8) через введенные проекции:

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}) = \omega_1^2 \cos^2 \alpha + \omega_2^2 \cos^2(\alpha/2) - \omega_3^2 \sin^2(\alpha/2) = \text{const}. \quad (9.1.11)$$

Траекториями вектора $\boldsymbol{\omega}$ на введенной единичной сфере служат линии пересечения этой сферы с семейством гиперболоидов, описываемых уравнением (9.1.11) при различных значениях постоянной. Нулевому значению интеграла отвечает, согласно (9.1.11), уравнение

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}) = \omega_1^2 \cos^2 \alpha + \omega_2^2 \cos^2(\alpha/2) - \omega_3^2 \sin^2(\alpha/2) = 0, \quad (9.1.12)$$

описывающее эллиптический конус, ось которого направлена по оси \mathbf{e}_3 . Этот конус пересекает единичную сферу $\omega^2 = 1$ по двум замкнутым кривым, охватывающим ось \mathbf{e}_3 и проходящим через точки $\boldsymbol{\omega} = \pm \mathbf{e}$ и $\boldsymbol{\omega} = \pm \mathbf{h}$. Одна из этих кривых изображена пунктиром на рис. 39. На этих кривых, как следует из (9.1.12) и (9.1.7), имеем $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$, т. е. эти кривые состоят из точек покоя уравнения (9.1.7). В полярных координатах θ, φ , введенных по формулам

$$\omega_1 = \omega \sin \theta \cos \varphi, \quad \omega_2 = \omega \sin \theta \sin \varphi, \quad \omega_3 = \omega \cos \theta, \quad (9.1.13)$$

уравнение кривых (9.1.13) на единичной сфере примет вид

$$\text{tg}^2 \theta [\text{ctg}^2(\alpha/2) - \cos^2 \varphi] = 1. \quad (9.1.14)$$

Остальные точки покоя получим, приравнявая нулю вторую квадратную скобку в (9.1.7), т. е.

$$\boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{h}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}) + \mathbf{e}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{h})] = 0. \quad (9.1.15)$$

Равенство (9.1.15) означает, что либо вектор $\boldsymbol{\omega}$ коллинеарен выражению в квадратных скобках, либо само это выражение равно нулю. Первая возможность приводит к равенству $\boldsymbol{\omega} = C_1 \mathbf{h} + C_2 \mathbf{e}$, где C_1, C_2 — постоянные.

Подставляя это представление в соотношение (9.1.15), найдем

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{h}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}) + \mathbf{e}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{h})] &= (\mathbf{e} \times \mathbf{h})[\boldsymbol{\omega} \cdot (C_2 \mathbf{e} - C_1 \mathbf{h})] = \\ &= \mathbf{e} \times \mathbf{h}(C_2^2 - C_1^2) = 0. \end{aligned} \quad (9.1.16)$$

Если $\alpha > 0$, то $\mathbf{e} \times \mathbf{h} \neq 0$ и из соотношения (9.1.16) получим $C_2 = \pm C_1$ и $\boldsymbol{\omega} = C_1 \cdot (\mathbf{h} \pm \mathbf{e})$. Сопоставляя последнее равенство с формулами (9.1.10), видим, что точками покоя на единичной сфере будут точки $\pm \mathbf{e}_2$ и $\pm \mathbf{e}_3$.

Вторая возможность обращения в нуль (9.1.15) дает условие $\mathbf{h}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}) = -\mathbf{e}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{h})$. Так как векторы \mathbf{e} и \mathbf{h} не коллинеарны при $\alpha > 0$, то это условие выполнимо лишь при $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{h} = 0$, т. е. когда $\boldsymbol{\omega}$ коллинеарно вектору \mathbf{e}_3 из (9.1.9).

Итак, найдены все точки покоя уравнения (9.1.7). На единичной сфере эти точки лежат на кривых (9.1.14), а также в концах векторов $\pm \mathbf{e}_1, \pm \mathbf{e}_2, \pm \mathbf{e}_3$. Из последних шести точек четыре являются особыми точками типа центра (точки $\pm \mathbf{e}_2$ и $\pm \mathbf{e}_3$), а две — седлами (точки $\pm \mathbf{e}_1$). Это можно установить при помощи первого интеграла (9.1.11). Картина поля траекторий уравнения (9.1.7) на единичной сфере изображена на рис. 39. Все

кривые, кроме сепаратрис, проходящих через седла $\pm e_1$, являются замкнутыми кривыми, охватывающими либо ось e_2 , либо ось e_3 . На траекториях рис. 39 стрелками указано направление движения. Отметим, что на кривых (9.1.14), состоящих из точек покоя, направление движения меняется.

Сепаратрисами, проходящими через седла $\pm e_1$ и разделяющими кривые разных семейств, являются два больших круга, плоскости которых перпендикулярны векторам e и h . Чтобы доказать это, возьмем вектор ω в плоскости $\omega \cdot e = 0$. При условии $\omega \cdot e = 0$ из уравнения (9.1.7) получим $\dot{\omega} \cdot e = 0$, т.е. вектор ω при движении не выходит из этой плоскости. Аналогично доказывается, что $\dot{\omega} \cdot h = 0$, если $\omega \cdot h = 0$. Следовательно, указанные большие круги на единичной сфере, проходящие через особые точки $\pm e_1$, действительно являются интегральными кривыми уравнения (9.1.7).

Остановимся еще на частных случаях $\alpha = \pi/2$ и $\alpha = 0$. При $\alpha = \pi/2$ векторы e и h ортогональны, поэтому сепаратриса, лежащая в плоскости $\omega \cdot e = 0$, содержит вектор h , а сепаратриса, лежащая в плоскости $\omega \cdot h = 0$, — вектор e . В этом случае сепаратрисы совпадают с кривыми (9.1.14) и состоят из точек покоя.

При $\alpha = 0$ имеем $e = h$, и уравнение (9.1.7) упрощается:

$$\dot{\omega} = 2m\rho^2\Omega^{-2}J^{-1}(\omega \times e)^2(\omega \cdot e)(\omega \times e). \quad (9.1.17)$$

Для уравнения (9.1.17) справедливы свойства (9.1.4). В полярных координатах уравнение (9.1.17) дает, аналогично (9.1.5), соотношения

$$\omega = \text{const}, \quad \theta = \text{const}, \quad \dot{\varphi} = -2m\rho^2\Omega^{-2}J^{-1}\omega^3 \sin^2 \theta \cos \theta \quad (9.1.18)$$

и описывает равномерное вращение вектора ω вокруг оси e (рис. 38).

3. В качестве еще одного примера рассмотрим случай, когда точка P имеет относительно точки крепления O_1 две степени свободы и соединена с O_1 твердым стержнем малой длины l . Так же как и в случае 1, положение точки P в первом приближении будет определяться направлением центробежной силы, и аналогично (9.1.2) получим для вектора r

$$r = -\omega \times (\omega \times \rho)l|\omega \times (\omega \times \rho)|^{-1}. \quad (9.1.19)$$

Таким образом, этот случай отличается от случая 1 скалярным коэффициентом $|\omega \times (\omega \times \rho)|^{-1}$ в выражении (9.1.19). При выводе уравнения (9.1.3) в случае полной динамической симметрии этот коэффициент

можно считать постоянным, так как он зависит от медленно меняющейся переменной ω (см. оценки (9.1.2)). Поэтому получим аналогично (9.1.3)

$$\dot{\omega} = m\rho l J^{-1} \omega^2 (\omega \cdot e) (\omega \times e) |\omega \times (\omega \times e)|^{-1}. \quad (9.1.20)$$

Здесь снова имеют место свойства (9.1.4). В полярных координатах из уравнения (9.1.20) следуют выражения

$$\omega = \text{const}, \quad \theta = \text{const}, \quad \dot{\varphi} = -m\rho l J^{-1} \omega \text{ctg} \theta = \text{const}. \quad (9.1.21)$$

Все соотношения (9.1.5), (9.1.18), (9.1.21) описывают равномерное вращение вектора ω вокруг вектора e (рис. 38), но отличаются одно от другого зависимостью угловой скорости вращения $\dot{\varphi}$ от угла θ . Отметим, что в рассмотренных случаях не вошел эффект диссипации энергии за счет вязкого внутреннего трения, так как этот эффект проявляется при полной симметрии тела в членах более высокого порядка малости, чем в общем случае.

1.2. Движение динамически симметричного тела с подвижной массой

Исследуем движение твердого тела D^* , обладающего динамической симметрией и несущего подвижную точку P , прикрепленную при помощи упругой связи к точке O_1 на оси симметрии. Будем использовать уравнения и допущения п. 2 § 4 главы 5.

Начало декартовой системы координат, связанной с твердым телом, поместим в центр инерции C тела D^* , а орты этой системы e_1, e_2, e_3 направим так, чтобы орт e_3 совпадал с осью динамической симметрии тела D^* . Тогда $\rho = \rho e_3$, причем, не нарушая общности, примем $\rho > 0$ (иначе можно обратить направление орта e_3). В этой системе координат тензор инерции J_{C^*} твердого тела D^* , у которого точка P совмещена с O_1 , имеет вид

$$J_{C^*} = \begin{vmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{vmatrix}, \quad (9.1.22)$$

где A_1 — экваториальный, а A_3 — осевой моменты инерции. Уравнения нулевого приближения (5.4.21) запишутся в виде

$$\dot{p} = (1 - A_3/A_1)qr, \quad \dot{q} = -(1 - A_3/A_1)pr, \quad \dot{r} = 0. \quad (9.1.23)$$

Здесь $p = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_1$, $q = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_2$, $r = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_3$. Пользуясь соотношениями (9.1.23) для компонент вектора $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ и $\boldsymbol{\rho} = \rho \mathbf{e}_3$, получим из (5.4.17)

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \rho r (p \mathbf{e}_1 + q \mathbf{e}_2) A_3 / A_1 - \rho (p^2 + q^2) \mathbf{e}_3, \\ \dot{\mathbf{a}} &= \rho r^2 A_3 (A_1 - A_3) A_1^{-2} (q \mathbf{e}_1 - p \mathbf{e}_2). \end{aligned} \quad (9.1.24)$$

Подставим соотношения (9.1.24) в равенство (5.4.16), а затем выражение (5.4.16) в формулу (5.4.18) для \mathbf{g} . После преобразований с использованием равенств (9.1.23) определим

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= m \rho^2 \Omega^{-2} [(2p^2 + 2q^2 + A_3^2 A_1^{-2} r^2) (p \mathbf{e}_1 + q \mathbf{e}_2) + A_3 A_1^{-1} (p^2 + q^2) r \mathbf{e}_3] - \\ &\quad - m \rho^2 \lambda \Omega^{-4} A_3^2 (A_1 - A_3) A_1^{-3} r^3 (q \mathbf{e}_1 - p \mathbf{e}_2). \end{aligned} \quad (9.1.25)$$

Наконец, подставим формулу (9.1.25) в правую часть уравнения (5.4.19) и снова применим равенства (9.1.23) для вычисления производных \dot{p} , \dot{q} , \dot{r} . Получим искомого уравнение (5.4.20) для вектора $\boldsymbol{\omega}$. В проекциях на оси \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 это уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} A_1 \dot{p} + (A_3 - A_1) q r &= L q r + B r^4 p, \\ A_1 \dot{q} + (A_1 - A_3) p r &= -L p r + B r^4 q, \\ A_3 \dot{r} &= -A_1 A_3^{-1} B r^3 (p^2 + q^2), \end{aligned} \quad (9.1.26)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} L &= m \rho^2 \Omega^{-2} A_3 A_1^{-3} (A_1^2 p^2 + A_1^2 q^2 + A_3^2 r^2), \\ B &= m \rho^2 \lambda \Omega^{-4} A_3^3 (A_1 - A_3) A_1^{-4}. \end{aligned} \quad (9.1.27)$$

Домножая три уравнения (9.1.26) на $A_1 p$, $A_1 q$ и $A_3 r$ соответственно и складывая их, убедимся, что система имеет первый интеграл

$$G^2 = A_1^2 p^2 + A_1^2 q^2 + A_3^2 r^2 = \text{const}, \quad (9.1.28)$$

выражающий постоянство в рассматриваемом приближении модуля вектора \mathbf{G} кинетического момента твердого тела D^* относительно точки C . Введем углы θ , φ , определяющие ориентацию вектора \mathbf{G} относительно твердого тела согласно равенствам

$$A_1 p = G \sin \theta \cos \varphi, \quad A_1 q = G \sin \theta \sin \varphi, \quad A_3 r = G \cos \theta. \quad (9.1.29)$$

Перейдем в уравнениях (9.1.26) к переменным (9.1.29), учитывая постоянство G . Разрешая полученные уравнения относительно производных $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$ и подставляя формулы (9.1.27), получим уравнения

$$\dot{\varphi} = \beta \cos \theta, \quad \dot{\theta} = \gamma \cos^3 \theta \sin \theta. \quad (9.1.30)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} \beta &= (A_3 - A_1 - m \rho^2 \Omega^{-2} A_3 A_1^{-3} G^2) A_3^{-1} A_1^{-1} G = \text{const}, \\ \gamma &= m \rho^2 \lambda \Omega^{-4} (A_1 - A_3) A_1^{-5} A_3^{-1} G^4 = \text{const}. \end{aligned} \quad (9.1.31)$$

Величины β , γ имеют размерность угловой скорости и сохраняются постоянными при движении. При наложенных условиях (5.4.15) величина β имеет порядок $O(1)$, а $\gamma = O(\lambda \Omega^{-4}) \ll 1$. Заметим, что в случае полной симметрии, т. е. при $A_1 = A_3$, равенства (9.1.30), (9.1.31) переходят в соотношения (9.1.5). При $\lambda = 0$ соотношения (9.1.30), (9.1.31) примут вид

$$\gamma = 0, \quad \theta = \text{const}, \quad \dot{\varphi} = \beta \cos \theta = \text{const}. \quad (9.1.32)$$

Вектор \mathbf{G} в системе координат, связанный с телом, равномерно вращается вокруг оси симметрии \mathbf{e}_3 . Единственное отличие от случая абсолютно твердого тела состоит в том, что величина β в (9.1.31) отличается от значения $(A_3 - A_1) A_1^{-1} A_3^{-1} G$, имеющего место для твердого тела, на малую величину $O(\Omega^{-2})$; это приводит к малому изменению угловой скорости вращения вектора \mathbf{G} вокруг вектора \mathbf{e}_3 .

Перейдем к общему случаю $\lambda > 0$. Интегрируя второе уравнение (9.1.30), найдем

$$(1/2) \text{tg}^2 \theta + \ln |\text{tg} \theta| = \gamma t + \text{const}. \quad (9.1.33)$$

Удовлетворяя начальному условию $\theta(t_0) = \theta_0$, получим из (9.1.33)

$$\text{tg}^2 \theta \exp(\text{tg}^2 \theta) = \text{tg}^2 \theta_0 \exp(\text{tg}^2 \theta_0) \exp[\gamma(t - t_0)]. \quad (9.1.34)$$

Соотношение (9.1.34) определяет в неявном виде зависимость угла θ от t . Левая часть этого соотношения есть монотонно возрастающая функция от $|\text{tg} \theta|$, а правая часть — монотонная функция t . Поэтому равенство (9.1.34) задает однозначную монотонную функцию $\theta(t)$. Знак величины γ определяется, согласно (9.1.31), знаком разности $A_1 - A_3$. Пусть для определенности $\theta_0 < \pi/2$. Тогда, согласно (9.1.34), при $A_1 > A_3$ угол θ

монотонно возрастает с ростом t и $\theta \rightarrow \pi/2$ при $t \rightarrow \infty$. Если же $A_1 < A_3$, то θ монотонно убывает, стремясь к нулю при $t \rightarrow \infty$. В случае $\theta_0 > \pi/2$ точно такая же картина будет для угла $\theta_1 = \pi - \theta$. Таким образом, во всех случаях ось кинетического момента твердого тела \mathbf{G} в системе координат, связанной с телом, приближается к оси наибольшего момента инерции. Зависимость угла φ от времени определяется квадратурой из первого уравнения (9.1.30). Траекториями вектора \mathbf{G} на сфере, связанной с твердым телом, будут спирали, навивающиеся на полюса и экватор сферы. Угол наклона этих спиралей к окружностям $\theta = \text{const}$ мал и составляет величину порядка $\lambda\Omega^{-4}$.

Напомним, что кинетический момент всей системы \mathbf{G}_C , который сохраняется постоянным в неподвижной системе координат, отличается, согласно равенству (5.4.11), от вектора \mathbf{G} на вектор \mathbf{g} , который при условиях (5.4.15) мал и имеет порядок $O(\Omega^{-2})$. Поэтому полученные результаты означают, что движение системы при наличии внутренней диссипации стремится при $t \rightarrow \infty$ к вращению вокруг оси наибольшего момента инерции. Этот качественный вывод хорошо известен (см., например, [113, 121, 122, 154–156]) и следует из энергетических соображений. В самом деле, кинетическая энергия твердого тела равна

$$T = \frac{1}{2}(A_1 p^2 + A_1 q^2 + A_3 r^2) = \frac{1}{2}A_1^{-1}G^2[1 + (A_1 - A_3)A_3^{-1} \cos^2 \theta]. \quad (9.1.35)$$

Здесь использована замена (9.1.29). Из равенства (9.1.35) видно, что минимальное значение T отвечает при $A_1 > A_3$ углу $\theta = \pi/2$, а при $A_1 < A_3$ — углу $\theta = 0$, это соответствует полученному выше результату. Наличие подвижной точки внутри тела в рассматриваемом случае мало меняет его кинетический момент, но может привести к существенной диссипации энергии. Проведенный выше анализ дает количественную картину перестройки движения тела при наличии внутренних упругих и диссипативных сил. Характерное время τ этой перестройки равно

$$\tau \sim \gamma^{-1} \sim \frac{A_1^2 \Omega^4}{|A_1 - A_3| m \rho^2 \omega^4 \lambda}.$$

В статьях [188, 189] рассматривается движение вокруг центра инерции твердого тела, близкого к динамически сферическому и содержащего вязкоупругий элемент.

В работе [185] исследуется задача о движении вокруг центра инерции динамически несимметричного твердого тела, несущего подвижную массу, соединенную с телом упругой связью с вязким трением.

§ 2. О движении твердого тела с подвижной массой, соединенной с телом упругой связью с квадратичным трением

Исследуем движение динамически симметричного твердого тела, несущего подвижную точечную массу m , соединенную с телом в некоторой точке O_1 на оси симметрии. Считается, что при относительном движении на точку m действуют возвращающая упругая сила и сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости (квадратичное трение).

Начало декартовой системы координат связанной с телом, поместим в центр инерции C системы, состоящей из тела и точечной массы, расположенной в точке O_1 . Орты системы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ направим так, чтобы орт \mathbf{e}_3 совпадал с осью динамической симметрии системы. Тогда радиус-вектор $\boldsymbol{\rho}$ точки O_1 равен $\boldsymbol{\rho} = \rho \mathbf{e}_3$, причем для определенности предполагается, что $\rho > 0$. В этой системе координат тензор инерции \mathbf{J}_{C^*} имеет диагональный вид $\mathbf{J}_{C^*} = \text{diag}(A_1, A_1, A_3)$. Величины A_1 и A_3 являются экваториальными и осевыми моментами инерции соответственно. Так как $p = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_1$, $q = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_2$, $r = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_3$, то уравнение нулевого приближения типа (5.7.5) записывается в скалярной форме

$$\dot{p} = dqr, \quad \dot{q} = -dpr, \quad \dot{r} = 0 \quad (d = 1 - A_3/A_1). \quad (9.2.1)$$

Для определения правой части уравнения движения типа (5.7.6) вычислим величины \mathbf{a} и $\dot{\mathbf{a}}$ в выражении для \mathbf{r} (5.7.2). При помощи соотношений (9.2.1) находим

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \rho r (p \mathbf{e}_1 + q \mathbf{e}_2) A_3 A_1^{-1} - \rho \omega_{\perp}^2 \mathbf{e}_3, \\ \dot{\mathbf{a}} &= \rho r^2 A_3 A_1^{-1} d (q \mathbf{e}_1 - p \mathbf{e}_2), \quad \omega_{\perp} = (p^2 + q^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (9.2.2)$$

В результате для условного вектора кинетического момента подвижной массы \mathbf{g} (5.7.4) получаем явное выражение через переменные p, q, r с погрешностью $O(\Omega^{-4})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= m \rho^2 \Omega^{-2} [(2\omega_{\perp}^2 + A_3 A_1^{-2} r^2) (p \mathbf{e}_1 + q \mathbf{e}_2) + \\ &+ A_3 A_1^{-1} \omega_{\perp} r \mathbf{e}_3] - m \rho^3 \Lambda \Omega^{-3} A_3^3 A_1^{-3} d |d| \omega_{\perp} r^5 (q \mathbf{e}_1 - p \mathbf{e}_2). \end{aligned} \quad (9.2.3)$$

Далее искомое выражение для производной $\dot{\mathbf{g}}$ вычисляется аналогично при помощи формул (9.2.1). Процедура вычислений довольно проста. Следует отметить, что в силу (9.2.1) производная $\dot{\omega}_{\perp} = 0$.

