ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2009. Вып. 39

УДК 531.383:531.4

 Т.А. Козаченко, Д.Д. Лещенко

ВОЗМУЩЕННЫЕ ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА

Исследуются возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа, под действием восстанавливающего момента, зависящего от углов нутации и прецессии. Рассмотрено возмущенное движение волчка Лагранжа при случайных вертикальных колебаниях точки опоры. Получены и исследуются решения усредненных систем уравнений движения в первом и втором приближениях.

1. Рассмотрим возмущенные движения динамически симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки под действием восстанавливающего момента, зависящего от углов нутации и прецессии. Уравнения движения имеют вид:

$$
\begin{gathered}
A\dot{p} + (C-A)qr = k\sin\theta\cos\varphi + M_1,\\
A\dot{q} + (A-C)\,pr = -k\sin\theta\sin\varphi + M_2, \qquad C\dot{r} = M_3,\\
\dot{\psi} = (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\operatorname{cosec}\theta, \qquad \dot{\theta} = p\cos\varphi - q\sin\varphi,\\
\dot{\varphi} = r - (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta.
\end{gathered} \tag{1}
$$

Здесь $p,\ q,\ r$ – проекции вектора угловой скорости тела на главные оси инерции тела, проходящие через точку O; величины $M_i = M_i(p,q,r,\psi,\theta,\varphi)$ $(i=1,2,3)$ – проекции вектора возмущающего момента на те же оси; $\psi,\ \varphi,\ \theta$ – углы Эйлера; A, C – экваториальный и осевой моменты инерции тела относительно точки O; $A \neq C$.

Предполагается, что на тело действует восстанавливающий момент $k(\theta,\ \psi)$, зависящий от углов нутации и прецессии, и

$$
(p^2+q^2)^{1/2} \ll r, \qquad Cr^2 \gg k, \qquad |M_i| \ll k, \qquad i = 1,\ 2,\ 3. \tag{2}
$$

Неравенства (2) означают, что направление угловой скорости тела близко к оси динамической симметрии; угловая скорость достаточно велика; возмущающие моменты малы по сравнению с восстанавливающим моментом. В работе [1] рассматривалась аналогичная задача в предположении, что угловая скорость осевого вращения достаточно велика и две проекции вектора возмущающего момента на главные оси инерции тела малы по сравнению с восстанавливающим моментом, а третья – одного с ним порядка.

Неравенства (2) позволяют ввести малый параметр $\varepsilon \ll 1$ и положить

$$
\begin{gathered}
p = \varepsilon P, \quad q = \varepsilon Q, \quad k(\theta,\psi) = \varepsilon K(\theta,\psi),\\
M_i = \varepsilon^2 M_i^*(P,Q,r,\psi,\theta,\varphi) \quad i = 1,\ 2,\ 3.
\end{gathered} \tag{3}
$$

Новые переменные P, Q, а также переменные r, ψ, θ, φ, функции K, M_i^* $(i = 1, 2, 3)$ и моменты инерции A, C предполагаются ограниченными величинами порядка единицы при $\varepsilon \to 0$.

Ставится задача исследования асимптотического поведения системы (1) при малом ε, если выполнены условия (2), (3), которое будет проводиться методом усреднения [2, 3] на интервале времени порядка ε^{-1}. Упрощающие предположения (2) дают возможность получить в общем случае довольно простую схему усреднения и исследовать ряд примеров.

Рассмотрим систему нулевого приближения (предварительно разделив обе части первых двух уравнений (1) на ε после замены переменных (3)) и положим $\varepsilon = 0$. Тогда решение полученной системы имеет вид

$$\begin{aligned}
&r = r_0, \quad \psi = \psi_0, \quad \theta = \theta_0, \quad \varphi = \varphi_0 + r_0 t\,,\\
&P = a\cos\gamma_0 + b\sin\gamma_0 + K(\theta_0,\psi_0)C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\sin\,(r_0t+\varphi_0),\\
&Q = a\sin\gamma_0 - b\cos\gamma_0 + K(\theta_0,\psi_0)C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\cos\,(r_0t+\varphi_0),\\
&a = P_0 - K(\theta_0,\psi_0)C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\sin\varphi_0,\\
&b = -Q_0 + K(\theta_0,\psi_0)C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\cos\varphi_0,\\
&\gamma_0 = n_0 t, \qquad n_0 = (C-A)A^{-1}r_0,\ r_0 \neq 0,\ |n_0/r_0| \leq 1.
\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь r_0, ψ_0, θ_0, φ_0, P_0, Q_0 – постоянные, равные начальным значениям переменных при $t = 0$, а переменная $\gamma = \gamma_0$ имеет смысл фазы прецессионных колебаний. Пользуясь соотношениями (3), (4), перейдем в системе (1) от переменных p, q, r, ψ, θ, φ к новым переменным a, b, δ, ψ, θ, α, γ, где $\alpha = \gamma + \varphi$, $r = r_0 + \varepsilon\delta$.

