

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/303825748>

Эволюция возмущенных вращений несимметричного гиростата в гравитационном поле и....

Article · January 2016

CITATIONS

0

READS

29

4 authors, including:



[Dmytro Leshchenko](#)

Odessa State Academy of Civil Engineering a...

213 PUBLICATIONS 207 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)



[Leonid D Akulenko](#)

Russian Academy of Sciences

531 PUBLICATIONS 1,106 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



Numerical solution of eigenproblems [View project](#)



Evolution of rotations of a rigid body close to the Lagrange case under the action of nonstationary torque of forces [View project](#)

УДК 531.55 : 521.2

**ЭВОЛЮЦИЯ ВОЗМУЩЕННЫХ ВРАЩЕНИЙ НЕСИММЕТРИЧНОГО
ГИРОСТАТА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ И СРЕДЕ С СОПРОТИВЛЕНИЕМ**

© 2016 г. Л. Д. АКУЛЕНКО¹, Д. Д. ЛЕЩЕНКО², А. Л. РАЧИНСКАЯ³,
Ю. С. ЩЕТИНИНА³

¹ *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва;*
**e-mail: kumak@ipmnet.ru*

² *Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Одесса;*
e-mail: leshchenko_d@ukr.net

³ *Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова, Одесса;*
e-mail: powtampik@gmail.com

Исследуется быстрое вращательное движение относительно центра масс динамически несимметричного спутника со сферической полостью, заполненной жидкостью большой вязкости, под действием моментов сил гравитации и сопротивления среды. Анализируется система, полученная после усреднения по движению Эйлера–Пуансо и применения модифицированного метода усреднения. Проведены аналитическое исследование и численный анализ.

Ключевые слова: спутник, гравитационный момент, сопротивление среды, полость с вязкой жидкостью, усреднение.

Введение и постановка задачи. Вращательные движения рассматриваются в рамках модели динамики твердого тела, центр масс которого движется по круговой орбите вокруг Земли. Задачи динамики, обобщенные и осложненные учетом различных возмущений, и в настоящее время остаются достаточно актуальными. Исследованию вращательных движений тел относительно неподвижной точки под действием возмущающих моментов сил различной физической природы (гравитационных, сопротивления, влияния полости, заполненной вязкой жидкостью, и др.), близкому к приведенному ниже, посвящены работы [1–18].

Рассмотрим движение динамически несимметричного спутника относительно центра масс с учетом моментов сил гравитационного притяжения и сопротивления внешней среды. Тело содержит полость, целиком заполненную жидкостью большой вязкости.

Для решения задачи введем три декартовы системы координат, начало которых совместим с центром инерции спутника [1]. Система координат Ox_i ($i = 1, 2, 3$) движется поступательно вместе с центром инерции: ось Ox_1 параллельна радиус–вектору перигея орбиты, ось Ox_2 параллельна вектору скорости центра масс спутника в перигее, ось Ox_3 параллельна нормали к плоскости орбиты. Положение вектора кинетического момента \mathbf{G} относительно его центра масс в системе координат Ox_i определяются углами λ и δ [2]. Система координат Oy_i ($i = 1, 2, 3$) связана с вектором кинетического момента \mathbf{G} : ось Oy_1 лежит в плоскости Ox_3y_3 и направлена так, что векторы y_i ($i = 1, 2, 3$)

образуют правую тройку [1], ось Oy_2 лежит в плоскости орбиты (т.е. в плоскости Ox_1x_2). Ось Oy_3 направлена по вектору кинетического момента \mathbf{G} .

Оси системы координат Oz_i ($i = 1, 2, 3$) связаны с главными центральными осями инерции твердого тела. Взаимное положение главных центральных осей инерции и осей Oy_i определим углами Эйлера. При этом направляющие косинусы α_{ij} осей z_i относительно системы Oy_i выражаются через углы Эйлера φ, ψ, θ по известным формулам [1].

