

## ОБ УТОЧНЕНИИ МЕТОДИКИ РАСЧЕТА ОТКРЫТЫХ СФЕРИЧЕСКИХ КУПОЛОВ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ НАГРУЗКЕ

Яременко Е. А. (Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса)

Задача расчета купола, подкрепленного опорным кольцом, впервые была поставлена и решена К. Гиркманом [1], и С.П. Тимошенко [2]. После приведения к канонической форме метода сил (см. [3], [4], [5]) метод расчета вошел в Руководство [6]. При составлении статьи автор воспользовался этими источниками, дополнив метод возможностью учета эксцентриситета  $e_1$ , а также формулами (29) и (30) для определения перемещений.

**Основные зависимости.** Элементами купола служит, как правило, оболочка вращения и растянутое опорное кольцо. Опорное кольцо может лежать на сплошном основании, образованном стенами, или на отдельных колоннах. При наличии фонарного проема в вершине купола устраивается сжатое фонарное кольцо (рис. 1).

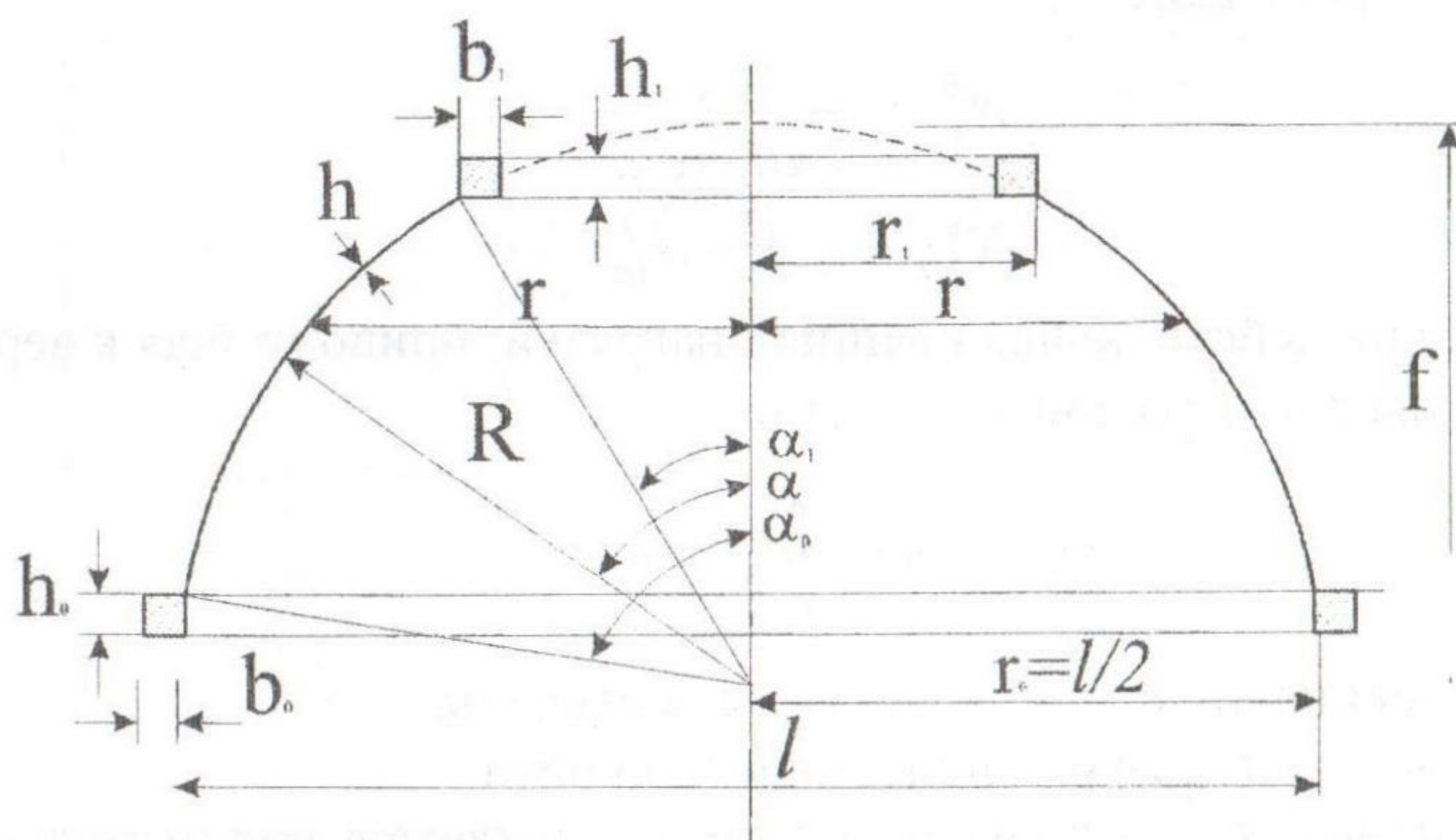


Рис. 1. Расчетная схема купола

На рисунке приняты следующие обозначения:

