

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/316017522>

• • •

Article · April 2011

CITATIONS

0

READS

8

4 authors, including:



Leonid D Akulenko

Russian Academy of Sciences

515 PUBLICATIONS 998 CITATIONS

SEE PROFILE



Dmytro Leshchenko

Odessa State Academy of Civil Engineering a...

201 PUBLICATIONS 174 CITATIONS

SEE PROFILE



Alla Leonidovna

Odessa National University

19 PUBLICATIONS 26 CITATIONS

SEE PROFILE

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



Evolution of rotations of a rigid body close to the Lagrange case under the action of nonstationary torque of forces [View project](#)

ОПТИМАЛЬНОЕ ТОРМОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА С ПОДВИЖНОЙ МАССОЙ В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

© 2011 г. Л. Д. Акуленко, Я. С. Зинкевич, Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская

Москва, ИПМех РАН, г. Одесса, Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Одесский национальный ун-т им. И.И. Мечникова

Поступила в редакцию 29.09.10 г.

Исследована задача об оптимальном по быстродействию торможении вращений свободного твердого тела. Предполагается, что тело содержит вязкоупругий элемент, который моделируется подвижной точечной массой, соединенной демпфером с корпусом. Кроме того, на твердое тело действует малый тормозящий момент линейного сопротивления среды. Считается, что в недеформированном состоянии тело динамически симметрично, а масса лежит на оси симметрии. Определены оптимальный закон управления для торможения вращений несущего твердого тела в форме синтеза, время быстродействия и фазовые траектории.

Введение. Развитие исследований задач динамики и управления движением твердых тел вокруг неподвижной точки состоит в учете того обстоятельства, что тела не являются абсолютно твердыми, а в некотором смысле близки к таким идеальным моделям. Влияние свойств реальных тел неидеальностей может быть выявлено на основе асимптотических методов нелинейной механики (сингулярных возмущений, усреднения и др.). Оно сводится к наличию дополнительных возмущающих моментов в уравнениях движения Эйлера для некоторого фиктивного твердого тела. Анализ пассивных движений твердого тела, которое несет подвижную массу, соединенную с телом упругой связью при наличии вязкого трения и в сопротивляющейся среде, уделялось значительное внимание [1–5]. Проблема управления вращением “квазитвердых” тел посредством сосредоточенных (приложенных к корпусу) моментов сил, имеющая значение для приложений, исследована меньше. Удалось выделить класс систем, приводящих к гладким управляющим воздействиям и дающих возможность применения методов сингулярных возмущений без накопления погрешностей типа “временных погранслоев” [6–8].

Ниже обсуждается задача оптимального по быстродействию торможения вращений динамически симметричного твердого тела, содержащего вязкоупругий элемент, который моделируется точечной массой, прикрепленной демпфером к точке на оси симметрии. Кроме того, на твердое тело действует малый тормозящий момент сил линейного сопротивления среды. Управление вращениями производится с помощью момента сил, ограниченного по модулю. Рассматриваемая модель обобщает результаты, исследованные ранее в [6–8], где решена задача об оптимальной по быстродействию стабилизации динамически симметричного твердого тела с подвижной массой, соединенных вязкоупругой связью. В [7] описано оптимальное по быстродействию торможение вращений динамически симметричного тела со сферической полостью, целиком заполненной сильно вязкой жидкостью (при малых числах Рейнольдса). Кроме того, тело содержит вязкоупругий элемент, который моделируется точечной массой, прикрепленной демпфером к точке на оси симметрии. В монографии [8] показано, что функциональное неравенство Шварца оказывается весьма полезным для построения синтеза закона торможения “квазитвердых” тел. Получены приближенные решения возмущенных задач оптимального по быстродействию торможения вращений твердых тел относительно центра масс, в том числе объектов с внутренними степенями свободы, имеющие приложения в динамике космических и атмосферных летательных аппаратов. Свойство инвариантности неуправляемой системы по отношению к величине кинетического момента наблюдается для ряда механических моделей. Изучено торможение тел, имеющих полость с вязкой жидкостью. Рассмотрены случаи осесимметричного и несимметричного в невозмущенном состоянии тел со сферической полостью, заполненной жидкостью большой вязкости (при малых числах Рейнольдса). Исследовано торможение возмущенных вращений твердого тела, близкого к сферически симметричному, под действием момента сил линейного сопротивления среды, направленного против вектора угловой скорости тела. Решена

задача оптимального по быстродействию торможения возмущенных вращений несимметрично-го твердого тела под действием момента сил линейного трения.

