Д.т.н. Максимович О.В., д.т.н. Оробей В.Ф., д.т.н. Сурьянинов Н.Г.

К РАСЧЕТУ ДЛИННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Основное разрешающее уравнение задачи имеет восьмой порядок и является дифференциальным уравнением в частных производных. Функция, являющаяся решением этого уравнения, зависит от двух переменных, т.е. имеет место двумерная задача. В то же время алгоритм численно-аналитического варианта метода граничных элементов (МГЭ) предполагает решение одномерной задачи. Это достигается применением вариационного метода Канторовича-Власова. Для длинной открытой цилиндрической оболочки можно пренебречь изгибающим моментом в продольном направлении, поперечной силой и крутящим моментом, поэтому вектор состояния такой оболочки $\overline{P}$ можно представить в виде:

$$\overline{\mathrm{P}}^{\mathrm{T}} = \left\| W, \gamma, M, Q, S, U, N, V \right\|. \qquad (1)$$

Соответствующая модель оболочки разработана В.З. Власовым [1] (рис.1).

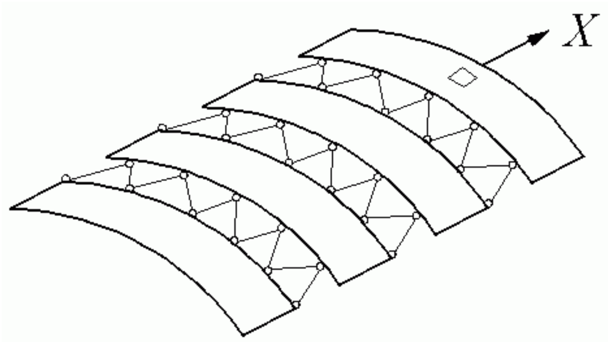

Рис. 1

В соответствии с этой моделью оболочка состоит из бесчисленного множества поперечных изгибаемых элементарных полосок, связанных между собой системой стержней с шарнирными соединениями. Каждый такой стержень может передавать только нормальные N_1 и сдвигающие S усилия.

Всего в векторе состояния (1) будут 4 усилия и 4 перемещения (рис.2).

С учетом сказанного упрощаются все уравнения общей теории оболочек.

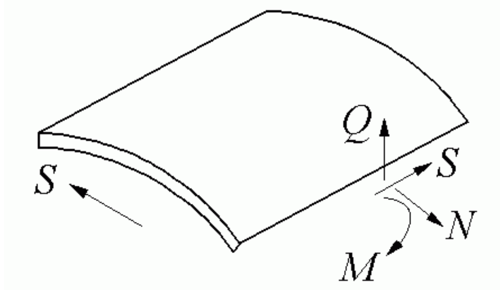

Рис. 2

Так, уравнения равновесия имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N_1}{\partial \beta} + \dfrac{\partial S}{\partial \theta} + Rp_1 = 0; \\ \dfrac{\partial N_2}{\partial \theta} + \dfrac{\partial S}{\partial \beta} + Q_2 + Rp_2 = 0; \\ \dfrac{\partial Q_2}{\partial \theta} - N_2 + Rp_3 = 0; \\ -RQ_2 + \dfrac{\partial M_2}{\partial \theta} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Геометрические уравнения:

$$\begin{cases} \varepsilon_2 = \dfrac{1}{R}\left(\dfrac{\partial V}{\partial \theta} + W\right) = 0; \\ \varepsilon_1 = \dfrac{\partial U}{R\partial \beta}; \\ \gamma = \dfrac{1}{R}\left(\dfrac{\partial U}{\partial \theta} + \dfrac{\partial V}{\partial \beta}\right) = 0; \\ \aleph_2 = -\dfrac{1}{R^2}\left(-\dfrac{\partial V}{\partial \theta} + \dfrac{\partial^2 W}{\partial \theta^2}\right). \end{cases} \tag{3}$$

Физические уравнения:

$$\begin{cases} N_1 = Eh\varepsilon_1; \\ N_2 = D\aleph_2, \end{cases} \tag{4}$$

где h — толщина оболочки; $D = \dfrac{Eh^3}{12}$ — цилиндрическая жесткость.

Введем новую функцию F (аналог функции напряжений φ в теории пластинок), через которую все параметры НДС оболочки выражаются в виде:

$$\begin{cases} W = \dfrac{\partial^4 F}{\partial\theta^4}; \quad V = -\dfrac{\partial^3 F}{\partial\theta^3}; \quad U = \dfrac{\partial^3 F}{\partial\beta\partial\theta^2}; \\ \varepsilon_1 = -\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial^4 F}{\partial\beta^2\partial\theta^2}; \quad \aleph_2 = \dfrac{1}{R^3}\left(\dfrac{\partial^4 F}{\partial\theta^4} + \dfrac{\partial^6 F}{\partial\theta^6}\right); \\ N_1 = -\dfrac{Eh}{R}\dfrac{\partial^4 F}{\partial\beta^2\partial\theta^2}; \quad S = \dfrac{Eh}{R}\dfrac{\partial^4 F}{\partial\beta^3\partial\theta}; \\ N_2 = -\dfrac{Eh}{R}\left[\dfrac{\partial^4 F}{\partial\beta^4} + \dfrac{h^2}{12R^2}\left(\dfrac{\partial^6 F}{\partial\theta^6} + \dfrac{\partial^4 F}{\partial\theta^4}\right)\right]; \\ M_2 = \dfrac{D}{R^2}\left(\dfrac{\partial^6 F}{\partial\theta^6} + \dfrac{\partial^4 F}{\partial\theta^4}\right); \quad Q_2 = \dfrac{D}{R^3}\left(\dfrac{\partial^7 F}{\partial\theta^7} + \dfrac{\partial^5 F}{\partial\theta^5}\right); \quad \gamma = \dfrac{\partial W}{\partial\theta}. \end{cases} \tag{5}$$

Преобразование уравнений (2)-(4) приводит к основному разрешающему уравнению задачи

$$\left(\frac{\partial^8}{\partial\theta^8} + 2\frac{\partial^6}{\partial\theta^6} + \frac{\partial^4}{\partial\theta^4}\right)F + \frac{12R^2}{h^2}\frac{\partial^4 F}{\partial\beta^4} = 0. \tag{6}$$

Для решения уравнения (6) используем вариационный метод Канторовича-Власова.

Будем искать функцию F в виде произведения двух функций:

$$F(\beta,\theta) = X(\beta)Y(\theta),$$

где $X(\beta)$ — функция, зависящая только от продольной координаты β, а $Y(\theta)$ — от координаты θ.

Функция $X(\beta)$ может быть функцией прогиба простой балки с аналогичными условиями опирания и нагрузкой. В.З. Власов предложил использовать в качестве функций распределения фундаментальные функции поперечных колебаний балки, которые являются решением однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^4 Z}{d\beta^4} - \lambda^4 Z = 0,$$

где λ — некоторый параметр, связанный с частотой собственных колебаний; в задаче об оболочке

$$\lambda = \frac{Rm}{l},$$

где l — длина оболочки; R — радиус оболочки; m — характеристическое число, определяемое при постановке граничных условий.

Для получения более точного решения выражение функции F задают не одной балочной функцией, а рядом по фундаментальным балочным функциям:

$$F(\beta, \theta) = \sum X_n(\beta) Y_n(\theta), \tag{7}$$

где $X_n(\beta)$ — фундаментальная функция, выбранная для конкретных граничных условий и соответствующая определенному значению n.

С учетом (7) компоненты вектора состояния принимают вид:

$$\begin{cases} W = \sum X_n(\beta) Y_n^{1V}(\theta); \\ U = -\sum X_n'(\beta) Y_n''(\theta); \\ V = \sum X_n(\beta) Y_n'''(\theta); \\ N_1 = -\dfrac{Eh}{R} \sum X_n''(\beta) Y_n''(\theta); \\ S = \dfrac{Eh}{R} \sum X_n'''(\beta) Y_n'(\theta); \\ N_2 = -\dfrac{Eh}{R} \left[\sum X_n^{1V}(\beta) Y_n(\theta) + \dfrac{h^2}{12R^2} \sum X_n(\beta) Y_n^{V1}(\theta) + \sum X_n(\beta) Y_n^{1V}(\theta) \right]; \\ M_2 = -\dfrac{D}{R^2} \sum \left[X_n(\beta) Y_n^{V1}(\theta) + X_n(\beta) Y_n^{1V}(\theta) \right]; \\ Q_2 = \dfrac{D}{R^3} \sum \left[X_n(\beta) Y_n^{V}(\theta) + X_n(\beta) Y_n^{V11}(\theta) \right]. \end{cases}$$

Выбранная функция не является решением уравнения (6), поэтому при подстановке нет тождественного равенства нулю левой части:

$$\sum \left[Y_n^8(\theta) + 2Y_n^6(\theta) + Y_n^4(\theta) + \frac{12R^2\lambda^4}{h^2} Y(\theta) \right] X_n(\beta) \neq 0. \tag{8}$$

Следуя вариационному методу Канторовича-Власова, умножим (8) на $X_n(\beta)$ и проинтегрируем в интервале от $\beta = 0$ до $\beta = \beta_1 = \dfrac{l}{R}$.

Учитывая ортогональность функций $X_n(\beta)$, получим бесконечное число независимых дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$Y_n^{V111}(\theta) + 2Y_n^{V1}(\theta) + Y_n^{1V}(\theta) + \frac{12R^2\lambda^4}{h^2}Y_n(\theta) = 0, \tag{9}$$

где $n = 1, 2, 3,...$

Характеристическое уравнение для (9) имеет вид:

$$t^8 + 2t^6 + t^4 + k = 0, \tag{10}$$

где $k = \dfrac{12R^2\lambda^4}{h^2}.$

Определим выражения обобщенных кинематических и статических факторов вектора состояния (1).

