УДК 624.075:04:512.83

О СИСТЕМЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Сурьянинов Н.Г., канд. техн. наук, доцент кафедры «Динамика, прочность машин и сопротивление материалов» Одесского национального политехнического университета.

Аннотация. *Рассмотрено решение бигармонического уравнения плоской задачи теории упругости методом граничных элементов. Переход от двумерной задачи к одномерной осуществлен на базе вариационного метода Канторовича-Власова. Для случая свободных краев продольных кромок пластины получены выражения фундаментальных ортонормированных функций метода граничных элеметов.*

The summary. *The decision of the biharmonic equation of a flat problem of the theory of elasticity is considered by a method of boundary elements. Transition from a bidimentional problem to one-dimensional is carried out on the basis of Kantorovich – Vlasov variational method. For a case of free edges of longitudinal edges of a plate expressions fundamental ortnormalized functions of a method boundary elements are received.*

Введение

Многие конструкции и их элементы работают в условиях, соответствующих плоской задаче теории упругости. С математической точки зрения это означает необходимость решать краевую задачу для бигармонического уравнения в частных производных. Как известно, краевую задачу проще решать, когда неизвестные функции являются функциями одной переменной и речь идет об обыкновенных дифференциальных уравнениях. Переход от двумерной задачи к одномерной можно осуществить с помощью тригонометрических рядов. Однако такой подход эффективен только при шарнирном опирании пластины на двух противоположных кромках.

В общем случае весьма эффективен вариационный метод Власова-Канторовича. На базе этого метода рассмотрим решение плоской задачи теории упругости методом граничных элементов [1].

Построение системы ортонормированных фундаментальных функций

Бигармоническое уравнение плоской задачи теории упругости для прямоугольных пластин имеет такую же символьную форму записи, как и уравнение изгиба:

$$\nabla^2\nabla^2\varphi(x,\ y) = q(x,\ y)\,. \tag{1}$$

Если искать функцию напряжений Д. Эйри в виде бесконечного ряда

$$\varphi = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) X_m(x)\,, \tag{2}$$

то после ряда преобразований при удержании одного члена ряда приходим к уравнению

$$Y^{IV} - 2r^2 Y^{II} + S^4 Y = q(y)\,. \tag{3}$$

Характеристическое уравнение для соответствующего (3) однородного уравнения имеет вид

$$K^4 - 2r^2 K^2 + S^4 = 0, \tag{4}$$

где $$K_{1-4} = \pm\sqrt{r^2 \pm \sqrt{r^4 - S^4}}\ . \tag{5}$$

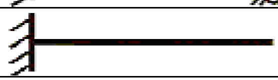
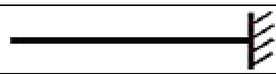
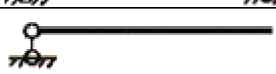
Из (5) следует, что вид фундаментальных функций определяется соотношением между r и S, которое, в свою очередь, зависит от граничных условий на продольных кромках.

Вектор состояния плоской задачи

$$\vec{P} = \begin{Vmatrix} N^* \\ S^* \\ EV^* \\ EU^* \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -r^2 Y \\ -t^2 Y' \\ \dfrac{1}{r^2}\left[Y''' - (2+\mu) r^2 Y'\right] \\ \dfrac{1}{r^2}\left(-Y'' - \mu r^2 Y\right) \end{Vmatrix}. \tag{6}$$

Используя аналогию Колосова-Мусхелишвили, можно установить соответствие между граничными условиями теории изгиба пластин и граничными условиями плоской задачи теории упругости (табл.1).

Таблица 1

№	Изгиб пластин	Плоская задача
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Рассмотрим случай свободных краев продольных кромок ($S > r$). Корни уравнения (4) будут комплексными:

$$K_{1-4} = \pm\alpha \pm \beta_i;$$

где $\quad \alpha = \sqrt{\dfrac{S^2 + r^2}{2}}; \qquad \beta = \sqrt{\dfrac{s^2 - r^2}{2}}.$

Функция Y имеет вид

$$Y = C_1\Phi_1 + C_2\Phi_2 + C_3\Phi_3 + C_4\Phi_4, \tag{7}$$

где Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 – гиперболо-тригонометрические функции

$$\Phi_1 = ch\alpha y \sin\beta y;$$

$$\Phi_2 = ch\alpha y \cos\beta y;$$

$$\Phi_3 = sh\alpha y \cos\beta y;$$

$$\Phi_4 = sh\alpha y \sin\beta y.$$

Нетрудно убедиться, что $\Phi_2(0) = 1$, $\Phi_1(0) = \Phi_3(0) = \Phi_4(0) = 0$.

Постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 определим из матричного соотношения

$$\overline{\Phi_0}\,\overrightarrow{C_i} = \overrightarrow{P_0}, \quad i = 1,2,3,4,$$

$$\overline{\Phi_0} = \begin{bmatrix} +r^2\Phi_1(0); & +r^2\Phi_2(0); & +r^2\Phi_3(0); & +r^2\Phi_4(0); \\ +t^2\Phi_0^{'}(0); & +t^2\Phi_2^{'}(0); & +t^2\Phi_3^{'}(0); & +t^2\Phi_4^{'}(0); \\ \dfrac{1}{r^2}\Phi_1^{'''}(0) - (2+\mu)\Phi_1^{'}(0); & \dfrac{1}{r^2}\Phi_2^{'''}(0) - (2+\mu)\Phi_2^{'}(0); & \dfrac{1}{r^2}\Phi_3^{'''}(0) - (2+\mu)\Phi_3^{'}(0); & \dfrac{1}{r^2}\Phi_4^{'''}(0) - (2+\mu)\Phi_4^{'}(0); \\ \dfrac{1}{r^2}\Phi_1^{''}(0) + \mu\Phi_1; & \dfrac{1}{r^2}\Phi_2^{''} + \mu\Phi_2; & \dfrac{1}{r^2}\Phi_3^{'''} + \mu\Phi_3 & \dfrac{1}{r^2}\Phi_4^{'''} + \mu\Phi_4 \end{bmatrix}.$$

$$\overrightarrow{C_i} = \begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{vmatrix}; \qquad \overrightarrow{P_o} = \begin{vmatrix} -N_o \\ -S_o \\ EV_o \\ -EU_o \end{vmatrix};$$

Вектор-столбец $\overline{P_0}$ содержит обобщенные кинематические и статические факторы.