Уравнения движения тела относительно центра масс запишем в форме [2]:

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= L_3, \quad \frac{d\delta}{dt} = \frac{L_1}{G}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{L_2}{G \sin \delta} \\ \frac{d\theta}{dt} &= G \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) + \frac{L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi}{G} \\ \frac{d\varphi}{dt} &= G \cos \theta \left(\frac{1}{A_3} - \frac{\sin^2 \varphi}{A_1} - \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} \right) + \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G \sin \theta} \\ \frac{d\psi}{dt} &= G \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A_1} + \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} \right) - \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G} \operatorname{ctg} \theta - \frac{L_2}{G} \operatorname{ctg} \delta \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь L_i – моменты приложенных сил относительно осей Oy_i , A_i ($i = 1, 2, 3$) – главные центральные моменты инерции относительно осей Oz_i . Проекции L_i в (1.1) складываются из гравитационного момента L_i^g , момента сил внешнего сопротивления L_i^r и момента сил вязкой жидкости в полости тела L_i^p , т.е.

$$L_i = L_i^g + L_i^r + L_i^p$$

Рассматривается динамически несимметричный спутник, моменты инерции которого удовлетворяют неравенствам $A_1 > A_2 > A_3$. Предполагается, что угловая скорость ω движения спутника относительно центра масс существенно больше угловой скорости орбитального движения ω_0 , т.е. $\varepsilon = \omega_0/\omega \sim A_1\omega_0/G \ll 1$.

Зависимость диссипативного момента L^r сил сопротивления от вектора угловой скорости вращения твердого тела w принимается линейной $L^r = \mathbf{I}w$, где тензор \mathbf{I} имеет постоянные компоненты I_{ij} в системе Oz_i , связанной с телом [1, 6]. Сопротивление среды предполагаем слабым порядка малости ε^2 : $\|\mathbf{I}\|/G_0 \sim \varepsilon^2 \ll 1$ [3], где $\|\mathbf{I}\|$ – норма матрицы коэффициентов сопротивления, G_0 – кинетический момент спутника в начальный момент времени.

Орбита спутника предполагается круговой, поэтому плотность атмосферы можно считать постоянной во время движения. Зависимость истинной аномалии v от времени t дается соотношением

$$v = \omega_0 t, \quad \omega_0 = 2\pi/Q \quad (1.2)$$

где ω_0 – угловая скорость орбитального движения, Q – период обращения.

Проекции гравитационного момента L_1^g и момента сил внешнего сопротивления L_1^r на ось Oy_1 записываются в виде, принятом в [2, 3]. Здесь приведены проекции на ось Oy_1 , на другие оси проекции имеют аналогичный вид:

$$L_1^g = 3\omega_0^2 \sum_{j=1}^3 (\beta_2 \beta_j S_{3j} - \beta_3 \beta_j S_{2j}) \quad (1.3)$$

$$L_i^r = -G \sum_{i=1}^3 \left(\frac{I_{i1} \alpha_{1i} \alpha_{31}}{A_1} + \frac{I_{i2} \alpha_{1i} \alpha_{32}}{A_2} + \frac{I_{i3} \alpha_{1i} \alpha_{33}}{A_3} \right) \quad (1.4)$$

$$S_{mj} = \sum_{p=1}^3 A_p \alpha_{jp} \alpha_{mp}$$

$$\beta_1 = \cos(v - \lambda) \cos \delta, \quad \beta_2 = \sin(v - \lambda), \quad \beta_3 = \cos(v - \lambda) \sin \delta$$

Проекции момента сил L_i^p вязкой жидкости в сферической полости тела с учетом внешних силовых факторов на оси $Oy_i (i = 1, 2, 3)$ согласно [4] определяются следующим образом:

$$L_i^p = \frac{P}{A_1 A_2 A_3} \{ \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{B}^i + 3\omega_0^2 (\mathbf{D} + \mathbf{S}) \cdot \boldsymbol{\alpha}^i \}, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^i = \begin{pmatrix} B_1^i \\ B_2^i \\ B_3^i \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}^i = \begin{pmatrix} \alpha_{i1} \\ \alpha_{i2} \\ \alpha_{i3} \end{pmatrix}, \quad \alpha^* = \frac{1}{1 - \alpha_{33}^2}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} A_2 A_3 (A_3 - A_2) [-\gamma_{31} \gamma_{33} r + \alpha^* (F_1 p_{\alpha 1} + M_1 p_{\alpha 2})] \\ A_1 A_3 (A_1 - A_3) [-\gamma_{32} \gamma_{33} r + \alpha^* (F_2 p_{\alpha 1} + M_2 p_{\alpha 2})] \\ (A_2 - A_1) [(\gamma_{32}^2 - \gamma_{31}^2) r - \alpha^* (F_3 p_{\alpha 1} + M_3 p_{\alpha 2})] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \gamma_{31} \gamma_{33} \alpha_{33} + \beta_{\alpha 1} \gamma_{33} + \beta_{\alpha 2} \gamma_{32} \\ \gamma_{32} \gamma_{33} \alpha_{33} + \beta_{\alpha 3} \gamma_{33} + \beta_{\alpha 2} \gamma_{31} \\ (\gamma_{32}^2 - \gamma_{31}^2) \alpha_{33} + \beta_{\alpha 3} \gamma_{32} + \beta_{\alpha 1} \gamma_{31} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \gamma_{32}^2 \alpha_{32} + \gamma_{32} (\gamma_{33} \alpha_{33} - \nu_3) \\ \gamma_{33}^2 \alpha_{31} + \gamma_{31} (\gamma_{33} \alpha_{33} - \nu_3) \\ \gamma_{33} (\gamma_{32} \alpha_{31} + \gamma_{31} \alpha_{32}) \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \gamma_{31} [\gamma_{33} r A_3 (A_1 A_2 - A_1^2 - A_2 A_3 + A_3^2) + \gamma_{32} q A_2 (A_1 A_3 - A_1^2 - A_2 A_3 + A_2^2)] \\ \gamma_{32} [\gamma_{31} p A_1 (A_3 A_2 - A_2^2 - A_1 A_3 + A_1^2) + \gamma_{33} r A_3 (A_1 A_2 - A_2^2 - A_1 A_3 + A_3^2)] \\ \gamma_{33} [\gamma_{32} q A_2 (A_1 A_3 - A_3^2 - A_1 A_2 + A_2^2) + \gamma_{31} p A_1 (A_2 A_3 - A_3^2 - A_1 A_2 + A_1^2)] \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{3i} = \beta_1 \alpha_{1i} + \beta_2 \alpha_{2i} + \beta_3 \alpha_{3i}, \quad i = 1, 2, 3$$

$$p_{\alpha 1} = p \alpha_{31} + q \alpha_{32}, \quad p_{\alpha 2} = p \alpha_{32} + q \alpha_{31}$$

$$\nu_{\alpha 1} = -\alpha_{22} \nu_1 + \alpha_{12} \nu_2, \quad \nu_{\alpha 2} = -\alpha_{23} \nu_1 + \alpha_{13} \nu_2, \quad \nu_{\alpha 3} = -\alpha_{21} \nu_1 + \alpha_{11} \nu_2$$

$$B_1^i = [\omega_2^2 A_2 (A_1 - A_2) (A_2 - A_3 + A_1) + \omega_3^2 A_3 (A_1 - A_3) (A_3 - A_2 + A_1)] \alpha_{i1}$$

В рассматриваемом случае сферической полости, заполненной сильно вязкой жидкостью, тензор \mathbf{P} , введенный в [4], является диагональным с одинаковыми диагональными элементами. Для сферы радиуса a имеем

$$\tilde{\mathbf{P}} = P \text{diag}(1, 1, 1), \quad P = 8\pi \rho a^7 / (525\eta) \quad (1.6)$$

где $\tilde{\mathbf{P}}$ – тензор, зависящий только от формы полости; ρ, η – плотность и кинематический коэффициент вязкости жидкости в полости соответственно, a – радиус полости.

Коэффициенты B_2^i, B_3^i в (1.5) имеют аналогичный вид и получаются также ротацией индексов (сдвигом); α_{ij} – направляющие косинусы между системами координат

$Oy_i (i = 1, 2, 3)$ и $Oz_i (i = 1, 2, 3)$, p, q, r – проекции на оси $Oz_i (i = 1, 2, 3)$ вектора абсолютной угловой скорости w спутника относительно системы координат $Ox_1x_2x_3$.