Проецируя теперь уравнение (5.7.6) на орты $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, получим иско-
мые уравнения движения:

$$\begin{aligned} \dot{p} - dqr &= Sqr + Qpr^6, & p(0) &= p_0, \\ \dot{q} + dpr &= -Spr + Qqr^6, & q(0) &= q_0, \\ \dot{r} &= -QA_1^2 A_3^{-2} \omega_{\perp}^2 r^5, & r(0) &= r_0. \end{aligned} \quad (9.2.4)$$

Здесь для сокращения введены обозначения

$$\begin{aligned} S &= m\rho^2 \Omega^{-2} A_3 A_1^{-4} G^2, & G^2 &= A_1^2 \omega_{\perp}^2 + A_3^2 r^2, \\ Q &= m\rho^3 \Lambda \Omega^{-3} A_3^4 A_1^{-5} d |d| \omega_{\perp}. \end{aligned} \quad (9.2.5)$$

Складывая уравнения (9.2.4), умноженные на $A_1^2 p, A_1^2 q$ и $A_3^2 r$ соответствен-
но, находим первый интеграл движения — модуль кинетического момен-
та $G = |\mathbf{G}|$:

$$G = G_0 = \text{const}, \quad G_0^2 = A_1^2 \omega_{\perp 0}^2 + A_3^2 r_0^2. \quad (9.2.6)$$

Система (9.2.4) допускает дальнейшее интегрирование. Для нахождения
величины ω определим проекции вектора \mathbf{G} на главные центральные оси
инерции по формулам

$$A_1 p = G \sin \theta \cos \varphi, \quad A_1 q = G \sin \theta \sin \varphi, \quad A_3 r = G \cos \theta. \quad (9.2.7)$$

Так как согласно (9.2.6) $G = \text{const}$, то, дифференцируя соотноше-
ния (9.2.7), в силу уравнений (9.2.4) с учетом выражений (9.2.5) для сфе-
рических углов θ, φ получим дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \beta \cos \theta, & \dot{\theta} &= \gamma \sin \theta |\sin \theta| \cos^5 \theta; \\ \varphi(t_0) &= \varphi_0, & \theta(t_0) &= \theta_0. \end{aligned} \quad (9.2.8)$$

Коэффициенты β и γ в (9.2.8) постоянны и равны

$$\begin{aligned} \beta &= -(d + m\rho^2 \Omega^{-2} A_3 A_1^{-4} G^2) A_3^{-1} G, \\ \gamma &= m\rho^3 \Lambda \Omega^{-3} A_1^{-6} A_3^{-2} d |d| G^7. \end{aligned} \quad (9.2.9)$$

В частных случаях сферической симметрии ($d = 0$) или $\rho = 0$ из (9.2.9)
следует, что постоянная $\gamma = 0$, а уравнения (9.2.8) интегрируются явно
в виде

$$\theta = \theta_0, \quad \varphi = \beta(t - t_0) \cos \theta_0 + \varphi_0; \quad \theta_0, \varphi_0 = \text{const}.$$

Составляющие угловой скорости p, q, r при помощи (9.2.7) вычисляются
также в явной форме

$$p = \omega_{\perp} \cos \varphi, \quad q = \omega_{\perp} \sin \varphi, \quad r = r_0 \quad (\omega_{\perp} = \omega_{\perp 0}).$$

Рассмотрим теперь общий случай $\gamma \neq 0$. Интегрирование второго
уравнения (9.2.8) приводит к соотношению

$$\begin{aligned} 2 \sec^4 \theta \operatorname{cosec} \theta + 5[(\sec^2 \theta - 3) \operatorname{cosec} \theta + \\ + 3 \ln |\operatorname{tg}(\pi/4 + \theta/2)|] = 8\gamma t + \text{const}. \end{aligned} \quad (9.2.10)$$

Для определенности предположим, что величина θ_0 принадлежит интервалу
(0, $\pi/2$). На основании (9.2.9) знак γ определяется знаком параметра d ,
т. е. разности $A_1 - A_3$. Из (9.2.8), (9.2.10) следует, что при $A_1 > A_3$ (вы-
тянутое тело) угол θ монотонно растет и стремится к $\pi/2$ при $t \rightarrow \infty$,
а $r \rightarrow 0$. В случае $A_1 < A_3$ (сплюснутое тело) величина θ монотонно убы-
вает: $\theta \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, а $\dot{\varphi} \rightarrow \beta = \text{const}$. Таким образом, направление
вектора кинетического момента \mathbf{G} в связанной с телом системе координат
стремится к стационарному состоянию: к направлениям осей, соответствую-
ющих наибольшим моментам инерции. Если зависимость $\theta(t)$, согласно
соотношению (9.2.10), построена, то функция $\varphi(t)$ находится квадратурой
из первого уравнения (9.2.8). Делением одного уравнения (9.2.8) на дру-
гое и последующей квадратурой получается зависимость $\varphi(\theta)$, которая сов-
местно с (9.2.10) дает в неявном виде решение системы (9.2.4) при помощи
формул (9.2.7).

Отметим, что постоянная $\tau = |\gamma|^{-1}$ имеет размерность времени и ха-
рактеризует скорость перестройки движения твердого тела, т. е. скорость
стремления угла нутации θ : $\theta \rightarrow 0$ или $\theta \rightarrow \pi/2$. Для случая вязкоупругой
связи между телом и массой аналогичная временная постоянная τ опреде-
ляет интервал времени, за который угол нутации в линейном приближении
убывает или возрастает в e раз.

В рассмотренной задаче с квадратичным трением при малых θ угол
нутации стремится к нулю значительно медленнее, так как $\dot{\theta} \approx -\tau^{-1} \theta^2$.
Задача Коши (9.2.8) в главном квадратическом приближении по θ (φ про-
извольно) приводит к выражению для θ :

$$\theta = \theta(t) = \theta_0 [1 - \gamma \theta_0 (t - t_0)]^{-1}, \quad |\theta| \ll 1. \quad (9.2.11)$$

Анализ изменения угла θ в зависимости от t и параметров θ_0, γ, ψ_0
элементарен и стандартен. Полярный угол $\varphi = \varphi(t)$ получается квадра-
турой согласно первому уравнению (9.2.8) и в квадратичном приближении

по θ вычисляется в элементарных функциях. Заметим, что согласно (9.2.11) имеет место соотношение

$$\theta(t - \tau) - \theta(t) = -\gamma\tau\theta(t - \tau)\theta(t), \quad \gamma\tau = \mp 1 (d \leq 0).$$

В линейном по θ приближении

$$\theta(t) = \theta_0 = \text{const.}$$

В статье [187] рассматривается движение динамически симметричного тела со сферической полостью, заполненной жидкостью большой вязкости, и несущего подвижную массу, прикрепленную при помощи упругой связи с вязким или квадратичным трением к точке на оси симметрии.

ГЛАВА 10

Влияние момента сил светового давления на движение спутника Солнца относительно центра масс

В § 1 описываются системы координат, употребляемые в дальнейшем. Приводится феноменологическая формула для момента сил светового давления \mathbf{L} , действующего на спутник Солнца. Записываются уравнения возмущенного движения спутника при наличии силовой функции. Отмечаются некоторые результаты, полученные при исследовании движения динамически несимметричного или симметричного спутника относительно центра масс под действием момента сил светового давления, полученные в статьях [17, 102].

В § 2, который основан на результатах работы [103], рассматривается вызванное моментом сил светового давления движение относительно центра масс спутника, представляющего собой тело вращения, близкого к динамически сферическому. При этом коэффициент момента сил светового давления аппроксимируется тригонометрическим полиномом произвольного порядка. В качестве примера рассматривается учет нулевой и первой гармоник при аппроксимации коэффициента момента сил светового давления.

В § 3, следуя статье [104], исследуется эволюция вращений спутника, близкого к динамически сферическому, под действием момента сил светового давления, при аппроксимации которого учтены третья и четные гармоники. Проведен численный и качественный анализ фазовой плоскости.

§ 1. Уравнения вращения спутника под действием момента сил светового давления

Рассмотрим движение космического аппарата по орбите вокруг Солнца. Введем три декартовы системы координат $Ox_1x_2x_3$, $Oy_1y_2y_3$ и $Oz_1z_2z_3$

согласно § 6 главы 4 (см. рис. 13, 14). Начало этих систем совместим с центром инерции спутника.

Взаимное положение главных центральных осей инерции тела Oz_i и осей Oy_i , $i = 1, 2, 3$, определяется углами Эйлера φ , ψ , θ . При этом направляющие косинусы системы $Oy_1y_2y_3$ выражаются через углы Эйлера φ , ψ , θ по формулам (1.5.4).

Будем считать, что аппарат движется по эллиптической орбите вокруг Солнца, и предположим, что можно пренебречь моментами всех сил, кроме сил светового давления. Допустим, что поверхность аппарата представляет собой поверхность вращения, причем единичный орт оси симметрии \mathbf{k}' направлен по оси Oz_3 . Для момента сил светового давления \mathbf{L} , действующего на спутник в виде тела вращения, примем формулу (5.8.2):

$$\mathbf{L} = \frac{a_c(\varepsilon_s)R_0^2}{R^2}\mathbf{e}_r \times \mathbf{k}', \quad (10.1.1)$$

где

$$a_c(\varepsilon_s)\frac{R_0^2}{R^2} = p_c S(\varepsilon_s) z'_0(\varepsilon_s). \quad (10.1.2)$$

Здесь R — текущее расстояние от центра Солнца до центра масс спутника; R_0 — фиксированное значение R ; \mathbf{e}_r — единичный вектор по направлению радиус-вектора \mathbf{R} ; \mathbf{k}' — единичный вектор по направлению оси симметрии спутника; ε_s — угол между этими направлениями, так что $|\mathbf{e}_r \times \mathbf{k}'| = \sin \varepsilon_s$; $a_c(\varepsilon_s)$ — коэффициент момента сил светового давления, определяемый свойствами поверхности; S — площадь «тени» на плоскости, нормальной к потоку; z'_0 — расстояние от центра масс до центра давления. Считаем, что $a_c = a_c(\cos \varepsilon_s)$, и аппроксимируем a_c полиномами по степеням $\cos \varepsilon_s$. Момент сил светового давления имеет силовую функцию, зависящую только от ориентации оси симметрии тела в пространстве. Представим функцию $a_c(\cos \varepsilon_s)$ в виде

$$a_c = a_0 + a_1 \cos \varepsilon_s + \dots + a_N \cos^N \varepsilon_s. \quad (10.1.3)$$

Уравнения возмущенного движения спутника при наличии силовой функции U в переменных G , δ , λ , θ , φ , ψ имеют вид (4.7.5):

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= \frac{1}{G \sin \delta} \frac{\partial U}{\partial \delta}, & \dot{\delta} &= -\frac{1}{G \sin \delta} \frac{\partial U}{\partial \lambda} + \frac{1}{G} \operatorname{ctg} \delta \frac{\partial U}{\partial \psi}, & \dot{G} &= \frac{\partial U}{\partial \psi}, \\ \dot{\theta} &= G \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi (A_1^{-1} - A_2^{-1}) - \frac{1}{G \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{1}{G} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial U}{\partial \psi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= G \cos \theta (A_3^{-1} - A_1^{-1} \sin^2 \varphi - A_2^{-1} \cos^2 \varphi) + \frac{1}{G \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \theta}, \\ \dot{\psi} &= G (A_1^{-1} \sin^2 \varphi + A_2^{-1} \cos^2 \varphi) - \frac{1}{G} \left(\frac{\partial U}{\partial \delta} \operatorname{ctg} \delta + \frac{\partial U}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta \right). \end{aligned} \quad (10.1.4)$$

К системе уравнений (10.1.4) необходимо присоединить уравнение, описывающее изменение истинной аномалии со временем:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\omega_0(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{Q_0} = \frac{\eta^{1/2}(1 - e^2)^{3/2}}{p^{3/2}}, \quad (10.1.5)$$

где ω_0 — средняя угловая скорость движения центра масс по эллиптической орбите, Q_0 — период обращения спутника, e и p — эксцентриситет и фокальный параметр орбиты соответственно, η — произведение постоянной всемирного тяготения на массу Солнца.

В работе [102] с помощью метода усреднения исследуется вращательное движение динамически несимметричного спутника с осесимметричной поверхностью относительно центра масс под действием момента сил светового давления. Спутник движется по эллиптической орбите вокруг Солнца.

Отмечено, что исследование движения несимметричного спутника в случае $a_c = a_1 \cos \varepsilon_s$ может быть проведено так, как это сделано в [17] для случая динамически симметричного спутника в гравитационном поле на круговой орбите. Ранее в [17] было получено, что уравнения движения в координатах δ , λ динамически симметричного спутника под действием момента сил светового давления совпадают с уравнениями движения под воздействием гравитационных моментов, если положить $e = 0$ (круговая орбита).

§ 2. Эволюция вращений спутника с близкими моментами инерции

2.1. Исходные предположения и постановка задачи

Рассмотрим движение космического аппарата относительно центра масс под действием момента сил светового давления. Введем три правые декартовы системы координат $Ox_1x_2x_3$, $Oy_1y_2y_3$, $Oz_1z_2z_3$ (см. § 1 данной главы и § 6 главы 4, рис. 13, 14), начало координат совместим с центром инерции спутника. Углы δ , λ и углы Эйлера φ , ψ , θ , определяющие ориентацию связанной с телом системы координат $Oz_1z_2z_3$ относительно системы $Oy_1y_2y_3$, введены в § 6 главы 4.

Будем пренебрегать моментами всех сил, кроме сил светового давления. Как и в § 1, допустим, что поверхность аппарата представляет собой поверхность вращения, причем единичный орг оси симметрии \mathbf{k}' направлен по оси Oz_3 . В этом случае для момента сил светового давления \mathbf{L} , действующего на спутник, имеет место формула (10.1.1). Далее полагаем $a_c = a_c(\cos \varepsilon_s)$ и представим функцию $a_c(\cos \varepsilon_s)$ в виде (10.1.3). Уравнения возмущенного движения спутника при наличии силовой функции в переменных $G, \delta, \lambda, \theta, \varphi, \psi$ имеют вид (10.1.4). Силовая функция U зависит от времени t через истинную аномалию $\nu(t)$ и от направляющих косинусов $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ оси Oz_3 относительно системы координат $Ox_1x_2x_3$:

$$U = U(\nu(t), \alpha_3, \beta_3, \gamma_3). \quad (10.2.1)$$

Здесь согласно [17]

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= \sin \psi \sin \theta \cos \delta \sin \lambda - \cos \psi \sin \theta \cos \lambda + \cos \theta \sin \delta \sin \lambda, \\ \beta_3 &= -\sin \psi \sin \theta \sin \delta + \cos \theta \cos \delta, \\ \gamma_3 &= \sin \psi \sin \theta \cos \delta \cos \lambda + \cos \psi \sin \theta \sin \lambda + \cos \theta \sin \delta \cos \lambda. \end{aligned} \quad (10.2.2)$$

К системе уравнений (10.1.4) нужно присоединить уравнение для истинной аномалии (10.1.5).

Момент сил (10.1.1) соответствует силовой функции

$$U(\cos \varepsilon_s) = -R_0^2 R^{-2} \int a_c(\cos \varepsilon_s) d(\cos \varepsilon_s).$$

Рассмотрим вначале случай

$$a_c(\cos \varepsilon_s) = a_n \cos^n \varepsilon_s. \quad (10.2.3)$$

Силовая функция в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} U_n(\cos \varepsilon_s) &= -\frac{a_n R_0^2}{(n+1)R^2} \cos^{n+1} \varepsilon_s, \\ \cos \varepsilon_s &= \gamma_3 \cos \nu + \alpha_3 \sin \nu. \end{aligned} \quad (10.2.4)$$

Направляющие косинусы $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ выражаются через $\delta, \lambda, \theta, \psi$ по формулам (10.2.2).

Пусть главные центральные моменты инерции спутника близки друг к другу и представимы в виде

$$A_1 = J_0 + \varepsilon A'_1, \quad A_2 = J_0 + \varepsilon A'_2, \quad A_3 = J_0 + \varepsilon A'_3, \quad (10.2.5)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$ — малый параметр. Предположим также, что $a_0 \sim \varepsilon, a_1 \sim \varepsilon, \dots, a_N \sim \varepsilon$, т. е. момент сил светового давления имеет тот же порядок величины ε , что и гироскопический момент. Из (10.2.4) следует, что $U_n \sim \varepsilon$. Исследуем решение системы (10.1.4), (10.1.5) при малом ε на большом промежутке времени $t \sim \varepsilon^{-1}$. Погрешность усредненного решения для медленных переменных составляет величину $O(\varepsilon)$ на интервале времени, за который тело совершит ε^{-1} оборотов. Независимое усреднение по ψ, ν проводим как для нерезонансных случаев [18] (см. также § 7 главы 4).

2.2. Преобразование выражения силовой функции, процедура усреднения и построение системы первого приближения

Рассмотрим невозмущенное движение ($\varepsilon = 0$), когда уравнения (10.1.4), (10.1.5) описывают движение сферически симметричного тела и момент сил светового давления (10.1.1) равен нулю. Из системы (10.1.4) в этом случае получим, что $\lambda, \delta, G, \theta$ и φ постоянны, а ψ определяется по формуле (4.7.2).

Как показано в работе [18] и в главе 4, § 7, усреднение функций, зависящих от ν , сводится к усреднению по ν согласно (4.7.4).

Выражение для $\cos \varepsilon_s$ из (10.2.4) с учетом соотношений (10.2.2) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \cos \varepsilon_s &= d + g \cos \nu, \\ d &= \cos \theta \sin \delta \cos(\lambda - \nu), \quad \nu = \psi - \zeta, \\ g &= \{\sin^2 \theta [\sin^2(\lambda - \nu) \sin^2 \delta + \cos^2 \delta]\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (10.2.6)$$

Тогда сомножитель $\cos^{n+1} \varepsilon_s$ выражения силовой функции (10.2.4) можно с использованием формулы для бинома Ньютона представить в виде

$$\begin{aligned} \cos^{n+1} \varepsilon_s &= (d + g \cos \nu)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \cos^k \nu (g^k d^{n+1-k}), \\ \cos \zeta &= \sin \theta \sin(\lambda - \nu) \{\sin^2 \theta [\sin^2(\lambda - \nu) \sin^2 \delta + \cos^2 \delta]\}^{-1/2}, \\ \sin \zeta &= \sin \theta \cos \delta \cos(\lambda - \nu) \{\sin^2 \theta [\sin^2(\lambda - \nu) \sin^2 \delta + \cos^2 \delta]\}^{-1/2}. \end{aligned} \quad (10.2.7)$$

С помощью известных выражений для направляющих косинусов $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ оси Oz_3 относительно системы координат $Ox_1x_2x_3$ (10.2.2) получим сред-

нее по ψ значение силовой функции. Для этого определим

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (d + g \cos v)^{n+1} dv = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k g^k d^{n+1-k} I_k, \quad (10.2.8)$$

$$I_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^k v dv, \quad I_{2m+1} = 0, \quad I_{2m} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}.$$

В результате усреднения U_n из (10.2.4) по ψ получим с учетом (10.2.8)

$$U_n^* = \sum_{m=0}^{E(\frac{n+1}{2})} C_{n+1}^{2m} (g^{2m} d^{n+1-2m}) \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}, \quad (10.2.9)$$

$$U_n = -\sigma_n U_n^*, \quad \sigma_n = \frac{a_n R_0^2}{(n+1)R^2},$$

где $E(z)$ означает целую часть числа z .

Для упрощения записи усредненные выражения будем обозначать теми же символами, что и до усреднения.

Проведем усреднение U_n по ν согласно (4.7.4). Заметим, что с учетом уравнения движения центра масс по эллиптической орбите имеем $R = p(1 + e \cos \nu)^{-1}$, поэтому на основании (4.7.4) и (10.2.9) выражения $(1 + e \cos \nu)^2$ в формуле для U_n сокращаются.

Обозначим $u = \lambda - \nu$; тогда $d = h \cos u$, где $h = \cos \theta \sin \delta$; выражение g^{2m} в (10.2.9) с помощью формулы бинома Ньютона представим в виде

$$g^{2m} = (b + q \sin^2 u)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k \sin^{2k} u (q^k b^{m-k}),$$

$$b = \sin^2 \theta \cos^2 \delta, \quad q = \sin^2 \theta \sin^2 \delta.$$

Для второго усреднения выражения (10.2.9) по переменной $u = \lambda - \nu$ необходимо рассмотреть интеграл вида

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (b + q \sin^2 u)^m (h \cos u)^{n-2m+1} du =$$

$$= \sum_{k=0}^m h^{n+1-2m} C_m^k (q^k b^{m-k}) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{2k} u (\cos u)^{n+1-2m} du.$$

Полученный интеграл вычисляется в явном виде в книге [304], причем при $n = 2l$ он равен нулю вследствие нечетности степени второго множителя в интеграле.

Пусть $n = 2l + 1$ — нечетная степень; тогда имеем

$$k = 0, 1, \dots, m; \quad m = 0, 1, \dots, E\left(\frac{n+1}{2}\right) = l + 1.$$

После усреднения (10.2.9) по $u = \lambda - \nu$ получим

$$U_{2l+1} = -\bar{\sigma}_l U_{2l+1}^*,$$

$$U_{2l+1}^* = \sum_{m=0}^{l+1} \sum_{k=0}^m A_{lmk} (\cos \theta)^{2(l+1-m)} \sin^{2m} \theta \times$$

$$\times (\sin \delta)^{2(l+1-m+k)} (\cos \delta)^{2(m-k)}, \quad (10.2.10)$$

$$\bar{\sigma}_l = \frac{a_{2l+1} R_0^2 (1 - e^2)^{3/2}}{2(l+1)p^2},$$

$$A_{lmk} = C_{2(l+1)}^{2m} C_m^k \frac{(2m-1)!!(2k-1)!![2(l+1-m)-1]!!}{(2m)!![2(k+l+1-m)]!!}.$$

Силовая функция U для коэффициента момента сил светового давления вида (10.1.3) записывается следующим образом

$$U(\theta, \delta) = \sum_{l=0}^Q U_{2l+1}(\theta, \delta), \quad Q = E\left(\frac{N-1}{2}\right), \quad (10.2.11)$$

где N берется из аппроксимации (10.1.3).

Таким образом, в первом приближении коэффициент момента сил светового давления (10.1.3) эквивалентен следующему выражению:

$$a_c \sim \tilde{a}_c = \sum_{l=0}^Q a_{2l+1} (\cos \varepsilon_s)^{2l+1}, \quad (10.2.12)$$

поскольку четные гармоники коэффициента момента сил светового давления выпадают при усреднении.

