

¹ Луцкий национальный технический университет, Украина² Одесский национальный политехнический университет, Украина

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ ИЗГИБА ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ

Рассмотрены некоторые аспекты применения численно-аналитического метода граничных элементов к расчету ортотропных пластин. Приведение двумерной задачи к одномерной выполнено вариационным методом Канторовича-Власова. Вектор состояния при изгибе ортотропной пластины содержит четыре компонента, а характеристическое уравнение имеет четыре корня, поэтому для полного решения задачи необходимо получить аналитические выражения 64-х фундаментальных функций. Вид этих функций зависит от граничных условий на продольных краях пластины. В работе получены аналитические выражения 16-и фундаментальных функций для свободного опирания продольных краев пластины и любых условий опирания поперечных краев.

Ключевые слова: метод граничных элементов, метод Канторовича-Власова, ортотропная пластина, фундаментальные функции.

Введение

Если анизотропия механических свойств подчиняется закону симметрии относительно некоторых взаимно перпендикулярных осей, то такие пластины называют *ортотропными*.

К ортотропным пластинам относят также пластины, подкрепленные часто расположенными ребрами или гофрированные. В последнем случае пластины называют конструктивно ортотропными.

Такие конструкции широко используются в машиностроении и, в частности, в аэрокосмической технике. Это, в первую очередь, элементы фюзеляжа и крыла, подкрепленные шпангоутами, лонжеронами, стрингерами, нервюрами. В последнее время широко используются стеклопластики (например, в авиадвигателях), которые также относятся к ортотропным пластинам. В связи с этим разработка методов расчета таких конструкций представляется весьма актуальной.

Для решения задачи об изгибе ортотропной пластины используются те же методы расчета, что и для расчета изотропной. Применение этих методов сопряжено с известными трудностями.

В работе предлагается использовать для расчета численно-аналитический метод граничных элементов (МГЭ). При этом снимаются ограничения, как на граничные условия, так и на характер приложения внешних нагрузок. Одновременно повышается точность вычислений, т.к. МГЭ использует фундаментальные решения дифференциальных уравнений [3].

Постановка задачи исследования

Рассмотрим изгиб пластины постоянной толщины, изготовленной из ортотропного материала.

Дифференциальное уравнение изгиба ортотропной пластины имеет вид [1]

$$D_1 \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial y^4} = q(x, y), \quad (1)$$

где жесткости определяются формулами

$$D_1 = \frac{E_x h^3}{12(1 - \mu_{xy} \mu_{yx})}; \quad D_2 = \frac{E_y h^3}{12(1 - \mu_{xy} \mu_{yx})};$$

$$D_3 = D_1 \mu_{xy} + 2D_k = D_2 \mu_{yx} + 2D_k; \quad D_k = \frac{Gh^3}{12};$$

E_x, E_y — модули упругости в направлениях осей; G — модуль сдвига; h — толщина пластины; μ_{xy}, μ_{yx} — коэффициенты Пуассона.

Кинематические параметры:

$$W(x, y); \quad \theta_x(x, y) = \frac{\partial W(x, y)}{\partial x};$$

$$\theta_y(x, y) = \frac{\partial W(x, y)}{\partial y}. \quad (2)$$

Статические параметры определяются выражениями (3).

Основное уравнение задачи имеет четвертый порядок и является дифференциальным уравнением в частных производных. Функция, являющаяся решением этого уравнения, зависит от двух переменных, т.е. имеет место двумерная задача. В то же

время алгоритм МГЭ предполагает решение одномерной задачи. Это достигается применением вариационного метода Канторовича-Власова.

$$\begin{cases} M_x = -D_1 \left[\frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} + \mu_{xy} \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} \right]; \\ M_y = -D_2 \left[\frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} + \mu_{yx} \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} \right]; \\ Q_x = -\frac{\partial}{\partial x} \left[D_1 \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} + D_3 \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} \right]; \\ Q_y = -\frac{\partial}{\partial y} \left[D_2 \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} + D_3 \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} \right]; \\ H = -D_k \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x \partial y}. \end{cases} \quad (3)$$