Уравнение для определения постоянных C_1, C_2, C_3, C_4 принимает вид

$$\begin{vmatrix} 0 & r^2 & 0 & 0 \\ t^2\beta & 0 & t^2\alpha & 0 \\ \dfrac{S^2 - \mu r^2}{r^2}\beta & 0 & -\dfrac{S^2 + \mu r^2}{r^2}\alpha & 0 \\ 0 & 1+\mu & 0 & \dfrac{2\alpha\beta}{r^2} \end{vmatrix} \begin{Vmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} -N_o \\ -S_o \\ EV_o \\ -EU_o \end{vmatrix}. \tag{8}$$

В результате решения уравнения (8) получим

$$\left.\begin{aligned}
&C_1 = \frac{Er^2}{2S^2\beta}V_o - \frac{S^2+\mu r^2}{2S^2t^2\beta}S_o\\
&C_2 = -N_o / r^2\\
&C_3 = -\frac{Er^2}{2S^2\alpha}V_o - \frac{S^2-\mu r^2}{2S^2t^2\alpha}S_o\\
&C_4 = \frac{(1+\mu)}{2\alpha\beta}N_o - \frac{Er^2}{2\alpha\beta}U_o
\end{aligned}\right\}. \tag{9}$$

Вычислив первые три производные (7) с учетом (9) после подстановки в вектор состояния плоской задачи (6), найдем все фундаментальные ортонормированные функции задачи:

$$\left.\begin{aligned}
&A_{11} = \Phi_2 - \frac{r^2(1+\mu)}{2\alpha\beta}\Phi_4;\\
&A_{12} = \frac{r^2(S^2+\mu r^2)}{2S^2t^2\beta}\Phi_1 + \frac{r^2(S^2-\mu r^2)}{2S^2t^2\alpha}\Phi_3;\\
&A_{13} = \frac{Er^4}{2S^2\alpha}\Phi_3 - \frac{Er^4}{2S^2\beta}\Phi_1 = \frac{Er^4}{2\alpha\beta S^2}\left[-\alpha\Phi_1 + \beta\Phi_3\right]\\
&A_{14} = \frac{Er^4}{2\alpha\beta}\Phi_4
\end{aligned}\right\};$$

$$\left.\begin{aligned}
&A_{21} = \frac{t^2(S^2-\mu r^2)}{2r^2\alpha}\Phi_3 - \frac{t^2(S^2+\mu r^2)}{2r^2\beta}\Phi_1;\\
&A_{22} = \frac{r^2(1+\mu)}{2\alpha\beta}\Phi_4 + \Phi_2;\\
&A_{23} = -\frac{Er^2t^2}{2\alpha\beta}\Phi_4;\\
&A_{24} = \frac{Er^2t^2}{2\beta}\Phi_1 - \frac{Er^2t^2}{2\alpha}\Phi_3
\end{aligned}\right\};$$

$$\left.\begin{aligned}
&A_{31} = \frac{S^4-\mu^2r^4-2r^2S^2(1+\mu)}{2\beta r^4}\Phi_1 + \frac{S^4-\mu^2r^4+2r^2S^2(1+\mu)}{2\alpha r^4}\Phi_3;\\
&A_{32} = \frac{S^4+\mu(2+\mu)r^4}{2\alpha\beta t^2r^2}\Phi^4;\\
&A_{33} = E\Phi_2 - \frac{(1+\mu)Er^2}{2\alpha\beta}\Phi_4;\\
&A_{34} = \frac{E(S^2+\mu r^2)}{2\beta}\Phi_1 - \frac{E\left[S^2+(4+\mu)r^2\right]}{2\alpha}\Phi_3
\end{aligned}\right\};$$

$$A_{41} = \frac{S^4 + (1+\mu)\mu r^4 + \mu^4}{2\alpha\beta r^4}\Phi_4;$$

$$A_{42} = -\left[\frac{S^4 + (2+\mu)\mu r^4}{2S^2 t^2 \beta r^2}\Phi_1 + \frac{S^4 + (2+\mu)\mu r^4}{2S^2 t^2 \alpha r^2}\Phi_3\right];$$

$$A_{43} = \frac{E\left(S^2 + \mu r^2\right)}{2S^2\beta}\Phi_1 + \frac{E\left(S^2 - \mu r^2\right)}{2S^2\alpha}\Phi_3;$$

$$A_{44} = -\left[E\Phi_2 + \frac{Er^2(1-\mu)}{2\alpha\beta}\Phi_4\right]$$

Вычисленные таким образом фундаментальные ортонормированные функции позволяют теперь, следуя обычному алгоритму решения методом граничных элементов [1], определить все параметры вектора состояния плоской задачи теории упругости.

Литература

1. Баженов В.А., Дащенко А.Ф., Коломиец Л.В., Оробей В.Ф. Строительная механика / Применение МГЭ. — Одесса: Астропринт, 2001. — 288 с.