Вычисляя частные производные $\partial U / \partial \delta$, $\partial U / \partial \theta$ от функции (10.2.10) с учетом (10.2.11) и учитывая тождества $\partial U / \partial \lambda = \partial U / \partial \psi = \partial U / \partial \varphi \equiv 0$,

находим, что усредненная система первого приближения принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= -2\bar{\sigma}_l \frac{1}{G \sin \delta} \frac{\partial U^*}{\partial \delta}, \\ \dot{\delta} &= 0, \quad \dot{G} = 0, \quad \dot{\theta} = G \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi (A_1^{-1} - A_2^{-1}), \\ \dot{\varphi} &= G \cos \theta (A_3^{-1} - A_1^{-1} \sin^2 \varphi - A_2^{-1} \cos^2 \varphi) - 2\bar{\sigma}_l \frac{1}{G \sin \theta} \frac{\partial U^*}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial U^*}{\partial \delta} &= \sum_{l=0}^Q \sum_{m=0}^{l+1} \sum_{k=0}^m A_{lmk} (\cos \theta)^{2(l+1-m)} \sin^{2m} \theta (\sin \delta)^{2(l-m+k)+1} \times \\ &\quad \times (\cos \delta)^{2(m-k)-1} [(l+1) \cos^2 \delta + k - m], \\ \frac{\partial U^*}{\partial \theta} &= \sum_{l=0}^Q \sum_{m=0}^{l+1} \sum_{k=0}^m A_{lmk} (\sin \delta)^{2(l+1-m+k)} (\cos \delta)^{2(m-k)} \times \\ &\quad \times (\cos \theta)^{2(l-m)+1} (\sin \theta)^{2m-1} [m - (l+1) \sin^2 \theta]. \end{aligned} \quad (10.2.13)$$

Основной аналитический результат заключается в следующем: коэффициенты $\bar{\sigma}_l$ и A_{lmk} определены в (10.2.10), а коэффициенты a_{2l} разложения (10.1.3), содержащие четные степени, при усреднении исчезают. Вектор кинетического момента остается постоянным по величине и постоянно наклоненным к плоскости орбиты.

2.3. Исследование уравнений для углов нутации и собственного вращения

Уравнения для определения углов нутации θ и собственного вращения φ (10.2.13) описывают движение вектора кинетического момента \mathbf{G} относительно тела и приводятся к виду (в медленном времени ξ)

$$\begin{aligned} \theta' &= \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi, \\ \varphi' &= \cos \theta (\eta_1 - \sin^2 \varphi) - 2\bar{\sigma}_l \beta^{-1} G_0^{-2} (\sin \theta)^{-1} \frac{\partial U^*(\theta, \delta_0)}{\partial \theta}, \\ \xi &= G_0 \beta t, \quad \eta_1 = -\frac{\gamma}{\beta}, \quad \beta = A_1^{-1} - A_2^{-1}, \quad \gamma = A_2^{-1} - A_3^{-1}. \end{aligned} \quad (10.2.14)$$

Параметр $\bar{\sigma}_l$ определен в (10.2.10), а функция $\partial U^*(\theta, \delta_0)/\partial \theta$ построена согласно формулам (10.2.13). Величины G_0, δ_0 в (10.2.14) — это значения G, δ в начальный момент времени. С учетом соотношений (10.2.5)

и предположения $a_{2l+1} \sim \varepsilon, l = 0, \dots, Q$, получим, что $\beta, \gamma, \bar{\sigma}_l \sim \varepsilon$. Для системы (10.2.14) имеет место первый интеграл

$$\begin{aligned} c &= \sin^2 \theta (\eta_1 - \sin^2 \varphi) - 4\bar{\sigma}_l \beta^{-1} G_0^{-2} f(\theta, \delta_0), \\ f(\theta, \delta_0) &= \sum_{l=0}^Q \sum_{m=0}^{l+1} \sum_{k=0}^m A_{lmk} \left[\frac{m}{2} \sum_{i=0}^{l-m} C_{l-m}^i \frac{(-1)^i (\sin \theta)^{2(m+i)}}{m+i} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (l+1) \sum_{i=0}^{l-m} \frac{(-1)^i (\sin \theta)^{2(m+i+1)}}{m+i+1} \right] (\sin \delta_0)^{2(l+1-m+k)} (\cos \delta_0)^{2(m-k)}, \end{aligned} \quad (10.2.15)$$

в чем можно убедиться непосредственной проверкой.

2.4. Учет нулевой и первой гармоник при аппроксимации момента сил светового давления

Представим функцию $a_c(\cos \varepsilon_s)$ в виде

$$a_c = a_0 + a_1 \cos \varepsilon_s. \quad (10.2.16)$$

В этом случае уравнения для определения θ и φ , как следует из (10.2.14), принимают вид (остаются члены, обусловленные a_1)

$$\begin{aligned} \theta' &= \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi, \quad \varphi' = \cos \theta (\eta^* - \sin^2 \varphi), \\ \eta^* &= \frac{\alpha - \gamma}{\beta}, \quad \alpha = -\frac{1}{2} (1 - e^2)^{3/2} a_1 R_0^2 p^{-2} G_0^{-2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \delta_0 \right). \end{aligned} \quad (10.2.17)$$

Величины γ, β определены формулами (10.2.14).

Здесь G_0 — значение G в начальный момент времени. Для системы (10.2.17) имеет место первый интеграл

$$c_1 = \sin^2 \theta (\eta^* - \sin^2 \varphi) = \sin^2 \theta_0 (\eta^* - \sin^2 \varphi_0) = \text{const}. \quad (10.2.18)$$

Этот результат можно также получить из выражения первого интеграла (10.2.15) для функции a_c вида (10.1.3) при $n = 1$ ($l = 0$).

Положим для определенности $A_1 > A_2 > A_3$; тогда $\beta < 0, \gamma < 0, \eta^* < 0$. Введем переменную $x = \cos \theta$. После ряда преобразований с учетом (10.2.18) уравнение (10.2.17) для определения θ допускает разделение

переменных и приводится к соотношению

$$C(t - t_0) = \pm \int_{x_0}^x [(x_1^2 - h)(b_1^2 - x_1^2)]^{-1/2} dx_1, \quad (10.2.19)$$

$$C = G_0(A_2^{-1} - A_1^{-1})[\eta^*(\eta^* - 1)]^{1/2},$$

$$h = 1 - \frac{c_1}{\eta^*}, \quad b_1^2 = 1 - \frac{c_1}{\eta^* - 1}.$$

Таким образом, задача свелась к квадратуре: справа в (10.2.19) стоит эллиптический интеграл. Обращение интеграла (10.2.19) для получения решения уравнений (10.2.17) проводится по-разному в зависимости от параметров в подынтегральном выражении (10.2.19).

Из (10.2.19) нетрудно видеть, что справедливы неравенства

$$h = 1 - \frac{c_1}{\eta^*} \leq 1, \quad h \leq b_1^2 \leq 1.$$

Проведем обращение интеграла (10.2.19) для случая $h \leq 0$. В этом случае $|x| \leq b_1$, поэтому сделаем замену переменной $x = b_1 \cos \bar{\omega}$, и интеграл (10.2.19) приводится к виду

$$\tau = \Theta(t - t_*) = \int_0^{\bar{\omega}} (1 - k^2 \sin^2 \bar{\omega})^{-1/2} d\bar{\omega}, \quad (10.2.20)$$

$$\Theta = C(b_1^2 - h)^{1/2}, \quad k^2 = \frac{b_1^2}{b_1^2 - h} \leq 1.$$

Здесь t_* — некоторый фиксированный момент времени. Таким образом, получен эллиптический интеграл первого рода. Обращение это интеграла дает выражения

$$\omega = \text{am } \tau, \quad \cos \omega = \text{cn } \tau, \quad \cos \theta = b_1 \text{cn } \tau. \quad (10.2.21)$$

По аргументу τ функции $\text{cn } \tau$, $\text{sn } \tau$ являются периодическими с периодом $T_\tau = 4K(k^2)$. Период колебаний угла θ по времени равен $T_\theta = \frac{4K(k^2)}{\Theta}$. Таким образом, зависимость θ от времени вычисляется известным образом через эллиптические функции Якоби.

Для вычисления неизвестной $\varphi(t)$ достаточно знать, как изменяются со временем функции $\sin \varphi \sin \theta$ и $\cos \varphi \sin \theta$. Чтобы определить эти функции, обратимся к первому интегралу (10.2.18). Используя этот интеграл, получаем (для определенности в (10.2.19) для $\sin \theta$ берется знак плюс [19])

$$\sin \varphi \sin \theta = [\eta^*(h - b_1^2)]^{1/2} \text{dn } \tau, \quad (10.2.22)$$

$$\cos \varphi \sin \theta = (1 - \eta^*)^{1/2} b_1 \text{sn } \tau.$$

Таким образом, все направляющие косинусы вектора кинетического момента периодичны с периодом T_θ .

Проинтегрируем теперь уравнение (10.2.17) для случая $h \geq 0$. Обозначим $h = b_2^2$ и представим интеграл (10.2.19) в виде

$$C(t - t_0) = \int_x^{b_1} [(b_1^2 - x_1^2)(x_1^2 - b_2^2)]^{-1/2} dx_1. \quad (10.2.23)$$

Сделаем замену переменных $x_1^2 = b_1^2 \cos^2 \bar{\omega} + b_2^2 \sin^2 \bar{\omega}$. После ряда выкладок интеграл (10.2.23) примет вид (10.2.20), где выполняются замены $\Theta \rightarrow b_1 C$, $t_* \rightarrow t_0$, а модуль k описывается соотношением $k^2 = (b_1^2 - b_2^2)b_1^{-2} < 1$. Обращение этого интеграла запишется следующим образом: $\omega = \text{am } \tau$, $\tau = b_1 C(t - t_0)$. Тогда

$$x = \cos \theta = b_1 \text{dn } \tau. \quad (10.2.24)$$

Используя первый интеграл (10.2.18), получим (с точностью до знака)

$$\sin \varphi \sin \theta = [\eta^*(b_2^2 - b_1^2)]^{1/2} \text{cn } \tau, \quad (10.2.25)$$

$$\cos \varphi \cos \theta = [(1 - \eta^*)(b_1^2 - b_2^2)]^{1/2} \text{sn } \tau.$$

Таким образом, в первом приближении метода усреднения имеет место аналогия решаемой задачи со случаем Эйлера–Пуансо. В медленном времени τ задача о движении близкого к динамически сферическому твердого тела под действием момента сил светового давления эквивалентна задаче о движении фиктивного твердого тела с произвольными моментами инерции. Это обусловлено принятым приближением функции (10.2.16) и является основным качественным результатом исследования.

Проведем качественный анализ фазовой плоскости угловых переменных (θ, φ) . Исследуем систему (10.2.17) для θ и φ с первым интегралом (10.2.18). В этой системе переменные θ, φ изменяются в пределах $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, а параметр η^* может принимать произвольные

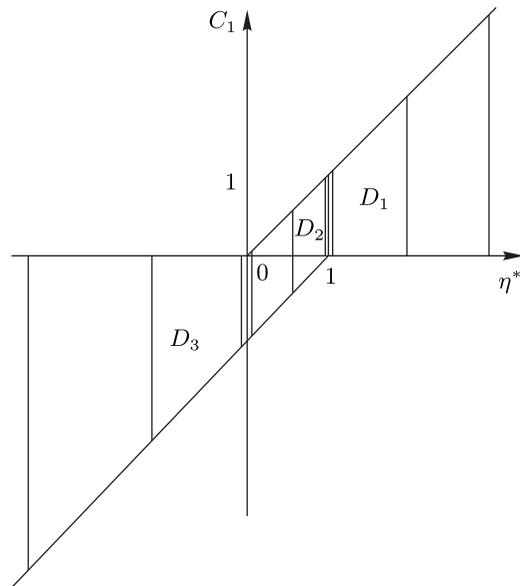


Рис. 40

значения: $-\infty < \eta^* < +\infty$ (в зависимости от соотношений между моментами инерции). Область D допустимых значений параметров (c_1, η^*) приведена на рис. 40.

Выделим три подобласти $D_{1,2,3}$, подобласть D_1 определяется неравенствами $\eta^* \geq c_1 \geq 0$ и $\eta^* \geq 1$, подобласть D_2 определяется следующими соотношениями: $\eta^* \geq c_1 \geq \eta^* - 1$ и $0 \leq \eta^* \leq 1$, и, наконец, для D_3 имеем $0 \geq c_1 \geq \eta^* - 1$ и $\eta^* \leq 0$. Допустимая область D параметров системы (c_1, η^*) , то есть $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, показана на рис. 40.

Особыми подмножествами системы (10.2.17) являются границы подобластей $D_{1,2,3}$. В областях D_1 и D_3 движение представляет собой колебания по θ и колебания или вращения по φ . Сепаратриса для области D_1 задается соотношением

$$\sin^2 \theta = (\eta^* - 1)(\eta^* - \sin^2 \varphi)^{-1},$$

а для области D_3 получим

$$\sin^2 \theta = \eta^*(\eta^* - \sin^2 \varphi)^{-1} \leq 1.$$

В области D_2 имеют место колебания по θ и φ .

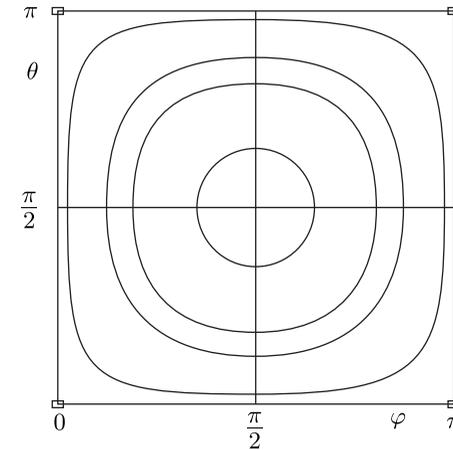


Рис. 41

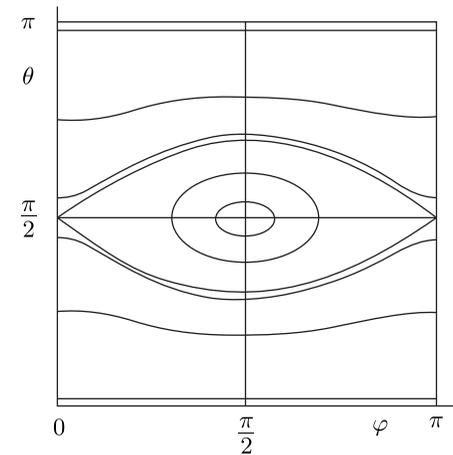


Рис. 42

Некоторые характерные случаи фазовых портретов системы (10.2.17) в плоскости φ, θ для различных значений η^* представлены на рис. 41–44. Рис. 41 соответствует случаю $\eta^* = 0$. Зависимость θ от φ при $\eta^* = 1$ получается из зависимости, изображенной на рис. 41, сдвигом на $\pi/2$ вдоль оси φ . На рис. 42 показан фазовый портрет, полученный при помощи пер-

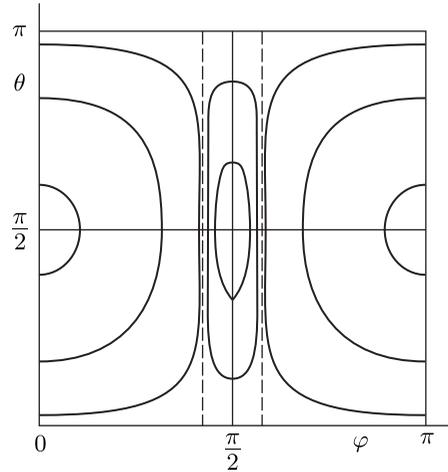


Рис. 43

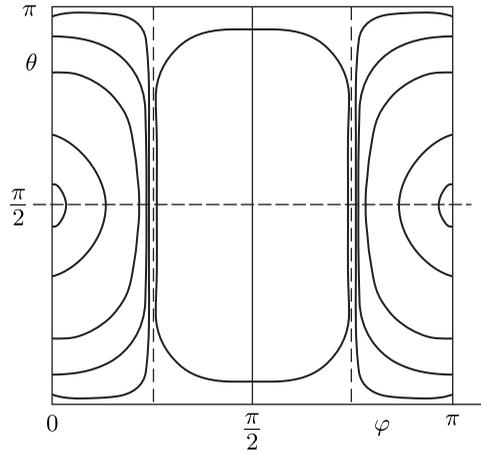


Рис. 44

вого интеграла (10.2.18) системы (10.2.17), при $\eta^* = -1,7$. Здесь для движений внутри сепаратрисы имеют место колебания по φ и θ , а вне ее — вращения. При $\eta^* > 1$ фазовые портреты имеют аналогичный вид, но сдвинуты на $\pi/2$ вдоль оси φ . При $\eta^* \rightarrow -\infty$ зависимости $\theta(\varphi)$ становятся пря-

мыми, параллельными оси φ . Рис. 43 соответствует значению $\eta^* = 0,95$, а рис. 44 — значению $\eta^* = 0,5$.

Исследуем эволюцию вектора кинетического момента. Системе (10.2.13) для функции a_c вида (10.2.16) запишем следующим образом

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= -\frac{1}{2}(1-e^2)^{3/2}a_1R_0^2G^{-1}p^{-2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\theta\right)\cos\delta, \\ \dot{\delta} &= 0, \quad \dot{G} = 0, \quad \dot{\theta} = G\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi(A_1^{-1}-A_2^{-1}), \\ \dot{\varphi} &= \cos\theta[G(A_3^{-1}-A_1^{-1}\sin^2\varphi-A_2^{-1}\cos^2\varphi)- \\ &\quad -\frac{1}{2}(1-e^2)^{3/2}a_1R_0^2G^{-1}p^{-2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\delta\right)]. \end{aligned} \quad (10.2.26)$$

Уравнение (10.2.26) для λ в случае $h \leq 0$ после подстановки (10.2.21) и ряда преобразований принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{d\tau} &= d^-(1-3b_1^2\text{cn}^2\tau), \quad \tau = \Theta(t-t_*), \\ d^- &= \frac{1}{4}(1-e^2)^{3/2}a_1R_0^2G_0^{-2}p^{-2}A_1A_2\cos\delta_0(A_1-A_2)^{-1}(-c_1)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (10.2.27)$$

где δ_0 — значение δ в начальный момент времени. После интегрирования уравнения (10.2.27) получим

$$\lambda = \lambda_0 + d^-[\tau(1+3b_1^2k'^2/k^2) - 3E(g, k)b_1/k^2]. \quad (10.2.28)$$

Здесь $E(g, k)$ — неполный эллиптический интеграл второго рода, k^2 — квадрат модуля эллиптических функций, $k'^2 = 1 - k^2$ — квадрат дополнительного модуля, λ_0 — значение λ в начальный момент времени, $g = \text{am } \tau$ — эллиптическая амплитуда.

При малых значениях k можно пользоваться рядами для функции $E(g, k)$ [266]. Подставляя их в (10.2.28), получим

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + d^- \{ (2Ky/\pi)[1+3b_1^2k^{-2}(k'^2-E/K)] - \\ &\quad - 3b_1^2[(1-k^2/4)(2\sin 2y+k^2\sin 4y) + \frac{1}{4}[(1+k^2)\sin y+k^2\sin 3y] \times \\ &\quad \times [(1-k^2)\cos y+k^2\cos 3y](1-k^2/2)] \} + O(k^4). \end{aligned} \quad (10.2.29)$$

Здесь

$$[1+3b_1^2k^{-2}(k'^2-E/K)] = O(k^2), \quad y = \pi\tau(2K)^{-1},$$

K, E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно. Формула (10.2.29) справедлива для любых y и малых k и состоит из линейного и колебательного слагаемых по t .

При значении модуля k , близком к единице, и небольших значениях g можно пользоваться соответствующими разложениями для функции $E(g, k)$ из [266]. Сохраняя члены $\sim k'^2$, получим после подстановки их в (10.2.28) выражение

$$\lambda = \lambda_0 + d^- \{ \tau(1 + 3b_1^2 k'^2 k^{-2}) - 3b_1^2 k^{-2} [(1 - k'^2/4) \times \\ \times \ln \operatorname{tg}((1/2) \operatorname{am} \tau + \pi/4) + (1/4) k'^2 \operatorname{sn} \tau \operatorname{cn}^{-2} \tau] \}. \quad (10.2.30)$$

При $h \geq 0$ уравнение для λ (10.2.26) с подстановкой (10.2.24) после ряда преобразований принимает вид

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = d^+ (1 - 3b_1^2 \operatorname{dn}^2 \tau), \quad \tau = b_1 C(t - t_0), \\ d^+ = \frac{1}{4} (1 - e^2)^{3/2} a_1 R_0^2 G_0^{-2} p^{-2} A_1 A_2 (A_1 - A_2)^{-1} \times \\ \times [\eta^* (\eta^* - 1 - c_1)]^{-1/2} \cos \delta_0. \quad (10.2.31)$$

После интегрирования уравнения (10.2.31) находим

$$\lambda = \lambda_0 + d^+ [\tau - 3b_1^2 E(g, k)]. \quad (10.2.32)$$

При малых k , используя разложение функции $E(g, k)$ по степеням величины k^2 [266], получим аналогично (10.2.29)

$$\lambda = \lambda_0 + d^+ [(2Ky/\pi)(1 - 3b_1^2 E/K) - (51/8)b_1^2 k^2 \sin 2y] + O(k^4). \quad (10.2.33)$$

Формула (10.2.33) справедлива для любых y и малых k и содержит линейное и колебательное слагаемые.

При k , близком к единице, и небольших g , используя разложение $E(g, k)$ [266], получим аналогично (10.2.30)

$$\lambda = \lambda_0 + d^+ \left\{ \tau - 3b_1^2 \left[\left(1 - \frac{k'^2}{4} \right) \ln \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \operatorname{am} \tau + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{4} k'^2 \operatorname{sn} \tau \operatorname{cn}^{-2} \tau \right] \right\}. \quad (10.2.34)$$

Как следует из уравнения (10.2.26) для переменной λ , при значении θ , близком к нулю или π , скорость $\dot{\lambda}$ знакопеременна; она отрицательна при $\cos \delta > 0$ и положительна, если $\cos \delta < 0$.

В общем случае переменная λ может иметь характер вращательного или колебательного движения. Если θ сильно изменяется, то выражение $1 - (3/2) \sin^2 \theta$ может быть знакопеременным. В результате значение λ может быть практически постоянным при

$$M_t [1 - (3/2) \sin^2 \theta] = 0.$$

Анализ показывает, что существуют значения параметров η^* , θ_0 , φ_0 , при которых $\lambda \approx \text{const}$.

В рассматриваемой задаче картина эволюции движения оказывается более сложной по сравнению со случаем динамически симметричного спутника [17] ($A_1 = A_2 \neq A_3$), так как система содержит большее число (на единицу) медленных переменных.