С учетом рассмотренных ранее предположений о малости сопротивления среды и о том, что полость заполнена жидкостью большой вязкости, с точностью до малых второго порядка малости проекции момента сил вязкой жидкости в полости тела на оси $Oy_i, i = 1, 2, 3$ имеют вид:

$$\begin{aligned} L_i^p = & \frac{P}{A_1 A_2 A_3} \{ p [q^2 A_2 (A_1 - A_2) (A_2 - A_3 + A_1) + \\ & + r^2 A_3 (A_1 - A_3) (A_3 - A_2 + A_1)] \alpha_{i1} + \\ & + q [r^2 A_3 (A_2 - A_3) (A_3 - A_1 + A_2) + p^2 A_1 (A_1 - A_2) (A_3 - A_1 - A_2)] \alpha_{i2} + \\ & + r [p^2 A_1 (A_3 - A_1) (A_1 - A_2 + A_3) + q^2 A_2 (A_3 - A_2) (A_2 - A_1 + A_3)] \alpha_{i3} \}, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (1.7)$$

В дальнейшем при исследовании усредненной системы удобно использовать в качестве дополнительной медленной переменной кинетическую энергию T , производная которой имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} = & \frac{2T}{G} L_3 + G \sin \theta \left[\cos \theta \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A_1} + \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} - \frac{1}{A_3} \right) (L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi) + \right. \\ & \left. + \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) (L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi) \right] \end{aligned} \quad (1.8)$$

Ставится задача исследования эволюции вращений спутника на асимптотически большом интервале времени $t \sim \varepsilon^{-2}$, на котором происходит существенное изменение параметров движения. Для решения задачи будем применять метод усреднения [19].

Процедура метода усреднения. Рассмотрим невозмущенное движение системы (1.1)–(1.8) (при $\varepsilon = 0$), когда моменты внешних сил равны нулю. В этом случае вращение твердого тела является движением Эйлера–Пуансо. Величины G, δ, λ, T, v обращаются в постоянные, а φ, ψ, θ – некоторые функции времени t . Медленными переменными в возмущенном движении будут G, δ, λ, v, T , а быстрыми – углы Эйлера φ, ψ, θ .

Рассмотрим вращение при условии $2TA_1 \geq G^2 > 2TA_2$, соответствующем траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось максимального момента инерции A_1 [20]. Введем величину

$$k^2 = \frac{(A_2 - A_3)(2TA_1 - G^2)}{(A_1 - A_2)(G^2 - 2TA_3)}, \quad 0 \leq k^2 \leq 1 \quad (2.1)$$

представляющую собой в невозмущенном движении постоянную – модуль эллиптических функций, описывающих это движение.

Для построения усредненной системы первого приближения подставим решение невозмущенного движения Эйлера–Пуансо [20] в правые части уравнений движения (1.1), (1.8) с учетом (1.3), (1.4), (1.7) проведем усреднение по переменной ψ , а затем по времени t с учетом зависимости φ, θ от t [2]. При этом для медленных переменных G, δ, λ, T, v сохраняются прежние обозначения. В результате получим уравнения вида:

$$\begin{aligned}
 \frac{dG}{dt} &= -\frac{G}{R(k)} \{I_{22}(A_1 - A_3)W(k) + I_{33}(A_1 - A_2)[k^2 - W(k)] + \\
 &+ I_{11}(A_2 - A_3)[1 - W(k)]\} \\
 \frac{dT}{dt} &= -\frac{2T}{R(k)} \left\{ I_{22}(A_1 - A_3)W(k) + I_{33}(A_1 - A_2)[k^2 - W(k)] + \right. \\
 &+ \frac{(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)(A_2 - A_3)}{S(k)} \left\{ \frac{I_{33}}{A_3}[k^2 - W(k)] + \frac{I_{22}}{A_2}(1 - k^2)W(k) \right\} + \\
 &+ \left. \frac{I_{11}(A_2 - A_3)R(k)}{A_1 S(k)} [1 - W(k)] \right\} - \frac{4PT^2(A_1 - A_3)(A_1 - A_2)(A_2 - A_3)}{3A_1^2 A_2^2 A_3^2 S^2(k)} \times \\
 &\times \left\{ A_2(A_1 - A_3)(A_1 + A_3 - A_2)[(k^2 - 1) + (1 + k^2)(1 - W(k))] + \right. \\
 &+ A_1(A_2 - A_3)(A_3 + A_2 - A_1)[(k^2 - 2)W(k) + k^2] + \\
 &+ \left. A_3(A_1 - A_2)(A_1 + A_2 - A_3)[(1 - 2k^2)W(k) + k^2] \right\} \\
 \frac{d\delta}{dt} &= -\frac{3\omega_0^2}{2G} \beta_2 \beta_3 N^*, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{3\omega_0^2}{2G \sin \delta} \beta_1 \beta_3 N^*
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}
 N^* &= A_2 + A_3 - 2A_1 + 3 \left(\frac{2A_1 T}{G^2} - 1 \right) \left[A_3 + (A_2 - A_3) \frac{K(k) - E(k)}{K(k)k^2} \right] \\
 W(k) &= 1 - \frac{E(k)}{K(k)}, \quad R(k) = A_1(A_2 - A_3) + A_3(A_1 - A_2)k^2, \\
 S(k) &= A_2 - A_3 + (A_1 - A_2)k^2
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Заметим, что выражение в квадратной скобке для N^* (2.3) содержит устранимую особенность при $k \rightarrow 0$. Здесь $K(k)$ и $E(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

