

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧЕ О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ КРУГОВОЙ АРКИ

Рассмотрим свободные колебания круговой арки постоянного поперечного сечения, очерченной по дуге окружности радиуса R (рис.1).

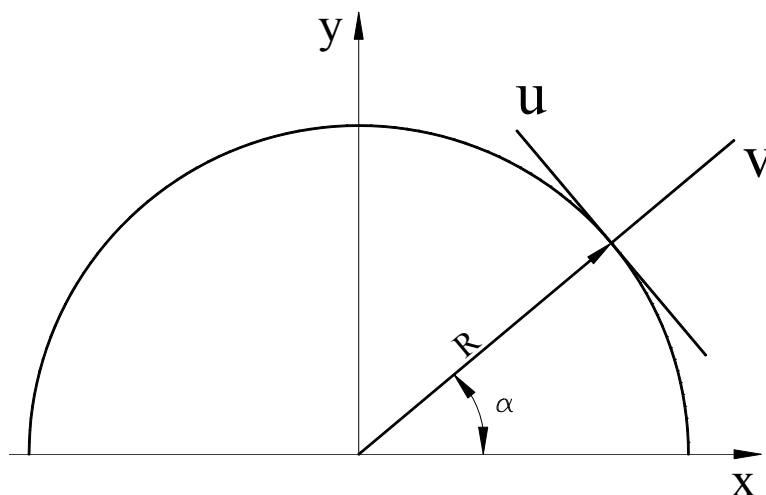


Рис.1. Геометрическая схема круговой арки

Уравнения равновесия имеют вид [1]

$$mR \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial Q}{\partial \alpha} + N = 0 \quad (1)$$

$$mR \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + Q - \frac{\partial N}{\partial \alpha} = 0 \quad (2)$$

где U – окружная компонента перемещения, V – радиальная, α – угловая координата сечения.

Продифференцируем (1) по α и сложим с (2):

$$mR \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(U + \frac{\partial V}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial^2 Q}{\partial \alpha^2} + Q = 0 \quad (3)$$

Учитывая, что:

$$Q = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial M}{\partial \alpha}; \quad M = -EI\kappa = -\frac{EI}{R^2} \left(\frac{\partial U}{\partial \alpha} - \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} \right),$$

приводим (3) к виду

$$mR^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(U + \frac{\partial V}{\partial \alpha} \right) - \frac{EI}{R^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial \alpha^3} - \frac{\partial^4 V}{\partial \alpha^4} + \frac{\partial U}{\partial \alpha} - \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} \right) = 0. \quad (4)$$

Из условия нерастяжимости оси арки следует

$$V = -\frac{\partial U}{\partial \alpha} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \alpha} = -\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2},$$

тогда (4) запишется так:

$$mR^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(U - \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} \right) - \frac{EI}{R^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial \alpha^3} + \frac{\partial^5 U}{\partial \alpha^5} + \frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{\partial^3 U}{\partial \alpha^3} \right)$$

или

$$\frac{\partial^6 U}{\partial \alpha^6} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial \alpha^4} + \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} + \frac{mR^4}{EI} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} - U \right) = 0 \quad (5)$$

Будем искать решение (5) в виде

$$V = V(\alpha) \cos \omega t; \quad U = U(\alpha) \sin \omega t, \quad V = -\frac{dU}{d\alpha},$$

тогда

$$\frac{d^6 U}{d\alpha^6} + 2 \frac{d^4 U}{d\alpha^4} + \frac{d^2 U}{d\alpha^2} - \frac{mR^4 \omega^2}{EI} \left(\frac{d^2 U}{d\alpha^2} - U \right) = 0$$

или

$$U^{VI} + 2U^{IV} + U^{II} - \frac{mR^4 \omega^2}{EI} (U^{II} - U) = 0. \quad (6)$$

Представим вектор состояния для арки в виде

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} EIV(\alpha) \\ EI\varphi(\alpha) \\ M(\alpha) \\ Q(\alpha) \\ EAU(\alpha) \\ N(\alpha) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Первые четыре компонента вектора (7) определяют изгиб арки, а два последних – растяжение-сжатие.

Перепишем (6), сгруппировав коэффициенты при второй производной функции U:

$$U^{VI} + 2U^{IV} + U^{II} \left(1 - \frac{mR^4 \omega^2}{EI} \right) + \frac{mR^4 \omega^2}{EI} U = 0. \quad (8)$$

Соответствующее характеристическое уравнение:

$$K^6 + 2K^4 + \left(1 - \frac{mR^4 \omega^2}{EI} \right) K^2 + \frac{mR^4 \omega^2}{EI} = 0$$

или:

$$t^3 + 2t^2 + Zt + (1 - Z) = 0, \quad (9)$$

где: $t = K^2$, $Z = 1 - \frac{mR^4 \omega^2}{EI}$.