После преобразований получим систему семи уравнений

$$\begin{aligned}
\dot a = {}&\varepsilon\, A^{-1}(M_1^0\cos\gamma + M_2^0\sin\gamma) - \varepsilon\, K(\theta,\psi)C^{-1}r_0^{-1}\cos\theta(b-\\
&- K(\theta,\psi)C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\cos\alpha) - \varepsilon\, C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\sin\alpha(a\cos\alpha + b\sin\alpha)\frac{\partial K(\theta,\psi)}{\partial\theta} -\\
&- \varepsilon C^{-1}r_0^{-1}\sin\alpha(a\sin\alpha - b\cos\alpha + K(\theta,\psi)C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta)\frac{\partial K(\theta,\psi)}{\partial\psi} +\\
&+ \varepsilon^2 K(\theta,\psi)C^{-1}r_0^{-2}\delta\cos\theta(b - 2K(\theta,\psi)C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\cos\alpha) +\\
&+ \varepsilon^2\, C^{-1}r_0^{-2}\delta\sin\theta\sin\alpha(a\cos\alpha + b\sin\alpha)\frac{\partial K(\theta,\psi)}{\partial\theta} +\\
&+ \varepsilon^2\, C^{-1}r_0^{-2}\delta\sin\alpha(a\sin\alpha - b\cos\alpha + 2K(\theta,\psi)C^{-1}r_0^{-1}\delta\sin\theta)\frac{\partial K(\theta,\psi)}{\partial\psi} +\\
&+ \varepsilon^2 K(\theta,\psi)C^{-2}r_0^{-2}M_3^0\sin\theta\sin\alpha;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{b} = {} & \varepsilon\, A^{-1}(M_1^0 \sin\gamma - M_2^0 \cos\gamma) + \varepsilon\, K(\theta,\psi) C^{-1} r_0^{-1} \cos\theta (a + \\
& + K(\theta,\psi) C^{-1} r_0^{-1} \sin\theta \sin\alpha) + \varepsilon\, C^{-1} r_0^{-1} \sin\theta \cos\alpha (a\cos\alpha + b\sin\alpha) \frac{\partial K(\theta,\psi)}{\partial\theta} + \\
& + \varepsilon C^{-1} r_0^{-1} \cos\alpha \frac{\partial K(\theta,\psi)}{\partial\psi} (a\sin\alpha - b\cos\alpha + K(\theta,\psi) C^{-1} r_0^{-1} \sin\theta) - \\
& - \varepsilon^2 K(\theta,\psi) C^{-1} r_0^{-2} \delta \cos\theta (a + 2K(\theta,\psi) C^{-1} r_0^{-1} \sin\theta \sin\alpha) - \\
& - \varepsilon^2\, C^{-1} r_0^{-2} \delta \sin\theta \cos\alpha (a\cos\alpha + b\sin\alpha) \frac{\partial K(\theta,\psi)}{\partial\theta} - \\
& - \varepsilon^2\, C^{-1} r_0^{-2} \delta \cos\alpha (a\sin\alpha - b\cos\alpha + 2K(\theta,\psi) C^{-1} r_0^{-1} \delta \sin\theta) \frac{\partial K(\theta,\psi)}{\partial\psi} - \\
& - \varepsilon^2 K(\theta,\psi) C^{-2} r_0^{-2} M_3^0 \sin\theta \cos\alpha;
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\dot{\delta} = \varepsilon\, C^{-1} M_3^0, \qquad \dot{\theta} = \varepsilon\, (a\cos\alpha + b\sin\alpha),$$

$$\dot{\psi} = \varepsilon \operatorname{cosec}\theta\, (a\sin\alpha - b\cos\alpha) + \varepsilon\, K(\theta,\psi) C^{-1} r_0^{-1} - \varepsilon^2 K(\theta,\psi) C^{-1} r_0^{-2} \delta,$$

$$\dot{\alpha} = C A^{-1} r_0 + \varepsilon C A^{-1} \delta - \varepsilon \operatorname{ctg}\theta\, (a\sin\alpha - b\cos\alpha) -$$

$$-\varepsilon K(\theta,\psi) C^{-1} r_0^{-1} \cos\theta + \varepsilon^2 K(\theta,\psi) C^{-1} r_0^{-2} \delta \cos\theta,$$

$$\dot{\gamma} = (C - A) A^{-1} r_0 + \varepsilon (C - A) A^{-1} \delta,$$

$$M_i^0(a, b, \delta, \psi, \theta, \alpha, \gamma) = M_i^*(P, Q, r, \psi, \theta, \varphi), \quad i = 1, 2, 3.$$