Разложим прогиб $W(x, y)$ в ряд:

$$W(x, y) = W_1(y)X_1(x) + W_2(y)X_2(x) + \dots + W_n(y)X_n(x). \quad (4)$$

Безразмерную систему функций $X_i(x)$ необходимо выбрать такой, чтобы она максимально точно описывала форму изогнутой поверхности пластины в направлении оси Ox . Очевидно, этому требованию удовлетворяют кривые прогиба балки, имеющие такие же условия опирания, как и пластина в направлении оси Ox . Для выбора функции поперечного распределения прогибов $X(x)$ существуют два способа — *статический* и *динамический* [3].

При использовании статического способа прогиб балки определяется статической нагрузкой (рис. 1), которая должна быть такой, чтобы последовательно чередовались симметричные и кососимметричные формы кривой прогиба. Функции $X_i(x)$ представляются в виде степенных полиномов, которые легко дифференцировать, интегрировать и вычислять без применения сложных программ.

При использовании динамического способа прогибы балки представляются формами ее собственных колебаний (рис. 2). Если в статическом способе необходимо строить функции $X_i(x)$ в зависимости от нагрузки и реакций балки, то в динамическом способе достаточно менять только значения собственных частот, что весьма удобно. Однако, применения функции $X_i(x)$ по этому способу возможно только с применением персональных компьютеров. Функции $X_1(x)$ (индекс 1 у этих функций в дальнейшем опущен) для различных условий опирания представлены в табл. 1, где $\lambda = \omega$.

Будем удерживать в (4) один член ряда, что, как показано в наших предыдущих работах (например, в [3]), оказывается вполне достаточным для получения приемлемой точности результата, т.е.

$$W(x, y) = W(y)X(x). \quad (5)$$

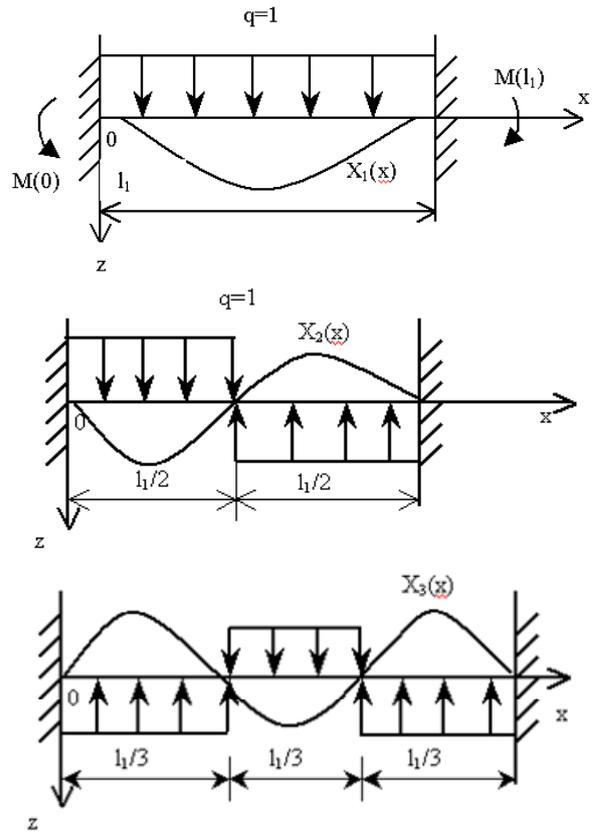


Рис. 1. Функции прогибов (статика)

