

Д.т.н. Максимович О.В., д.т.н. Оробей В.Ф., д.т.н. Сурьянинов Н.Г.

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧЕ ИЗГИБА ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ

С появлением новых конструкционных материалов — стеклопластиков — область применения слоистых пластиков в технике значительно расширилась, а технико-экономические преимущества их использования резко возросли. В связи с этим разработка методов расчета тонкостенных конструкций из слоистых пластиков приобретает большое практическое значение.

Применяемые в технике слоистые пластики в большинстве случаев обладают симметрией упругих свойств, т. е. представляют собой ортотропные материалы.

Дифференциальное уравнение изгиба ортотропной пластины имеет вид

$$D_1 \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial y^4} = q(x, y) [1], \quad (1)$$

где $D_1 = \frac{E_x h^3}{12(1 - \mu_{xy} \mu_{yx})}$; $D_2 = \frac{E_y h^3}{12(1 - \mu_{xy} \mu_{yx})}$;

$$D_3 = D_1 \mu_{xy} + 2D_k = D_2 \mu_{yx} + 2D_k; \quad D_k = \frac{Gh^3}{12}.$$

В результате применения процедуры метода Канторовича-Власова уравнение (1) преобразуется к виду

$$W^{IV}(y) - 2r^2 W''(y) + s^4 W(y) = \frac{1}{A} q(y), \quad (2)$$

где $r^2 = B/A$; $s^4 = C/A$;

$$A = D_2 \int_0^{l_1} X^2 dx; \quad B = D_3 \int_0^{l_1} X'' X dx; \quad C = D_1 \int_0^{l_1} X^{IV} X dx.$$

Два способа выбора функции поперечного распределения прогибов $X(x)$ (статический и динамический) подробно рассмотрены в [3].

Таким образом, двумерная задача приведена к одномерной, и теперь для ее решения можно использовать численно-аналитический метод граничных элементов (МГЭ) [3].

Пластина рассматривается как обобщенный одномерный модуль [3], поэтому вектор ее состояния будет таким же, как и при изгибе балки:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} W(y) \\ \theta_y(y) \\ M_y(y) \\ Q_y(y) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где W, θ_y, M_y, Q_y — прогиб, угол поворота, изгибающий момент и поперечная сила соответственно.

Индекс "y" в дальнейшем будем опускать.

Решение уравнения (2) зависит от корней соответствующего характеристического уравнения

$$K_{1-4} = \pm \sqrt{r^2 \pm \sqrt{r^4 - s^4}}. \quad (4)$$

Т.к. вектор состояния (3) содержит 4 компонента, а характеристическое уравнение имеет 4 корня, то для полного решения задачи об изгибе ортотропной пластины необходимо получить аналитические выражения 64-х фундаментальных функций. Вид этих функций определяется соотношением между r и s , которое зависит от граничных условий на продольных (вдоль оси y) краях пластины.

В соответствии с алгоритмом МГЭ [3] сначала нужно решить задачу Коши. Это решение в матричной форме имеет вид

$$\begin{pmatrix} W(y) \\ \theta(y) \\ M(y) \\ Q(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & -A_{13} & -A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & -A_{23} & -A_{13} \\ -A_{31} & -A_{32} & A_{22} & A_{12} \\ -A_{41} & -A_{31} & A_{21} & A_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(0) \\ \theta(0) \\ M(0) \\ Q(0) \end{pmatrix} + \int_0^y \begin{pmatrix} A_{14}(y-\xi) \\ A_{13}(y-\xi) \\ -A_{12}(y-\xi) \\ -A_{11}(y-\xi) \end{pmatrix} q(\xi) d\xi. \quad (5)$$

Решение (5) записано для случая, когда ось z направлена "вниз".

Положительные направления обобщенных кинематических и статических параметров одномерной модели изгиба ортотропной прямоугольной пластины совпадают с положительными направлениями соответствующих параметров изгиба прямолинейного стержня [3].

Положительное направление поперечной нагрузки показано на (рис. 1).

Таким образом, решение уравнения (1) с использованием метода Канторовича-Власова будет заключаться в определении функции прогиба

$$W(x, y) = W(y)X(x), \quad (6)$$

где функция $X(x)$ задана, а функция $W(y)$ определяется из (5).