Система (5) содержит медленные переменные a, b, r, ψ, θ и быстрые – фазы α и γ с постоянными частотами. В работах [4 – 7] рассматривались случаи, когда восстанавливающий момент или постоянен $k = \mathrm{const}$, или зависит от: 1) угла нутации $k = k\,(\theta)$; 2) медленного времени и угла нутации $k = k\,(\tau, \theta)$ $(\tau = \varepsilon t)$; 3) медленного времени и угла прецессии $k(\tau, \psi)$. В данной работе зависимость восстанавливающего момента от углов нутации и прецессии приводит к появлению в уравнениях (5) слагаемых, содержащих частные производные $\dfrac{\partial K\,(\theta,\psi)}{\partial\theta}$ и $\dfrac{\partial K\,(\theta,\psi)}{\partial\psi}$.

Исследуем возмущенное движение твердого тела относительно неподвижной точки под действием возмущающего момента M_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$, постоянного в связанных осях:

$$M_i = \varepsilon^2 M_i^* = \varepsilon^2 M_i^0 = \mathrm{const}, \tag{6}$$

и восстанавливающего момента

$$k(\theta,\psi) = k(\theta)\, \sin\psi = \varepsilon K(\theta)\, \sin\psi. \tag{7}$$

Для решения поставленной задачи применим методику усреднения разработанную Д.Д. Лещенко и А.С. Шамаевым [4].

Решение усредненной системы уравнений (5) первого приближения с учетом (6), (7) для медленных переменных примет вид

$$
\begin{aligned}
& a^{(1)}(\tau) = \exp(-\frac{1}{2}F_2(\tau))(a_0\cos G - b_0\sin G), \\
& b^{(1)}(\tau) = \exp(-\frac{1}{2}F_2(\tau))(a_0\sin G + b_0\cos G), \\
& \theta^{(1)} = \theta_0, \qquad \delta^{(1)}(\tau) = C^{-1}M_3^0\tau, \qquad \operatorname{tg}\frac{\psi^{(1)}(\tau)}{2} = \operatorname{tg}\frac{\psi_0}{2}\exp(F_1\tau), \\
& F_1 = K(\theta)C^{-1}r_0^{-1}, \qquad F_2 = F_1\int\limits_0^\tau \cos\psi^{(1)}(\tau')d\tau', \\
& G(\tau) = C^{-1}r_0^{-1}(K(\theta)\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\frac{\partial K(\theta)}{\partial\theta})\int\limits_0^\tau \sin\psi^{(1)}(\tau')d\tau', \\
& \cos\psi^{(1)}(\tau) = \frac{1-\operatorname{tg}\dfrac{\psi_0}{2}\exp(F_1\tau)}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\psi_0}{2}\exp(2F_1\tau)}, \quad \sin\psi^{(1)}(\tau) = \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{\psi_0}{2}\exp(F_1\tau)}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\psi_0}{2}\exp(2F_1\tau)}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

В первом приближении угол нутации постоянен. Угол прецессии – 2π-периодическая переменная, для которой выполняется соотношение $\operatorname{tg}\dfrac{\psi}{2} \geq \operatorname{tg}\dfrac{\psi_0}{2}$. Переменные $a^{(1)}$, $b^{(1)}$ являются произведением экспоненциального и осциллирующего сомножителей, зависящих от начальных значений угла прецессии и нутации.