Рассмотрим частные случаи движения тела. Значение $\theta = 0$ является стационарной точкой первого уравнения (10.2.17). Уравнение для φ при $\theta = 0$ принимает вид, допускающий разделение переменных. После интегрирования этого уравнения получим

$$\operatorname{tg} \varphi = l \operatorname{tg} [\pm r \xi + \operatorname{arctg}(l^{-1} \operatorname{tg} \varphi_0)], \\ l = [\eta^*/(\eta^* - 1)]^{1/2}, \quad r = [\eta^*(\eta^* - 1)]^{1/2}, \quad \xi = G_0 \beta t. \quad (10.2.35)$$

Верхний и нижний знаки у r в (10.2.35) соответствуют случаям $\eta^* > 1$ и $\eta^* < 0$. Если же $0 < \eta^* < 1$, то имеем

$$\operatorname{tg} \varphi = \Xi [z \exp(J\xi) - w] [z \exp(J\xi) + w]^{-1}, \\ z = 1 + [(1 - \eta^*)(\eta^*)^{-1}]^{1/2} \operatorname{tg} \varphi_0, \quad J = 2[\eta^*(1 - \eta^*)]^{1/2}, \\ w = 1 - [(1 - \eta^*)(\eta^*)^{-1}]^{1/2} \operatorname{tg} \varphi_0, \quad \Xi = [\eta^*/(1 - \eta^*)]^{1/2}. \quad (10.2.36)$$

При малых значениях угла θ система (10.2.26) записывается следующим образом:

$$\dot{\lambda} = -\frac{1}{2} (1 - e^2)^{3/2} a_1 R_0^2 G^{-1} p^{-2} \cos \delta_0, \\ \delta = \delta_0, \quad G = G_0, \quad \dot{\theta} = G_0 \beta \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi, \\ \dot{\varphi} = G_0 (A_3^{-1} - A_1^{-1} \sin^2 \varphi - A_2^{-1} \cos^2 \varphi) - \\ - \frac{1}{2} (1 - e^2)^{3/2} a_1 R_0^2 G^{-1} p^{-2} [1 - (3/2) \sin^2 \delta_0], \quad (10.2.37)$$

где β определено в (10.2.14).

Здесь учтены члены порядка θ . Уравнение для определения φ в случае малых θ совпадает с соответствующим уравнением при $\theta = 0$, и его решение может быть представлено в виде соотношений (10.2.35), (10.2.36). После интегрирования уравнения для определения угла θ (10.2.37) с учетом формулы (10.2.35) получим соотношение

$$\theta^2 = \theta_0^2 l^{\mp 2} (l^2 \cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0)^{\pm 1} \{ \cos^2 [\pm r \xi + \arctg(l^{-1} \operatorname{tg} \varphi_0)] + l^2 \sin^2 [\pm r \xi + \arctg(l^{-1} \operatorname{tg} \varphi_0)] \}^{\pm 1}. \quad (10.2.38)$$

Верхние и нижние знаки « \pm » в (10.2.38) отвечают соответственно $\eta^* > 1$ и $\eta^* < 0$. Если $0 < \eta^* < 1$, то с учетом (10.2.36) имеем для θ выражение

$$\theta = \theta_0 [G \exp(2J\xi) + H \exp(J\xi) + V]^{1/2} \exp[-(1/2)J\xi], \quad (10.2.39)$$

$$G = z(1 + \Xi^2), \quad H = 2zw(1 - \Xi^2), \quad V = w^2(1 + \Xi^2).$$

В результате интегрирования уравнения (10.2.37) для определения угла λ получим

$$\lambda = -\frac{1}{2}(1 - e^2)^{3/2} a_1 R_0^2 G_0^{-1} p^{-2} t \cos \delta_0 + \lambda_0. \quad (10.2.40)$$

Отметим, что для строго динамически симметричного спутника [17] ($A_1 = A_2 + O(\varepsilon^2)$) уравнения (10.2.26) могут быть проинтегрированы в виде

$$\theta = \theta_0, \quad G = G_0, \quad \delta = \delta_0, \quad \varphi = G_0(\alpha - \gamma)t \cos \theta_0 + \varphi_0, \quad (10.2.41)$$

$$\lambda = -\frac{1}{2}(1 - e^2)^{3/2} a_1 R_0^2 G_0^{-1} p^{-2} [1 - (3/2) \sin^2 \theta_0] t \cos \delta_0 + \lambda_0.$$

Таким образом, исследована эволюция вращений спутника, близкого к динамически сферическому, под действием момента сил светового давления, при аппроксимации которого учтены нулевая и первая гармоники, выявлены качественные эффекты.

§ 3. Учет третьей и четных гармоник при аппроксимации момента сил светового давления

Представим функцию $a_c(\cos \varepsilon_s)$ из (10.1.3) в виде

$$a_c = \sum_{k=0}^Q a_{2k} \cos^{2k} \varepsilon_s + a_3 \cos^3 \varepsilon_s. \quad (10.3.1)$$

В этом случае уравнения для определения θ и φ , как следует из (10.2.14), в медленном времени ξ принимают вид (остаются члены, обусловленные a_3)

$$\theta' = \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi,$$

$$\varphi' = \cos \theta (\eta_2 - \sin^2 \varphi - \alpha_1 \sin^2 \theta), \quad \eta_2 = -\frac{\gamma}{\beta} - \alpha_1 s,$$

$$\alpha_1 = \frac{3a_3 R_0^2}{64 G_0^2 p^2 \beta} (1 - e^2)^{3/2} (8 - 40 \sin^2 \delta_0 + 35 \sin^4 \delta_0), \quad (10.3.2)$$

$$s = \frac{4 \sin^2 \delta_0 (4 - 5 \sin^2 \delta_0)}{8 - 40 \sin^2 \delta_0 + 35 \sin^4 \delta_0}.$$

Величины ξ , β , γ определены соотношениями (10.2.14). С учетом соотношения (10.2.5) и предположения $a_3 \sim \varepsilon$ получим, что β , α , γ — малые величины порядка $\sim \varepsilon$.

Для системы (10.3.2) имеет место первый интеграл, который можно получить непосредственно или из выражения первого интеграла (10.2.15) для общего случая зависимости a_c , аппроксимируемой тригонометрическим полиномом произвольного порядка, при $n = 3$ ($l = 1$):

$$c_2 = \sin^2 \theta [\eta_2 - \sin^2 \varphi - (1/2) \alpha_1 \sin^2 \theta] =$$

$$= \sin^2 \theta_0 [\eta_2 - \sin^2 \varphi_0 - (1/2) \alpha_1 \sin^2 \theta_0] = \text{const}. \quad (10.3.3)$$

Проведем качественный анализ фазовой плоскости (θ, φ) . Исследуем систему для θ и φ (10.3.2) с первым интегралом (10.3.3). В этой системе переменные θ , φ изменяются в пределах $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, а параметр η_2 может принимать произвольные значения: $-\infty < \eta_2 < +\infty$ (в зависимости от соотношений между моментами инерции). Область D^* допустимых значений параметров η_2 , α_1 приведена на рис. 45.

Определим стационарные точки уравнений (10.3.2), приравняв нулю их правые части. Имеем

1) $\cos \theta = 0$, $\theta = \pm \pi/2$, $\varphi = 0, \pi, \pm \pi/2$; эти точки существуют во всей плоскости (η_2, α_1) ;

2) $\sin \theta = 0$, $\theta = 0, \pi$, $\eta_2 - \sin^2 \varphi = 0$, $0 \leq \eta_2 \leq 1$, $\varphi = \pm \arcsin \sqrt{\eta_2}$, $\varphi = \pm \arcsin \sqrt{\eta_2} + \pi$; в данном случае стационарные точки существуют в полосе $0 \leq \eta_2 \leq 1$;

3) $\varphi = 0, \pi$, $\eta_2 - \alpha_1 \sin^2 \theta = 0$, $0 < \eta_2/\alpha_1 \leq 1$, $\sin \theta = \pm \sqrt{\eta_2/\alpha_1}$, $\theta = \pm \arcsin \sqrt{\eta_2/\alpha_1}$, $\theta = \pm \arcsin \sqrt{\eta_2/\alpha_1} + \pi$; полученные точки суще-

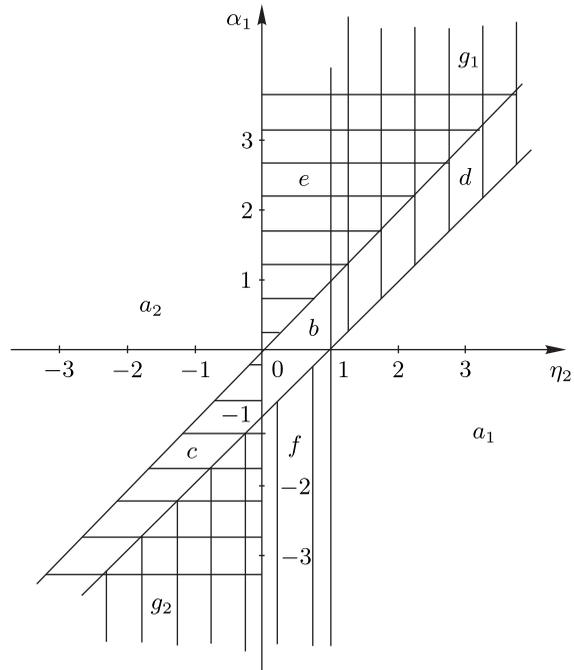


Рис. 45

ствуют во внутренности углов, заштрихованных горизонтально на рис. 45, т. е. при выполнении неравенств

$$\eta_2 \leq \alpha_1 \quad (\eta_2, \alpha_1 > 0), \quad \eta_2 \geq \alpha_1 \quad (\eta_2, \alpha_1 < 0);$$

4) $\varphi = \pm \pi/2, \eta_2 - 1 - \alpha_1 \sin^2 \theta = 0, 0 \leq \frac{\eta_2 - 1}{\alpha_1} \leq 1, \theta = \pm \arcsin \sqrt{\frac{\eta_2 - 1}{\alpha_1}},$
 $\theta = \pm \arcsin \sqrt{\frac{\eta_2 - 1}{\alpha_1}} + \pi;$ полученные стационарные точки определяются во внутренности углов, заштрихованных вертикально, т. е. при выполнении неравенств

$$\eta_2 - 1 \leq \alpha_1 \quad (\eta_2 - 1, \alpha_1 > 0), \quad \eta_2 - 1 \geq \alpha_1 \quad (\eta_2 - 1, \alpha_1 < 0).$$

Можно рассмотреть различные характерные случаи выбора параметров η_2, α_1 (см. рис. 45): ($a_{1,2}$) незаштрихованные части плоскости вне углов; (b) незаштрихованный параллелограмм в центре; (c) полуполоса внизу

налево; (d) полуполоса сверху направо; (e) полуполоса сверху; (f) полуполоса внизу; (g_1) угол сверху вправо; (g_2) угол внизу влево.

Ниже приводятся фазовые портреты усредненной системы, построенные численно для перечисленных выше случаев. Отметим, что все фазовые траектории в силу (10.3.3) симметричны относительно прямых $\theta = \pi/2$ и $\varphi = \pi/2$. Поэтому достаточно изобразить четвертую часть фазового портрета системы при $0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \varphi \leq \pi/2$ (в первом квадрате плоскости θ, φ).

Семейство фазовых траекторий усредненной системы в плоскости θ, φ при $\eta_2 = -5, \alpha_1 = -2$ (случай (a_2)) представлено на рис. 46. Эти графики соответствуют колебаниям по углу θ , а по φ происходят либо колебания (внутри сепаратрисы), либо вращения (вне сепаратрисы). Аналогичный характер зависимости θ от φ будет и в случае (a_1) ($\eta_2 = 5, \alpha_1 = 2$). При этом в случае (a_2) на фазовой плоскости (θ, φ) имеется стационарная точка $(\pi/2, \pi/2)$ типа «центр» и точка $(\pi/2, 0)$ типа «седло», а в случае (a_1) — точка $(\pi/2, 0)$ типа «центр» и $(\pi/2, \pi/2)$ типа «седло».

При $\eta_2 = 0,8, \alpha_1 = 0,5$ (случай (b)) фазовые траектории представлены на рис. 47. Стационарными точками в этом случае являются $(\pi/2, 0), (\pi/2, \pi/2), (0, 1,107)$. При $\eta_2 = 0,8, \alpha_1 = 3$ (случай (e)) фазовые кривые описывают колебания по θ и колебания или вращения по φ , разделенные сепаратрисами (см. рис. 48). Стационарные точки в этом случае таковы: $(\pi/2, \pi/2), (\pi/2, 0), (0, 1,107), (0,543, 0)$.

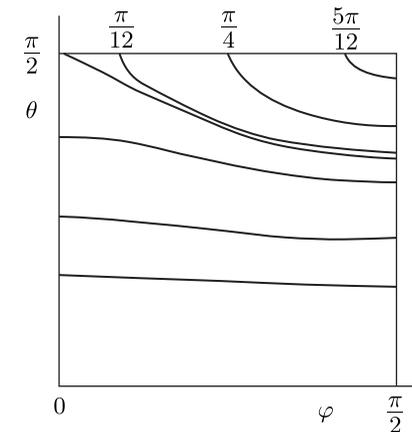


Рис. 46

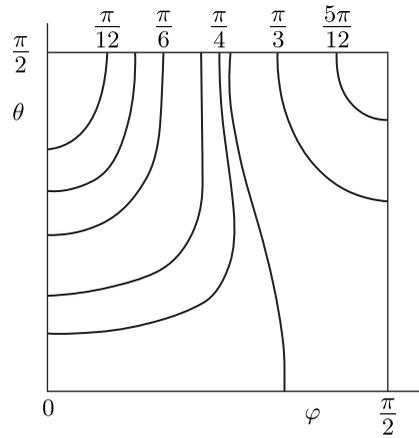


Рис. 47

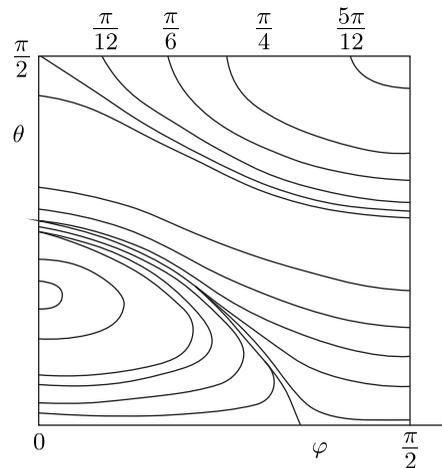


Рис. 48

Подобные фазовые траектории получаются и в случае (*f*) ($\eta_2 = 0,8$; $\alpha_1 = -1,5$). При этом стационарными точками являются $(\pi/2, 0)$, $(\pi/2, \pi/2)$, $(0, 1,107)$, $(0,374, \pi/2)$.

При $\eta_2 = 3$, $\alpha_1 = 5$ (случай (*g*₁)) фазовые траектории изображены на рис. 49 и описывают колебания по θ , колебания по φ внутри и выше се-

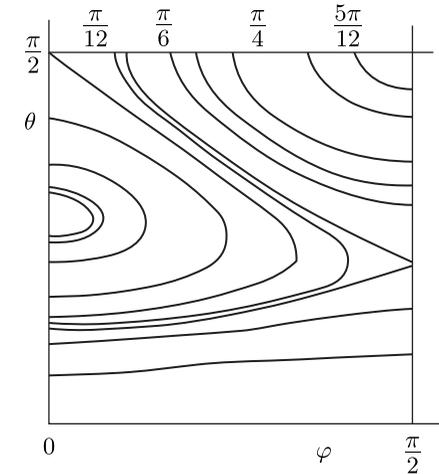


Рис. 49

паратрисы, проходящей через точку $\theta = \pi/2$, $\varphi = 0,323$, и вращения по φ ниже сепаратрисы. Стационарными точками являются $(\pi/2, 0)$, $(\pi/2, \pi/2)$, $(0,685, \pi/2)$, $(0,886, 0)$. В случае (*g*₂) ($\eta_2 = -2$, $\alpha_1 = -5$) имеет место аналогичный характер фазовых кривых. При этом сепаратриса проходит через точку $\theta = \pi/2$, $\varphi = 0,955$, стационарные точки — $(\pi/2, 0)$, $(\pi/2, \pi/2)$, $(0,886, \pi/2)$, $(0,685, 0)$.

Значение $\theta = 0$ является стационарной точкой первого уравнения (10.3.2). Уравнение для φ при $\theta = 0$ принимает вид, допускающий разделение переменных. После интегрирования этого уравнения получим выражения (10.2.35), (10.2.36), в которых вместо η^* надо поставить η_2 (см. (10.2.17)). При малых θ система (10.3.2) записывается следующим образом:

$$\theta' = \theta \sin \varphi \cos \varphi, \quad \varphi' = \eta_2 - \sin^2 \varphi. \quad (10.3.4)$$

Здесь учтены члены порядка θ . Уравнение для определения φ в случае малых θ совпадает с соответствующим уравнением при $\theta = 0$, и его решение может быть представлено в виде (10.2.35), (10.2.36). После интегрирования уравнения (10.3.4) для θ с учетом решения (10.2.35) получим выражения (10.2.38), (10.2.39) (заменив при этом η^* на η_2).

Таким образом, исследована эволюция вращений спутника, близкого к динамически сферическому, под действием момента сил светового дав-

ления, при аппроксимации которого учтены третья и четные гармоники. Установлено, что учет более высоких гармоник, чем первая, значительно усложняет анализ движения. Основные эффекты влияния момента сил светового давления на движение спутника относительно центра масс устанавливаются при учете первой и четных гармоник.

ГЛАВА 11

Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа

В § 1 описана процедура усреднения для медленных переменных возмущенного движения твердого тела, близкого к случаю Лагранжа в первом приближении [248]. Оказывается, что ряд прикладных задач допускает усреднение по углу нутации θ .

Так, в § 2, следуя [248], рассматривается возмущенное движение, близкое к случаю Лагранжа, с учетом моментов сил, действующих на твердое тело со стороны внешней среды.

В § 3 исследуются возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа, при различных порядках малости проекций вектора возмущающего момента [250].

§ 1. Общие свойства процедуры усреднения по движению Лагранжа

В п. 8.1 § 8 главы 4 рассматриваются возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа. Приведены условия возможности усреднения уравнений движения по углу нутации (4.8.4) или (4.8.6) либо (4.8.7) (вместе с (4.8.8)). Система уравнений возмущенного движения твердого тела, близкого к случаю Лагранжа, представлена в виде (4.8.9). Используем все уравнения, предположения и обозначения § 8 главы 4.

Предлагается проводить исследование возмущенного движения в медленных переменных u_i , $i = 1, 2, 3$, связанных с G_1 , H , r соотношениями (4.8.2) и более удобных для рассмотрения. При этом не требуется решать кубическое уравнение (3.1.18) относительно u_i . Предполагаем, что переменные u_i , $i = 1, 2, 3$, различны. Медленные переменные G_1 , H , r

удается выразить через u_i из (4.8.2) следующим образом:

$$\begin{aligned} G_1 &= (A_1 mgl)^{1/2} (u_1 + u_2 + u_3 + u_1 u_2 u_3 + \delta_1 R)^{1/2} \times \\ &\quad \times \delta_2 \operatorname{sgn}(1 + u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3), \\ H &= \frac{1}{2} mgl \left[(u_1 + u_2 + u_3) \left(1 + \frac{A_1}{A_3} \right) + (\delta_1 R - u_1 u_2 u_3) \left(1 - \frac{A_1}{A_3} \right) \right], \\ r &= \delta_2 A_3^{-1} (A_1 mgl)^{1/2} (u_1 + u_2 + u_3 + u_1 u_2 u_3 - \delta_1 R)^{1/2}, \\ R &= [(1 - u_1^2)(1 - u_2^2)(u_3^2 - 1)]^{1/2}, \\ \delta_1 &= \operatorname{sgn}(G_1^2 - A_3^2 r^2), \quad \delta_2 = \operatorname{sgn} r. \end{aligned} \quad (11.1.1)$$

Величины δ_1, δ_2 в начальный момент определяются по начальным условиям для G_1, r . Если в процессе движения одна или обе величины $G_1^2 - A_3^2 r^2, r$ проходят через нуль, то возможна смена знаков δ_1, δ_2 , для определения которых можно воспользоваться исходной системой (4.8.9).

Соотношения (4.8.2) запишем в сокращенном виде:

$$S_i(u_1, u_2, u_3) = \Phi_i(G_1, H, r), \quad i = 1, 2, 3, \quad (11.1.2)$$

где S_i, Φ_i — известные функции своих аргументов (см. (4.8.2)). Дифференцируя по времени (11.1.2) и подставляя вместо $\dot{G}_1, \dot{H}, \dot{r}$ выражения (4.8.9), получим соотношения

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial S_i}{\partial u_j} \dot{u}_j = \varepsilon Z_i(u_1, u_2, u_3, \theta), \quad i = 1, 2, 3. \quad (11.1.3)$$

Здесь

$$Z_i = \frac{\partial \Phi_i}{\partial G_1} F_1 + \frac{\partial \Phi_i}{\partial H} F_2 + \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} F_3, \quad i = 1, 2, 3. \quad (11.1.4)$$

Далее требуется разрешить линейные уравнения (11.1.3) относительно производных \dot{u}_i . Определитель D линейной системы (11.1.3) равен

$$D = \det \left(\frac{\partial S_i}{\partial u_j} \right) = (u_1 - u_2)(u_1 - u_3)(u_2 - u_3)$$

и по предположению отличен от нуля. Частные производные, фигурирующие в (11.1.4), могут быть при помощи равенств (11.1.1) представлены в виде функций только от переменных u_i .