1. Постановка задачи оптимального управления. На основе подхода [1, 8] уравнения управляемых вращений в проекциях на оси, связанной с фиксированным твердым телом системы координат (уравнения Эйлера), могут быть представлены в виде [1, 3, 4, 8]

$$\begin{aligned} A_1 \dot{p} + (A_3 - A_1) qr &= M_p + FG^2 qr + Dr^4 p - \chi A_1 p, \\ A_1 \dot{q} + (A_1 - A_3) pr &= M_q - FG^2 pr + Dr^4 q - \chi A_1 q, \\ A_3 \dot{r} &= M_r - A_1 A_3^{-1} Dr^3 (p^2 + q^2) - \chi A_3 r. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь p, q, r – проекции вектора абсолютной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на связанные оси, $\mathbf{J} = \text{diag}(A_1, A_1, A_3)$ – тензор инерции невозмущенного тела, $M_{p,q,r}$ – проекции вектора момента сил \mathbf{M} ; кинетический момент тела $\mathbf{G} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$, его модуль

$$G = |\mathbf{G}| = [A_1^2 \omega_{\perp}^2 + A_3^2 r^2]^{1/2}, \quad \omega_{\perp}^2 = p^2 + q^2.$$

Для упрощения задачи в систему (1.1) внесено структурное ограничение. Считается, что диагональный тензор момента сил внешнего сопротивления среды пропорционален тензору момента сил инерции, т.е. момент сил диссипации линейно связан с кинетическим моментом

$$\mathbf{M}^r = -\chi \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \quad (1.2)$$

где χ – некоторый постоянный коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств среды. Сопротивление, действующее на тело, представлено парой приложенных сил. При этом проекции момента этой пары на главные оси инерции тела представлены величинами $\chi A_1 p, \chi A_1 q, \chi A_3 r$ [3, 4]. Такое предположение не является противоречивым. Считается, что допустимые значения момента управляющих сил \mathbf{M} принадлежат сфере [8]

$$\mathbf{M}^u = b\mathbf{u}, \quad |\mathbf{u}| \leq 1; \quad b = b(t, \mathbf{G}), \quad 0 < b_* \leq b < b^* < \infty, \quad (1.3)$$

где b – скалярная функция, ограниченная в рассматриваемой области изменения аргументов t, \mathbf{G} , согласно условиям (1.3). Эта область определяется априори или может быть оценена через начальные данные для \mathbf{G} , $\mathbf{G}(t_0) = \mathbf{G}^0$.

Введенные в (1.1) обозначения F, D выражаются через параметры системы следующим образом:

$$F = m\rho^2 \Omega^{-2} A_3 A_1^{-3}, \quad D = m\rho^2 \lambda \Omega^{-4} A_3^3 (A_1 - A_3) A_1^{-4}. \quad (1.4)$$

Коэффициенты D, F в (1.4) характеризуют возмущающие моменты сил, обусловленные наличием вязкоупругого элемента, m – масса подвижной точки, ρ – расстояние от центра масс недеформированной системы до точки крепления, которая находится, по предположению, на оси динамической симметрии этого тела. Постоянные $\Omega^2 = c/m, \lambda = \delta/m$ определяют частоту колебаний и скорость их затухания соответственно; c – жесткость (коэффициент упругости), δ – коэффициент вязкости демпфера. Рассматривается случай сильного демпфера, когда коэффициенты связи велики в следующем смысле [1]

$$\Omega^2 \gg \lambda \omega \gg \omega^2. \quad (1.5)$$

Сильные неравенства (1.5) позволяют ввести малый параметр в (1.4) и считать указанные возмущающие моменты малыми с целью применения асимптотических методов усреднения. Кроме того, условия (1.5) дают возможность пренебречь погранично-слоистыми участками свободных колебательных движений массы, обусловленных начальными отклонениями, вследствие их быстрого затухания, и учесть вынужденные квазистационарные движения, вызванные вращением тела. Заметим, что величина массы m может быть значительной, сравнимой с массой тела.