$l$  – пролет купола;

$f$  – стрела подъема;

$R$  – радиус кривизны купола (для сферического купола меридиональный и кольцевой радиусы кривизны одинаковы);

$r$  – радиус параллельного круга сечения с углом  $\alpha$ ;

$\alpha_0$  – угол раствора оболочки (большого контура);

$\alpha_1$  – угол раствора фонаря (малого контура);

$h$  – толщина стенки купола (считается постоянной);

$h_0, b_0$  – высота и ширина сечения опорного кольца;

$h_1, b_1$  – то же, фонарного кольца.

Радиус кривизны купола связан с пролетом и стрелой подъема зависимостью

$$R = \frac{(l/2)^2 + f^2}{2f}; \quad r = R \cdot \sin \alpha \quad (1)$$

В случае шарнирного опирания купола, когда реакции на краях оболочки направлены вдоль касательной к ее срединной поверхности, возможна реализация безмоментного напряженного состояния. В куполе возникают лишь мембранные усилия;

$N_{1\alpha}^0$  – продольное меридиональное усилие, приходящееся на единицу длины кольцевого сечения с углом  $\alpha$ ;

$N_{2\alpha}^0$  – продольное кольцевое усилие, приходящееся на единицу длины меридиана в сечении с углом  $\alpha$ ; Они могут быть найдены из уравнений равновесия

$$\begin{aligned} N_{1\alpha}^0 &= \frac{G_\alpha}{2\pi R \sin^2 \alpha} \\ N_{2\alpha}^0 &= q_z R - N_{1\alpha}^0 \end{aligned} \quad (2)$$

где  $G_\alpha$  – равнодействующая внешней нагрузки, приложенная к верхней части купола с центральным углом  $\alpha$ .

$$G_\alpha = 2\pi R^2 \int_0^\alpha q_y \sin \alpha d\alpha \quad (3)$$

$q_y$  – проекция внешней нагрузки на вертикаль;

$q_z$  – то же, на нормаль к поверхности купола.

Меридиональные и кольцевые усилия считаются положительными при сжатии. Вызванный нагрузкой распор на единицу длины кольцево-

го сечения купола  $H_\alpha^0$  можно определить как горизонтальную проекцию усилия  $N_n^1$ .

$$H_\alpha^0 = N_{1\alpha}^0 \cos \alpha. \quad (4)$$

Тогда растягивающее усилие в опорном кольце

$$N_0^0 = -r_0 H_0^0 = -\frac{G_0}{2\pi \operatorname{tg} \alpha_0}, \quad (5)$$

а сжимающее усилие в фонарном кольце

$$N_1^0 = p_\phi r_1 \cos \alpha_1 = p_\phi R \sin \alpha_1 \cos \alpha_1, \quad (6)$$

где  $p_\phi$  – нагрузка на 1 пог.м фонарного кольца.

Однако оболочка купола оперта не шарнирно, а упруго закреплена в опорном (и фонарном) кольце. В связи с этим на опорном (и верхнем) крае возникает меридиональный изгибающий момент  $M_{ln}$  и дополнительный распор  $H_n^1$ . Краевые изгибающие моменты и дополнительный распор определяются из расчета системы купол – кольцевая балка методом сил, принимая основную систему метода сил в виде купола, шарнирно опертого на радиально подвижные опоры, оси которых направлены по касательным к меридианам (рис. 2).