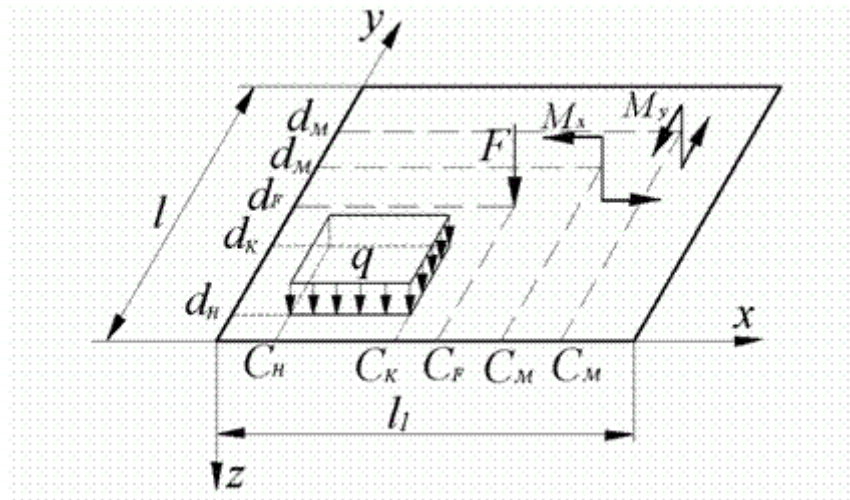


Рис. 1. Положительное направление поперечной нагрузки

Рассмотрим один из вариантов соотношения между r и s , когда $s = r$, что соответствует шарнирному опиранию продольных кромок пластинки.

Корни (4) — $K_{1-4} = \pm\sqrt{r^2}$.

Прогиб запишется в виде

$$W(y) = C_1\Phi_1 + C_2\Phi_2 + C_3\Phi_3 + C_4\Phi_4, \quad (7)$$

где $\Phi_1 = ychry$; $\Phi_2 = chry$; $\Phi_3 = shry$; $\Phi_4 = yshry$. (8)

Первые три производные функций $\Phi_1 - \Phi_4$:

$$\Phi_1' = \Phi_2 + r\Phi_4; \quad \Phi_2' = r\Phi_3; \quad \Phi_3' = r\Phi_2; \quad \Phi_4' = \Phi_3 + r\Phi_1;$$

$$\Phi_1'' = r^2\Phi_1 + 2r\Phi_3; \quad \Phi_2'' = r^2\Phi_2; \quad \Phi_3'' = r^2\Phi_3; \quad \Phi_4'' = 2r\Phi_2 + r^2\Phi_4;$$

$$\Phi_1''' = 3r^2\Phi_2 + r^3\Phi_4; \quad \Phi_2''' = r^3\Phi_3; \quad \Phi_3''' = r^3\Phi_2; \quad \Phi_4''' = r^3\Phi_1 + 3r^2\Phi_3.$$

Угол поворота:

$$\theta(y) = W'(y) = C_1\Phi'_1 + C_2\Phi'_2 + C_3\Phi'_3 + C_4\Phi'_4. \quad (9)$$

Изгибающий момент:

$$\begin{aligned} M(y) &= -D_2 \left[W''(y) \int_0^{l_1} X^2 dx + \mu_{yx} W(y) \int_0^{l_1} X'' X dx \right] = \\ &= - \left[AW''(y) + \mu_{yx} \frac{BD_2}{D_3} W(y) \right] = -[AW''(y) + RW(y)], \end{aligned} \quad (10)$$

где $R = \mu_{yx} \frac{BD_2}{D_3}$.

Поперечная сила:

$$Q(y) = - \left[D_2 W'''(y) \int_0^{l_1} X^2 dx + D_3 W'(y) \int_0^{l_1} X'' X dx \right] = -[AW'''(y) + BW'(y)] \quad (11)$$

Функции (8) в точке $y = 0$ принимают следующие значения:

$$\Phi_1(0) = \Phi_3(0) = \Phi_4(0) = 0; \quad \Phi_2(0) = 1.$$

Постоянные $C_1 - C_4$ можно определить из соотношения

$$\bar{\Phi}_0 \vec{C}_i = \vec{P}_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (12)$$

где

$$\bar{\Phi}_0 = \begin{vmatrix} \Phi_1(0) & \Phi_2(0) & \Phi_3(0) & \Phi_4(0) \\ \Phi'_1(0) & \Phi'_2(0) & \Phi'_3(0) & \Phi'_4(0) \\ -[A\Phi''_1(0) + R\Phi_1(0)] - [A\Phi''_2(0) + R\Phi_2(0)] - [A\Phi''_3(0) + R\Phi_3(0)] - [A\Phi''_4(0) + R\Phi_4(0)] \\ -[A\Phi'''_1(0) + B\Phi'_1(0)] - [A\Phi'''_2(0) + B\Phi'_2(0)] - [A\Phi'''_3(0) + B\Phi'_3(0)] - [A\Phi'''_4(0) + B\Phi'_4(0)] \end{vmatrix}.$$

