

Н.Г. Сурьянинов, канд. техн. доцент (Одесский национальный политехнический университет)

## ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКИ ПРИ РЕШЕНИИ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Из процедуры составления бигармонического уравнения следует выражение для внешних нагрузок, приведенных к срединной плоскости пластинки:

$$q(x, y) = \int \frac{\partial^2 q_x^0}{\partial y^2} dx + \int \frac{\partial^2 q_y^0}{\partial x^2} dy - \mu \frac{\partial q_x^0}{\partial x} - \mu \frac{\partial q_y^0}{\partial y}, \quad (1)$$

где  $q_x^0$  и  $q_y^0$  представляют собой, вообще говоря, суммы объёмных (приложенных внутри контура пластинки) и поверхностных (приложенных по контуру) нагрузок в направлениях осей  $x$  и  $y$  соответственно.

В большинстве случаев объёмные нагрузки отсутствуют, поэтому в дальнейшем будем понимать под  $q_x^0$  и  $q_y^0$  только контурные нагрузки.

В общем случае нагружения  $q_x^0$  и  $q_y^0$  — это совокупность восьми групп нагрузок, по две на каждой стороне контура (нормальная и тангенциальная).

Обозначая нормальные к контуру составляющие распределенных нагрузок через  $n$ , а касательные — через  $p$ , можем записать:

$$q_x^0 = n_{x1} + n_{x2} + p_{x1} + p_{x2} + F_{x1} + F_{x2} + T_{x1} + T_{x2}; \quad (2)$$

$$q_y^0 = n_{y1} + n_{y2} + p_{y1} + p_{y2} + F_{y1} + F_{y2} + T_{y1} + T_{y2}. \quad (3)$$

Положительные направления приложенных нагрузок показаны на рис. 1.

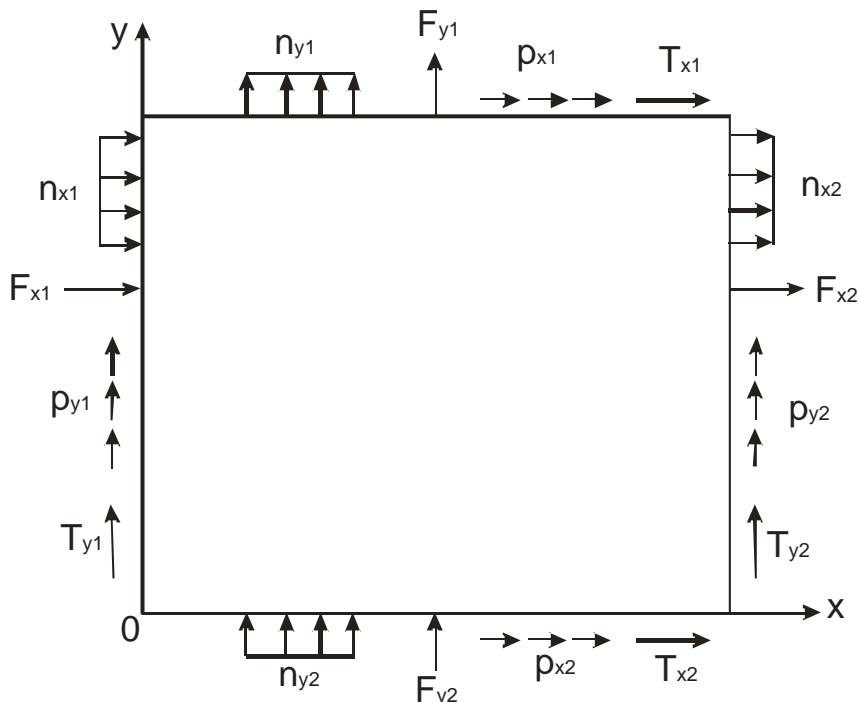


Рис. 1. Положительные направления действующих нагрузок

Введем обозначения для координат точек приложенных нагрузок.

$a_{H1}$  и  $a_{K1}$  - начало и конец нагрузки  $n_{y1}$ ;

$a_{H2}$  и  $a_{K2}$  - начало и конец нагрузки  $n_{y2}$ ;

$b_{H1}$  и  $b_{K1}$  - начало и конец нагрузки  $p_{y1}$ ;

$b_{H2}$  и  $b_{K2}$  - начало и конец нагрузки  $p_{y2}$ ;

$a_{F1}$  и  $a_{F2}$  - точки приложения сил  $F_{y1}$  и  $F_{y2}$ ;

$b_{T1}$  и  $b_{T2}$  - точки приложения сил  $T_{y1}$  и  $T_{y2}$ .