Таким образом, после разрешения системы (11.1.3) относительно производных искомая система уравнений для медленных переменных u_i принимает вид, аналогичный (4.8.9):

$$\begin{aligned} \dot{u}_i &= \varepsilon V_i(u_1, u_2, u_3, \theta), \quad i = 1, 2, 3, \\ V_i &= V_{i1} F_1^* + V_{i2} F_2^* + V_{i3} F_3^*, \\ V_{ij} &= V_{ij}(u_1, u_2, u_3), \quad j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (11.1.5)$$

причем имеем

$$\begin{aligned} V_{11} &= \frac{G_1 - A_3 r u_1}{A_1 mgl (u_1 - u_2)(u_1 - u_3)}, \\ V_{12} &= \frac{u_1^2 - 1}{mgl (u_1 - u_2)(u_1 - u_3)}, \\ V_{13} &= \frac{A_3}{mgl (u_1 - u_2)(u_1 - u_3)} \left[\left(\frac{A_3}{A_1} - 1 \right) r u_1^2 - \frac{G_1}{A_1} u_1 + r \right]. \end{aligned} \quad (11.1.6)$$

Здесь вместо G_1, r нужно подставить соответствующие формулы (11.1.1). Функции $V_{2j}, V_{3j}, j = 1, 2, 3$ получаются из соответствующих выражений (11.1.6) для того же значения j путем циклической перестановки индексов у величин u_i . Функции F_i^* получаются подстановкой в F_i из (4.8.9) выражений для интегралов (11.1.1). Начальные значения u_{i0} для переменных u_i вычисляются по начальным данным G_{10}, H_0, r_0 при помощи соотношений (4.8.2).

Процедура усреднения уравнений (11.1.5) для медленных переменных u_i первого приближения состоит в следующем. Подставим в правые части системы (11.1.5) быструю переменную θ из выражения (3.1.29) для невозмущенного движения:

$$\theta = \arccos[u_1 + (u_2 - u_1) \operatorname{sn}^2(\alpha t + \beta)]. \quad (11.1.7)$$

После подстановки (11.1.7) правые части системы (11.1.5) будут периодическими функциями t с периодом $2K(k)/\alpha$, где k, α определены соотношениями (3.1.24), (3.1.26). Усредняя правые части полученной системы по t , получим в медленном времени $\tau = \varepsilon t$ усредненную систему первого приближения (штрихом обозначено дифференцирование по τ , а за усредненными переменными сохранены прежние обозначения):

$$u_i' = U_i(u_1, u_2, u_3), \quad u_i(0) = u_{i0}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (11.1.8)$$

Здесь

$$U_i(u_1, u_2, u_3) = \frac{\alpha}{2K(k)} \int_0^{2K/\alpha} V_i(u_1, u_2, u_3, \theta(t)) dt, \quad (11.1.9)$$

причем в качестве $\theta = \theta(t)$ в (11.1.9) подставлено выражение (11.1.7).

Итак, согласно предлагаемой методике исследование возмущенного движения Лагранжа проводится следующим образом. Пусть возмущающие моменты εL_i удовлетворяют условиям (4.8.4) или, в частности, (4.8.6), (4.8.7) (вместе с (4.8.8)). Вычислим последовательно функции L_i^* , F_i^* , V_i , $i = 1, 2, 3$, при помощи соотношений (4.8.4), (4.8.9), (11.1.5), (11.1.6). После этого усредним согласно (11.1.9) функции V_i , используя выражения (3.1.24), (3.1.26), (3.1.29), (11.1.7), и составим усредненную систему (11.1.8). Система (11.1.8) значительно проще, чем исходная система (4.8.1), так как она имеет меньший порядок (третий вместо шестого), автономна и не содержит быстрых осцилляций. После исследования и решения системы (11.1.8) для u_i исходные медленные переменные G_1 , H , r восстанавливаются по формулам (11.1.1). Быстрые переменные φ , θ , ψ могут быть найдены при помощи соотношений (3.1.15), (3.1.16), (11.1.7). При этом согласно общим теоремам метода усреднения медленные переменные u_i или G_1 , H , r определяются с погрешностью порядка ε , а быстрые переменные — с погрешностью порядка единицы на интервале изменения времени t порядка ε^{-1} .

§ 2. Возмущенное движение тела при линейных диссипативных моментах

В качестве примера развитой методики исследуем возмущенное движение Лагранжа с учетом моментов, действующих на твердое тело со стороны внешней среды. Будем считать, что возмущающие моменты εL_i , $i = 1, 2, 3$, имеют вид

$$L_1 = -ap, \quad L_2 = -aq, \quad L_3 = -br, \quad a, b > 0, \quad (11.2.1)$$

где a , b — некоторые постоянные коэффициенты пропорциональности, зависящие от свойств среды и формы тела. Моменты (11.2.1) удовлетворяют достаточным условиям (4.8.6), (4.8.8) возможности усреднения только по

углу нутации θ . Система (4.8.3) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{G}_1 &= -\varepsilon[a(p \sin \varphi + q \cos \varphi) \sin \theta + br \cos \theta], \\ \dot{H} &= -\varepsilon[a(p^2 + q^2) + br^2], \quad \dot{r} = -\varepsilon b C^{-1} r. \end{aligned} \quad (11.2.2)$$

Проинтегрировав третье уравнение (11.2.2), получим (r_0 — произвольное начальное значение осевой скорости вращения)

$$r = r_0 \exp(-\varepsilon b A_3^{-1} t). \quad (11.2.3)$$

Согласно процедуре § 1 переходим к новым медленным переменным u_i и выполним усреднение согласно (11.1.9). Получаем усредненную систему (11.1.8) в медленном времени $\tau = \varepsilon t$ вида

$$\begin{aligned} u_1' &= -\frac{1}{mgl(u_1 - u_2)(u_1 - u_3)} \left[b \frac{A_3}{A_1} r^2 u_1^2 - a \frac{A_3}{A_1} r^2 (u_1^2 - 1) - \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{a}{A_1} mgl(u_1^2 - 1)v + 2 \frac{a}{A_1} H(u_1^2 - 1) - \frac{A_3}{A_1} \left(b - a \frac{A_3}{A_1} \right) r^2 u_1 v - \right. \\ &\quad \left. - \frac{A_3}{A_1} \left(\frac{a}{A_1} + \frac{b}{A_3} \right) G_1 r u_1 + \frac{a}{A_1^2} G_1^2 + \frac{1}{A_1} \left(b - a \frac{A_3}{A_1} \right) G_1 r v \right], \\ v &= u_3 - (u_3 - u_1) \frac{E(k)}{K(k)}. \end{aligned} \quad (11.2.4)$$

Здесь вместо G_1 , H , r , k подставляются их выражения (3.1.24), (11.1.1). Уравнения для u_2 , u_3 получаются из (11.2.4) циклической перестановкой индексов у u_i . Однако при этой перестановке выражение для v , где $K(k)$, $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода, следует оставить неизменным во всех трех уравнениях.

Усредненная система (11.2.4) интегрировалась численно для $\tau \geq 0$ при разных начальных условиях и параметрах задачи. Приведем результаты расчетов для трех случаев, отвечающих следующим начальным данным:

$$\begin{array}{cccc} u_{10} & u_{20} & u_{30} & \theta_0 \\ 0,913 & 0,996 & 1,087 & 5^\circ \end{array} \quad (11.2.5)$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0,5 & 2 & 60^\circ \end{array} \quad (11.2.6)$$

$$\begin{array}{cccc} -0,992 & -0,985 & 2,992 & 170^\circ \end{array} \quad (11.2.7)$$

Приведенные данные соответствуют волчку, получившему в начальный момент угловую скорость вращения вокруг оси динамической симметрии, равную $r_0 = \sqrt{3}$, и отклоненному на угол θ_0 от вертикали. Принимаем, кроме того, $A_1 = 1,5$, $A_3 = 1$, $a = 0,125$, $b = 0,1$, $mgl = 0,5$. Используя

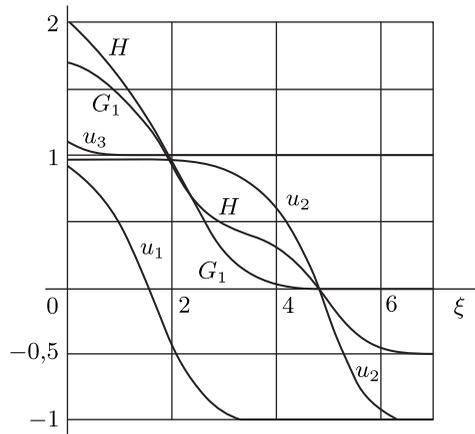


Рис. 50

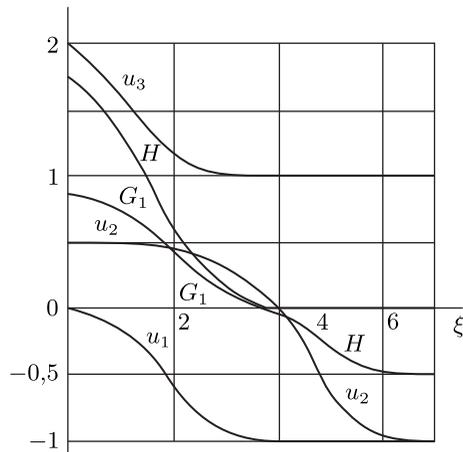


Рис. 51

значения u_i , найденные в результате численного интегрирования, определяем G_1 , H , r по формулам (11.1.1).

На рис. 50–52 изображены графики функций u_i ($i = 1, 2, 3$), G_1 , H , r для указанных трех случаев. Полная энергия H монотонно убывает, асимптотически приближаясь к значению $H = -mgl = -0,5$. Проекция вектора кинетического момента на вертикаль G_1 в случаях (11.2.5), (11.2.6) монотонно убывает, а в случае (11.2.7) монотонно возрастает и во всех случаях

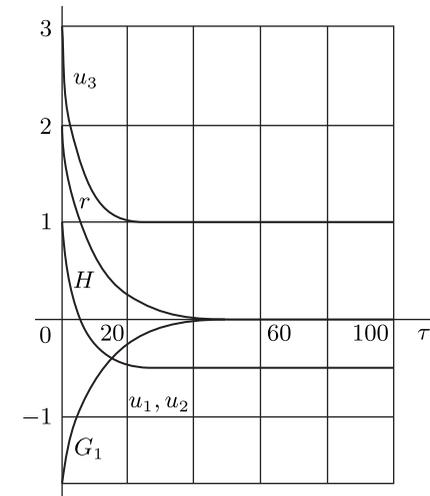


Рис. 52

стремится к нулю. Величины u_1 , u_2 монотонно убывают и стремятся к -1 , а u_3 асимптотически приближается к $+1$. При этом, как следует из (3.1.29), имеем $\cos \theta \rightarrow -1$ ($\theta \rightarrow \pi$).

Таким образом, под действием внешней диссипации твердое тело стремится к единственному устойчивому (нижнему) положению равновесия. Правильность счета контролировалась тем, что полученные по численным данным и формулам (11.1.1) значения r практически совпадают с точным решением (11.2.3).

Отметим, что в статье [249] исследуется возмущенное движение волчка Лагранжа под действием диссипативного момента, зависящего от медленного времени.

§ 3. Эволюция вращений твердого тела в случае различных порядков малости проекций вектора возмущающего момента

3.1. Общий подход

В п. 8.2 § 8 главы 4 исследуются возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа. Предполагается,

что угловая скорость тела достаточно велика, ее направление близко к оси динамической симметрии тела и две проекции вектора возмущающего момента на главные оси инерции тела малы по сравнению с восстанавливающим моментом, а третья — одного с ним порядка. Специальным образом вводится малый параметр. Получается более удобная для дальнейшего исследования система (4.8.21). Используем все обозначения, уравнения и предположения п. 8.2 § 8 главы 4.

Так как переменные L_i^* , $i = 1, 2, 3$, введенные формулами (4.8.13), периодичны по φ с периодом 2π , то согласно замене (4.8.18)–(4.8.20) функции L_i^o из (4.8.22) будут периодическими функциями α и γ с периодами 2π . Тогда система (4.8.23) содержит две вращающиеся фазы α и γ , соответствующие им частоты $A_3 A_1^{-1} r$ и $(A_3 - A_1) A_1^{-1} r$ переменны. При усреднении системы (4.8.21) или (4.8.23) следует различать два случая: нерезонансный, когда частоты $A_3 A_1^{-1} r$ и $(A_3 - A_1) A_1^{-1} r$ несоизмеримы, и резонансный, когда эти частоты соизмеримы. Весьма существенной особенностью системы (4.8.23) является то, что отношение частот постоянно:

$$\frac{(A_3 - A_1) A_1^{-1} r}{A_3 A_1^{-1} r} = 1 - A_1 A_3^{-1}$$

и резонансный случай имеет место при

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{i}{j}, \quad \frac{i}{j} \leq 2, \quad (11.3.1)$$

где i, j — натуральные взаимно простые числа, а в нерезонансном случае A_3/A_1 — иррациональное число. Вследствие (11.3.1) усреднение нелинейной системы (4.8.23), в которой X не зависит от t , эквивалентно усреднению квазилинейной системы с постоянными частотами. Это достигается введением независимой переменной γ .

В нерезонансном случае ($A_3/A_1 \neq i/j$) усредненную систему первого приближения получим путем независимого усреднения правых частей системы (4.8.21) по обоим быстрым переменным α, γ . В результате для медленных переменных получаются уравнения

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon A_1^{-1} \mu_1 - \varepsilon K A_3^{-1} r^{-1} b \cos \theta + \varepsilon K A_3^{-2} r^{-2} \mu_3^s \sin \theta, \\ \dot{b} &= \varepsilon A_1^{-1} \mu_2 + \varepsilon K A_3^{-1} r^{-1} a \cos \theta + \varepsilon K A_3^{-2} r^{-2} \mu_3^c \sin \theta, \\ \dot{r} &= \varepsilon A_3^{-1} \mu_3, \quad \dot{\psi} = \varepsilon K A_3^{-1} r^{-1}, \quad \dot{\theta} = 0, \end{aligned} \quad (11.3.2)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \mu_1(a, b, r, \psi, \theta) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (L_1^0 \cos \gamma + L_2^0 \sin \gamma) d\alpha d\gamma, \\ \mu_2(a, b, r, \psi, \theta) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (L_1^0 \sin \gamma - L_2^0 \cos \gamma) d\alpha d\gamma, \\ \mu_3(a, b, r, \psi, \theta) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} L_3^0 d\alpha d\gamma, \\ \mu_3^s(a, b, r, \psi, \theta) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} L_3^0 \sin \alpha d\alpha d\gamma, \\ \mu_3^c(a, b, r, \psi, \theta) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} L_3^0 \cos \alpha d\alpha d\gamma. \end{aligned} \quad (11.3.3)$$

Решая усредненную систему (11.3.2) для возмущающих моментов L_i^o конкретного вида, определим движение в нерезонансном случае с погрешностью порядка ε на интервале изменения времени порядка ε^{-1} . Отметим, что последнее уравнение системы (11.3.2) интегрируется и дает $\theta = \theta_0$.

Данная система эквивалентна двухчастотной системе с постоянными частотами, поскольку обе частоты пропорциональны осевой составляющей r вектора угловой скорости. Поэтому обоснование применимости метода усреднения можно провести, как и для квазилинейной системы. Основное утверждение заключается в следующем. Пусть функция X — достаточно гладкая по α, γ , а по x удовлетворяет условию Липшица с не зависящей от α, γ постоянной. Тогда на плоскости допустимых значений параметров A_3, A_1 существует множество Λ меры нуль такое, что если $(A_3, A_1) \notin \Lambda$, то для решений систем (4.8.23) и (11.3.2) имеет место оценка

$$|x(t, \varepsilon) - \xi(\varepsilon t)| \leq D\varepsilon, \quad t \in [0, \Theta\varepsilon^{-1}],$$

в которой $\xi(\varepsilon t)$ — решение усредненной по фазам α, γ системы (11.3.2), $\xi = (a, b, r, \psi, \theta)$, D и Θ — постоянные. Доказательство проводится при помощи леммы Гронуолла на основе стандартной процедуры замены переменных метода усреднения [13], а также арифметической леммы, использу-

емой для оценки «малых знаменателей» [16], возникающих при построении указанной замены.

В резонансном случае (11.3.1) система (4.8.23) одночастотна. Действительно, введем вместо α новую медленную переменную — линейную комбинацию фаз с целочисленными коэффициентами:

$$\lambda = \alpha - i(i-j)^{-1}\gamma, \quad \frac{i}{j} \neq 1, \quad \frac{i}{j} \leq 2, \quad i, j > 0. \quad (11.3.4)$$

Система (4.8.23) примет вид стандартной системы с вращающейся фазой:

$$\dot{x} = \varepsilon X(x, i(i-j)^{-1}\gamma + \lambda, \gamma), \quad (11.3.5)$$

$$\dot{\lambda} = \varepsilon Y(x, i(i-j)^{-1}\gamma + \lambda), \quad \dot{\gamma} = (A_3 - A_1)A_1^{-1}r,$$

причем ее правые части периодичны по γ с периодом $2|i-j|\pi$. Систему первого приближения построим, усредняя правые части системы (11.3.5) по указанному периоду изменения аргумента γ . В результате получим систему уравнений для медленных переменных:

$$\dot{a} = \varepsilon A_1^{-1}\mu_1^* - \varepsilon K A_3^{-1}r^{-1}b \cos \theta + \varepsilon K A_3^{-2}r^{-2}\mu_3^{*s} \sin \theta,$$

$$\dot{b} = \varepsilon A_1^{-1}\mu_2^* + \varepsilon K A_3^{-1}r^{-1}a \cos \theta - \varepsilon K A_3^{-2}r^{-2}\mu_3^{*c} \sin \theta,$$

$$\dot{r} = \varepsilon A_3^{-1}\mu_3^*, \quad \dot{\psi} = \varepsilon K A_3^{-1}r^{-1}, \quad \dot{\theta} = 0, \quad \dot{\lambda} = -\varepsilon K A_3^{-1}r^{-1} \cos \theta,$$

$$\mu_1^*(a, b, r, \psi, \theta, \lambda) = \frac{1}{2\pi|i-j|} \int_0^{2\pi|i-j|} (L_1^0 \cos \gamma + L_2^0 \sin \gamma) d\gamma,$$

$$\mu_2^*(a, b, r, \psi, \theta, \lambda) = \frac{1}{2\pi|i-j|} \int_0^{2\pi|i-j|} (L_1^0 \sin \gamma - L_2^0 \cos \gamma) d\gamma,$$

$$\mu_3^*(a, b, r, \psi, \theta, \lambda) = \frac{1}{2\pi|i-j|} \int_0^{2\pi|i-j|} L_3^0 d\gamma, \quad (11.3.6)$$

$$\mu_3^{*s}(a, b, r, \psi, \theta, \lambda) = \frac{1}{2\pi|i-j|} \int_0^{2\pi|i-j|} L_3^0 \sin \alpha d\gamma,$$

$$\mu_3^{*c}(a, b, r, \psi, \theta, \lambda) = \frac{1}{2\pi|i-j|} \int_0^{2\pi|i-j|} L_3^0 \cos \alpha d\gamma.$$

Предполагается, что в подынтегральных выражениях переменная α заменена на λ согласно (11.3.4). Отметим, что предпоследнее уравнение (11.3.6) имеет решение $\theta = \theta_0$.

Решая усредненную систему (11.3.6) для возмущающих моментов определенного вида, определим движение тела в резонансном случае с погрешностью порядка ε на интервале изменения времени порядка ε^{-1} . Обоснование проводится стандартным образом [12–14].

Далее при помощи изложенной методики рассмотрены некоторые конкретные примеры возмущенного движения твердого тела.

3.2. Влияние внешних диссипативных моментов

В качестве первого примера развитой методики исследуем возмущенное движение Лагранжа с учетом моментов, действующих на твердое тело со стороны внешней среды. Будем считать, что возмущающие моменты L_i , $i = 1, 2, 3$, являются линейно-диссипативными:

$$L_1 = -\varepsilon I_1 p, \quad L_2 = -\varepsilon I_1 q, \quad L_3 = -\varepsilon I_3 r, \quad I_1, I_3 > 0. \quad (11.3.7)$$

Здесь I_1, I_3 — некоторые постоянные коэффициенты пропорциональности, зависящие от свойств среды и формы тела.