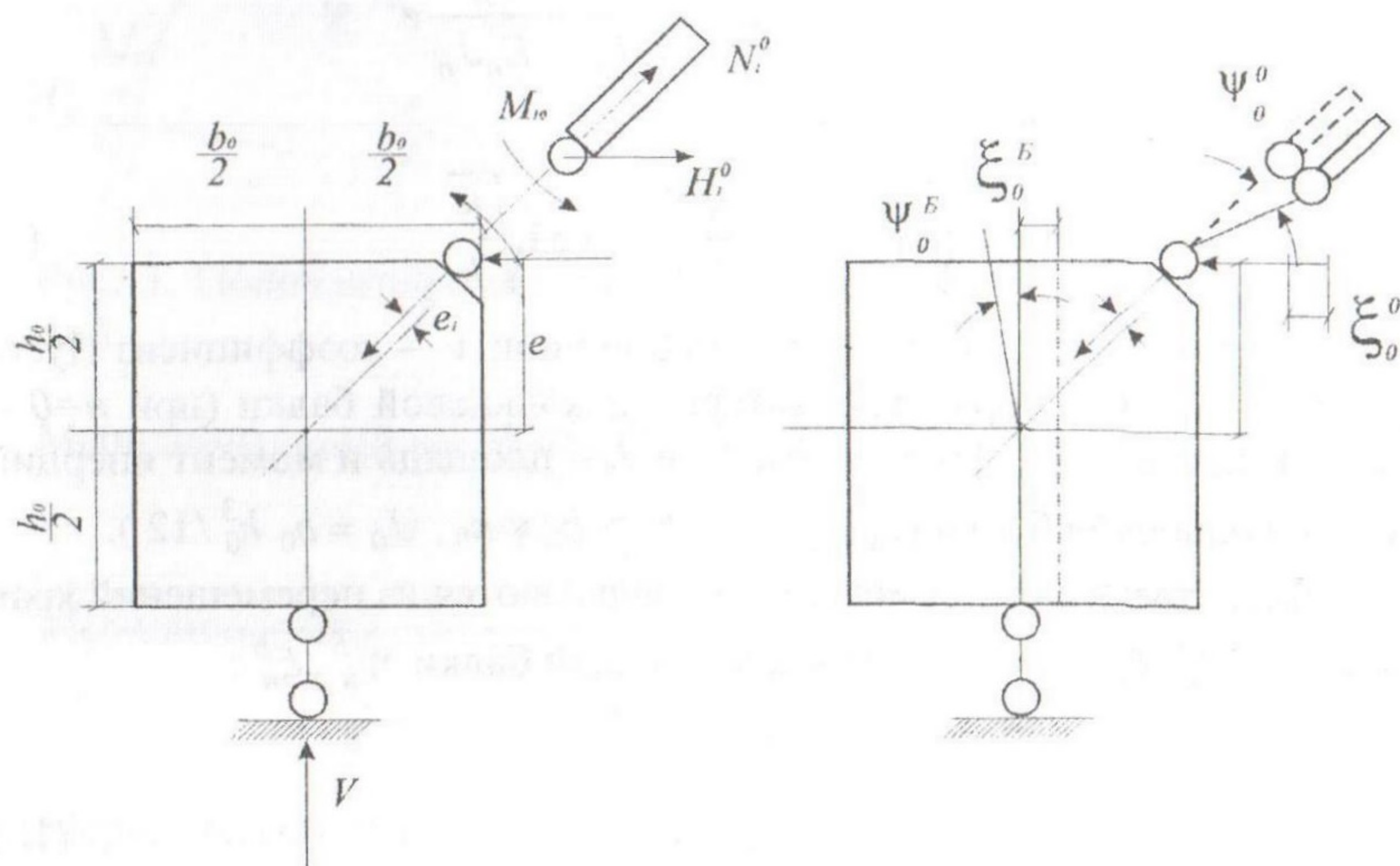


Рис. 2. Положительные направления: а) – краевых усилий; б) – угловых и горизонтальных перемещений оболочки и опорного кольца.

Система канонических уравнений метода сил, выражающих совместность угловых и линейных перемещений купола и кольца по линии их сопряжения, имеет вид

$$\begin{aligned}\delta_{11}^n M_{1n} + \delta_{12}^n H_n^1 + \Delta_{1q}^n &= 0 \\ \delta_{21}^n M_{1n} + \delta_{22}^n H_n^1 + \Delta_{2q}^n &= 0\end{aligned}\quad (7)$$

где:  $\delta_{11}^n, \delta_{21}^n, \Delta_{1q}^n$  – взаимные углы поворота края оболочки и кольцевой балки в основной системе от действия единичных значений лишних неизвестных и внешних нагрузки;

$\delta_{21}^n, \delta_{22}^n, \Delta_{2q}^n$  – взаимные горизонтальные перемещения края оболочки и кольцевой балки в основной системе от действия лишних неизвестных единичной величины и внешней нагрузки.