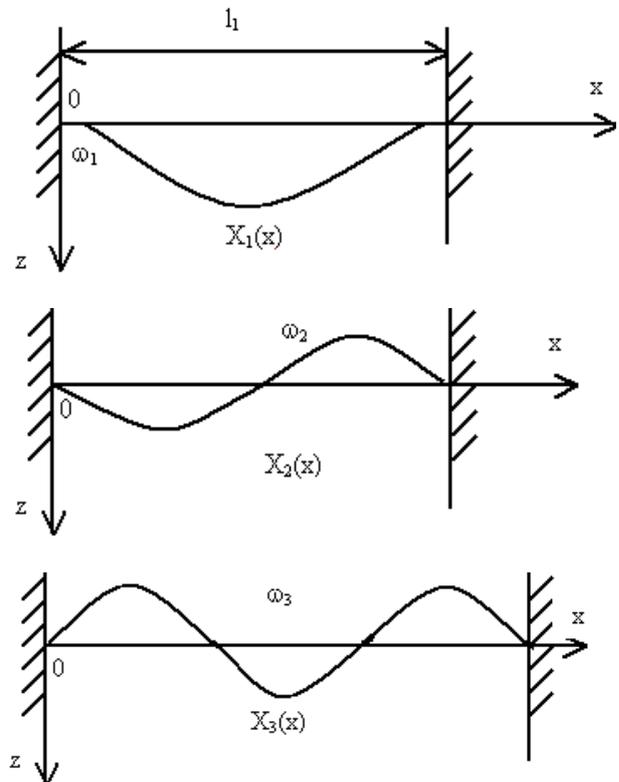
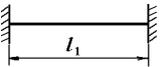
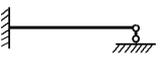


Рис. 2. Функции прогибов (динамика)

Таблица 1

Функции $X_1(x)$ для различных условий опирания

Схема балки	Форма собственных колебаний
	$X(x) = \sin(\lambda x / l_1) - \text{sh}(\lambda x / l_1) - \alpha_* [\cos(\lambda x / l_1) - \text{ch}(\lambda x / l_1)];$ $\alpha_* = \frac{\sin \lambda - \text{sh} \lambda}{\cos \lambda - \text{ch} \lambda};$
	$X(x) = \sin(\lambda x / l_1) - \text{sh}(\lambda x / l_1) - \alpha_* [\cos(\lambda x / l_1) - \text{ch}(\lambda x / l_1)];$ $\alpha_* = \frac{\sin \lambda + \text{sh} \lambda}{\cos \lambda + \text{ch} \lambda}$
	$X(x) = \sin(\lambda x / l_1) - \text{sh}(\lambda x / l_1) - \alpha_* [\cos(\lambda x / l_1) - \text{ch}(\lambda x / l_1)];$ $\alpha_* = \frac{\sin \lambda + \text{sh} \lambda}{\cos \lambda + \text{ch} \lambda}$
	$X(x) = \sin(\lambda x / l_1)$
	$X(x) = \sin(\lambda x / l_1) + \alpha_* \text{sh}(\lambda x / l_1)$ $\alpha_* = \frac{\sin \lambda}{\text{sh} \lambda}$
	$X(x) = \sin(\lambda x / l_1) + \text{sh}(\lambda x / l_1) - \alpha_* [\cos(\lambda x / l_1) + \text{ch}(\lambda x / l_1)];$ $\alpha_* = \frac{\sin \lambda - \text{sh} \lambda}{\cos \lambda - \text{ch} \lambda}$

Подставим (5) в (1):

$$D_1 X^{IV} W + 2D_3 X'' W'' + D_2 X W^{IV} = q. \quad (6)$$

Умножим обе части (6) на X и проинтегрируем в пределах $[0; l_1]$, где l_1 — размер пластины в направлении оси x :

$$D_1 W \int_0^{l_1} X^{IV} X dx + 2D_3 W'' \int_0^{l_1} X'' X dx + D_2 W^{IV} \int_0^{l_1} X^2 dx = \int_0^{l_1} q(x, y) X dx.$$

Введем обозначения:

$$D_2 \int_0^{l_1} X^2 dx = A; \quad D_3 \int_0^{l_1} X'' X dx = B; \quad D_1 \int_0^{l_1} X^{IV} X dx = C,$$

тогда

$$W^{IV} A + 2W'' B + W C = q(y),$$

где

$$q(y) = \int_0^{l_1} q(x, y) X dx.$$

Коэффициенты A, B, C можно вычислить в каком-либо математическом пакете, например, в MATLAB.