Запишем возмущающие моменты с учетом соотношений (4.8.13) для p и q :

$$L_1 = -\varepsilon^2 I_1 P, \quad L_2 = -\varepsilon^2 I_1 Q, \quad L_3 = -\varepsilon I_3 r. \quad (11.3.8)$$

Для нерезонансного случая перейдем к новым медленным переменным a, b, r, ψ, θ и получим усредненную систему (11.3.2) вида

$$\dot{a} = -\varepsilon I_1 A_1^{-1}a - \varepsilon K A_3^{-1}r^{-1}b \cos \theta,$$

$$\dot{b} = -\varepsilon I_1 A_1^{-1}b + \varepsilon K A_3^{-1}r^{-1}a \cos \theta, \quad (11.3.9)$$

$$\dot{r} = -\varepsilon I_3 A_3^{-1}r, \quad \dot{\psi} = \varepsilon K A_3^{-1}r^{-1}, \quad \dot{\theta} = 0.$$

Проинтегрировав третье уравнение (11.3.9), получим (r_0 — произвольное начальное значение осевой скорости вращения)

$$r = r_0 \exp(-\varepsilon I_3 A_3^{-1}t), \quad r_0 \neq 0. \quad (11.3.10)$$

С учетом (11.3.10) уравнение (11.3.9) для $\dot{\psi}$ интегрируется и дает (ψ_0 — постоянная, равная начальному значению угла прецессии при $t = 0$)

$$\psi = \psi_0 + K I_3^{-1} r_0^{-1} [\exp(\varepsilon I_3 A_3^{-1}t) - 1]. \quad (11.3.11)$$

Кроме того, как видно из (11.3.9), угол нутации сохраняет постоянное значение $\theta = \theta_0$. Подставляя в первые два уравнения (11.3.9) вместо r выражение (11.3.10), получим полностью интегрируемую линейную систему вида

$$\begin{aligned}\dot{a} &= -\varepsilon I_1 A_1^{-1} a - \varepsilon K A_3^{-1} r_0^{-1} \exp(\varepsilon I_3 A_3^{-1} t) b \cos \theta, \\ \dot{b} &= -\varepsilon I_1 A_1^{-1} b + \varepsilon K A_3^{-1} r_0^{-1} \exp(\varepsilon I_3 A_3^{-1} t) a \cos \theta,\end{aligned}$$

решение которой записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}a &= \exp(-\varepsilon I_1 A_1^{-1} t) [P_0 \cos \eta + Q_0 \sin \eta - K A_3^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \sin(\eta + \varphi_0)], \\ b &= \exp(-\varepsilon I_1 A_1^{-1} t) [P_0 \sin \eta - Q_0 \cos \eta + K A_3^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \sin(\eta + \varphi_0)], \\ \eta &= K I_3^{-1} r_0^{-1} \cos \theta_0 [\exp(\varepsilon I_3 A_3^{-1} t) - 1].\end{aligned}\tag{11.3.12}$$

В результате подстановки в соотношения (4.8.18), (4.8.13) для P , Q , p , q выражений a , b из (11.3.12) и r из (11.3.10) определим

$$\begin{aligned}p &= \exp(-\varepsilon I_1 A_1^{-1} t) [p_0 \cos(\gamma - \eta) - q_0 \sin(\gamma - \eta) + \\ &\quad + k A_3^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \sin(\gamma - \eta - \varphi_0)] + \\ &\quad + k A_3^{-1} r_0^{-1} \exp(\varepsilon I_3 A_3^{-1} t) \sin \theta_0 \sin \varphi, \\ q &= \exp(-\varepsilon I_1 A_1^{-1} t) [p_0 \sin(\gamma - \eta) + q_0 \cos(\gamma - \eta) - \\ &\quad - k A_3^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \cos(\gamma - \eta - \varphi_0)] + \\ &\quad + k A_3^{-1} r_0^{-1} \exp(\varepsilon I_3 A_3^{-1} t) \sin \theta_0 \cos \varphi, \\ \gamma &= \frac{A_3(A_3 - A_1)r_0}{I_3 A_1 \varepsilon} [1 - \exp(-\varepsilon I_3 A_3^{-1} t)], \\ p_0 &= \varepsilon P_0, \quad q_0 = \varepsilon Q_0.\end{aligned}\tag{11.3.13}$$

Тем самым решение системы первого приближения для медленных переменных в случае диссипативного момента (11.3.7) построено. Отметим некоторые качественные особенности движения в данном случае. Модуль осевой скорости вращения r монотонно уменьшается по экспоненте согласно (11.3.10). Приращение угла прецессии $\psi - \psi_0$ медленно экспоненциально возрастает в соответствии с (11.3.11). Из (11.3.12) следует, что медленные переменные a , b монотонно стремятся к нулю по экспоненте.

Согласно (11.3.13) слагаемые проекций p , q , обусловленные начальными значениями p_0 , q_0 , затухают по экспоненте. В то же время проекции p , q

содержат экспоненциально возрастающие члены, пропорциональные восстанавливаемому моменту k , что приводит к экспоненциальному росту величины $(p^2 + q^2)^{1/2}$.

Если выполнено резонансное соотношение (11.3.1), то усреднение следует проводить по схеме (11.3.6). В данном случае все интегралы μ_i^* из (11.3.6) совпадают с соответствующими интегралами μ_i из (11.3.3). Поэтому резонанс фактически места не имеет и полученное решение пригодно для описания движения при любом отношении $A_3/A_1 \neq 1$.

Отметим, что аналогично может быть исследован более общий, чем (11.3.7), случай линейной зависимости диссипативных моментов от угловой скорости вращения, а именно $\mathbf{L} = -\varepsilon \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}$. Здесь \mathbf{I} — тензор, определяемый матрицей

$$\begin{vmatrix} I_1 & \varepsilon I_{12} & \varepsilon I_{13} \\ \varepsilon I_{21} & I_2 & \varepsilon I_{23} \\ \varepsilon I_{31} & \varepsilon I_{32} & I_3 \end{vmatrix},$$

в которой перекрестные члены малы по сравнению с диагональными.

3.3. Действие малого постоянного момента, приложенного вдоль оси симметрии

Рассмотрим движение твердого тела в случае Лагранжа под действием малого момента, постоянного в связанных осях и приложенного вдоль оси симметрии. Возмущающие моменты L_i , $i = 1, 2, 3$, в этом случае имеют вид

$$L_1 = L_2 = 0, \quad L_3 = \varepsilon L_3^* = \text{const}.\tag{11.3.14}$$

Переходя к новым медленным переменным a , b , r , ψ , θ , получим в нерезонансном случае усредненную систему типа (11.3.2):

$$\begin{aligned}\dot{a} &= -\varepsilon K A_3^{-1} r^{-1} b \cos \theta, \quad \dot{b} = \varepsilon K A_3^{-1} r^{-1} a \cos \theta, \\ \dot{r} &= \varepsilon A_3^{-1} L_3^*, \quad \dot{\psi} = \varepsilon K A_3^{-1} r^{-1}, \quad \dot{\theta} = 0.\end{aligned}\tag{11.3.15}$$

Проинтегрировав третье уравнение (11.3.15), получим

$$r = r_0 + \varepsilon A_3^{-1} L_3^* t.\tag{11.3.16}$$

Подставим (11.3.16) в (11.3.15) и проинтегрируем уравнение для ψ :

$$\psi = \psi_0 + K(L_3^*)^{-1} \ln |1 + \varepsilon A_3^{-1} L_3^* r_0^{-1} t|.\tag{11.3.17}$$

Здесь ψ_0 и r_0 — произвольные начальные значения угла прецессии и осевой скорости вращения.

Как следует из (11.3.15), угол нутации θ не изменяется во время движения тела: $\theta = \theta_0$.

Решение системы первых двух уравнений (11.3.15) после подстановки вместо r выражения (11.3.16) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} a &= P_0 \cos \beta + Q_0 \sin \beta - K A_3^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \sin(\beta + \varphi_0), \\ b &= P_0 \sin \beta - Q_0 \cos \beta + K A_3^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \cos(\beta + \varphi_0), \\ \beta &= K(L_3^*)^{-1} \cos \theta_0 \ln |1 + \varepsilon A_3^{-1} r_0^{-1} L_3^* t|. \end{aligned} \quad (11.3.18)$$

Подставляя в формулы (4.8.18), (4.8.13) полученные выражения a , b из (11.3.18) и r из (11.3.15), определим

$$\begin{aligned} p &= p_0 \cos(\gamma - \beta) - q_0 \sin(\gamma - \beta) + \\ &\quad + k A_3^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \sin(\gamma - \beta - \varphi_0) + \\ &\quad + k A_3^{-1} (r_0 + \varepsilon A_3^{-1} L_3^* t)^{-1} \sin \theta_0 \sin \varphi, \\ q &= p_0 \sin(\gamma - \beta) + q_0 \cos(\gamma - \beta) - \\ &\quad - k A_3^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \cos(\gamma - \beta - \varphi_0) + \\ &\quad + k A_3^{-1} (r_0 + \varepsilon A_3^{-1} L_3^* t)^{-1} \sin \theta_0 \cos \varphi, \\ \gamma &= (A_3 - A_1) A_1^{-1} \left(\frac{1}{2} \varepsilon A_3^{-1} L_3^* t^2 + r_0 t \right), \quad p_0 = \varepsilon P_0, \quad q_0 = \varepsilon Q_0. \end{aligned} \quad (11.3.19)$$

Согласно (11.3.16) величина $|r(\tau)|$, $\tau = \varepsilon t$, возрастает, если параметры r_0 , L_3^* имеют одинаковый знак, и убывает, если знаки различны. Угол прецессии ψ (11.3.17) содержит переменную составляющую, модуль которой в обоих случаях монотонно возрастает: в первом случае он ограничен для конечного $\tau \sim 1$, во втором стремится к бесконечности при $\tau \rightarrow -\left(\frac{A_3 r_0}{L_3^*}\right)$; при этом $r \rightarrow 0$.

Переменная β в (11.3.18), (11.3.19) изменяется аналогично ψ , если $\theta_0 \neq \pm \frac{1}{2}\pi$, и имеет смысл фазы колебаний. Частота колебаний $\left(\frac{d\beta}{dt}\right) \sim r_0^{-1}$. Медленные переменные a , b являются ограниченными 2π -периодическими функциями β . Составляющие p , q вектора угловой скорости, согласно (11.3.19), содержат ограниченные осциллирующие слагаемые, обусловленные ненулевыми начальными данными p_0 , q_0 , а также аналогич-

ное слагаемое, обусловленное восстанавливающими моментом (4.8.11). Частота колебаний определяется производной переменной $(\gamma - \beta)$, имеющей смысл фазы.

3.4. Случай тела, близкого к динамически симметричному

Остановимся кратко на случае тяжелого твердого тела, у которого эллипсоид инерции относительно точки O близок к эллипсоиду вращения, так что его главные моменты инерции имеют вид

$$A_1 = A^0(1 + \varepsilon\sigma_1), \quad A_2 = A^0(1 + \varepsilon\sigma_2), \quad A_3 \neq A^0.$$

Здесь σ_1 , σ_2 — безразмерные постоянные порядка единицы, A^0 — характерная величина моментов инерции. Кроме того, центр тяжести тела может быть смещен относительно точки O^* , лежащей на главной оси инерции, относительно которой момент равен A_3 , на величину порядка ε . В этом случае задача о движении тяжелого твердого тела может быть сведена к рассмотренной выше введением дополнительных возмущающих моментов, удовлетворяющих условию (4.8.13). Оказывается, что при этом $L_3 \sim \varepsilon^2$, так что $L_3^* = L_3^0 = 0$. Следуя (11.3.3), (11.3.6), получим

$$\mu_3 = \mu_3^s = \mu_3^c = 0, \quad \mu_3^* = \mu_3^{*s} = \mu_3^{*c} = 0.$$

Таким образом, последние три уравнения (11.3.2) принимают вид

$$\dot{r} = 0, \quad \dot{\psi} = \varepsilon K A_3^{-1} r^{-1}, \quad \dot{\theta} = 0.$$

В рассматриваемом приближении кинематические уравнения Эйлера не возмущаются и движение тела представляет собой регулярную прецессию.

Отметим, что, как следует из уравнений первого приближения (11.3.2), (11.3.6), при наличии нескольких возмущающих моментов вида (4.8.13) результаты их действия складываются, соответствующие этим возмущениям интегралы (11.3.3), (11.3.6) представляются в виде суммы интегралов для отдельных возмущений.

В [256, 257] рассматриваются возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа, под действием восстанавливающего момента, зависящего от медленного времени и угла нутации, а также возмущающего момента, медленно изменяющегося во времени. В статье [256] тело быстро закручено, а восстанавливающий

и возмущающий моменты предполагаются малыми, с определенной иерархией малости компонентов.

В [251, 257] тело также предполагается быстро закрученным, а проекции вектора возмущающего момента на главные оси инерции тела малы по сравнению с восстанавливающим моментом.

Литература

- [1] Euler L. Du Mouvement de Rotation des Corps Solides autour d'un Axe Variable // Histoire de l'Academie Royale des Sciences. — Berlin. — 1758–1765. — Т. 14. — P. 154–193.
- [2] Lagrange J.-L. *Mechanique Analytique*. — A Paris: Chez La Veuve Desaint, 1788. — 522 p.
- [3] Kowalevski S. Sur le Probleme de la Rotation d'un Corps Solide Autour d'un Point Fixe // Acta Math. — 1889. — Т. 12. — P. 177–232.
- [4] Харламов П. В. Современное состояние и перспективы развития классических задач динамики твердого тела // *Механика твердого тела*. — 2000. — Вып. 30. — С. 1–12.
- [5] Гашененко И. Н., Горр Г. В., Ковалев А. М. *Классические задачи динамики твердого тела*. — Киев: Наукова думка, 2012. — 402 с.
- [6] Борисов А. В., Мамаев И. С. *Динамика твердого тела*. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. — 384 с.
- [7] Лурье А. И. *Аналитическая механика*. — М.: Физматгиз, 1961. — 824 с.
- [8] Витгенбург Й. *Динамика систем твердых тел*. — М.: Мир, 1980. — 292 с.
- [9] Козлов В. В. *Методы качественного анализа в динамике твердого тела*. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. — 248 с.
- [10] Демин В. Г., Конкина Л. И. *Новые методы в динамике твердого тела*. — Фрунзе: Илим, 1989. — 182 с.
- [11] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. *Математические аспекты классической и небесной механики*. — М.: Изд-во УРСС, 2002. — 414 с.
- [12] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*. — М.: Наука, 1974. — 503 с.
- [13] Волосов В. М., Моргунов Б. И. *Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем*. — М.: Изд-во МГУ, 1971. — 507 с.

- [14] Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике. — Киев: Наукова думка, 1971. — 440 с.
- [15] Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. — М.: Наука, 1981. — 400 с.
- [16] Арнольд В. И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Изд-во МЦНМО, 2012. — 384 с.
- [17] Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. — М.: Наука, 1965. — 416 с.
- [18] Черноушко Ф. Л. О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // Прикл. математика и механика. — 1963. — Т. 27. — Вып. 3. — С. 474–483.
- [19] Белецкий В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. — М.: Изд-во МГУ, 1975. — 308 с.
- [20] Holland R. L. and Sperling H. J. A First Order Theory for the Rotational Motion of a Triaxial Rigid Body Orbiting and Oblate Primary // *The Astronomical Journal*. — 1969. — Vol. 74, № 3. — P. 490–496.
- [21] Белецкий В. В., Яншин А. М. Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. — Киев: Наукова думка, 1984. — 188 с.
- [22] Нам Тум По. Влияние аэродинамического торможения на движение сферического спутника относительно центра масс // Бюлл. ИТА. — 1965. — Т. 10, № 5 (118). — С. 84–91.
- [23] Федорова Л. И. Влияние диссипативного момента сил аэродинамического трения на ротационное движение несимметричного искусственного спутника Земли // Проблемы механики управляемого движения. — Пермь. — 1975. — Вып. 7. — С. 119–121.
- [24] Белецкий В. В., Грушевский А. В. Эволюция вращательных движений спутника под действием диссипативного аэродинамического момента // Прикл. математика и механика. — 1994. — Т. 58. — Вып. 1. — С. 13–20.
- [25] Морозов В. М. Устойчивость движения космических аппаратов. Итоги науки и техники. Сер. «Общая механика», 1969. — М.: ВИНТИ АН СССР, 1971. — С. 5–83.
- [26] Сарычев В. А. Вопросы ориентации искусственных спутников. Итоги науки и техники. Сер. «Исследование космического пространства». — М.: ВИНТИ АН СССР, 1978. — Т. 23. — 223 с.

- [27] Shrivastava S. K. and Modi V. J. Satellite Attitude Dynamics and Control in the Presence of Environmental Torques — a Brief Survey // *J. Guid., Contr. and Dyn.* — 1983. — Vol. 6, № 6. — P. 461–471.
- [28] Торжевский А. П. Быстрое вращение искусственного спутника вокруг центра масс в резонансном режиме // *Космич. исслед.* — 1968. — Т. 6, № 1. — С. 58–70.
- [29] Hitzl D. L. and Breakwell J. V. Resonant and Non-Resonant Gravity-Gradient Perturbations of a Tumbling Triaxial Satellite // *Celest. Mech.* — 1971. — Vol. 3, № 3. — P. 346–383.
- [30] Лара М., Феррер С. Замкнутая форма решения задачи о быстром вращении трехосного спутника под действием гравитационного момента // *Космич. исслед.* — 2013. — Т. 51, № 4. — С. 323–337.
- [31] Охоцимский Д. Е., Сарычев В. А. Система гравитационной стабилизации искусственных спутников // *Искусственные спутники Земли*. — М.: АН СССР. — 1963. — Вып. 16. — С. 5–9.
- [32] Сарычев В. А. Д. Е. Охоцимский и его роль в создании систем пассивной ориентации спутников // *Прикладная небесная механика и управление движением. К 90-летию со дня рождения Д. Е. Охоцимского / Составители: Т. М. Энеев, М. Ю. Овчинников, А. Р. Голиков*. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2010. — С. 223–271.
- [33] Румянцев В. В. Об устойчивости стационарных движений спутников. — М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1967. — 141 с.
- [34] Rauschenbakh B. V., Ovchinnikov M. Yu. and McKenna-Lawlor S. *Essential Space-Flight Dynamics and Magnetospherics*. — Kluwer Academic Publishers, 2003. — 397 p.
- [35] Маркеев А. П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. — М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. — 396 с.
- [36] Охоцимский Д. Е., Энеев Т. М., Аким Э. Л., Сарычев В. А. Прикладная небесная механика и управление движением // *Прикладная небесная механика и управление движением. К 90-летию со дня рождения Д. Е. Охоцимского / Составители: Т. М. Энеев, М. Ю. Овчинников, А. Р. Голиков*. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2010. — С. 328–367.
- [37] Пупышев Ю. А. О влиянии гравитационных и аэродинамических моментов на вращательное движение около центра масс несимметричного твердого тела // *Вестник Ленингр. ун-та*. — 1971. — № 7. — Матем., мех., астрон. — Вып. 2. — С. 129–134.

- [38] Кузнецова Е. Ю., Сазонов В. В., Чебуков С. Ю. Эволюция быстрого вращения спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов // Известия РАН. Механика твердого тела. — 2000. — № 2. — С. 3–12.
- [39] Сазонов В. В., Сазонов В. В. Использование уточненной модели аэродинамического момента в задаче реконструкции вращательного движения спутников «Фотон» // Космич. исслед. — 2011. — Т. 45, № 2. — С. 117–127.
- [40] Маслова А. И., Пироженко А. В. К моделированию аэродинамического момента, действующего на спутник // Космич. исслед. — 2010. — Т. 48, № 4. — С. 371–379.
- [41] Ишлинский А. Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. — М.: Наука, 1976. — 670 с.
- [42] Магнус К. Гироскоп. Теория и применение. — М.: Мир, 1974. — 526 с.
- [43] Klein F., Sommerfeld A. The Theory of the Top. Vol. III. Perturbations, Astronomical and Geophysical Applications. — Boston, MA: Birkhauser, 2012. — P. 532–829.
- [44] Крылов А. Н., Крутков Ю. А. Общая теория гироскопов и некоторых технических их применений. — М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1932. — 356 с.
- [45] Светлов А. В. О вращении гироскопа в сопротивляющейся среде // Прикл. математика и механика. — 1938. — Т. 1. — Вып. 3. — С. 371–376.
- [46] Кошляков В. Н. О некоторых частных случаях интегрирования динамических уравнений Эйлера, связанных с движением гироскопа в сопротивляющейся среде // Прикл. математика и механика. — 1953. — Т. 17. — Вып. 2. — С. 137–148.
- [47] Кошляков В. Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы. — М.: Наука, 1985. — 288 с.
- [48] Булгаков Б. В. Прикладная теория гироскопов. — М.: Изд-во МГУ, 1976. — 401 с.
- [49] Leimanis E. The General Problem of the Motion of Coupled Rigid Bodies about a Fixed Point. — В. — Heidelberg–N. Y.: Springer, 1965. — 337 p.
- [50] Gray A. A Treatise on Gyrostatics and Rotational Motion. Theory and Applications. — N. Y.: Dover, 1959. — 530 p.
- [51] Раус Э. Дж. Динамика системы твердых тел. Т. II. — М.: Наука, 1983. — 544 с.

- [52] Аппель П. Теоретическая механика. Т. II. — М.: Физматгиз, 1960. — 487 с.
- [53] Мак-Миллан В. Д. Динамика твердого тела. — М.-Л.: Изд-во ин. литер., 1951. — 468 с.
- [54] Граммель Р. Гироскоп. Его теория и применения. Т. I. — М.: Изд-во ин. литер., 1952. — 351 с.
- [55] Климов Д. М., Космодемьянская Г. Н., Черноусько Ф. Л. О движении гироскопа с неконтактным подвесом // Известия АН СССР. Механика твердого тела. — 1972. — № 2. — С. 3–8.
- [56] Мартыненко Ю. Г. Движение твердого тела в электрических и магнитных полях. — М.: Наука, 1988. — 368 с.
- [57] Денисов Г. Г., Урман Ю. М. Прецессионные движения твердого тела под действием моментов, имеющих силовую функцию // Известия АН СССР. Механика твердого тела. — 1975. — № 6. — С. 5–14.
- [58] Урман Ю. М. Неприводимые тензоры и их применение в задачах динамики твердого тела // Известия РАН. Механика твердого тела. — 2007. — № 6. — С. 52–68.
- [59] Урман Ю. М. Теория симметрии в классических системах: Учебное пособие. — Н. Новгород: НГПУ, 2009. — 107 с.
- [60] Денисов Г. Г., Комаров В. Н. Неконсервативные моменты и их влияние на прецессию неконтактного гироскопа // Известия АН СССР. Механика твердого тела. — 1979. — № 3. — С. 15–23.
- [61] Лещенко Д. Д. О движении тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде // Прикл. механика. — 1975. — Т. 11, № 3. — С. 89–94.
- [62] Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Черноусько Ф. Л. Быстрое движение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде // Известия АН СССР. Механика твердого тела. — 1982. — № 3. — С. 5–13.
- [63] Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Рачинская А. Л. Эволюция быстрого вращения спутника под действием гравитационного момента в среде с сопротивлением // Известия РАН. Механика твердого тела. — 2008. — № 2. — С. 13–26.
- [64] Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Рачинская А. Л. Эволюция быстрого вращения динамически симметричного спутника под действием гравитационного момента в сопротивляющейся среде // Механика твердого тела. — 2006. — Вып. 36. — С. 58–63.