Из уравнений (2.2), (2.3) следует, что под влиянием сопротивления среды происходит эволюция как величины кинетического момента G , так и кинетической энергии тела T , причем в уравнения входят лишь диагональные коэффициенты I_{ii} матрицы момента трения. Члены, содержащие недиагональные компоненты I_{ij} ($i \neq j$) матрицы момента сил вязкого трения внешней среды, выпадают при усреднении. На эволюцию кинетической энергии тела T также оказывает влияние момента сил вязкой жидкости в полости. Изменение углов λ , δ зависят от всех сил, действующих на тело.

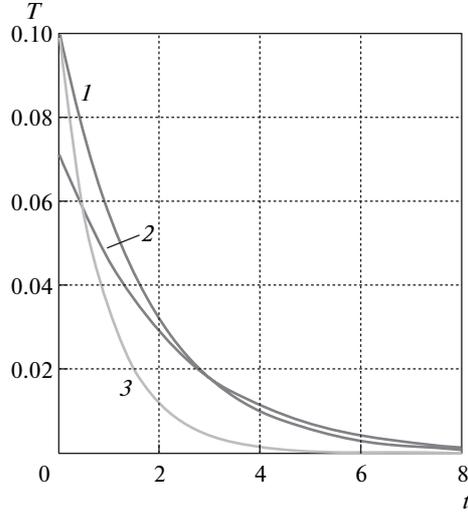
Рассмотрим систему, состоящую из уравнений для λ и δ системы (2.2), (2.3) и соотношения (1.2). Запишем их в следующем виде:

$$\dot{\delta} = \omega_0^2 \Delta(v, \delta, \lambda), \quad \dot{\lambda} = \omega_0^2 \Lambda(v, \delta, \lambda), \quad v = \omega_0 t \tag{2.4}$$

где Δ , Λ – коэффициенты в правых частях первых двух уравнений (2.2), δ , λ – медленные переменные, а v – полумедленная.

Получена система специального вида, для решения которой применяется модифицированный метод усреднения [21]. После усреднения получим:

$$\dot{\delta} = 0, \quad \dot{\lambda} = \frac{3\omega_0^2 N^* \cos \delta}{4G} \tag{2.5}$$



Фиг. 1

Для медленных усредненных переменных сохраняются прежние обозначения. Отметим, что действие приложенных сил не приводит к изменению угловой переменной δ и отклонение вектора \mathbf{G} от вертикали остается постоянным в указанном приближении.

Дифференцируя выражение для k^2 (2.1) и используя уравнения для кинетического момента и кинетической энергии (2.2), (2.3) получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dk^2}{dt} = \frac{S(k)}{T(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)(A_2 - A_3)} \left[R(k) \frac{dT}{dt} - S(k) G \frac{dG}{dt} \right] \quad (2.6)$$