Обозначая, $B/A = -r^2$; $C/A = s^4$, получим

$$W^{IV} - 2r^2 W'' + s^4 W = \frac{1}{A} q(y). \quad (7)$$

Соответствующее однородное уравнение:

$$W^{IV} - 2r^2 W'' + s^4 W = 0. \quad (8)$$

При постоянных значениях D_1, D_2, D_3 поперечные силы Q_x, Q_y в (3) определяются так:

$$Q_x = - \left(D_1 \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + D_3 \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial x^2} \right); \quad (9)$$

$$Q_y = - \left(D_2 \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + D_3 \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} \right). \quad (10)$$

После применения процедуры метода Канторовича-Власова, внутренние силовые факторы (3) с учетом (9) и (10) принимают вид

$$\begin{cases} M_x(x, y) = -D_1(WX'' + \mu_{xy} W''X); \\ M_y(x, y) = -D_2(W''X + \mu_{yx} WX''); \\ Q_x(x, y) = -(D_1 WX''' + D_3 W''X'); \\ Q_y(x, y) = -(D_2 W'''X + D_3 W'X''); \\ H(x, y) = -D_k W'X'. \end{cases} \quad (11)$$

Дополним выражения (11) кинематическими параметрами (углами поворотов)

$$\begin{cases} \theta_x = WX'; \\ \theta_y = W'X. \end{cases} \quad (12)$$

Пластина рассматривается как обобщенный одномерный модуль [3], поэтому вектор ее состояния будет таким же, как и при изгибе балки:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} W(y) \\ \theta_y(y) \\ M_y(y) \\ Q_y(y) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где W, θ_y, M_y, Q_y — прогиб, угол поворота, изгибающий момент и поперечная сила соответственно.

Индекс "y" в дальнейшем будем опускать.

Решение уравнения (7) зависит от корней соответствующего характеристического уравнения [2]

$$K_{1-4} = \pm \sqrt{r^2 \pm \sqrt{r^4 - s^4}}. \quad (14)$$

Т.к. вектор состояния (13) содержит 4 компонента, а характеристическое уравнение имеет 4 корня, то для полного решения задачи об изгибе ортотропной пластины необходимо получить аналитические выражения 64-х фундаментальных функций. Вид этих функций определяется соотношением между r и s , которое зависит от граничных условий на продольных (вдоль оси y) краях пластины.

В соответствии с алгоритмом МГЭ [3] сначала нужно решить задачу Коши. Это решение в матричной форме имеет вид

$$\begin{matrix} W(y) \\ \theta(y) \\ M(y) \\ Q(y) \end{matrix} = \begin{matrix} A_{11} & A_{12} & -A_{13} & -A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & -A_{23} & -A_{24} \\ -A_{31} & -A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ -A_{41} & -A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} W(0) \\ \theta(0) \\ M(0) \\ Q(0) \end{matrix} + \int_0^y \begin{matrix} A_{14}(y-\xi) \\ A_{13}(y-\xi) \\ -A_{12}(y-\xi) \\ -A_{11}(y-\xi) \end{matrix} q(\xi) d\xi. \quad (15)$$

Решение (15) записано для случая, когда ось z направлена "вниз".

Положительные направления обобщенных кинематических и статических параметров одномерной модели изгиба ортотропной прямоугольной пластины совпадают с положительными направлениями соответствующих параметров изгиба прямолинейного стержня [3].

Положительное направление поперечной нагрузки показано на рис. 3.

Таким образом, решение уравнения (1) с использованием метода Канторовича-Власова будет заключаться в определении функции прогиба

$$W(x, y) = W(y)X(x), \quad (16)$$

где функция $X(x)$ задана, а функция $W(y)$ определяется из (15).