- [65] Нейштадт А. И. Об эволюции вращения твердого тела под действием суммы постоянного и диссипативного возмущающих моментов // Известия АН СССР. Механика твердого тела. — 1980. — № 6. — С. 30–36.
- [66] Пивоваров М. Л. О движении гироскопа с малым самовозбуждением // Известия АН СССР. Механика твердого тела. — 1985. — № 6. — С. 23–27.
- [67] Iñarrea M. and Lanchares V. Chaotic Pitch Motion of an Asymmetric Non-Rigid Spacecraft with Viscous Drag in Circular Orbit // International Journal of Non-Linear Mechanics. — 2006. — Vol. 41, № 1. — P. 86–100.
- [68] Van der Ha J. C. Perturbation Solution of Attitude Motion under Body-Fixed Torques // Acta Astronaut. — 1985. — Vol. 12, № 10. — P. 861–869.
- [69] Kane J. R. and Levinson D. A. Approximate Description of Attitude Motion of a Torque-Free, nearly Axisymmetric Rigid Body // J. Astronaut. Sci. — 1987. — Vol. 35, № 4. — P. 435–446.
- [70] Ayobi M. A. and Longuski J. M. Analytical Solution for Translational Motion of Spinning-Up Rigid Bodies Subject to Constant Body-Fixed Forces and Moments // Trans. ASME. J. Appl. Mech. — 2008. — Vol. 75, № 1. — P. 011004/1-011004/8.
- [71] Медведев А. В. Движение быстро закрученного гироскопа под действием постоянного момента в сопротивляющейся среде // Известия АН СССР. Механика твердого тела. — 1989. — № 2. — С. 21–24.
- [72] Куряков В. А. Быстрое движение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела с квадратичным законом сопротивления // Прикл. механика. — 1988. — Т. 24, № 10. — С. 101–112.
- [73] Кудин С. Ф., Мартыненко Ю. Г. Раскрутка неконтактного гироскопа в сопротивляющейся среде // Известия АН СССР. Механика твердого тела. — 1985. — № 6. — С. 14–22.
- [74] Денисов Г. Г. О вращении твердого тела в сопротивляющейся среде // Известия АН СССР. Механика твердого тела. — 1989. — № 4. — С. 37–43.
- [75] Локшин Б. Я., Привалов В. А., Самсонов В. А. Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. — М.: Изд-во МГУ, 1986. — 86 с.
- [76] Рубановский В. Н., Самсонов В. А. Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. — М.: Наука, 1988. — 304 с.
- [77] Шамолин М. В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. — М.: Изд-во «Экзамен», 2007. — 349 с.

- [78] Kane T. R. Motion of a Symmetric Gyrostat in a Viscous Medium // AIAA Journal. — 1970. — Vol. 8, № 10. — P. 1786–1789.
- [79] Пузырев В. Е., Суйков А. С. О движении твердого тела вокруг центра масс при частичной диссипации энергии // Механика твердого тела. — 2009. — Вып. 39. — С. 157–166.
- [80] Леонов Г. А., Морозов А. В. О глобальной устойчивости стационарных вращений твердого тела // Прикл. математика и механика. — 1992. — Т. 56. — Вып. 6. — С. 993–997.
- [81] Кривцов А. М. Описание движения осесимметричного твердого тела в линейно-вязкой среде при помощи квазиординат // Известия РАН. Механика твердого тела. — 2000. — № 4. — С. 23–29.
- [82] Иванова Е. А. Точное решение задачи о вращении осесимметричного твердого тела в линейной вязкой среде // Известия РАН. Механика твердого тела. — 2001. — № 6. — С. 15–30.
- [83] Тронин К. Г. Численное исследование вращения твердого тела под действием суммы постоянного и диссипативного возмущающих моментов // Нелинейная динамика. — 2005. — Т. 1, № 2. — С. 209–213.
- [84] Ge Z. M. and Wu M. H. The Stability of Motion of Rigid Body about a Fixed Point in the Case of Euler with Various Damping Torques // Trans. Can. Soc. Mech. Eng. — 1988. — Vol. 12, № 3. — P. 165–171.
- [85] Modi V. J. On the Semi-Passive Attitude Control and Propulsion of Space Vehicles using Solar Radiation Pressure // Acta Astronautica. — 1995. — Vol. 35, № 2–3. — P. 231–246.
- [86] Поляхова Е. Н. Космический полет с солнечным парусом. — М.: Изд-во «Книжный дом «Либроком», 2011. — 320 с.
- [87] Попов В. И. Системы ориентации и стабилизации космических аппаратов. — М.: Машиностроение, 1986. — 184 с.
- [88] Каргу Л. И. Системы угловой стабилизации космических аппаратов. — М.: Машиностроение, 1980. — 172 с.
- [89] Карымов А. А. Определение сил и моментов сил светового давления, действующих на тело при движении в космическом пространстве // Прикл. математика и механика. — 1962. — Т. 26. — Вып. 5. — С. 867–876.
- [90] Карымов А. А. Устойчивость вращательного движения геометрически симметричного искусственного спутника в поле сил светового давления // Прикл. математика и механика. — 1964. — Т. 28. — Вып. 5. — С. 923–930.

- [91] Белецкий В. В., Грушевский А. В., Старостин Е. Л. Управление вращением космического аппарата с помощью давления солнечного излучения // Известия РАН. Техническая кибернетика. — 1993. — № 1. — С. 32–38.
- [92] Сидоренко В. В. О вращательном движении космического аппарата с солнечным стабилизатором // Космич. исслед. — 1992. — Т. 30, № 6. — С. 780–790.
- [93] Коган А. Ю., Кирсанова Т. С. Вращение закрученного КА в световом потоке // Космич. исслед. — 1994. — Т. 32, № 3. — С. 74–87.
- [94] Комаров М. М., Сазонов В. В. Расчет сил и моментов сил светового давления, действующих на астероид произвольной формы // Астрон. вестн. — 1994. — Т. 28, № 1. — С. 21–30.
- [95] Сазонов В. В. Движение астероида относительно центра масс под действием момента сил светового давления // Астрон. вестн. — 1994. — Т. 28, № 2. — С. 95–107.
- [96] Vokrouhlicky D. and Milani A. Direct Solar Radiation Pressure on the Orbits of Small Near-Earth Asteroids: Observable Effects? // Astron. Astrophys. — 2000. — Vol. 362. — P. 746–755.
- [97] Rubincam D. P. Radiative Spin-Up and Spin-Down of Small Asteroids // ICARUS. — 2000. — Vol. 148. — P. 2–11.
- [98] Scheeres D. J. and Mirrahimi S. Rotational Dynamics of a Solar System Body under Solar Radiation Torques // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. — 2008. — Vol. 101. — P. 69–103.
- [99] Cicalo S. and Scheeres D. J. Averaged Rotational Dynamics of an Asteroid in Tumbling Rotation under the YORP Torque // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. — 2010. — Vol. 106. — P. 301–337.
- [100] Васильев Л. А. Определение давления света на космические летательные аппараты. — М.: Машиностроение, 1985. — 206 с.
- [101] Сазонов В. В., Сазонов В. В. Расчет главного вектора и главного момента сил светового давления, действующих на космический аппарат с солнечным парусом // Космич. исслед. — 2011. — Т. 49, № 1. — С. 59–67.
- [102] Лещенко Д. Д., Шамаев А. С. О движении спутника относительно центра масс под действием моментов сил светового давления // Известия АН СССР. Механика твердого тела. — 1985. — № 1. — С. 14–21.
- [103] Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д. Эволюция вращений спутника, близкого к динамически сферическому, под действием моментов сил све-

- тового давления // Известия РАН. Механика твердого тела. — 1996. — № 2. — С. 3–12.
- [104] Лещенко Д. Д. Эволюция вращений трехосного тела под действием момента сил светового давления // Известия РАН. Механика твердого тела. — 1997. — № 6. — С. 17–26.
- [105] Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Суксова С. Г., Тимошенко И. А. Движение спутника относительно центра масс под действием гравитационных и световых моментов // Механика твердого тела. — 2004. — Вып. 34. — С. 95–105.
- [106] Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Суксова С. Г., Тимошенко И. А. Эволюция вращений трехосного спутника, близкого к динамически сферическому, под действием гравитационных и световых моментов // Известия РАН. Механика твердого тела. — 2006. — № 4. — С. 97–107.
- [107] Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородною капельною жидкостью // Избранные сочинения. Т. I. — М.–Л.: Гостехиздат, 1948. — С. 31–152.
- [108] Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. — М.: Наука, 1965. — 439 с.
- [109] Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. — М.: Машиностроение, 1968. — 532 с.
- [110] Нариманов Г. С., Докучаев Л. В., Луковский И. А. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. — М.: Машиностроение, 1977. — 208 с.
- [111] Румянцев В. В., Рубановский В. Н., Степанов С. Я. Колебания и устойчивость твердых тел с полостями, заполненными жидкостью // Вибрации в технике. Т. 2. — М.: Машиностроение, 1979. — С. 280–306.
- [112] Анчев А., Румянцев В. В. О динамике и устойчивости гироскопов // Успехи механики. — 1979. — Т. 2, № 3. — С. 3–45.
- [113] Черноушко Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1965. — Т. 5, № 6. — С. 1049–1070.
- [114] Черноушко Ф. Л. Движение тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, при больших числах Рейнольдса // Прикл. математика и механика. — 1966. — Т. 30. — Вып. 3. — С. 478–494.

- [115] Черноусько Ф. Л. О свободных колебаниях вязкой жидкости в сосуде // Прикл. математика и механика. — 1966. — Т. 30. — Вып. 5. — С. 836–847.
- [116] Черноусько Ф. Л. О движении тела с полостью, частично заполненной вязкой жидкостью // Прикл. математика и механика. — 1966. — Т. 30. — Вып. 6. — С. 977–992.
- [117] Черноусько Ф. Л. Колебания сосуда с вязкой жидкостью // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. — 1967. — № 1. — С. 58–66.
- [118] Черноусько Ф. Л. Колебания твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью // Инженерный журнал. Механика твердого тела. — 1967. — № 1. — С. 3–14.
- [119] Черноусько Ф. Л. Вращательные движения твердого тела с полостью, заполненной жидкостью // Прикл. математика и механика. — 1967. — Т. 31. — Вып. 3. — С. 416–432.
- [120] Черноусько Ф. Л. О движении твердого тела, содержащего сферический демпфер // Ж. прикл. мех. и техн. физ. — 1968. — № 1. — С. 73–79.
- [121] Черноусько Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. — М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1968. — 230 с.
- [122] Chernousko F. L. The Movement of a Rigid Body with Cavities Containing a Viscous Fluid. — Washington: NASA, 1972. — 214 p.
- [123] Кобрин А. И. К задаче о движении тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, относительно центра масс в потенциальном поле массовых сил // Прикл. математика и механика. — 1969. — Т. 33. — Вып. 3. — С. 431–440.
- [124] Кобрин А. И. Асимптотическое решение задачи о влиянии жидкого заполнения на движение управляемого твердого тела при малых числах Рейнольдса // Тр. Ин-та / Ин-т механики Моск. ун-та. — 1973. — № 28. — С. 65–78.
- [125] Смирнова Е. П. Стабилизация свободного вращения асимметрического волчка с полостями, целиком заполненными жидкостью // Прикл. математика и механика. — 1974. — Т. 38. — Вып. 6. — С. 980–985.
- [126] Осипов В. З., Суликишвили Р. С. О колебании твердого тела со сферической полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью, на эллиптической орбите // Тр. ин-та / Тбилис. мат. ин-т АН Груз. ССР. — 1978. — Т. 58. — С. 175–186.

- [127] Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д. Быстрое вращение вокруг неподвижной точки тяжелого гиростата в сопротивляющейся среде // Прикл. механика. — 1982. — Т. 18, № 7. — С. 102–107.
- [128] Лещенко Д. Д., Суксова С. Г. О движении несимметричного гиростата в среде с сопротивлением // Междунар. МФНА-АНН журнал «Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах». — 2003. — Т. 9, № 2(18). — С. 83–89.
- [129] Иващенко Б. П. Движение гироскопа с полостью, заполненной вязкой жидкостью // Прикл. механика. — 1978. — Т. 14, № 8. — С. 110–115.
- [130] Пивоваров М. Л., Черноусько Ф. Л. Колебания твердого тела с тороидальной полостью, заполненной вязкой жидкостью // Прикл. математика и механика. — 1990. — Т. 54. — Вып. 2. — С. 201–206.
- [131] Пивоваров М. Л. Жидкостное демпфирование колебаний спутника с большим магнитным моментом // Космич. исслед. — 1990. — Т. 28, № 6. — С. 865–873.
- [132] Вильке В. Г., Шатина А. В. Эволюция вращения спутника со сферической полостью, заполненной вязкой жидкостью // Космич. исслед. — 1993. — Т. 31, № 6. — С. 22–30.
- [133] Вильке В. Г. Аналитическая механика систем с бесконечным числом степеней свободы. — М.: Изд-во мех.-мат. фак-та МГУ, 1997. Часть I. — 215 с.; Часть II. — 160 с.
- [134] Баранова Е. Ю., Вильке В. Г. Эволюция движения твердого тела с неподвижной точкой и эллипсоидальной полостью, заполненной вязкой жидкостью // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., механ. — 2013. — № 1. — С. 44–50.
- [135] Сидоренко В. В. Эволюция вращательного движения планеты с жидким ядром // Астрон. вестн. — 1993. — Т. 27, № 2. — С. 119–127.
- [136] Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Рачинская А. Л. Эволюция вращений спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью // Механика твердого тела. — 2007. — Вып. 37. — С. 126–139.
- [137] Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Рачинская А. Л. Вращения спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, под действием момента сил светового давления // Механика твердого тела. — 2008. — Вып. 38. — С. 95–110.
- [138] Акуленко Л. Д., Зинкевич Я. С., Лещенко Д. Д., Рачинская А. Л. Быстрые вращения спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, под действием моментов сил гравитации и светового давления // Космич. исслед. — 2011. — Т. 49, № 5. — С. 453–463.

- [139] Galdi G.P., Mazzone G., and Zunino P. Inertial Motions of a Rigid Body with a Cavity Filled with a Viscous Fluid // *Comptes Rendus Mecanique*. — 2013. — Vol. 341, № 11–12. — P. 760–765.
- [140] Kuang J.L., Leung A.Y.T., and Tan S. Chaotic Attitude Oscillations of a Satellite Filled with a Rotating Ellipsoidal Mass of Liquid Subject to Gravity-Gradient Torques // *Chaos*. — 2004. — Vol. 14, № 1. — P. 111–117.
- [141] Leung A.Y.T. and Kuang J.L. Chaotic Rotations of a Liquid — Filled Solid // *Journal of Sound and Vibration*. — 2007. — Vol. 302, № 3. — P. 540–563.
- [142] Baozeng Y. and Xie J. Chaotic Attitude Maneuvers in Spacecraft with Completely Liquid — Filled Cavity // *Journal of Sound and Vibration*. — 2007. — Vol. 302, № 4–5. — P. 643–656.
- [143] Алексеев А.В. Движение спутника-гиростата, содержащего полость с жидкостью большой вязкости // *Известия Самарского научного центра РАН*. — 2007. — Т. 9, № 3. — С. 671–676.
- [144] Алексеев А.В., Безгласный С.П., Красников В.С. Построение стабилизирующего управления для стационарных движений гиростата с полостью с вязкой жидкостью // *Известия Самарского научного центра РАН*. — 2013. — Т. 15, № 6. — С. 563–567.
- [145] Gurchenkov A.A., Nosov M.V., and Tsurkov V.I. *Control of Fluid — Containing Rotating Rigid Bodies*. — CRC Press, 2013. — 160 p.
- [146] Литвин-Седой М.З. *Механика систем связанных твердых тел // Итоги науки и техники. Сер. «Общая механика»*. — М.: ВИНТИ АН СССР, 1982. — Т. 5. — С. 3–61.
- [147] Докучаев Л.В. *Нелинейная динамика упругого летательного аппарата // Итоги науки и техники. Сер. «Общая механика»*. — М.: ВИНТИ АН СССР, 1982. — Т. 5. — С. 135–197.
- [148] Modi V.J. Attitude Dynamics of Satellites with Flexible Appendages — a Brief Review // *J. Spacecraft and Rockets*. — 1974. — Vol. 11, № 11. — P. 743–751.
- [149] Roberson R.E. Two Decades of Spacecraft Attitude Control // *J. Guidance, Control*. — 1979. — Vol. 2, № 1. — P. 3–8.
- [150] Лилов Л.К. *Моделирование систем связанных твердых тел*. — М.: Наука, 1993. — 272 с.
- [151] Горр Г.В., Мазнев А.В. *Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку*. — Донецк: ДОННУ, 2010. — 364 с.
- [152] Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н. *Управление ориентацией космических аппаратов*. — М.: Наука, 1974. — 598 с.

- [153] Roberson R.E. Torques on a Satellite Vehicle from Internal Moving Parts // *J. Appl. Mech.* — 1958. — Vol. 25, № 2. — P. 196–200, 287, 288.
- [154] Haseltine W.R. Passive Damping of Wobbling Satellites: General Stability Theory and Example // *J. Aerospace Sci.* — 1962. — Vol. 29, № 5. — P. 543–549, 557.
- [155] Colombo G. The Motion of Satellite 1958 Epsilon Around its Center of Mass // *The Smithsonian Contributions to Astrophysics*. — 1963. — Vol. 6. — P. 149–163.
- [156] Thomson W.T. *Introduction to Space Dynamics*. — N.Y.: Dover, 1986. — 317 p.
- [157] Летов А.М. *Динамика полета и управление*. — М.: Наука, 1969. — 359 с.
- [158] Качурина Н.М., Крементуло В.В. О стабилизации вращательного движения твердого тела при помощи подвижных масс // *Известия АН СССР. Механика твердого тела*. — 1981. — № 3. — С. 96–101.
- [159] Кунсив Б.Г., Каплен М.Х. Оптимальная система устранения беспорядочного вращения большого пилотируемого космического корабля с помощью внутренней подвижной массы // *Управление в пространстве*. — М.: Наука, 1976. — Т. 2. — С. 30–38.
- [160] Кравец В.В. Стабилизация материальной системы перемещением носимой массы // *Космич. исслед. на Украине*. — 1977. — Вып. 10. — С. 48–50.
- [161] Панкова Н.В., Рубановский В.Н. Устойчивость и бифуркация стационарных вращений свободного твердого тела и упруго связанной с ним точечной массы // *Известия АН СССР. Механика твердого тела*. — 1976. — № 4. — С. 14–18.
- [162] Kane T.R. and Levinson D.A. Stability, Instability and Terminal Attitude Motion of a Spinning Dissipative Spacecraft // *AIAA Journal*. — 1976. — Vol. 14, № 1. — P. 39–42.
- [163] Cloutier G.J. Resonances of a Two-DOF System on a Spin-Stabilized Spacecraft // *AIAA Journal*. — 1976. — Vol. 14, № 1. — P. 107–109.
- [164] Kane T.R. and Scher M.P. A Method of Active Attitude Control Based on Energy Considerations // *Journal of Spacecraft and Rockets*. — 1969. — Vol. 6. — P. 633–636.
- [165] Cochran J.E. and Speakman N.O. Rotational Motion of a Free Body Induced by Mass Redistribution // *Journal of Spacecraft and Rockets*. — 1975. — Vol. 12, № 2. — P. 89–95.

- [166] Halmser D. M. and Mingori D. L. Nutational Stability and Passive Control of Spinning Rockets with Internal Mass Motion // *J. Guild., Contr., and Dyn.* — 1995. — Vol. 18, № 5. — P. 1197–1203.
- [167] Janssens F. L. and Van Der Ha J. C. Stability of Spinning Satellite under Axial Thrust and Internal Mass Motion // *Acta Astronautica.* — 2014. — Vol. 94, № 1. — P. 502–514.
- [168] Райан М., Бейнам П. М. Влияние гравитационных моментов на динамику вращающегося спутника с выдвигаемыми элементами // *Космич. исслед.* — 1978. — Т. 16, № 4. — С. 497–504.
- [169] Ананьев В. В. Бифукационное множество в задаче о движении тяжелого твердого тела и упруго связанной с ним точечной массы // *Вестн. Ленингр. ун-та.* — 1982. — № 1. — Матем., мех., астрон. — Вып. 1. — С. 54–60.
- [170] Month L. A. and Rand R. H. Stability of a Rigid Body with an Oscillating Particle. An Application of MACSYMA // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* — 1985. — Vol. 52. — P. 686–692.
- [171] Салимов Г. Р. О влиянии движения космонавта на пространственное положение космического корабля // *Известия АН СССР. Механика твердого тела.* — 1987. — № 2. — С. 20–26.
- [172] Бузов А. А. О движении твердого тела, несущего подвижную массу на пружине // *Задачи исслед. устойчивости и стабилиз. движения.* — М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1987. — С. 3–12.
- [173] Лосева Н. Н. Устойчивость равномерных вращений твердого тела с подвижной точечной массой // *Докл. АН УССР.* — Сер. А. — 1988. — № 6. — С. 18–21.
- [174] Coppola V. T. The Method of Averaging for Euler's Equations of Rigid Body Motion // *Nonlinear Dynamics.* — 1997. — Vol. 14(4). — P. 295–308.
- [175] El-Gohary A. Global Stability of Rigid Body Containing Moving Masses // *International Journal of Non-Linear Mechanics.* — 2001. — Vol. 36, № 4. — P. 663–669.
- [176] El-Gohary A. On the Orientation of a Rigid Body using Point Masses // *Applied Mechanics and Computation.* — 2004. — Vol. 151, № 1. — P. 163–179.
- [177] Gray G. L., Kammer D. C., Dobson I., and Miller A. J. Heteroclinic Bifurcations in Rigid Bodies Containing Moving Parts and a Viscous Damper // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* — 1999. — Vol. 66. — P. 720–728.
- [178] Miller A. J., Gray G. L., and Mazzoleni A. P. Nonlinear Spacecraft Dynamics with a Flexible Appendage, Damping, and Moving Internal

- Submasses // *J. Guid., Contr., and Dyn.* — 2001. — Vol. 24, № 3. — P. 605–615.
- [179] Маркеев А. П. О приближенных уравнениях вращательного движения твердого тела, несущего движущуюся относительно него материальную точку // *Прикл. математика и механика.* — 2013. — Т. 77. — Вып. 2. — С. 191–201.
- [180] Baozeng Y. and Dandan Y. Study on the Global Chaotic Dynamics and Control of Liquid Filled Spacecraft with Flexible Appendage // *Acta Mechanica.* — 2010. — Vol. 209, № 1–2. — P. 11–25.
- [181] Черноушко Ф. Л. О движении твердого тела с подвижными внутренними массами // *Известия АН СССР. Механика твердого тела.* — 1973. — № 4. — С. 33–44.
- [182] Черноушко Ф. Л. О движении твердого тела с упругими и диссипативными элементами // *Прикл. математика и механика.* — 1978. — Т. 42. — Вып. 1. — С. 34–42.
- [183] Черноушко Ф. Л. О движении вязкоупругого твердого тела относительно центра масс // *Известия АН СССР. Механика твердого тела.* — 1980. — № 1. — С. 22–26.
- [184] Черноушко Ф. Л., Шамаев А. С. Асимптотика сингулярных возмущений в задаче динамики твердого тела с упругими и диссипативными элементами // *Известия АН СССР. Механика твердого тела.* — 1983. — № 3. — С. 33–42.
- [185] Лещенко Д. Д. О движении твердого тела с подвижной точечной массой // *Известия АН СССР. Механика твердого тела.* — 1976. — № 3. — С. 37–40.
- [186] Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д. Некоторые задачи движения твердого тела с подвижной массой // *Известия АН СССР. Механика твердого тела.* — 1978. — № 5. — С. 29–34.
- [187] Лещенко Д. Д., Саллам С. Н. Некоторые задачи движения твердого тела с внутренними степенями свободы // *Прикл. механика.* — 1992. — Т. 28, № 8. — С. 81–86.
- [188] Кушпиль Т. А., Лещенко Д. Д., Тимошенко И. А. Некоторые задачи эволюции вращений твердого тела под действием возмущающих моментов // *Механика твердого тела.* — 2000. — Вып. 30. — С. 119–125.
- [189] Akulenko L., Leshchenko D., Kushpil T., and Timoshenko I. Problems of Evolution of Rotations of a Rigid Body under the Action of Perturbing Moment // *Multibody System Dynamics.* — 2001. — Vol. 6, № 1. — P. 3–16.