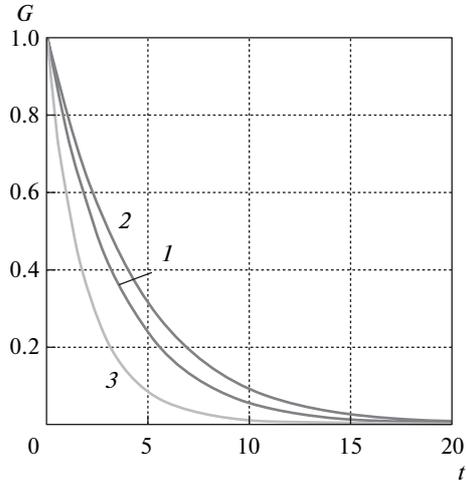
Система уравнений, состоящая из выражений (2.5), двух первых уравнений системы (2.2) и уравнения (2.6) была численно проинтегрирована. Интегрирование проводилось при начальных условиях: $k^2(0) = 0.99999$, $G(0) = 1$, $\delta(0) = 0.785$, $\lambda(0) = 0.785$ для моментов инерции $A_1 = 8$, $A_2 = 5, 7$, $A_3 = 4$. Было рассмотрено два случая. В первом случае численный расчет проводился для коэффициентов сопротивления: $I_{11} = 2.322$, $I_{22} = 1.31$, $I_{33} = 1.425$. Второе численное интегрирование проведено со следующими коэффициентами сопротивления: $I_{11} = 2.6$, $I_{22} = 3.0$, $I_{33} = 1.7$.

Начальное значение кинетической энергии имеет вид:

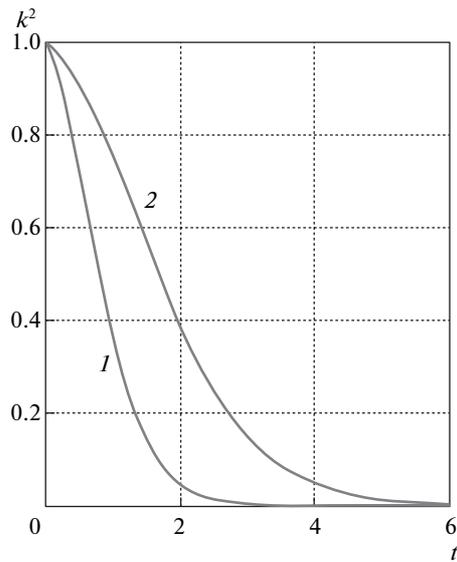
$$T_0 = \frac{G_0^2 s(k^2(0))}{2R(k^2(0))}$$

Результаты расчетов приведены на фиг. 1–5. Кривые 1, 2 на фигурах соответствуют результатам, полученным в первом расчетном случае (при $A_2 = 5$ и $A_2 = 7$ соответственно), кривая 3 – второму.

Численный расчет показал, что функции $T(t)$ и $G(t)$ являются монотонно убывающими (фиг. 1, 2). Выражение, стоящее в фигурных скобках правой части уравнений (2.2) для T и для G положительно (при $A_1 > A_2 > A_3$), так как справедливы неравенства



Фиг. 2

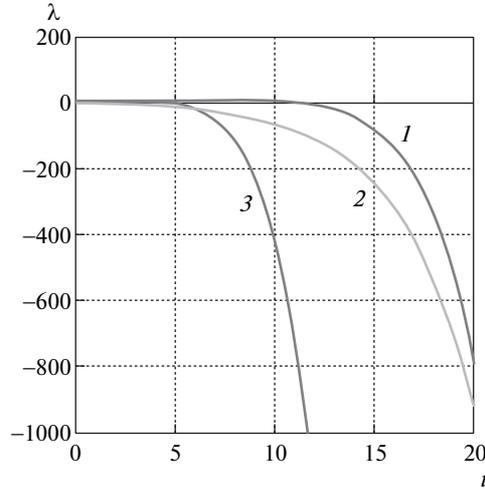


Фиг. 3

$(1 - k^2)K \leq E \leq K$ [22]. Поэтому $dT/dt < 0$ поскольку $T > 0$, т.е. переменная T строго убывает для любых $k^2 \in [0; 1]$ (фиг. 1). Также строго убывает и величина кинетического момента G (фиг. 2).

Исследуем эволюцию величины k^2 (фиг. 3). Так как функция $T(t)$ стремится к нулю быстрее $G(t)$, то выражение в квадратных скобках (2.6).