Определим эволюцию углов прецессии и нутации по схеме, предложенной в [4],

$$
\begin{aligned}
& \psi_\varepsilon^\vee(t) = 2\operatorname{arctg}[\operatorname{tg}\frac{\psi_0}{2}\exp(\varepsilon F_1 t)] + \varepsilon\exp\left(F_2(\varepsilon t)\right)\int\limits_0^{\varepsilon t} g(\tau)\exp\left(-F_2(\tau)\right)d\tau - \\
& \qquad - \varepsilon\, AC^{-1}r_0^{-1}\operatorname{cosec}\theta_0[a^{(1)}\cos\alpha + b^{(1)}\sin\alpha], \\
& \theta_\varepsilon^\vee(t) = \theta_0 + \frac{1}{2}\varepsilon\, AC^{-3}r_0^{-3}K^2(\theta_0)\sin\theta_0\int\limits_0^{\varepsilon t}\sin 2\psi^{(1)}(\tau)d\tau + \\
& \qquad + \varepsilon\, AC^{-1}r_0^{-1}[a^{(1)}\sin\alpha - b^{(1)}\cos\alpha], \\
& \alpha(t) = \varphi_0 + CA^{-1}r_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon^2 A^{-1}M_3^0 t^2 - \varepsilon\, C^{-1}r_0K(\theta_0)\cos\theta_0\int\limits_0^t \sin\psi^{(1)}(\varepsilon t')dt',
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$$g(\tau) = \frac{1}{2}K^2(\theta_0)AC^{-4}r_0^{-4}\sin\theta_0 \frac{\partial K(\theta)}{\partial\theta}\bigg|_{\theta=\theta_0}\int\limits_0^{\tau}\sin 2\psi^{(1)}(\tau')d\tau' +$$
$$+ K^2(\theta_0)AC^{-3}r_0^{-3}\cos\theta_0\sin^2\psi^{(1)}(\tau) - K(\theta_0)C^{-2}r_0^{-2}M_3^0\tau\sin\psi^{(1)}(\tau).$$

Зависимость восстанавливающего момента $K(\theta,\psi)$ от углов нутации и прецессии привела к появлению в формулах (9) слагаемых, содержащих интеграл $\int\limits_0^{\tau}\sin 2\psi^{(1)}(\tau')d\tau'$. Полученные выражения для углов прецессии и нутации уточняют известные ранее результаты из приближенной теории гироскопов [8].

2. Рассмотрим быстрое движение волчка Лагранжа при случайных вертикальных колебаниях точки опоры [9]. Уравнения движения имеют вид аналогичный (1). Предполагается, что на тело действует восстанавливающий момент $k = k(\tau)$, зависящий от медленного времени и являющийся дифференцируемой функцией на промежутке $\tau \in (0,1]$.

Проекции вектора возмущающего момента на главные оси инерции тела имеют вид

$$M_1 = \varepsilon^2 a(\tau)ml\sin\theta\cos\varphi, \quad M_2 = -\varepsilon^2 a(\tau)ml\sin\theta\sin\varphi,$$
$$M_3 = \varepsilon^2 M_3^0, \qquad M_3^0 = \mathrm{const}, \tag{10}$$

где m – масса тела, l – расстояние от точки опоры до центра тяжести, $a(\tau)$ – ускорение точки опоры. Предполагается, что $a(\tau)$ включает периодическую и случайную составляющие:

$$a(\tau) = g(\xi(\tau) + \rho\cos\omega\tau). \tag{11}$$

Здесь $\xi(\tau)$ – нормальный непрерывный справа случайный процесс с нулевым средним, g – ускорение силы тяжести, ρ и ω – амплитуда и частота колебаний.

Ставится задача исследования асимптотического поведения системы (1), (10), (11) при малом ε, если выполнены условия (2). В работе [9] рассматривался случай различных порядков малости проекций вектора возмущающих моментов. Для решения задачи воспользуемся методом усреднения [2, 3] на интервале времени порядка ε^{-1}. Схема построения приближенных решений данной системы подробно описана в [4]. Решение усредненной системы уравнений первого приближения для медленных переменных a, b, δ, ψ, θ и быстрых переменных α, γ в этой задаче примет вид

$$a^{(1)}(\tau) = a_0\cos G(\tau) - b_0\sin G(\tau), \qquad b^{(1)}(\tau) = a_0\sin G(\tau) + b_0\cos G(\tau),$$
$$\delta^{(1)}(\tau) = C^{-1}M_3^0\tau, \qquad \psi^{(1)} = \psi_0 + {}^{-1}r_0^{-1}\int\limits_0^{\tau}K(\tau')d\tau',\ \theta^{(1)} = \theta_0,$$

$$\alpha = \varphi_0 + CA^{-1}r_0 t - \varepsilon C^{-1}r_0^{-1}\cos\theta_0 \int\limits_0^t K(\varepsilon t')dt' + \frac{1}{2}\varepsilon^2 A^{-1}M_3^0 t^2, \tag{12}$$

$$\gamma = (C-A)A^{-1}r_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon^2 (C-A)A^{-1}C^{-1}M_3^0 t^2, G(\tau) = C^{-1}r_0^{-1}\cos\theta_0 \int\limits_0^\tau K(\tau')d\tau',$$

$$a_0 = P_0 - K_0(\tau)C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\sin\varphi_0,\ b_0 = -Q_0 + K_0(\tau)C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\cos\varphi_0.$$