Итак, в квазистатическом приближении возмущающие моменты сил, вызванные упругостью и вязкостью демпфера, определяются мономами компонент вектора $\boldsymbol{\omega}$ четвертой и пятой степеней соответственно. Малый тормозящий момент сопротивления среды является линейным относительно угловой скорости возмущением. Математическая модель управляемых вращений квазитвердого тела построена в виде уравнений Эйлера (1.1).

Ставится задача оптимального по быстрдействию торможения вращений

$$\omega(T) = 0, \quad T \rightarrow \min_{\mathbf{u}}, \quad |\mathbf{u}| \leq 1. \quad (1.6)$$

Требуется найти оптимальный закон управления в виде синтеза $u = u(t, \omega)$, соответствующую ему траекторию $\omega(t, t_0, \omega^0)$ и время быстрогодействия $T = T(t_0, \omega^0)$, а также функцию Беллмана задачи $W = T(t, \omega) - t$.

2. Решение задачи оптимального торможения. Отметим, что момент сил, вызванный движением вязкоупругого элемента, является внутренним для фиктивного тела, а момент сил линейного сопротивления среды – внешним. На основе динамического программирования синтез оптимального по быстрдействию управления имеет вид [8]

$$M_p = -b \frac{A_1 p}{G}, \quad M_q = -b \frac{A_1 q}{G}, \quad M_r = -b \frac{A_3 r}{G}, \quad b = b(t, G). \quad (2.1)$$

Здесь для дальнейшего упрощения можно полагать $b = b(t, G)$, $0 < b_1 \leq b \leq b_2 < \infty$. Домножим первое уравнение (1.1) на $A_1 p$, второе – на $A_1 q$, третье – на $A_3 r$ и сложим. Получим скалярное уравнение, подлежащее интегрированию, и уравнение для T

$$\dot{G} = -b(t, G) - \chi G, \quad G(t_0) = G^0, \quad G(T, t_0, G^0) = 0, \\ T = T(t_0, G^0), \quad W(t, G) = T(t, G) - t.$$

В предположении $b = b(t)$ найдем решение и условие для T

$$G(t) = G^0 e^{-\chi(t-t_0)} - \int_{t_0}^t b(\tau) e^{-\chi(t-\tau)} d\tau, \quad G^0 = e^{-\chi t_0} \int_{t_0}^T b(\tau) e^{\chi \tau} d\tau, \quad T = T(t_0, G^0). \quad (2.2)$$

Здесь t – текущее время процесса торможения, T – время быстрогодействия. При $b = \text{const}$ решение уравнения и краевой задачи (2.2) записывается следующим образом:

$$G(t) = \frac{1}{\chi} \left[(G^0 \chi + b) \exp(-\chi t) - b \right], \quad T = \frac{1}{\chi} \ln \left(G^0 \frac{\chi}{b} + 1 \right), \quad t_0 = 0. \quad (2.3)$$

Далее детально анализируется случай (2.3).