Умножим каждое из выражений для $W, U, V, N_1, S, N_2, M_2, Q_2$ на $X_n(\beta)$ и проинтегрируем в интервале от $\beta = 0$ до $\beta = \beta_1 = \dfrac{l}{R}.$

$$\int_0^{\beta_1} WXdx = \int_0^{\beta_1} X^2 Y^{1V} dx.$$

Обозначим $\int_0^{\beta_1} X^2 dx = A,$ тогда $W^* = Y^{1V},$

где $W^* = \dfrac{\int_0^{\beta_1} WXdx}{A}$ — обобщенное перемещение в направлении вертикальной оси.

$$\int_0^{\beta_1} UXdx = -\int_0^{\beta_1} X'XY''dx.$$

Обозначим $\int_0^{\beta_1} X'Xdx = B,$ тогда $U^* = -Y'',$

где $U^* = \dfrac{\int_0^{\beta_1} UXdx}{B}$ — обобщенное перемещение в направлении одной горизонтальной оси.

$$\int_0^{\beta_1} VXdx = \int_0^{\beta_1} X^2 Y'''dx.$$

Обозначим $\int_0^{\beta_1} X^2 dx = A$, тогда $V^* = Y'''$,

где $V^* = \dfrac{\int_0^{\beta_1} VXdx}{A}$ — обобщенное перемещение в направлении второй горизонтальной оси.

$$\int_0^{\beta_1} N_1 Xdx = -\frac{Eh}{R}\int_0^{\beta_1} X''XY''dx.$$

Обозначим $\int_0^{\beta_1} X''Xdx = C$, тогда $N_1^* = -\dfrac{Eh}{R}Y''$,

где $N_1^* = \dfrac{\int_0^{\beta_1} N_1 Xdx}{C}$ — обобщенная продольная сила.

$$\int_0^{\beta_1} SXdx = \frac{Eh}{R}\int_0^{\beta_1} X'''XY'dx.$$

Обозначим $\int_0^{\beta_1} X'''Xdx = L$, тогда $S^* = \dfrac{Eh}{R}Y'$,

где $S^* = \dfrac{\int_0^{\beta_1} SXdx}{L}$ — обобщенная сдвигающая сила.

$$\int_0^{\beta_1} N_2 Xdx = -\frac{Eh}{R}\left(\int_0^{\beta_1} X^{1V} XYdx + \frac{h^2}{12R^2}\int_0^{\beta_1} X^2 Y^{V1}dx + \int_0^{\beta_1} X^2 Y^{1V} dx\right).$$

Обозначим $\int_0^{\beta_1} X^{1V} Xdx = T$, тогда $N_2^* = -\dfrac{Eh}{R}\left(\dfrac{T}{A}Y + \dfrac{h^2}{12R^2}Y^{V1} + Y^{1V}\right)$, где $N_2^* = \dfrac{\int_0^{\beta_1} N_2 X dx}{A}$ — обобщенная продольная сила.

$$\int_0^{\beta_1} M_2 X dx = -\frac{D}{R^2}\left(\int_0^{\beta_1} X^2 Y^{V1} dx + \int_0^{\beta_1} X^2 Y^{1V} dx\right).$$

$$M_2^* = -\frac{D}{R^2}\left(Y^{V1} + Y^{1V}\right),$$

где $M_2^* = \dfrac{\int_0^{\beta_1} M_2 X dx}{A}$ — обобщенный изгибающий момент.

$$\int_0^{\beta_1} Q_2 X dx = \frac{D}{R^3}\left(\int_0^{\beta_1} X^2 Y^{V} dx + \int_0^{\beta_1} X^2 Y^{V11} dx\right).$$

$$Q_2^* = \frac{D}{R^3}\left(Y^{V} + Y^{V11}\right),$$

где $Q_2^* = \dfrac{\int_0^{\beta_1} Q_2 X dx}{A}$ — обобщенная поперечная сила.

Коэффициенты A, B, C, L, T легко вычислить в любом математическом пакете, например, в MATLAB.

Характеристическое уравнение (10) имеет 8 корней. Далее, следуя стандартному алгоритму метода граничных элементов [2], определяют аналитические выражения фундаментальных ортонормированных функций, функции Грина и т.д. для каждого из 8 корней, которые затем используются для решения краевых задач цилиндрических оболочек при различных граничных условиях.

Литература

1.Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике / Власов В.З. – М.-Л.: Гостехиздат, 1948. – 784 с.

2. Дащенко А.Ф. Численно-аналитический метод граничных элементов / Дащенко А.Ф., Коломиец Л.В., Оробей В.Ф., Сурьянинов Н.Г. — в 2-х т. — Одесса, ВМВ, 2010.