Перечисленные координаты показаны на рис. 2.

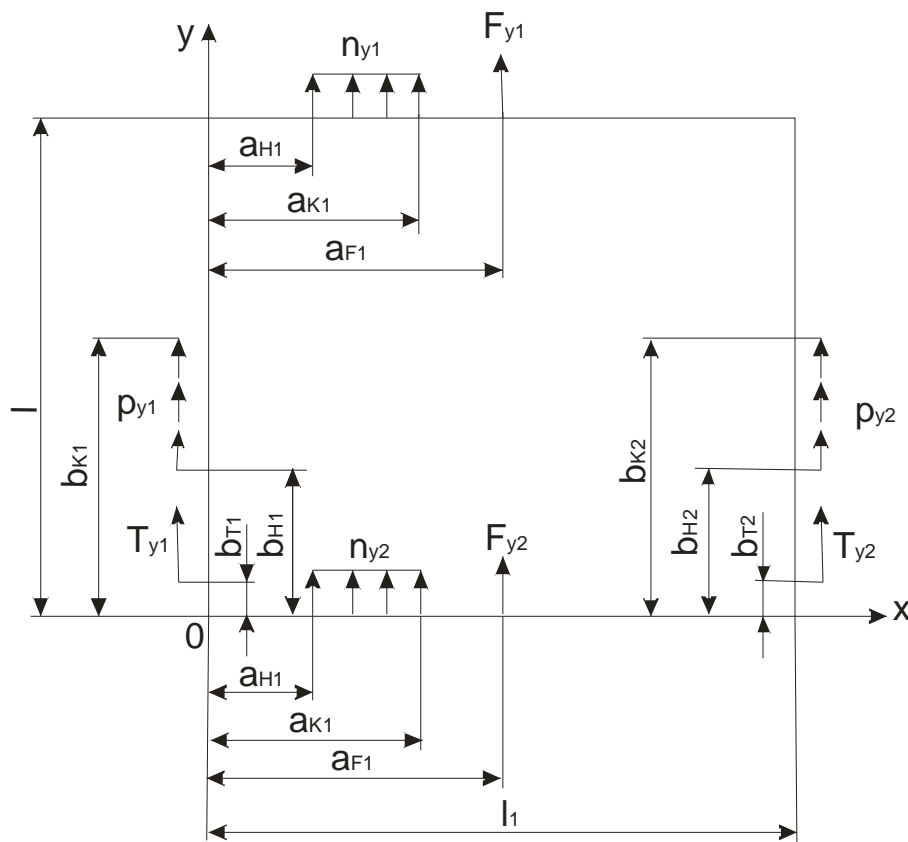


Рис. 2. Нагрузки, параллельные оси  $OY$

Аналогичным образом обозначим координаты внешних нагрузок, действующих в направлении оси  $OX$  (рис. 3):

$c_{H1}$  и  $c_{K1}$  - начало и конец нагрузки  $p_{x1}$ ;

$c_{H2}$  и  $c_{K2}$  - начало и конец нагрузки  $p_{x2}$ ;

$d_{H1}$  и  $d_{K1}$  - начало и конец нагрузки  $n_{x1}$ ;

$d_{H2}$  и  $d_{K2}$  - начало и конец нагрузки  $n_{x2}$ ;

$c_{T1}$  и  $c_{T2}$  - точки приложения сил  $T_{x1}$  и  $T_{x2}$ ;