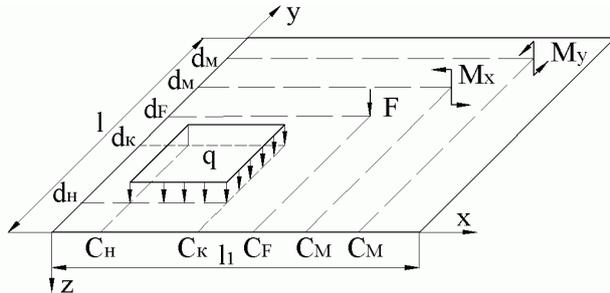


Рис. 3. Положительное направление нагрузки

Рассмотрим один из вариантов соотношения между γ и s , когда $|s| < |\gamma|$, что соответствует свободным продольным кромкам пластинки.

Корни характеристического уравнения [2]:

$$\lambda_1 = \sqrt{\gamma^2 + \sqrt{\gamma^4 - s^4}}; \quad \lambda_2 = \sqrt{\gamma^2 - \sqrt{\gamma^4 - s^4}}.$$

Прогиб запишется в виде

$$W(y) = C_1 \Phi_1 + C_2 \Phi_2 + C_3 \Phi_3 + C_4 \Phi_4, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \text{sh} \lambda_2 y; & \Phi_2 &= \text{ch} \lambda_1 y; \\ \Phi_3 &= \text{sh} \lambda_1 y; & \Phi_4 &= \text{ch} \lambda_2 y. \end{aligned} \quad (18)$$

Первые три производные функций $\Phi_1 - \Phi_4$:

$$\begin{aligned} \Phi_1' &= \lambda_2 \Phi_4; & \Phi_2' &= \lambda_1 \Phi_3; & \Phi_3' &= \lambda_1 \Phi_2; & \Phi_4' &= \lambda_2 \Phi_1; \\ \Phi_1'' &= \lambda_2^2 \Phi_1; & \Phi_2'' &= \lambda_1^2 \Phi_2; & \Phi_3'' &= \lambda_1^2 \Phi_3; & \Phi_4'' &= \lambda_2^2 \Phi_4; \end{aligned}$$

$$\Phi_1''' = \lambda_2^3 \Phi_4; \quad \Phi_2''' = \lambda_1^3 \Phi_3; \quad \Phi_3''' = \lambda_1^3 \Phi_2; \quad \Phi_4''' = \lambda_2^3 \Phi_1.$$

Угол поворота:

$$\theta(y) = W'(y) = C_1 \Phi_1' + C_2 \Phi_2' + C_3 \Phi_3' + C_4 \Phi_4'. \quad (19)$$

Изгибающий момент:

$$\begin{aligned} M(y) &= -D_2 \left[W''(y) \int_0^l X^2 dx + \mu_{yx} W(y) \int_0^l X'' X dx \right] = \\ &= - \left[A W''(y) + \mu_{yx} \frac{B D_2}{D_3} W(y) \right] = \\ &= - [A W''(y) + R W(y)], \end{aligned} \quad (20)$$

$$\text{где } R = \mu_{yx} \frac{B D_2}{D_3}.$$

Поперечная сила:

$$\begin{aligned} Q(y) &= - \left[D_2 W'''(y) \int_0^l X^2 dx + D_3 W'(y) \int_0^l X'' X dx \right] = \\ &= - [A W'''(y) + B W'(y)] \end{aligned} \quad (21)$$

Функции (18) в точке $y=0$ принимают следующие значения:

$$\Phi_1(0) = \Phi_3(0) = 0; \quad \Phi_2(0) = \Phi_4(0) = 1.$$

Постоянные $C_1 - C_4$ можно определить из соотношения

$$\bar{\Phi}_0 \bar{C}_i = \bar{P}_i, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (22)$$

В результате решения уравнения (22) получим:

$$\begin{cases} C_1 = - \frac{A \lambda_1^2 + B}{\lambda_2 A (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \theta_0 - \frac{1}{\lambda_2 A (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} Q_0; \\ C_2 = \frac{A \lambda_2^2 + R}{A (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} W_0 + \frac{1}{A (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} M_0; \\ C_3 = \frac{A \lambda_2^2 + B}{\lambda_1 A (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \theta_0 + \frac{1}{\lambda_1 A (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} Q_0; \\ C_4 = - \frac{A \lambda_1^2 + R}{A (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} W_0 - \frac{1}{A (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} M_0. \end{cases} \quad (23)$$