3. Анализ осевого вращения для управляемого движения тела. Подстановка известного выражения для G в третье уравнение (1.1) приводит к элементарному нелинейному уравнению относительно r

$$\dot{r} = -r \left[bG^{-1} + \chi + A_1^{-1} A_3^{-2} D r^2 (G^2 - A_3^2 r^2) \right]. \quad (3.1)$$

После замены осевой составляющей вектора угловой скорости $r = GR$, где R – неизвестная функция, уравнение (3.1) принимает вид, допускающий разделение переменных и тривиальное интегрирование

$$\dot{R} = -A_1^{-1} A_3^{-2} D G^4 R^3 (1 - A_3^2 R^2). \quad (3.2)$$

Вектор кинетического момента \mathbf{G} при проектировании на главные центральные оси инерции тела порождает выражение $A_3 r = G \cos \theta$, где θ – угол нутации. В результате для неизвестной R получается соотношение $A_3 R = \cos \theta$. Уравнение (3.2) после перехода к неизвестной θ может быть представлено в виде

$$\dot{\theta} = A_1^{-1} A_3^{-4} D \chi^{-4} \left[(G^0 \chi + b) \exp(-\chi t) - b \right]^4 \cos^3 \theta \sin \theta, \quad \theta(0) = \theta^0. \quad (3.3)$$

Решение (3.3) записывается следующим образом:

$$\text{tg}^2 \theta \exp(\text{tg}^2 \theta) = \text{tg}^2 \theta^0 \exp(\text{tg}^2 \theta^0) \exp(2K(t)),$$

$$K(t) = A_1^{-1} A_3^{-4} D \chi^{-4} \left[\frac{1}{4} \chi^{-1} (G^0 \chi + b)^4 (1 - \exp(-4\chi t)) - \right. \\ \left. - \frac{4}{3} \chi^{-1} b (G^0 \chi + b)^3 (1 - \exp(-3\chi t)) + \right. \\ \left. + 3\chi^{-1} b^2 (G^0 \chi + b)^2 (1 - \exp(-2\chi t)) - 4\chi^{-1} b^3 (G^0 \chi + b) (1 - \exp(-\chi t)) + b^4 t \right]. \quad (3.4)$$

Без нарушения общности можно принять, что начальное значение $\theta(0) = \theta^0$ принадлежит первой четверти ($0 \leq \theta^0 \leq \pi/2$). Если θ^0 имеет значения из указанного промежутка, то угол нутации в процессе эволюции вращений также не выйдет за его пределы, поскольку $\theta^* = 0, \pi/2$ – стационарные точки уравнения (3.4) независимо от изменения G . Уравнение (3.4) определяет в неявном виде зависимость угла θ от t . Левая часть этого равенства есть монотонно возрастающая функция от $|\operatorname{tg}\theta|$, а правая часть – монотонная функция t . Следовательно, соотношение (3.4) задает однозначную монотонную функцию $\theta(t)$. Характер поведения данной функции аналогичен изученному в [1].

Исследуем поведение угла нутации в малой окрестности стационарной точки $\theta^* = 0$ уравнения (3.3): $\theta = \delta\theta > 0$. Уравнение (3.3) примет вид

$$\delta\dot{\theta} = A_1^{-1} A_3^{-4} D \chi^{-4} \left[(G^0 \chi + b) \exp(-\chi t) - b \right]^4 \delta\theta, \quad |\delta\dot{\theta}| = |\delta\theta_0| \exp(K(t)). \quad (3.5)$$

Из (3.5) следует, что при $A_3 > A_1$ (динамически сплюснутое тело) вариация $\delta\theta$ монотонно убывает, а при $A_3 < A_1$ (динамически вытянутое тело) – монотонно возрастает, так как $D > 0$ или $D < 0$.

При $A_1 \approx A_3$, а также значения $|\delta\theta^0|$ в окрестности стационарных точек могут быть применены методы возмущений, которые в данном случае приводят к элементарным выражениям. Например, после первой итерации имеем

$$\theta(t) = \theta^0 + A_1^{-1} A_3^{-4} D \chi^{-5} \sin \theta^0 \cos^3 \theta^0 K(t). \quad (3.6)$$

Формула (3.6) позволяет провести анализ угла нутации во времени для различных значений параметров системы и начальных данных.