Единичные перемещения определяются формулами

$$\begin{aligned}\delta_{11}^n &= \frac{4k^3}{EhR} + \frac{r_n^2}{E_n J_n} \\ \delta_{12}^n &= \delta_{21}^n = -\frac{2k^3}{Eh} \sin \alpha + \frac{r_n^2}{E_n J_n} e \\ \delta_{22}^n &= \frac{2Rk}{Eh} \sin^2 \alpha + \frac{r_n^2}{E_n J_n} + \frac{r_n^2}{E_n J_n} e^2\end{aligned}\quad (8)$$

где характеристика затухания  $k$

$$k = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)\left(\frac{R}{h}\right)^2} \approx 1,31\sqrt{\frac{R}{h}}\quad (9)$$

$E$  – модуль упругости материала оболочки;  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $E_n$  – модуль упругости материала кольцевой балки (при  $n=0$  – опорной, при  $n=1$  – фонарный);  $F_n$  и  $J_n$  – площадь и момент инерции сечения кольцевой балки (при  $n=0$ ,  $F_0 = b_0 \times h_0$ ,  $J_0 = b_0 h_0^3 / 12$ ).

Полные грузовые перемещения складываются из перемещений края оболочки  $\Psi_n^0, \xi_n^0$  и перемещений кольцевой балки  $\Psi_n^B, \xi_n^B$ :

$$\begin{aligned}\Delta_{1q}^n &= \Psi_n^0 + \Psi_n^B \\ \Delta_{2q}^n &= \xi_n^0 + \xi_n^B\end{aligned}\quad (10)$$

$$\Psi_n^0 = \frac{1}{Eh} \left[ (1+\nu)(N_{1\alpha}^0 - N_{2\alpha}^0) \operatorname{ctg} \alpha - \frac{d}{d\alpha} (N_{2\alpha}^0 - \nu N_{1\alpha}^0) \right]\quad (11)$$

$$\xi_n^0 = \frac{r_n}{Eh} (N_{2\alpha}^0 - \nu N_{1\alpha}^0);$$

$$\psi_n^B = \frac{r_n^2}{E_n J_n} H_n^0 \cdot e_1 = \frac{r_n N_n^0}{E_n F_n} e_1$$

$$\xi_n^B = \frac{r_n^2}{E_n J_n} H_n^0 = \frac{r_n N_n^0}{E_n F_n} \quad (12)$$

где  $N_n^0$  определяется по формуле (5) – для нижнего края, и по формуле (6) – для верхнего края.

Формулы (8) – (12) справедливы при определении краевых усилий как на большом (когда  $n = 0, \alpha = \alpha_0$ ), так и на малом контуре, когда  $n = 1, \alpha = \alpha_1$ .

Усилия и перемещения от контурных воздействий  $M_{1n}, N_n^i$  определяются по следующим формулам (рис. 3):