Через фундаментальные функции компоненты вектора состояния (13) выражаются в виде:

$$\begin{cases} W(y) = A_{11} W_0 + A_{12} \theta_0 + A_{13} M_0 + A_{14} Q_0; \\ \theta(y) = A_{21} W_0 + A_{22} \theta_0 + A_{23} M_0 + A_{24} Q_0; \\ M(y) = A_{31} W_0 + A_{32} \theta_0 + A_{33} M_0 + A_{34} Q_0; \\ Q(y) = A_{41} W_0 + A_{42} \theta_0 + A_{43} M_0 + A_{44} Q_0. \end{cases} \quad (24)$$

Сопоставляя (17), (19)-(21) с (24) и учитывая константы (23), получим 16 фундаментальных функций при свободных продольных кромках ортотропной пластины:

$$A_{11} = \frac{1}{A (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \left[(A \lambda_2^2 + R) \Phi_2 - (A \lambda_1^2 + R) \Phi_4 \right]$$

$$A_{12} = - \frac{1}{A (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \left(\frac{A \lambda_1^2 + B}{\lambda_2} \Phi_1 - \frac{A \lambda_2^2 + B}{\lambda_1} \Phi_3 \right);$$

Литература

1. Александров А.В. Основы теории упругости и пластичности / А.В. Александров, В.Д. Потанов — М.: Высшая школа, 1990. — 398 с.

2. Бермант А.Ф. Курс математического анализа / А.Ф. Бермант — М.: Гостехиздат, 1953. — 358 с.

3. Численно-аналитический метод граничных элементов / А.Ф. Даценко, Л.В. Коломиец, В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов — в 2-х т. — Одесса, ВМВ, 2010.

$$A_{13} = \frac{1}{A(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}(\Phi_2 - \Phi_4);$$

$$A_{14} = -\frac{1}{A(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}\left(\frac{\Phi_1}{\lambda_2} - \frac{\Phi_3}{\lambda_1}\right);$$

$$A_{21} = \frac{1}{A(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}\left[\lambda_1(A\lambda_2^2 + R)\Phi_3 - \lambda_2(A\lambda_1^2 + R)\Phi_1\right];$$

$$A_{22} = \frac{1}{A(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}\left[(A\lambda_2^2 + B)\Phi_2 - (A\lambda_1^2 + B)\Phi_4\right];$$

$$A_{23} = \frac{\lambda_1\Phi_3 - \lambda_2\Phi_1}{A(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)};$$

$$A_{24} = \frac{\Phi_2 - \Phi_4}{A(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)};$$

$$A_{31} = \frac{(A\lambda_1^2 + R)(A\lambda_2^2 + R)}{A(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}(\Phi_4 - \Phi_2);$$

$$A_{32} = \frac{1}{A(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}\left[\frac{(A\lambda_1^2 + B)(A\lambda_2^2 + R)}{\lambda_2}\Phi_1 - \frac{(A\lambda_1^2 + R)(A\lambda_2^2 + B)}{\lambda_1}\Phi_3\right];$$

$$A_{33} = \frac{1}{A(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}\left[(A\lambda_2^2 + R)\Phi_4 - (A\lambda_1^2 + R)\Phi_2\right];$$

$$A_{34} = \frac{1}{A(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}\left(\frac{A\lambda_2^2 + R}{\lambda_2}\Phi_1 - \frac{A\lambda_1^2 + R}{\lambda_1}\Phi_3\right);$$

$$A_{41} = \frac{1}{A(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}\left[\lambda_2(A\lambda_2^2 + B)(A\lambda_1^2 + R)\Phi_1 - \lambda_1(A\lambda_2^2 + R)(A\lambda_1^2 + B)\Phi_3\right];$$

$$A_{42} = \frac{(A\lambda_1^2 + B)(A\lambda_2^2 + B)}{A(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}(\Phi_4 - \Phi_2);$$

$$A_{43} = \frac{1}{A(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}\left[\lambda_2(A\lambda_2^2 + B)\Phi_1 - \lambda_1(A\lambda_1^2 + B)\Phi_3\right];$$

$$A_{44} = \frac{1}{A(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}\left[(A\lambda_2^2 + B)\Phi_4 - (A\lambda_1^2 + B)\Phi_2\right];$$