- [190] Морозов В. М., Рубановский В. Н., Румянцев В. В., Самсонов В. А. О бифуркации и устойчивости установившихся движений сложных механических систем // Прикл. математика и механика. — 1973. — Т. 37. — Вып. 3. — С. 387–399.
- [191] Ганиев Р. Ф., Кононенко В. О. Колебания твердых тел. — М.: Наука, 1976. — 432 с.
- [192] Веретенников В. Г., Карпов И. И., Марков Ю. Г. Колебательные процессы в механических системах с упругими и диссипативными элементами: Учебное пособие. — М.: Изд-во МАИ, 1998. — 144 с.
- [193] Ганиев Р. Ф., Ковальчук П. С. Динамика систем твердых и упругих тел. — М.: Машиностроение, 1980. — 208 с.
- [194] Савченко А. Я., Болграбская И. А., Кононыхин Г. А. Устойчивость движения систем связанных твердых тел. — Киев: Наукова думка, 1991. — 168 с.
- [195] Докучаев Л. В. Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. — М.: Машиностроение, 1987. — 231 с.
- [196] Набиуллин М. К. Стационарные движения и устойчивость упругих спутников. — Новосибирск: Наука, 1990. — 217 с.
- [197] Баничук Н. В., Карпов И. И., Климов Д. М. и др. Механика больших космических конструкций. — М.: Изд-во «Факториал», 1997. — 302 с.
- [198] Марков Ю. Г., Миняев И. С. К динамике космического аппарата с упругими колеблющимися массами // Космич. исслед. — 1991. — Т. 29, № 5. — С. 684–694.
- [199] Мартыненко Ю. Г., Подалков В. В. О нутациях твердого тела в неконтактном подвесе // Известия РАН. Механика твердого тела. — 1995. — № 2. — С. 26–31.
- [200] Егармин Н. Е. Влияние упругих деформаций на тензор инерции твердого тела // Известия АН СССР. Механика твердого тела. — 1980. — № 6. — С. 43–48.
- [201] Денисов Г. Г., Новиков В. В. О свободных движениях деформируемого твердого тела, близкого к шару // Известия АН СССР. Механика твердого тела. — 1983. — № 3. — С. 43–50.
- [202] Новиков В. В. Анизотропно-упругий шар в свободном движении // Прикл. математика и механика. — 1987. — Т. 51. — Вып. 5. — С. 767–774.
- [203] Сидоренко В. В. О движении твердого тела с гибкими стержнями, допускающими группу симметрии // Известия РАН. Механика твердого тела. — 1995. — № 1. — С. 3–11.

- [204] Сидоренко В. В. Об эволюции движения механической системы с линейным демпфером большой жесткости // Прикл. математика и механика. — 1995. — Т. 59. — Вып. 4. — С. 562–568.
- [205] Шатина А. В. Эволюция вращательного движения симметричного спутника с гибкими вязкоупругими стержнями // Космич. исслед. — 2002. — Т. 40, № 2. — С. 178–192.
- [206] Гуляев В. И., Лизунов П. П. Колебания систем твердых и деформируемых тел при сложном движении. — Киев: Вища школа, 1989. — 199 с.
- [207] Smolnikov B. A. and Belyaev A. K. Evolutional Dynamics and Stability of Dissipative Solids // Acta Mechanica. — 2008. — Vol. 195. — P. 365–377.
- [208] Кузмак Г. Е. Динамика неуправляемого движения летательных аппаратов при входе в атмосферу. — М.: Наука, 1970. — 348 с.
- [209] Кузмак Г. Е. Движение осесимметричного твердого тела около неподвижной точки под воздействием моментов, медленно изменяющихся во времени // Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. — 1961. — № 4. — С. 65–78.
- [210] Ярошевский В. А. Движение неуправляемого тела в атмосфере. — М.: Машиностроение, 1978. — 168 с.
- [211] Асланов В. С. Пространственное движение тела при спуске в атмосфере. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 160 с.
- [212] Окунев Б. Н. Свободное движение гироскопа. — М.–Л.: Гостехиздат, 1951. — 379 с.
- [213] Погосян Т. И., Савченко А. Я. О движении гироскопа Лагранжа в переменном по направлению поле сил // Механика твердого тела. — 1980. — Вып. 12. — С. 85–90.
- [214] Узбек Е. К. Об устойчивости перманентных вращений твердого тела в переменном по направлению поле сил // Механика твердого тела. — 1994. — Вып. 26 (1). — С. 40–46.
- [215] McGill D. J. and Long L. S., III. The Effect of Viscous Damping on Spin Stability of a Rigid Body with a Fixed Point // Trans. ASME. J. Appl. Mech. — 1977. — Vol. 44, № 2. — P. 349–352.
- [216] Ge Z. M. and Wu M. H. The Stability of a Sleeping Top with Damping Torque // International Journal of Engineering Science. — 1989. — Vol. 27, № 3. — P. 285–288.
- [217] Пузырев В. Е. К устойчивости неравномерных вращений гироскопа Лагранжа вокруг главной оси при наличии сил сопротивления среды // Механика твердого тела. — 1985. — Вып. 17. — С. 66–70.

- [218] Ковалев А. М. О движении тела, мало отличающегося от гироскопа Лагранжа // *Механика твердого тела*. — 1971. — Вып. 3. — С. 25–27.
- [219] Сергеев В. С. Периодические движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, близкого к динамически симметричному // *Прикл. математика и механика*. — 1983. — Т. 47. — Вып. 1. — С. 163–166.
- [220] Моторина Н. Н. Применение метода Хори к исследованию возмущенного волчка Лагранжа // *Известия АН СССР. Механика твердого тела*. — 1988. — № 1. — С. 102–104.
- [221] Holmes P. J. and Marsden J. E. Horseshoes and Arnold Diffusion for Hamiltonian Systems on Lie Groups // *Indiana University Math. J.* — 1983. — Vol. 32, № 2. — P. 273–308.
- [222] Лосякова Д. А. Хаотическое движение волчка со смещенным центром тяжести // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер.* — 2012. — Т. 12. Сер. «Математика. Механика. Информатика». — Вып. 2. — С. 90–95.
- [223] Аксененкова И. М. О влиянии геомагнитного поля на периодические движения спутника относительно центра масс // *Космич. исслед.* — 1991. — Т. 29, № 1. — С. 145–148.
- [224] Конкина Л. И. Условно-периодические решения в задаче о вращении намагниченного спутника в магнитном поле // *Космич. исслед.* — 1996. — Т. 34, № 4. — С. 442–444.
- [225] Сидоренко В. В. Об одном классе движений спутника, несущего сильный магнит // *Космич. исслед.* — 2002. — Т. 40, № 2. — С. 147–155.
- [226] Савченко А. Я., Безрученко В. С. Исследование стационарных движений гироскопа Лагранжа при наличии диссипации и дебаланса тяги // *Механика твердого тела*. — 1993. — Вып. 25. — С. 75–80.
- [227] Матросов В. М. Об устойчивости движения // *Прикл. математика и механика*. — 1962. — Т. 26. — Вып. 5. — С. 885–895.
- [228] Журавлев В. Ф. Об одной форме уравнений движения симметричного тела // *Известия АН СССР. Механика твердого тела*. — 1986. — № 3. — С. 5–11.
- [229] Журавлев В. Ф., Климов Д. М. Прикладные методы в теории колебаний. — М.: Наука, 1988. — 328 с.
- [230] Кошляков В. Н. Об устойчивости движения симметричного тела, установленного на вибрирующем основании // *Укр. мат. журн.* — 1995. — Т. 47, № 12. — С. 1661–1666.

- [231] Кошляков В. Н. О структурных преобразованиях динамических систем с гироскопическими силами // *Прикл. математика и механика*. — 1997. — Т. 61. — Вып. 5. — С. 774–780.
- [232] Федорченко А. М. О движении тяжелого несимметричного гироскопа с вибрирующей точкой подвеса // *Укр. мат. журн.* — 1958. — Т. 10, № 2. — С. 209–218.
- [233] Федорченко А. М. Об одном динамическом методе повышения устойчивости быстро вращающегося симметричного гироскопа // *Прикл. математика и механика*. — 1961. — Т. 25. — Вып. 5. — С. 938–940.
- [234] Марков Ю. Г. О движении вязкоупругого твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // *Известия АН СССР. Механика твердого тела*. — 1991. — № 6. — С. 16–23.
- [235] Ковалева А. С. Многочастотные системы при стационарном случайном возмущении. Ч. 1 // *Известия РАН. Механика твердого тела*. — 1994. — № 3. — С. 44–52.
- [236] Холостова О. В. О динамике волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса // *Прикл. математика и механика*. — 1999. — Т. 63. — Вып. 5. — С. 785–796.
- [237] Шило А. П. Устойчивость стационарных движений гироскопа Лагранжа с подвижной точечной массой // *Механика твердого тела*. — 1981. — Вып. 13. — С. 97–101.
- [238] Kononov Yu. N. Spin Stability of a Lagrange Top Containing Linear Oscillators // *Journal of Mathematical Sciences*. — 2001. — Vol. 103, № 1. — P. 38–42.
- [239] Позднякович А. Е., Пузырев В. Е. Устойчивость равномерных вращений вокруг главной оси гироскопа Лагранжа с демпферами-балансирами // *Механика твердого тела*. — 2012. — Вып. 42. — С. 153–162.
- [240] Карапетян А. В., Лагутина И. С. О влиянии диссипативного и постоянного моментов на вид и устойчивость стационарных движений волчка Лагранжа // *Известия РАН. Механика твердого тела*. — 1998. — № 5. — С. 29–33.
- [241] Кононов Ю. Н., Киселева Н. В. Влияние диссипативного и постоянного моментов на устойчивость равномерного вращения в сопротивляющейся среде волчка Лагранжа с идеальной жидкостью // *Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Сер. «Математика, прикладна математика і механіка»*. — 2009. — № 850. — С. 52–56.

- [242] Иващенко Б. П. О движении симметричного волчка с полостью, заполненной вязкой жидкостью // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1976. — № 9. — С. 794–797.
- [243] Simpson H. C. and Gunzburger M. D. A Two Time Scale Analysis of Gyroscopic Motion with Friction // Journal of Applied Mathematics and Physics. — 1986. — Vol. 37, № 6. — P. 867–894.
- [244] Мархашов Л. М. Об эволюции регулярных прецессий твердого тела, близкого к волчку Лагранжа // Известия АН СССР. Механика твердого тела. — 1980. — № 3. — С. 8–12.
- [245] Сазонов В. В., Сидоренко В. В. Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярным прецессиям Лагранжа // Прикл. математика и механика. — 1990. — Т. 54. — Вып. 6. — С. 951–957.
- [246] Sidorenko V. V. Capture and Escape from Resonance in the Dynamics of the Rigid Body in Viscous Medium // J. Nonlinear Sci. — 1994. — Vol. 4. — P. 35–57.
- [247] Лещенко Д. Д. Эволюция вращений твердого тела, близких к случаю Лагранжа // Российско-американский журнал «Актуальные проблемы авиационных и аэрокосмических систем: процессы, модели, эксперимент». — 1998. — Вып. 2 (6). — С. 32–37.
- [248] Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Черноусько Ф. Л. Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа // Прикл. математика и механика. — 1979. — Т. 43. — Вып. 5. — С. 771–778.
- [249] Козаченко Т. А., Лещенко Д. Д., Рачинская А. Л. Возмущенные вращения волчка Лагранжа под действием нестационарных диссипативных моментов // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. — 2011. — Т. 16. — Вып. 16. — С. 152–157.
- [250] Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Черноусько Ф. Л. Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии // Известия АН СССР. Механика твердого тела. — 1986. — № 5. — С. 3–10.
- [251] Лещенко Д. Д., Шамаев А. С. Возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа // Известия АН СССР. Механика твердого тела. — 1987. — № 6. — С. 8–17.
- [252] Лещенко Д. Д., Саллам С. Н. Возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии // Прикл. математика и механика. — 1990. — Т. 54. — Вып. 2. — С. 224–232.

- [253] Лещенко Д. Д., Саллам С. Н. Возмущенные вращения твердого тела относительно неподвижной точки // Известия АН СССР. Механика твердого тела. — 1990. — № 5. — С. 16–23.
- [254] Leshchenko D. D. Perturbed Rotational Motion of a Rigid Body // The Lyapunov Functions Method and Applications. — J. C. Baltzer AG, Scientific Publishing Co. — IMACS. — 1990. — P. 227–232.
- [255] Акуленко Л. Д., Козаченко Т. А., Лещенко Д. Д. Вращения твердого тела под действием нестационарных восстанавливающего и возмущающего моментов // Известия РАН. Механика твердого тела. — 2003. — № 2. — С. 3–12.
- [256] Акуленко Л. Д., Козаченко Т. А., Лещенко Д. Д. Эволюция вращений твердого тела под действием восстанавливающего и управляющего моментов // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2002. — № 6. — С. 32–38.
- [257] Акуленко Л. Д., Козаченко Т. А., Лещенко Д. Д. Возмущенные вращения твердого тела под действием нестационарного возмущающего момента // Механика твердого тела. — 2002. — Вып. 32. — С. 77–84.
- [258] Акуленко Л. Д., Козаченко Т. А., Лещенко Д. Д. Возмущенные вращательные движения твердого тела по действию восстанавливающего момента, зависящего от углов прецессии и нутации // Механика твердого тела. — 2005. — Вып. 35. — С. 97–102.
- [259] Козаченко Т. А., Лещенко Д. Д. Возмущенные вращательные движения волчка Лагранжа // Механика твердого тела. — 2009. — Вып. 39. — С. 62–68.
- [260] Бухгольц Н. Н. Основы курс теоретической механики: В 2-х частях. — М.: Наука, 1972. — Ч. 1. — 468 с.; Ч. 2. — 332 с.
- [261] Голдстейн Г. Классическая механика. — М.: Наука, 1975. — 416 с.
- [262] Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики: В 2-х томах. — М.: Наука. — Т. 1, 1982. — 352 с.; Т. 2, 1983. — 640 с.
- [263] Маркеев А. П. Теоретическая механика. — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. — 592 с.
- [264] Жуковский Н. Е. Механика системы. Динамика твердого тела. — М.–Л.: Оборонгиз, 1939. — 294 с.
- [265] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 1. Механика. — М.: Наука, 1973. — 208 с.
- [266] Журавский А. М. Справочник по эллиптическим функциям. — М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1941. — 235 с.

- [267] Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. — М.: Наука, 1968. — 344 с.
- [268] Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971. — 1108 с.
- [269] Суслов Г. К. Теоретическая механика. — М.–Л.: Гостехиздат, 1946. — 656 с.
- [270] Кильчевский Н. А. Курс теоретической механики. Т. 2. — М.: Наука, 1977. — 544 с.
- [271] Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения твердого тела около неподвижной точки. — М.: Гостехиздат, 1953. — 288 с.
- [272] Klein F., Sommerfeld A. The Theory of the Top. Vol. II. Development of the Theory in the Case of Heavy Symmetric Top. — Boston, MA: Birkhauser, 2010. — 414 p.
- [273] Сикорский Ю. С. Элементы теории эллиптических функций: С приложениями в механике. Изд. 2-е, испр. — М.: КомКнига, 2006. — 368 с.
- [274] Уиттекер Э. Т. Аналитическая динамика. — Ижевск: Изд-во «РХД», 1999. — 588 с.
- [275] Greenhill A. G. On the Motion of a Top and Allied Problems in Dynamics // Quart. J. 1877. — Vol. 11. — P. 176–194.
- [276] Акуленко Л. Д. Асимптотические методы оптимального управления. — М.: Наука, 1987. — 368 с.
- [277] Akulenko L. D. Problems and Methods of Optimal Control. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer, 1994. — 360 p.
- [278] Акуленко Л. Д. Схемы усреднения высших степеней в системах с быстрой и медленной фазами // Прикл. математика и механика. — 2002. — Т. 66. — Вып. 2. — С. 165–176.
- [279] Нейштадт А. И. О разделении движений в системах с быстро вращающейся фазой // Прикл. математика и механика. — 1984. — Т. 48. — Вып. 2. — С. 197–204.
- [280] Акуленко Л. Д. Схемы усреднения высших степеней в теории нелинейных колебаний // Прикл. математика и механика. — 2001. — Т. 65. — Вып. 5. — С. 845–855.
- [281] Lamy P. and Burns J. Geometrical Approach to Torque Free Motion of a Rigid Body having Internal Energy Dissipation // American Journal of Physics. — 1972. — Vol. 40, № 3. — P. 441–445.
- [282] Курош А. Г. Курс высшей алгебры. — М.: Наука, 1965. — 431 с.
- [283] Шилов Г. Е. Введение в теорию линейных пространств. — М.: Гостехиздат, 1952. — 384 с.

- [284] Асланов В. С. Движение вращающегося тела в сопротивляющейся среде // Известия РАН. Механика твердого тела. — 2005. — № 2. — С. 27–39.
- [285] Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. — М.: Физматгиз, 1960. — 296 с.
- [286] Черноушко Ф. Л., Шамаев А. С. Эволюционные уравнения для медленных переменных в теории сингулярно возмущенных систем // Докл. АН СССР. — 1984. — Т. 277, № 2. — С. 315–318.
- [287] Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. — М.: Физматгиз, 1962. — 432 с.
- [288] Лурье А. И. Теория упругости. — М.: Наука, 1970. — 940 с.
- [289] Черноушко Ф. Л. Резонансные явления при движении спутника относительно центра масс // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1963. — Т. 3, № 3. — С. 528–538.
- [290] Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1965. — 332 с.
- [291] Белецкий В. В. О либрации спутника // Искусственные спутники Земли. — М.: Издательство АН СССР. — 1959. — Вып. 3. — С. 13–31.
- [292] Черноушко Ф. Л. О резонансе в существенно нелинейной системе // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1963. — Т. 3, № 1. — С. 131–144.
- [293] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. — М.: Наука, 1970. — 656 с.
- [294] Брюно А. Д. Семейства периодических решений уравнения Белецкого // Космич. исследования. — 2002. — Т. 40, № 3. — С. 295–316.
- [295] Садов С. Ю. Об устойчивости резонансного вращения спутника относительно центра масс в плоскости орбиты // Космич. исследования. — 2006. — Т. 44, № 2. — С. 170–181.
- [296] Моисеев Н. Н. Асимптотика быстрых вращений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1963. — Т. 3, № 1. — С. 145–158.
- [297] Ишлинский А. Ю. Деятельность Михаила Алексеевича Лаврентьева в Академии наук УССР // Ж. прикладной мех. и техн. физ. — 1960. — № 3. — С. 16–19.
- [298] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1966. — 576 с.
- [299] Нейштадт А. И. О прохождении через резонансы в двухчастотной задаче // Докл. АН СССР. — 1975. — Т. 221, № 2. — С. 301–304.
- [300] Мартыненко Ю. Г., Панкратьева Г. В. Быстрые вращения проводящего эллипсоида в однородном магнитном поле // Научные труды

- Моск. энергетического института. Проблемы механики управляемых систем, машин и механизмов. — 1985. — № 77. — С. 3–10.
- [301] Нейштадт А. И. Прохождение через сепаратрису в резонансной задаче с медленно меняющимся параметром // Прикл. математика и механика. — 1975. — Т. 39. — Вып. 4. — С. 621–632.
- [302] Румянцев В. В., Озиранер А. С. Устойчивость и стабилизация по отношению к части переменных. — М.: Наука, 1987. — 256 с.
- [303] Бойчук О. П. Стійкість руху осесиметричного твердого тіла (гіроскопа) на сферичній опорі // Доп. АН УРСР. — 1963. — № 1. — С. 31–34.
- [304] Тимофеев А. Ф. Интегрирование функций. — М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. — 432 с.
- [305] Лещенко Д. Д., Рачинская А. Л., Щетинина Ю. С. Эволюция вращений симметричного гиростата в гравитационном поле и сопротивляющийся среде // Механика твердого тела. — 2012. — Вып. 42. — С. 93–102.
- [306] Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Рачинская А. Л., Зинкевич Я. С. Возмущенные и управляемые вращения твердого тела. — Одесса: Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова, 2013. — 288 с.

Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д.

ЭВОЛЮЦИЯ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС

Дизайнер ? . ? . ?

Технический редактор ? . ? . ?

Компьютерный набор и верстка С. В. Высоцкий

Корректор Е. В. Огородникова

Подписано в печать 28.08.2014. Формат 60 × 84 $\frac{1}{16}$.

Печать офсетная. Усл. печ. л. ???, Уч. изд. л. ????

Гарнитура ???, Бумага офсетная № 1.

Тираж ??? экз. Заказ № 12-??.

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»

426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

<http://shop.rcd.ru> E-mail: mail@rcd.ru Тел./факс: +7(3412) 50-02-95