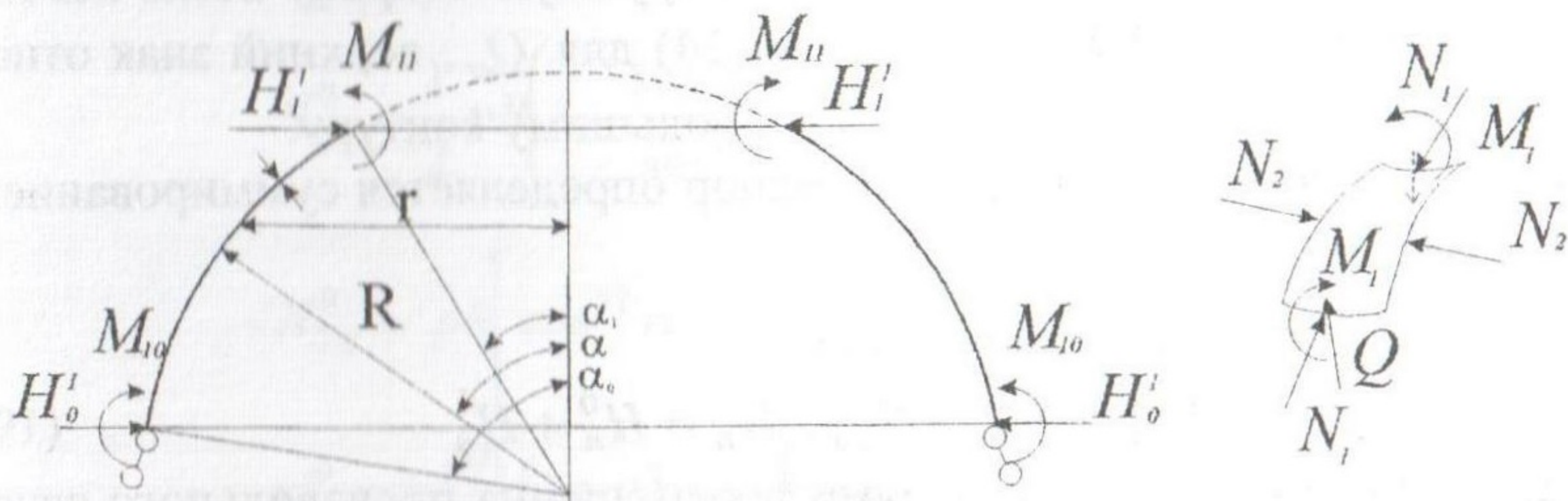


Рис. 3. Положительное направление: а) контурных, б) внутренних усилий.

Меридиональный изгибающий момент

$$M_{1\alpha} = M_{1n} \eta_3 - H_n^1 \frac{R}{k} \sin \alpha_n \eta_2 \quad (13)$$

Меридиональная поперечная сила

$$Q_\alpha = \pm \left( M_{1n} \cdot \frac{2k}{R} \eta_2 + H_n^1 \sin \alpha_n \cdot \eta_4 \right) \quad (14)$$

Меридиональное продольное усилие

$$N_{1\alpha}^1 = -Q_\alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha \quad (15)$$

Кольцевое продольное усилие

$$N_{2\alpha}^1 = -2k \left( M_{1n} \frac{k}{R} \eta - H_n^1 \sin \alpha_n \eta_1 \right) \quad (16)$$

В этих формулах

$$\begin{aligned} \eta_1 &= e^{-\chi} \cos \chi, \quad \eta_2 = e^{-\chi} \sin \chi \\ \eta_3 &= \eta_1 + \eta_2, \quad \eta_4 = \eta_1 - \eta_2 \\ \chi &= k\omega \end{aligned} \quad (17)$$

где  $\omega$  – угол, отсчитываемой от края купола:

$\omega = \alpha_0 - \alpha$  – для усилий, приложенных по большому контуру;

$\omega = \alpha - \alpha_1$  – для усилий, приложенных по малому контуру.

Положительные направления краевых усилий показаны на рис. 3. а. Углы поворота  $\Psi$  и перемещения  $\xi$  положительны, если они происходят соответственно в направлении усилий  $M_{1n}$  и  $N_n^1$  (см. также рис. 2). Продольные усилия положительны при сжатии. Поперечная сила  $Q$  положительна, если она направлена в наружную сторону возле левого края оболочки (рис. 3.б). В формуле (14) для  $Q_\alpha$ , верхний знак относится к малому контуру, а нижний – к большому контуру.

Полные продольные усилия и распор определяется суммированием составляющих

$$\begin{aligned} N_{1\alpha} &= N_{1\alpha}^0 + N_{1\alpha}^1, \\ N_{2\alpha} &= N_{2\alpha}^0 + N_{2\alpha}^1, \quad H_n = H_n^0 + H_n^1 \end{aligned} \quad (19)$$

Вызванные краевыми усилиями перемещения произвольного сечения купола можно определить по формулам

Угол поворота

$$\psi_\alpha^1 = -\frac{2k^2}{Eh} \left( M_{1n} \cdot \frac{2k}{R} \eta_2 - H_n^1 \sin \alpha \eta_3 \right)$$

Горизонтальное перемещение

$$\xi_\alpha^1 = \frac{1}{Eh} \left[ M_{1n} \cdot 2k(k \sin \alpha \eta_4 + v \cos \alpha \eta_2) - H_n^1 R \sin \alpha (2k \sin \alpha \eta_1 - v \cos \alpha \eta_4) \right]$$

Полные перемещения складываются из составляющих перемещений, определенных формулами (11) и (19).