Здесь $\psi_0,\ \theta_0,\ \varphi_0,\ r_0,\ P_0,\ Q_0$ – начальные значения соответствующих переменных. Определим эволюцию углов прецессии и нутации во втором приближении:

$$\begin{aligned}
&\psi_\varepsilon^\vee(t) = \psi_0 + S_1 + S_2 + S_3 + S_4,\\
&\theta_\varepsilon^\vee(t) = \theta_0 + \varepsilon AK(\varepsilon t)C^{-2}r_0^{-2}\sin\theta_0 + \varepsilon AC^{-1}r_0^{-1}\sqrt{a_0^2+b_0^2}\sin(\alpha-\zeta_1),\\
&S_1 = C^{-1}r_0^{-1}\int\limits_0^{\varepsilon t} K(\tau)d\tau,\ S_3 = \varepsilon AC^{-3}r_0^{-3}\cos\theta_0 \int\limits_0^{\varepsilon t} K^2(\tau)d\tau,\\
&S_2 = \varepsilon C^{-1}r_0^{-1}gml\left(\frac{\rho}{\omega}\sin(\varepsilon\omega t) + \int\limits_0^{\varepsilon t}\xi(\tau)d\tau\right) - \varepsilon C^{-2}r_0^{-2}M_3^0\int\limits_0^{\varepsilon t} K(\tau)\tau d\tau,\\
&S_4 = -\varepsilon AC^{-1}r_0^{-1}\operatorname{cosec}\theta_0\sqrt{a_0^2+b_0^2}\sin(\alpha+\zeta_2),\\
&\cos\zeta_2 = \sin\zeta_1 = \frac{b^{(1)}}{\sqrt{a_0^2+b_0^2}}.
\end{aligned} \tag{13}$$

В выражении (13) для угла нутации $\theta_\varepsilon^\vee(t)$ ограниченное осциллирующее слагаемое содержит ненулевые начальные данные a_0, b_0. Для угла прецессии $\psi_\varepsilon^\vee(t)$ дополнительные слагаемые $S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4$ уточняют для нашей задачи формулу угловой скорости прецессии $\omega_p = K_0 C^{-1}r_0^{-1}$, имеющую место в приближенной теории гироскопов.

Заметим, что формулы для углов нутации и прецессии не содержат параметров возмущающих моментов, если ограничиться первым приближением (12). В этом случае влияние возмущений на регулярную прецессию тела не учитывается и, таким образом, построение второго приближения является существенным.

1. *Акуленко Л.Д., Козаченко Т.А., Лещенко Д.Д.* Возмущенные вращательные движения твердого тела под действием восстанавливающего момента, зависящего от углов прецессии и нутации // Механика твердого тела. – 2005. – Вып. 35. – С. 97–102.
2. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
3. *Волосов В.М., Моргунов Б.И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 507 с.

4. *Лещенко Д. Д., Шамаев А. С.* Возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1987. – № 6. – С. 8–17.
5. *Кушпиль Т.А., Лещенко Д.Д., Тимошенко И.А.* Некоторые задачи эволюции вращений твердого тела под действием возмущающих моментов // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 119–125.
6. *Акуленко Л.Д., Козаченко Т.А., Лещенко Д.Д.* Возмущенные вращения твердого тела под действием нестационарного восстанавливающего момента // Там же. – 2002. – Вып. 32. – С. 77–84.
7. *Зинкевич Я.С., Козаченко Т.А.* Эволюция вращений твердого тела под действием нестационарного восстанавливающего момента // Там же. – 2008. – Вып. 38. – С. 111–115.
8. *Бухгольц Н. Н.* Основной курс теоретической механики. – М.: Наука, 1969. – Ч. 2. – 332 с.
9. *Ковалева А.С.* Многочастотные системы при стационарном случайном возмущении. – Ч.1. Нерезонансные колебания // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1994. – С. 44–52.

Гос. академия строительства и архитектуры, Одесса
kushpil.ru@rambler.ru, leshchenko_d@ukr.net

Получено 12.10.09