$$\left[R(k) \frac{dT}{dt} - S(k) G \frac{dG}{dt} \right] < 0$$



Фиг. 4

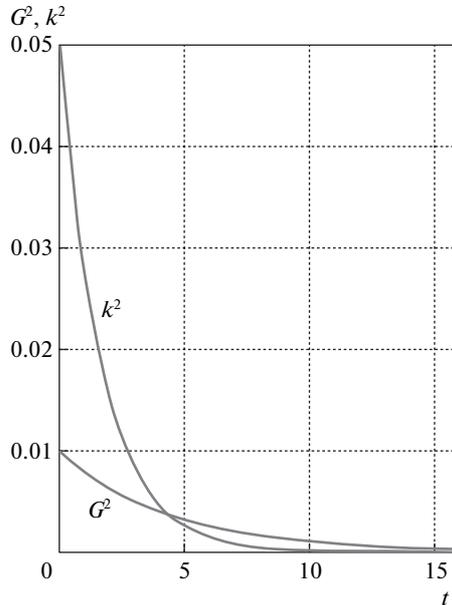
Было проведено численное интегрирование первых двух уравнений системы (2.2) и (2.6). Кривые 1, 2 соответствуют начальным значениям параметров: $I_{11} = 0.919$, $I_{22} = 5.228$, $I_{33} = 1.425$.

На фиг. 4 представлен график изменения угла ориентации вектора кинетического момента λ . Изменение угла λ зависит как от действия сил гравитационного притяжения и сопротивления, так и от действия момента сил вязкой жидкости в полости тела. Характер изменения угла λ имеет такой же вид, как в [13]. Приращение $\lambda = \lambda(t)$ содержит непостоянную величину N^* , которая зависит от функций $k^2 = k^2(t)$, полных эллиптических интегралов $K(k)$ и $E(k)$, а также кинетической энергии и кинетического момента. Кинетическая энергия T и кинетический момент G – функции убывающие, также $k^2 \rightarrow 0$. Величина N^* также убывает, но в начальный момент времени N^* положительна, поэтому график изменения $\lambda(t)$ возрастает. Скорость убывания угла λ пропорциональна выражению T/G^3 (2.5), которое с течением времени стремится к бесконечности. Поэтому на большем промежутке времени λ убывает более стремительно. На кривой 1 фиг. 4 видно, что с уменьшением значения момента инерции A_2 кривизна функции $\lambda(t)$ увеличивается. Такое поведение отмечается также при увеличении коэффициентов сопротивления (фиг. 4. кривая 3).

Анализ предельного случая. При малых k^2 , что соответствует движению, близкому к вращению вокруг оси A_1 , система уравнений для G^2 и k^2 принимает вид:

$$\frac{dG^2}{dt} = G(\chi + k^2\alpha), \quad \frac{dk^2}{dt} = k^2(\beta + G^2\gamma), \quad \chi = -\frac{I_{11}}{A_1} \quad (3.1)$$

$$\text{где } \alpha = -\frac{(A_1 - A_3)(I_{22}A_1 - I_{11}A_2) + (A_1 - A_2)(I_{33}A_1 - I_{11}A_3)}{2A_1^2(A_2 - A_3)}$$



Фиг. 5

$$\beta = -\frac{(I_{33}A_1 - I_{22}A_3)}{A_2A_3} - \frac{2(I_{22}A_1 - I_{11}A_2)}{A_1A_2}, \quad \gamma = -\frac{P}{A_1A_2A_3} \left(\frac{A_1 - A_2}{A_3} + \frac{A_1 - A_3}{A_2} \right)$$

Следует отметить, что полученные уравнения (3.1) формально совпадают с системой дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию экологических систем (система “хищник–жертва”) [23, 24]. Из системы (3.1) определяется первый интеграл:

$$k^\alpha \exp(\alpha k^2) = C_1 G^\beta \exp(\gamma G^2), \quad C_1 = \text{const} \quad (3.2)$$

Из соотношений (3.1), (3.2), при малых G^2 и k^2 следует, что характер изменения квадрата величины кинетического момента зависит от знака выражений $I_{22}A_1 - I_{11}A_2$ и $I_{33}A_1 - I_{11}A_3$, а поведение k^2 – от знака коэффициента β . Коэффициент γ всегда остается отрицательным. В результате численного интегрирования было установлено, что с течением времени при $\alpha < 0$ и $\beta < 0$ тело стремится к состоянию покоя (фиг. 5). При $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ наблюдается периодичность функций $G^2(t)$ и $k^2(t)$ как в работах [23, 24].

Отметим, что $G = 0$, $k^2 = 0$ являются стационарными точками системы (3.1). Из уравнений (3.1) при $k^2(0) = 0$ получим: $G^2 = G_0^2 \exp(\chi t)$; при $G^2(0) = 0$: $k^2 = k_0^2 \exp(\beta t)$. При этом функция $G^2(t)$ строго убывает, а изменение функции $k^2(t)$ зависит от знака β .