Решение уравнения (8) будет зависеть от корней характеристического уравнения (9). Рассмотрим все возможные здесь случаи. С математической точки зрения при решении уравнения (9) возможны десять случаев; объединим их в две группы:

I. Один корень уравнения (9) – $t_1 < 0$, а для двух других возможны варианты:

(1) два комплексно-сопряженных корня:

$$t_{2,3} = \alpha \pm i\beta;$$

(2) два положительных различных:

$$t_2 > 0; t_3 > 0;$$

(3) два отрицательных различных:

$$t_2 < 0; t_3 < 0;$$

(4) один положительный, другой – отрицательный:

$$t_2 > 0; t_3 < 0;$$

(5) два положительных равных;

$$t_2 = t_3 > 0;$$

(6) два отрицательных равных:

$$t_2 = t_3 < 0.$$

II. Один корень уравнения (9) – $t_1 > 0$; возможные варианты для двух других корней:

(7) два комплексно-сопряженных:

$$t_{2,3} = \alpha \pm i\beta;$$

(8) два положительных различных:

$$t_2 > 0; t_3 > 0;$$

(9) два положительных равных:

$$t_2 = t_3 > 0;$$

(10) два отрицательных равных:

$$t_2 = t_3 < 0.$$

Каждый корень характеристического уравнения порождает одно частное решение линейного дифференциального уравнения, а для построения фундаментальной системы решений нужно особо рассмотреть случаи комплексных корней и случаи кратных корней характеристического уравнения, при этом:

- каждому простому (однократному) действительному корню K в общем решении соответствует слагаемое вида $Ce^{k\alpha} = C(shk\alpha + chk\alpha)$;

- каждой паре простых комплексно сопряженных корней $k_1 = \gamma + \delta i, k_2 = \gamma - \delta i$ в общем решении соответствует слагаемое вида $e^{\gamma\alpha} (C_1 \cos \delta\alpha + C_2 \sin \delta\alpha)$;
- каждому r -кратному действительному корню K в общем решении соответствует слагаемое вида $e^{K\alpha} (C_1 + C_2\alpha + \dots + C_r\alpha^{r-1})$.

Запишем фундаментальную систему решений для варианта (1) корней характеристического уравнения ($t_1 < 0; t_{2,3} = \alpha \pm i\beta$);

$$K_{1,2} = \pm i\sqrt{t_1}; \quad K_{3,6} = \pm \gamma \pm i\delta$$

Общий вид решения:

$$U(\alpha) = C_1 \cos \sqrt{t_1}\alpha + C_2 \sin \sqrt{t_1}\alpha + C_3\Phi_1(\alpha) + C_4\Phi_2(\alpha) + C_5\Phi_3(\alpha) + C_6\Phi_4(\alpha). \quad (10)$$

При этом функции $\Phi_1 \div \Phi_4$ принимают значения:

$$\begin{cases} \Phi_1 = ch\gamma\alpha \cdot \sin \delta\alpha; \\ \Phi_2 = ch\gamma\alpha \cdot \cos \delta\alpha; \\ \Phi_3 = sh\gamma\alpha \cdot \cos \delta\alpha; \\ \Phi_4 = sh\gamma\alpha \cdot \sin \delta\alpha. \end{cases} \quad (11)$$

Производные функций U и V , входящие в вектор состояния (7), с учётом (10) и (11) запишутся в виде

$$U(\alpha) = C_1 \cos \sqrt{t_1}\alpha + C_2 \sin \sqrt{t_1}\alpha + C_3 ch\gamma\alpha \cdot \sin \delta\alpha + C_4 ch\gamma\alpha \cdot \cos \delta\alpha + C_5 sh\gamma\alpha \cdot \cos \delta\alpha + C_6 sh\gamma\alpha \cdot \sin \delta\alpha; \quad (12)$$

$$V(\alpha) = U' = -C_1\sqrt{t_1} \sin \sqrt{t_1}\alpha + C_2\sqrt{t_1} \cos \sqrt{t_1}\alpha + (\gamma\Phi_4 + \delta\Phi_2)C_3 + C_4(\gamma\Phi_3 - \delta\Phi_1) + C_5(\gamma\Phi_2 - \delta\Phi_4) + C_6(\gamma\Phi_1 + \delta\Phi_3); \quad (13)$$