4. Анализ вращений тела в экваториальной плоскости. Рассмотрим теперь изменение экваториальных составляющих переменных p, q согласно первым двум уравнениям (1.1). Введем переменную $N = A_1 \omega_{\perp}$, имеющую смысл модуля указанных составляющих, которые характеризуют эти вращения. Умножая первое уравнение (1.1) на $A_1 p N^{-1}$, а второе – на $A_1 q N^{-1}$ и складывая, получим для N линейное однородное уравнение

$$\dot{N} = -d(t) N, \quad d(t) = \frac{b(t)}{G(t)} - A_1^{-1} D r^4(t) + \chi, \quad d(t) > 0. \quad (4.1)$$

После интегрирования

$$N(t) = N^0 \exp \left[- \int_{t_0}^t d(\tau) d\tau \right], \quad N^0 \equiv A_1 ((p^0)^2 + (q^0)^2)^{1/2}. \quad (4.2)$$

С другой стороны, квадрат величины кинетического момента тела может быть представлен в виде

$$G^2 = N^2 + A_3^2 r^2.$$

Отсюда следует выражение для N

$$N = (G^2 - A_3^2 r^2)^{1/2}$$

или, учитывая соотношение $A_3 r = G \cos \theta$,

$$N = G \sin \theta. \quad (4.3)$$

При $b = \text{const}$ с учетом (2.3) имеем

$$N = \frac{1}{\chi} \left[(G^0 \chi + b) \exp(-\chi t) - b \right] \sin \theta. \quad (4.4)$$

Численный анализ изменения угла θ приведен в разд. 5.

Используя известные выражения $G(t)$ и $r(t)$, приведем уравнения для p, q (1.1) к виду линейных уравнений с переменными коэффициентами и определенной симметрией. Эти уравнения содер-

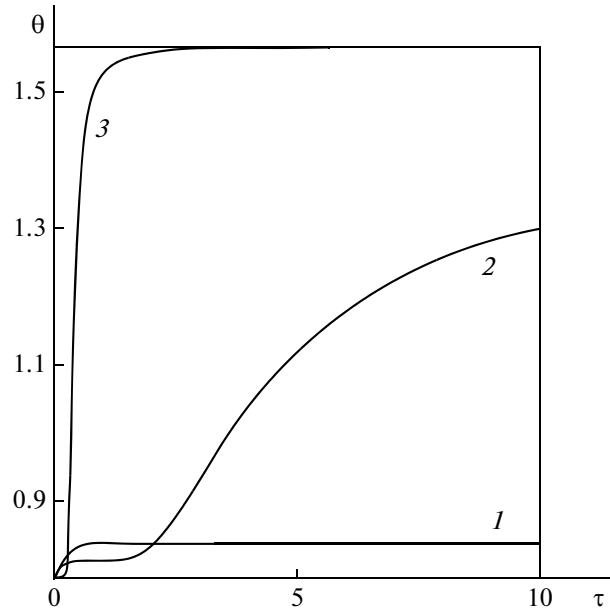


Рис. 1

жат только “гироскопические” и “диссипативные” члены с коэффициентами $g(t)$ и $d(t)$ соответственно

$$\dot{\mathbf{N}} = -d(t)\mathbf{N} + g(t)I\mathbf{N}, \quad \mathbf{N} = (A_1 p, A_1 q)^T, \quad g(t) = A_1^{-1} r(t) (A_1 - A_3 + FG^2(t)). \quad (4.5)$$

Здесь I – симплектическая матрица, а коэффициент d определен в (4.1). Гироскопический коэффициент $g(t)$ совпадает с аналогичной величиной, определенной при движении тела со сферической полостью, заполненной несжимаемой жидкостью большой вязкости, и с вязкоупругим элементом [7].