**Открытый купол. Определение усилий и перемещений.**

а) Нагрузка от собственного веса  $g$  при постоянной толщине купола.

$$G\alpha = 2\pi g R^2 (\cos \alpha_1 - \cos \alpha) \quad (20)$$

Продольные усилия

$$N_{1\alpha}^0 = \frac{gR}{\sin^2 \alpha} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha) \quad (21)$$

Определенные согласно (11) перемещения

$$\psi_n^0 = \pm \frac{gR}{Eh(2+\nu)} \sin \alpha$$

$$\xi_n^0 = + \frac{gR^2}{Eh} \sin \alpha \left[ (1+\nu) \frac{\cos \alpha_1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \cos \alpha \right]$$

Здесь и ниже для малого контура  $n = 1$ ,  $\alpha = \alpha_1$ , для большого контура  $n = 0$ ,  $\alpha = \alpha_0$ . При  $\alpha = 59^\circ 49'$   $N_{2\alpha} = 0$ . Верхний знак относится к малому контуру, а нижний – к большому.

б) Равномерная нагрузка  $p$  на горизонтальную проекцию купола (снеговая нагрузка).

$$G_\alpha = \pi p R^2 \sin^2 \alpha \quad (23)$$

$$N_{1\alpha}^0 = \frac{1}{2} p R \left( 1 - \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sin^2 \alpha} \right) \quad (24)$$

$$N_{2\alpha}^0 = p R \left[ \cos^2 \alpha - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sin^2 \alpha} \right) \right]$$

$$\psi_n^0 = \pm \frac{pR}{Eh} (3+\nu) \sin \alpha \cos \alpha \quad (25)$$

$$\xi_n^0 = \mp \frac{pR^2}{Eh} \sin \alpha \left[ \frac{1+\nu}{2} \left( 1 - \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sin^2 \alpha} \right) - \cos^2 \alpha \right]$$

$$N_{2\alpha}^0 = p R \cos^2 \alpha - N_{1\alpha}^0$$

в) Погонная вертикальная нагрузка  $p_\phi$  на малом контуре

$$G_1 = p_\phi \cdot 2\pi r_1 = P \quad (26)$$

$$N_{1\alpha}^0 = p_\phi \frac{\sin \alpha_1}{\sin^2 \alpha} \quad (27)$$

$$N_{2\alpha}^0 = -N_{1\alpha}^0 \quad (28)$$

$$\psi_n^0 = - \frac{2p_\phi(1+\nu)}{Eh} \cdot \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sin^2 \alpha} \cdot \sin \alpha_1 \quad (29)$$

$$\xi_n^0 = -\frac{p_\phi R(1+\nu)}{Eh} \cdot \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha} \quad (30)$$

г) Равномерное нагревание на  $t^\circ\text{C}$ ;  $\alpha_1$  – коэффициент теплового расширения.

$$\begin{aligned} N_{1\alpha}^0 &= N_{2\alpha}^0 = 0, \quad \psi_n^0 = 0, \\ \xi_n^0 &= \alpha_1 R \cdot t^\circ \cdot \sin \alpha \end{aligned} \quad (32)$$

д) Предварительное напряжение опорного кольца

$$\begin{aligned} N_{1\alpha}^0 &= N_{2\alpha}^0 = 0; \quad \psi_0^0 = \xi_0^0 = 0; \quad \psi_0^B = 0 \\ \xi_0^B &= \frac{\kappa_0 N_{ps}}{E_0 F_0}, \end{aligned} \quad (33)$$

где:  $N_{ps} = \sigma_{ps} A_s$  – усилие предварительного напряжения,  $\sigma_{ps}$  – величина предварительного напряжения, определенная с учетом потерь,  $A_s$  – площадь сечения предварительно – напряженной арматуры.

Для случая, когда фонарного отверстия нет (закрытый купол) в приведенных выше формулах необходимо положить  $\alpha_1 = 0$ .

### Литература

1. Girkmann R. Flächentragwerke. – Vien:Springer-verlag, 1959/ – 632 s.
2. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Госфизматиздат, 1963. – 635с.
3. Улицкий И.И. и др. Железобетонные конструкции (расчет и конструирование). – Киев, «Будівельник», 1972. – 992 с.
4. Байков В.Н., Хампе Э., Рауэ Э. Проектирование тонкостенных пространственных конструкций: Учебное пособие для ВУЗов. – М.: Стройиздат, 1973. – 128 с.
5. Овечкин А.М. Расчет железобетонных осесимметричных конструкций (оболочек). – М.: Госстройиздат, 1961. – 240 с.
6. Руководство по проектированию железобетонных пространственных конструкций, покрытий и перекрытий НИИЖБ. – М.: Стройиздат, 1979. – 421 с.