$$V'(\alpha) = U'' = -C_1 t_1 \cos \sqrt{t_1}\alpha - C_2 t_1 \sin \sqrt{t_1}\alpha + C_3 [(\gamma^2 - \delta^2)\Phi_1 + 2\gamma\delta\Phi_3] + C_4 [(\gamma^2 - \delta^2)\Phi_2 - 2\gamma\delta\Phi_4] + C_5 [(\gamma^2 - \delta^2)\Phi_3 - 2\gamma\delta\Phi_1] + C_6 [(\gamma^2 - \delta^2)\Phi_4 + 2\gamma\delta\Phi_2]; \quad (14)$$

$$V''(\alpha) = U''' = C_1 t_1 \sqrt{t_1} \sin \sqrt{t_1}\alpha - C_2 t_1 \sqrt{t_1} \cos \sqrt{t_1}\alpha + C_3 [\gamma(\gamma^2 - 3\delta^2)\Phi_4 - \delta(\delta^2 - 3\gamma^2)\Phi_2] + C_4 [\gamma(\gamma^2 - 3\delta^2)\Phi_3 + \delta(\delta^2 - 3\gamma^2)\Phi_1] + C_5 [\gamma(\gamma^2 - 3\delta^2)\Phi_2 + \delta(\delta^2 - 3\gamma^2)\Phi_4] + C_6 [\gamma(\gamma^2 - 3\delta^2)\Phi_1 - \delta(\delta^2 - 3\gamma^2)\Phi_3]; \quad (15)$$

$$V'''(\alpha) = U^{IV} = C_1 t_1^2 \cos \sqrt{t_1}\alpha + C_2 t_1^2 \sin \sqrt{t_1}\alpha + C_3 [(\gamma^4 - 6\gamma^2\delta^2 + \delta^4)\Phi_1 + 4\gamma\delta(\gamma^2 - \delta^2)\Phi_3] + C_4 [(\gamma^4 - 6\gamma^2\delta^2 + \delta^4)\Phi_2 - 4\gamma\delta(\gamma^2 - \delta^2)\Phi_4] + C_5 [(\gamma^4 - 6\gamma^2\delta^2 + \delta^4)\Phi_3 - 4\delta\gamma(\gamma^2 - \delta^2)\Phi_1] + C_6 [(\gamma^4 - 6\gamma^2\delta^2 + \delta^4)\Phi_4 + 4\gamma\delta(\gamma^2 - \delta^2)\Phi_2]. \quad (16)$$

В качестве выражения для N используем уравнение равновесия

$$N = -\frac{dQ}{d\alpha} - q_y(\alpha)R.$$

Как правило, $q_y(\alpha) = 0$ при $\alpha = 0$ (исключение составляет случай, когда в сечении $\alpha = 0$ приложена сосредоточенная сила, что на практике встречается крайне редко), поэтому будем исходить из соотношения

$$N = -\frac{dQ}{d\alpha} = -EIV^{IV}.$$

$$\begin{aligned} V^{IV} = U^V = & -C_1 t_1^2 \sqrt{t_1} \sin \sqrt{t_1} \alpha + C_2 t_1^2 \sqrt{t_1} \cos \sqrt{t_1} \alpha + \\ & + C_3 \left[\gamma(\gamma^4 - 10\gamma^2 \delta^2 + 5\delta^4) \Phi_4 + \delta(5\gamma^4 - 10\gamma^2 \delta^2 + \delta^4) \Phi_2 \right] + \\ & + C_4 \left[\gamma(\gamma^4 - 10\gamma^2 \delta^2 + 5\delta^4) \Phi_3 - \delta(5\gamma^4 - 10\gamma^2 \delta^2 + \delta^4) \Phi_1 \right] + \\ & + C_5 \left[\gamma(\gamma^4 - 10\gamma^2 \delta^2 + 5\delta^4) \Phi_2 - \delta(5\gamma^4 - 10\gamma^2 \delta^2 + \delta^4) \Phi_4 \right] + \\ & + C_6 \left[\gamma(\gamma^4 - 10\gamma^2 \delta^2 + 5\delta^4) \Phi_1 + \delta(5\gamma^4 - 10\gamma^2 \delta^2 + \delta^4) \Phi_3 \right] \end{aligned} \quad (17)$$

Постоянные C_1, C_2, \dots, C_6 определим из матричного соотношения:

$$\bar{\Phi}_0 \bar{C}_i = \bar{P}_0, \quad i=1, 2, \dots, 6.$$

Кинематические и статические факторы вектора состояния (7) определяются в виде

$$\begin{cases} V = U'; \\ N = -EIV^{IV}; \\ \varphi = V'; \\ M = EIV''; \\ Q = EIV'''. \end{cases} \quad (18)$$