Уравнение (4.1) для \mathbf{N} интегрируется в явном виде. Полагая $\mathbf{N} = N\mathbf{n}$, где $\mathbf{n} = \mathbf{n}(t)$ – орт вектора \mathbf{N} , получим для неизвестной \mathbf{n} уравнение $\mathbf{n}' = g(t)I\mathbf{n}$. Начальное значение $\mathbf{n}(0) = \mathbf{n}^0$, $|\mathbf{n}^0| = 1$ задается условием $\mathbf{N}^0 = N^0\mathbf{n}^0$. Отметим, что $|\mathbf{n}(t)| \equiv 1$ для всех $t \in [0, T_0]$. Введем аргумент σ так, чтобы $\mathbf{n}^0 = I\mathbf{n}$, имеем

$$\mathbf{n}^0(t) = \Pi(\sigma)\mathbf{n}^0, \quad \sigma = \int_0^t g(\tau) d\tau, \quad \Pi(\sigma) = \begin{bmatrix} \cos \sigma & \sin \sigma \\ -\sin \sigma & \cos \sigma \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

где $\Pi(\sigma)$ – матрица поворота (начального вектора \mathbf{n}^0) на угол σ .

Таким образом, прецессионные вращения квазитвердого тела (относительно оси в экваториальной плоскости) полностью описаны согласно (4.2), (4.6).

5. Численный анализ и выводы. Обратимся вновь к задаче определения угла нутации $\theta(t)$ в частном случае $b = \text{const}$ согласно (3.3). Проведем обезразмеривание уравнения (3.3). Введем обозначения

$$\tau = \chi t, \quad k^* = \frac{|D|^{1/4} k}{A_1^{1/4} A_3 \chi^{1/4}}, \quad G^{0*} = \frac{G^0 |D|^{1/4}}{A_1^{1/4} A_3 \chi^{1/4}}, \quad k = b\chi^{-1}. \quad (5.1)$$

В результате этих преобразований получим уравнение для угла нутации θ

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \text{sign}(D) \left[(G^{0*} + k^*) \exp(-\tau) - k^* \right]^4 \sin \theta \cos^3 \theta. \quad (5.2)$$

Уравнение (5.2) было численно проинтегрировано для произвольных различных значений G^{0*} , k^* и начального угла $\theta^0 = \pi/4$ рад. Графики изменения угла нутации θ представлены на рис. 1–3. Рисунки 1, 2 соответствуют динамически вытянутому телу, а рис. 3 – сплюснутому.