Заключение. Исследовано движение динамически несимметричного спутника со сферической полостью, заполненной жидкостью большой вязкости, под действием моментов сил гравитации и сопротивления среды. Получена система уравнений движения, содержащая быстрые и медленные переменные. Вначале применялся метод усреднения по движению Эйлера–Пуансо, а затем модифицированный метод усреднения. Изменение кинетического момента зависит только от сопротивления среды, а

кинетической энергии — также от влияния полости с жидкостью в теле. Эволюция угла ориентации вектора кинетического момента λ зависит как от действия сил гравитационного притяжения и сопротивления, так и от действия момента сил вязкой жидкости в полости тела. Во втором приближении метода усреднения угол отклонения вектора кинетического момента от вертикали остается постоянным. Величины кинетического момента и кинетической энергии монотонно убывают. Влияние момента сил вязкой жидкости сравнительно мало по сравнению с действием моментов сил гравитации и сопротивления.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке третьего совместного конкурса Государственного фонда фундаментальных исследований Украины и РФФИ (гранты № 953.1/010 и № 13-01-90411 Укр-ф-а), РФФИ (код 13-01-00180) и программы НШ-2710.2014.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
2. *Черноусько Ф.Л.* О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 474–483.
3. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
4. *Черноусько Ф.Л.* Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью при малых числах Рейнольдса // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1965. Т. 5. № 6. С. 1049–1070.
5. *Кошляков В.Н.* Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы. М.: Наука, 1985. 288 с.
6. *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л.* Быстрое движение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 3. С. 5–13.
7. *Pãarrea M., Lanchares V.* Chaotic pitch motion of an asymmetric non-rigid spacecraft with viscous drag in circular orbit // Intern. J. Non-Linear Mech. 2006. V. 41. P. 86–100.
8. *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л.* Эволюция быстрого вращения спутника под действием гравитационного момента в среде с сопротивлением // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 2. С. 13–26.
9. *Смирнова Е.П.* Стабилизация свободного вращения асимметрического волчка с полостями, целиком заполненными жидкостью // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 6. С. 980–985.
10. *Осипов В.В., Суликашвили Р.С.* О колебании твердого тела со сферической полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью, на эллиптической орбите // Тр. ин-та / Тбилис. мат. ин-т АН Груз. ССР. 1978. Т. 58. С. 175–186.
11. *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д.* Быстрое вращение вокруг неподвижной точки тяжелого гиростата в сопротивляющейся среде // Прикл. механика. 1982. Т. 18. №7. С. 102–107.
12. *Сидоренко В.В.* Эволюция вращательного движения планеты с жидким ядром // Астрон. вестник. 1993. Т. 27. № 2. С. 119–127.
13. *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л.* Эволюция вращений спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью // Механика твердого тела. 2007. Вып. 37. С. 126–139.
14. *Лещенко Д.Д., Суксова С.Г.* О движении несимметричного гиростата в среде с сопротивлением // Междунар. МФНА–АНН журнал “Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах”. 2003. Т. 9. № 2(18). С. 83–89.
15. *Баранова Е.Ю., Вильке В.Г.* Эволюция движения твердого тела с неподвижной точкой и эллипсоидальной полостью, заполненной вязкой жидкостью // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 1. Матем., механ. 2013. № 1. С. 44–50.

16. Акуленко Л.Д., Зинкевич Я.С., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л. Быстрые вращения спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, под действием моментов сил гравитации и светового давления // Космич. исслед. 2011. Т. 49. № 5. С. 453–463.
17. Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л., Щетинина Ю.С. Эволюция вращений симметричного гиростата в гравитационном поле и сопротивляющейся среде // Механика твердого тела. 2012. Вып. 42. С. 93–102.
18. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л., Зинкевич Я.С. Возмущенные и управляемые вращения твердого тела. Одесса: Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова, 2013. 288 с.
19. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
20. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 1. Механика. М.: Наука, 1973. 208 с.
21. Акуленко Л.Д. Схемы усреднения высших степеней в системах с быстрой и медленной фазами // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 165–176.
22. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
23. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.
24. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976. 286 с.

Поступила в редакцию
25.06.2014 г.