Подставляя $\alpha = 0$ в (12) - (17) и учитывая (18), получим:

0	$\sqrt{t_1}$	δ	0	γ	0	C_1	EIV_0
$-t_1$	0	0	$\gamma^2 - \delta^2$	0	$2\gamma\delta$	C_2	$EI\varphi_0$
0	$-t_1\sqrt{t_1}$	$-\delta(\delta^2 - 3\gamma^2)$	0	$\gamma(\gamma^2 - 3\delta^2)$	0	C_3	M_0
t_1^2	0	0	$\gamma^4 - 6\gamma^2\delta^2 + \delta^4$	0	$4\gamma\delta(\gamma^2 - \delta^2)$	C_4	Q_0
1	0	0	1	0	0	C_5	EAU_0
0	$-\sqrt{t_1}t_1^2$	$-\delta(5\gamma^4 - 10\gamma^2\delta^2 + \delta^4)$	0	$-\gamma(\gamma^4 - 10\gamma^2\delta^2 + \delta^4)$	0	C_6	N_0

(19)

Из (19) следует, что система шести алгебраических уравнений для определения постоянных C_1, C_2, \dots, C_6 распадается на две независимых системы по три уравнения в каждой:

$$\begin{cases} \sqrt{t_1}C_2 + \delta C_3 + \gamma C_5 = V_0; \\ -t_1\sqrt{t_1}C_2 - \delta(\delta^2 - 3\gamma^2)C_3 + \gamma(\gamma^2 - 3\delta^2)C_5 = M_0; \\ -t_1^2\sqrt{t_1}C_2 - \delta(\gamma^4 - 10\gamma^2\delta^2 + \delta^4)C_3 - \gamma(\gamma^4 - 10\gamma^2\delta^2 + \delta^4)C_5 = N_0. \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} -t_1C_1 + (\gamma^2 - \delta^2)C_4 + 2\gamma\delta C_6 = \varphi_0; \\ t^2C_1 + (\gamma^4 - 6\gamma^2\delta^2 + \delta^4)C_4 + 4\gamma\delta(\gamma^2 - \delta^2)C_6 = Q_0; \\ C_1 + C_4 = U_0. \end{cases} \quad (21)$$

В результате решения (20) и (21) находим

$$\begin{cases} C_1 = -\frac{2(\gamma^2 - \delta^2)}{b}\varphi_0 + \frac{(\gamma^2 + \delta^2)^2}{b}U_0 + \frac{1}{b}Q_0; \\ C_2 = -\frac{a}{\sqrt{t_1}(t_1^2 - a)}V_0 - \frac{1}{\sqrt{t_1}(t_1^2 - a)}N_0; \\ C_3 = \frac{t_1[a + t_1(\gamma^2 - 3\delta^2)]}{2\delta(\gamma^2 + \delta^2)(t_1^2 - a)}V_0 + \frac{1}{2\delta(\gamma^2 + \delta^2)}M_0 + \frac{3\delta^2 - \gamma^2 - t_1}{2\delta(\gamma^2 + \delta^2)(t_1^2 - a)}N_0; \\ C_4 = \frac{2(\gamma^2 - \delta^2)}{b}\varphi_0 + \frac{b - (\gamma^2 + \delta^2)^2}{b}U_0 - \frac{1}{b}Q_0; \\ C_5 = \frac{t_1[a - t_1(\delta^2 - 3\gamma^2)]}{2\gamma(\gamma^2 + \delta^2)(t_1^2 - a)}V_0 - \frac{1}{2\gamma(\gamma^2 + \delta^2)}M_0 + \frac{t_1 + 3\gamma^2 - \delta^2}{2\gamma(\gamma^2 + \delta^2)(t_1^2 - a)}N_0; \\ C_6 = \frac{t_1^2 - 4\gamma^2\delta^2 - a}{2\gamma\delta b}\varphi_0 - \frac{t_1[a + 4\gamma^2\delta^2 + t_1(\gamma^2 - \delta^2)]}{2\gamma\delta b}U_0 + \frac{t_1 + \gamma^2 - \delta^2}{2\gamma\delta b}Q_0, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} a &= \gamma^4 - 10\gamma^2\delta^2 + \delta^4; \\ b &= (\gamma^2 + \delta^2)^2 + t_1[t_1 + 2(\gamma^2 - \delta^2)] \end{aligned}$$