В результате решения уравнения (12) получим:

$$\begin{cases} C_1 = -\frac{Ar^2 + B}{2Ar^2} \theta_0 - \frac{1}{2Ar^2} Q_0; \\ C_2 = W_0; \\ C_3 = \frac{3Ar^2 + B}{2Ar^3} \theta_0 + \frac{1}{2Ar^3} Q_0; \\ C_4 = -\frac{Ar^2 + R}{2Ar} W_0 - \frac{1}{2Ar} M_0. \end{cases} \quad (13)$$

Через фундаментальные функции компоненты вектора состояния (3) выражаются в виде:

$$\begin{cases} W(y) = A_{11}W_0 + A_{12}\theta_0 + A_{13}M_0 + A_{14}Q_0; \\ \theta(y) = A_{21}W_0 + A_{22}\theta_0 + A_{23}M_0 + A_{24}Q_0; \\ M(y) = A_{31}W_0 + A_{32}\theta_0 + A_{33}M_0 + A_{34}Q_0; \\ Q(y) = A_{41}W_0 + A_{42}\theta_0 + A_{43}M_0 + A_{44}Q_0. \end{cases} \quad (14)$$

Сопоставляя (7), (9)-(11) с (14) и учитывая константы (13), получим 16 фундаментальных функций при шарнирном опирании продольных кромок ортотропной пластины:

$$A_{11} = \Phi_2 - \frac{Ar^2 + R}{2Ar} \Phi_4;$$

$$A_{12} = \frac{3Ar^2 + B}{2Ar^3} \Phi_3 - \frac{Ar^2 + B}{2Ar^2} \Phi_1;$$

$$A_{13} = -\frac{\Phi_4}{2Ar};$$

$$A_{14} = \frac{1}{2Ar^3} (\Phi_3 - r\Phi_1).$$

$$A_{21} = -\frac{Ar^2 - R}{2Ar} \Phi_3 - \frac{Ar^2 + R}{2A} \Phi_1;$$

$$A_{22} = \Phi_2 - \frac{Ar^2 + B}{2Ar} \Phi_4;$$

$$A_{23} = -\frac{r\Phi_1 + \Phi_3}{2Ar};$$

$$A_{24} = -\frac{\Phi_4}{2Ar}.$$

$$A_{31} = \frac{(Ar^2 + R)^2}{2Ar} \Phi_4;$$

$$A_{32} = \frac{(Ar^2 + B)(Ar^2 + R)}{2Ar^2} \Phi_1 + \frac{Ar^2(B - Ar^2) - R(B + 3Ar^2)}{2Ar^3} \Phi_3;$$

$$A_{33} = \Phi_2 + \frac{Ar^2 + R}{2Ar} \Phi_4;$$

$$A_{34} = \frac{Ar^2 + R}{2Ar^2} \Phi_1 + \frac{3Ar^2 + R}{2Ar^3} \Phi_3.$$

$$A_{41} = \frac{(Ar^2 + B)(Ar^2 + R)}{2A} \Phi_1 + \frac{Ar^2(Ar^2 - B) + R(B + 3Ar^2)}{2Ar} \Phi_3;$$

$$A_{42} = \frac{(Ar^2 + B)^2}{2Ar} \Phi_4;$$

$$A_{43} = \frac{Ar^2 + B}{2A} \Phi_1 + \frac{B + 3Ar^2}{2Ar} \Phi_3;$$

$$A_{44} = \Phi_2 + \frac{Ar^2 + B}{2A} \Phi_4.$$

Литература

1. Александров А.В. Основы теории упругости и пластичности / Александров А.В., Потапов В.Д. — М.: Высшая школа, 1990. — 398 с.
2. Бермант А.Ф. Курс математического анализа / Бермант А.Ф. — М.: Гостехиздат, 1953. — 358 с.
3. Дашенко А.Ф. Численно-аналитический метод граничных элементов / Дашенко А.Ф., Коломиец Л.В., Оробей В.Ф., Сурьянинов Н.Г. — в 2-х т. — Одесса, ВМВ, 2010.