$d_{F1}$  и  $d_{F2}$  - точки приложения сил  $F_{x1}$  и  $F_{x2}$

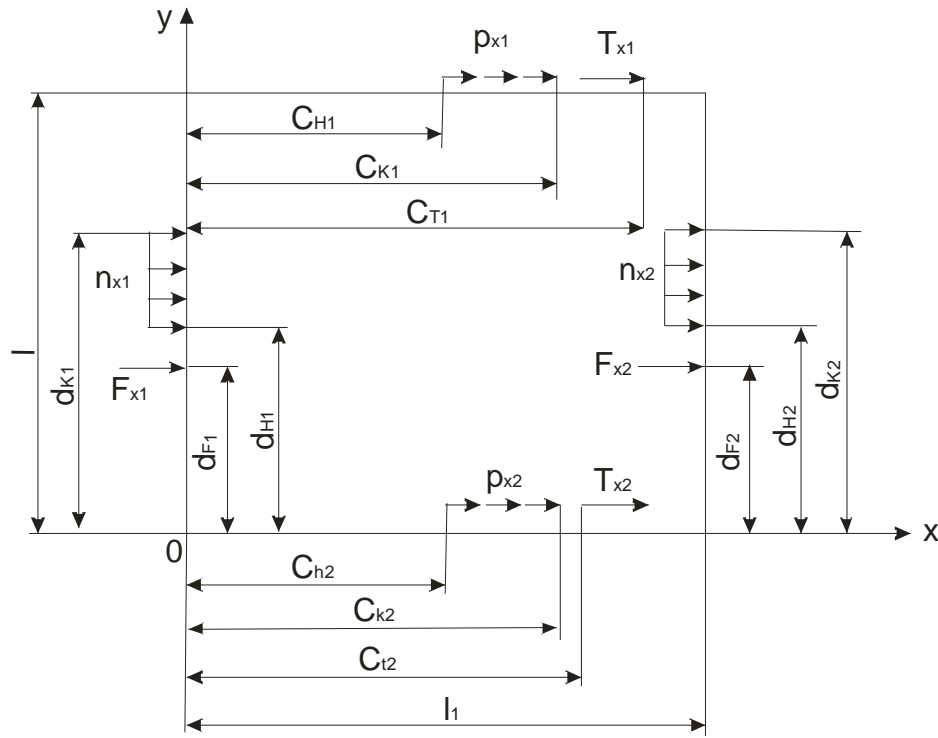


Рис. 3. Нагрузки в направлении оси  $OX$

Запишем выражение для всех действующих нагрузок (2) и (3), используя  $H$ -функцию Хевисайда и  $\delta$ -функцию Дирака.

$$\begin{aligned}
 q_{x0} = & n_{x1} [H(y - d_{H1}) - H(y - d_{K1})] \delta(x) + F_{x1} \delta(y - d_{F1}) \delta(x) + \\
 & + n_{x2} [H(y - d_{H2}) - H(y - d_{K2})] \delta(x - l_1) + F_{x2} \delta(y - d_{F2}) \delta(x - l_1) + \\
 & + p_{x1} [H(x - C_{H1}) - H(x - C_{K1})] \delta(y - l) + T_{x1} \delta(x - C_{T1}) \delta(y - l) + \\
 & + p_{x2} [H(x - C_{H2}) - H(x - C_{K2})] \delta(y) + T_{x2} \delta(x - C_{T2}) \delta(y);
 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
 q_{y0} = & n_{y1} [H(x - a_{H1}) - H(x - a_{K1})] \delta(y - l) + F_{y1} \delta(x - a_{F1}) \delta(y - l) + \\
 & + n_{y2} [H(x - a_{H2}) - H(x - a_{K2})] \delta(y) + F_{y2} \delta(x - a_{F2}) \delta(y) + \\
 & + p_{y1} [H(y - b_{H1}) - H(y - b_{K1})] \delta(x) + T_{y1} \delta(y - b_{T1}) \delta(x) + \\
 & + p_{y2} [H(y - b_{H2}) - H(y - b_{K2})] \delta(x - l_1) + T_{y2} \delta(y - b_{T2}) \delta(x - l_1).
 \end{aligned} \tag{5}$$

Используя (4) и (5), после соответствующих операций дифференцирования и интегрирования с подстановкой в (1), можно получить выражение для всей совокупности внешних нагрузок на контур в плоской задаче теории упругости. Однако в реальных условиях нагрузки, касательные к контуру, встречаются крайне редко, поэтому в дальнейшем целесообразно исключить из (4) и (5) соответствующие слагаемые.