После вычисления постоянных C_1, C_2, \dots, C_6 можно вычислить все фундаментальные функции задачи для рассматриваемого варианта корней характеристического уравнения (9). Например, для перемещения $V(\alpha)$ имеем:

$$\begin{aligned} V(\alpha) &= U' = A_{11}V_0 + A_{12}\varphi_0 + A_{13}M_0 + A_{14}Q_0 + A_{15}U_0 + A_{16}N_0; \\ U' &= -C_1\sqrt{t_1}\sin\sqrt{t_1}\alpha + C_2\sqrt{t_1}\cos\sqrt{t_1}\alpha + C_3(\gamma\Phi_4 + \delta\Phi_2) + C_4(\gamma\Phi_3 - \delta\Phi_1) + C_5(\gamma\Phi_2 - \delta\Phi_4) + \\ &+ C_6(\gamma\Phi_1 + \delta\Phi_3). \end{aligned}$$

Подставляя значения констант, после преобразований получим шесть фундаментальных функций:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{11} = \frac{-2a\gamma\delta \cos\sqrt{t_1}\alpha + 2t_1\gamma\delta\Phi_2 - t_1[a + t_1(\gamma^2 - \delta^2)]\Phi_4}{2\gamma\delta(t_1^2 - a)}; \\ A_{12} = \frac{4\gamma\delta(\gamma^2 - \delta^2)\sqrt{t_1} \sin\sqrt{t_1}\alpha + \gamma(c + 4\delta^4)\Phi_1 + \delta(c + 4\gamma^4)\Phi_3}{2\gamma\delta b}; \\ A_{13} = \frac{\Phi_4}{2\gamma\delta}; \\ A_{14} = \frac{-2\gamma\delta\sqrt{t_1} \sin\sqrt{t_1}\alpha + \gamma(t_1 + \gamma^2 + \delta^2)\Phi_1 + \delta(t_1 - \gamma^2 - \delta^2)\Phi_3}{2\gamma\delta b}; \\ A_{15} = \frac{-2\gamma\delta(\gamma^2 + \delta^2)^2\sqrt{t_1} \sin\sqrt{t_1}\alpha - \gamma d\Phi_1 + \delta e\Phi_3}{2\gamma\delta b}; \\ A_{16} = \frac{-2\gamma\delta \cos\sqrt{t_1}\alpha + 2\gamma\delta\Phi_2 - (t_1 + \gamma^2 - \delta^2)\Phi_4}{2\gamma\delta(t_1^2 - a)}, \end{array} \right. \quad (22)$$

где

$$c = t_1^2 - a - 8\gamma^2\delta^2;$$

$$d = 2\delta^2 \left[b - (\gamma^2 + \delta^2)^2 \right] + t_1 \left[a + 4\gamma^2\delta^2 + t_1(\gamma^2 - \delta^2) \right];$$

$$e = 2\gamma^2 \left[b - (\gamma^2 + \delta^2)^2 \right] - t_1 \left[a + 4\gamma^2\delta^2 + t_1(\gamma^2 - \delta^2) \right]$$

Аналогичным образом определяются остальные 30 фундаментальных функций для данного варианта корней характеристического уравнения (9). Для всех вышеперечисленных 10 вариантов корней уравнения (9) вычислены 360 фундаментальных функций.

Теперь, следуя обычному алгоритму решения методом граничных элементов [2], можно определить все параметры вектора состояния (7).

При расчете конкретной арочной системы параметр Z в (9) может быть вычислен с точностью до частоты собственных колебаний ω . Поэтому для ω нужно задавать интервал изменения, например, $(0, 1000) \text{ с}^{-1}$, после чего в процессе реализации программы расчета в MATLAB, DELPHI или какой-либо иной среде осуществляется автоматический переход к вычислению фундаментальных функций, соответствующих корням характеристического уравнения (9).

Программа, реализующая расчет арочной системы методом граничных элементов в соответствии с изложенной методикой, представляется достаточно объемной, однако это связано с большим количеством арифметических операторов и логических разветвлений. В действительности затраты компьютерных ресурсов являются минимальными, так как приходится решать систему только двенадцати (!) алгебраических уравнений, что существенно меньше, чем при использовании метода конечных элементов.

Литература

1. Теоретичні основи динаміки машин: Навчальний посібник / Сурьянінов М.Г., Дащенко О.Ф., Білоус В.О.- Одеса: Бахва, 2003. — 308 с.
2. Баженов В.А., Дащенко А.Ф., Коломиец Л.В., Оробей В.Ф. Строительная механика / Применение МГЭ. — Одесса: Астропринт, 2001. — 288 с.