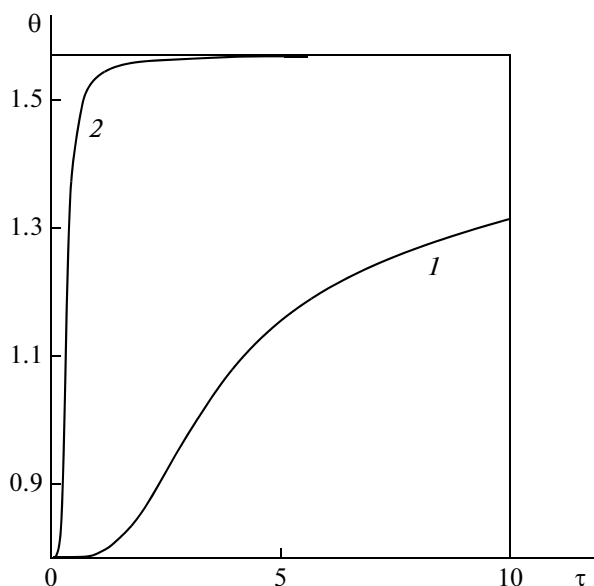


Рис. 2

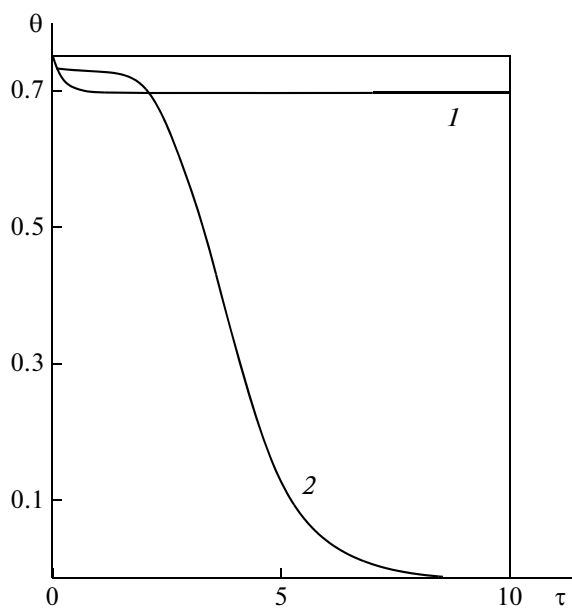


Рис. 3

Рисунок 1 приведен для безразмерного начального значения кинетического момента $G^{0*} = 1$. Кривые 1–3 численно построены при различных значениях величины $k^* = 0.1, 1, 10$ соответственно. Согласно проведенному расчету, для динамически вытянутого твердого тела ($A_1 > A_3$) угол нутации стремится к предельному значению $\pi/2$ рад. На рис. 1 содержится расчетный интервал безразмерного времени $\tau \leq 10$. Согласно кривой 3, видно, что при существенном влиянии безразмерного коэффициента момента управляющих сил ($k^* = 10$) угол нутации быстро достигает предельного значения. При этом тело успевает затормозиться, так как время быстрого действия в этом случае на порядок меньше выбранного расчетного времени. Чем меньше величина k^* , тем медленнее ось симметрии тела стремится к предельному положению. Однако во всех приведенных случаях за расчетный промежуток времени тело успевает затормозиться.

Кривые 1 и 2 на рис. 2 соответствуют $k^* = 1, 10$ при значении $G^{0*} = 0.1$. На рисунке не представлена кривая для значения $k^* = 0.1$, так как за выбранное расчетное время величина угла нутации практически не изменяется. Видно, что чем больше значение k^* , тем быстрее тело стремится к устойчивому предельному положению оси вращения. Аналогичный характер поведения для функции $\theta(t)$ получен в [6, 7].

Численно исследованы изменения угла нутации для динамически сплюснутого твердого тела ($A_1 < A_3$). На рис. 3 изображены графики изменения функции $\theta(t)$ при значении $G^{0*} = 1$. Кривая 1 построена для величины $k^* = 0.1$, а кривая 2 – $k^* = 1$. Согласно кривой 2, динамически сплюснутое тело стремится к своему предельному устойчивому положению оси вращения, соответствующему $\theta \rightarrow 0$ рад. Видно, что характер стремления зависит от величины безразмерного коэффициента момента управляющих сил. Чем больше этот коэффициент, тем быстрее ось тела приближается к предельному положению. При этом время быстрогодействия существенно уменьшается. На рис. 3 не отражен расчетный случай $k^* = 10$, так как в этом случае торможение тела происходит практически мгновенно.

Численный расчет показал, что характер поведения функции $\theta(t)$ в данной задаче совпадает с характером поведения функции изменения угла нутации для твердого тела с подвижными внутренними массами [1]. Таким образом, направление вектора кинетического момента \mathbf{G} в связанной с телом системе координат стремится к стационарному состоянию: к направлениям осей, соответствующим наибольшим моментам инерции.

Заключение. Аналитически и численно исследована задача синтеза оптимального по быстродействию торможения вращений динамически симметричного твердого тела с вязкоупругим элементом в сопротивляющейся среде. В рамках асимптотического подхода определены управление, время быстрогодействия (функция Беллмана) и угол нутации, установлены качественные свойства оптимального движения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноусько Ф.Л. О движении твердого тела с подвижными внутренними массами // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 4.
2. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л. Быстрое вращение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 3.
3. Кошляков В.Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. Аналитические методы. М.: Наука, 1985.
4. Раус Э.Дж. Динамика системы твердых тел. Т. II. М.: Наука, 1983.
5. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л. Эволюция вращения спутника под действием гравитационного момента в среде с сопротивлением // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 2.
6. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д. Некоторые задачи движения твердого тела с подвижной массой // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 5.
7. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д. Оптимальное торможение вращений твердого тела с внутренними степенями свободы // Изв. РАН. ТиСУ. 1995. № 2.
8. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987.