С учетом сказанного  $q_{x0}$  и  $q_{y0}$  можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 q_x^0 = & n_{x1} [H(y - d_{H1}) - H(y - d_{K1})] \delta(x) + F_{x1} \delta(y - d_{F1}) \delta(x) + \\
 & + n_{x2} [H(y - d_{H2}) - H(y - d_{K2})] \delta(x - l_1) + F_{x2} \delta(y - d_{F2}) \delta(x - l_1);
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$q_y^0 = n_{y1}[H(x - a_{H1}) - H(x - a_{K1})]\delta(y - l) + F_{y1}\delta(x - a_{F1})\delta(y - l) + n_{y2}[H(x - a_{H2}) - H(x - a_{K2})]\delta(y) + F_{y2}\delta(x - a_{F2})\delta(y). \quad (7)$$

Вычислим производные функций нагрузки  $q_{x0}$  и  $q_{y0}$  в соответствии с (1). При этом будем руководствоваться правилами для дифференцирования функций  $H$  и  $\delta$ :

$$\left. \begin{aligned} H'(x) &= \delta(x); \\ H'(x - x_0) &= \delta(x - x_0); \\ [\delta(x - x_0)]' &= \delta'(x - x_0) \end{aligned} \right\}. \quad (8)$$

$$\frac{\partial q_x^0}{\partial y} = n_{x1}[\delta(y - d_{H1}) - \delta(y - d_{K1})]\delta(x) + F_{x1}\delta'(y - d_{F1})\delta(x) + n_{x2}[\delta(y - d_{H2}) - \delta(y - d_{K2})]\delta(x - l_1) + F_{x2}\delta'(y - d_{F2})\delta(x - l_1); \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 q_x^0}{\partial y^2} = n_{x1}[\delta'(y - d_{H1}) - \delta'(y - d_{K1})]\delta(x) + F_{x1}\delta''(y - d_{F1})\delta(x) + n_{x2}[\delta'(y - d_{H2}) - \delta'(y - d_{K2})]\delta(x - l_1) + F_{x2}\delta''(y - d_{F2})\delta(x - l_1). \quad (10)$$

$$\frac{\partial q_y^0}{\partial x} = n_{y1}[\delta(x - a_{H1}) - \delta(x - a_{K1})]\delta(y - l) + F_{y1}\delta'(x - a_{F1})\delta(y - l) + n_{y2}[\delta(x - a_{H2}) - \delta(x - a_{K2})]\delta(y) + F_{y2}\delta'(x - a_{F2})\delta(y); \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 q_y^0}{\partial x^2} = n_{y1}[\delta'(x - a_{H1}) - \delta'(x - a_{K1})]\delta(y - l) + F_{y1}\delta''(x - a_{F1})\delta(y - l) + n_{y2}[\delta'(x - a_{H2}) - \delta'(x - a_{K2})]\delta(y) + F_{y2}\delta''(x - a_{F2})\delta(y). \quad (12)$$

$$\frac{\partial q_x^0}{\partial x} = n_{x1}[H(y - d_{H1}) - H(y - d_{K1})]\delta'(x) + F_{x1}\delta(y - d_{F1})\delta'(x) + n_{x2}[H(y - d_{H2}) - H(y - d_{K2})]\delta'(x - l_1) + F_{x2}\delta(y - d_{F2})\delta'(x - l_1); \quad (13)$$

$$\frac{\partial q_y^0}{\partial y} = n_{y1}[H(x - a_{H1}) - H(x - a_{K1})]\delta'(y - l) + F_{y1}\delta(x - a_{F1})\delta'(y - l) + n_{y2}[H(x - a_{H2}) - H(x - a_{K2})]\delta'(y) + F_{y2}\delta(x - a_{F2})\delta'(y). \quad (14)$$

Интегралы выражений (10), (12) имеют вид

$$\int \frac{\partial^2 q_x^0}{\partial y^2} dx = n_{x1}[\delta'(y - d_{H1}) - \delta'(y - d_{K1})]H(x) + F_{x1}\delta''(y - d_{F1})H(x) + n_{x2}[\delta'(y - d_{H2}) - \delta'(y - d_{K2})]H(x - l_1) + F_{x2}\delta''(y - d_{F2})H(x - l_1). \quad (15)$$

Функция Хевисайда в (15) равна единице, поэтому в дальнейшем ее можно не писать.

$$\int \frac{\partial^2 q_y^0}{\partial x^2} dy = n_{y1} [\delta'(x - a_{H1}) - \delta'(x - a_{K1})] \cdot H(y - l) + F_{y1} \delta''(x - a_{F1}) \cdot H(y - l) + \quad (16)$$

$$+ n_{y2} [\delta'(x - a_{H2}) - \delta'(x - a_{K2})] + F_{y2} \delta''(x - a_{F2}).$$