Заключение

Аналитические выражения фундаментальных ортонормированных функций, аналогичные полученным в работе, совместно с аналитическими выражениями функции Грина и вектора нагрузок для каждого из 4 корней используются для решения краевых задач изгиба ортотропных пластин при различных граничных условиях. Алгоритм решения легко программируется в среде MATLAB, и позволяет получить параметры напряженно-деформированного состояния в любой точке ортотропной пластины.

Рецензент: д.т.н., проф., зав. каф. теоретической и прикладной механики В.А. Гришин, Одесский национальный морской университет, Одесса

ВИЗНАЧЕННЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ В ЗАДАЧІ ЗГИНУ ОРТОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ

О.В. Максимович, В.Ф. Оробей, М.Г. Сур'янінов

Розглянуто деякі аспекти застосування чисельно-аналітичного методу граничних елементів до розрахунку ортотропних пластин. Приведення двовимірної задачі до одновимірної виконано варіаційним методом Канторовича-Власова. Вектор стану при вигині ортотропної пластини містить чотири компоненти, а характеристичне рівняння має чотири кореня, тому для повного розв'язку задачі необхідно отримати аналітичні вирази 64-х фундаментальних функцій. Вигляд цих функцій залежить від граничних умов на поздовжніх крайках пластини. У роботі отримано аналітичні вирази 16-і фундаментальних функцій для вільного обпирання поздовжніх країв пластини і будь-яких умов обпирання поперечних країв.

Ключові слова: метод граничних елементів, метод Канторовича-Власова, ортотропна пластина, фундаментальні функції.

DEFINITION OF BASIC FUNCTIONS IN THE PROBLEM OF BENDING ORTHOTROPIC PLATE

O.V. Maksimovich, V.F. Orobey, M.G. Surianinov

Some aspects of numerical-analytical boundary element method to the calculation of orthotropic plates. Bringing the two-dimensional problem to the one carried out variational method of Kantorovich-Vlasov. State vector of the bending of an orthotropic plate contains four components, and the characteristic equation has four roots, so for a complete solution is necessary to obtain analytical expressions of 64 basic functions. The form of these functions depends on the boundary conditions at longitudinal edges of the plate. In this paper, analytical expressions 16 and the fundamental functions for the free support of the longitudinal edges of the plate and any support conditions of the transverse edges.

Key words: boundary element method, the method of Kantorovich-Vlasov, orthotropic plate, the fundamental functions.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ ИЗГИБА ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ

О.В. Максимович, В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов

Рассмотрены некоторые аспекты применения численно-аналитического метода граничных элементов к расчету ортотропных пластин. Приведение двумерной задачи к одномерной выполнено вариационным методом Канторовича-Власова. Вектор состояния при изгибе ортотропной пластини содержит четыре компонента, а характеристическое уравнение имеет четыре корня, поэтому для полного решения задачи необходимо получить аналитические выражения 64-х фундаментальных функций. Вид этих функций зависит от граничных условий на продольных краях пластини. В работе получены аналитические выражения 16-и фундаментальных функций для свободного опирания продольных краев пластини и любых условий опирания поперечных краев.

Ключевые слова: метод граничных элементов, метод Канторовича-Власова, ортотропная пластина, фундаментальные функции.

Максимович Олеся Владимировна – д-р. техн. наук, профессор кафедры «Компьютерная инженерия», Луцкий национальный технический университет, Луцк, Украина.

Оробей Виктор Федорович – д-р. техн. наук, профессор кафедры «Автомобильный транспорт», Одесский национальный политехнический университет, Одесса, Украина.

Сурьянинов Николай Георгиевич – д-р. техн. наук, профессор кафедры «Динамика, прочность машин и сопротивление материалов», Одесский национальный политехнический университет, Одесса, Украина, e-mail: snng@mbei.opu.ua.