Подставляя (13) – (16) в (1), получим выражение для внешних нагрузок, приведенных к срединной плоскости пластинки:

$$q(x, y) = n_{x1} [\delta'(y - d_{H1}) - \delta'(y - d_{K1})] + F_{x1} \delta''(y - d_{F1}) + n_{x2} [\delta'(y - d_{H2}) - \delta'(y - d_{K2})] \times$$

$$\times H(x - l_1) + F_{x2} \delta''(y - d_{F2}) H(x - l_1) + n_{y1} [\delta'(x - a_{H1}) - \delta'(x - a_{K1})] H(y - l) + F_{y1} \delta'' \times$$

$$(x - a_{F1}) H(y - l) + n_{y2} [\delta'(x - a_{H2}) - \delta'(x - a_{K2})] + F_{y2} \delta''(x - a_{F2}) - \mu n_{x1} \times$$

$$\times [H(y - d_{H1}) - H(y - d_{K1})] \delta'(x) - \mu F_{x1} \delta(y - d_{F1}) \delta'(x) - \mu n_{x2} [H(y - d_{H2}) - H(y - d_{K2})] \times \quad (17)$$

$$\times \delta'(x - l_1) - \mu F_{x2} \delta(y - d_{F2}) \delta'(x - l_1) - \mu n_{y1} [H(x - a_{H1}) - H(x - a_{K1})] \delta'(y - l) - \mu F_{y1} \delta \times$$

$$\times (x - a_{F1}) \delta'(y - l) - \mu n_{y2} [H(x - a_{H2}) - H(x - a_{K2})] \delta'(y) - \mu F_{y2} \delta(x - a_{F2}) \delta'(y).$$

Используя полученное выражение, перейдем к рассмотрению нагрузки, зависящей только от координаты  $y$ :

$$q(y) = \int_0^{l_1} q(x, y) X(x) dx. \quad (18)$$

Аналитическое выражение функции  $X(x)$  зависит от граничных условия задачи и определяется в соответствии с табл. 1.

Таблица 1  
Аналитические выражения форм собственных колебаний

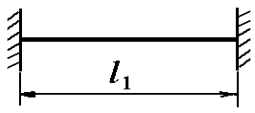
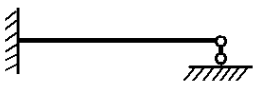

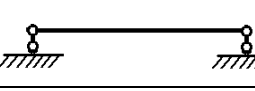
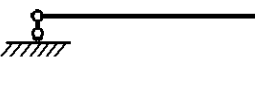

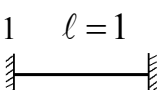

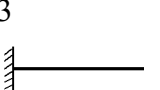
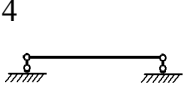
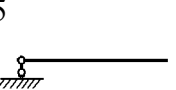
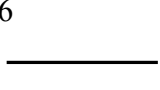
Схема балки	Форма собственных колебаний
	$X(x) = \sin(\alpha x / l_1) - \text{sh}(\alpha x / l_1) - \alpha_* [\cos(\alpha x / l_1) - \text{ch}(\alpha x / l_1)];$ $\alpha_* = \frac{\sin \omega - \text{sh} \omega}{\cos \omega - \text{ch} \omega}; \quad \omega \text{ по таблице 2}$
	$X(x) = \sin(\alpha x / l_1) - \text{sh}(\alpha x / l_1) - \alpha_* [\cos(\alpha x / l_1) - \text{ch}(\alpha x / l_1)];$ $\alpha_* = \frac{\sin \omega + \text{sh} \omega}{\cos \omega + \text{ch} \omega}$
	$X(x) = \sin(\alpha x / l_1) - \text{sh}(\alpha x / l_1) - \alpha_* [\cos(\alpha x / l_1) - \text{ch}(\alpha x / l_1)];$ $\alpha_* = \frac{\sin \omega + \text{sh} \omega}{\cos \omega + \text{ch} \omega}$
	$X(x) = \sin(\alpha x / l_1)$
	$X(x) = \sin(\alpha x / l_1) + \alpha_* \text{sh}(\alpha x / l_1)$ $\alpha_* = \frac{\sin \omega}{\text{sh} \omega}$
	$X(x) = \sin(\alpha x / l_1) + \text{sh}(\alpha x / l_1) - \alpha_* [\cos(\alpha x / l_1) + \text{ch}(\alpha x / l_1)];$ $\alpha_* = \frac{\sin \omega - \text{sh} \omega}{\cos \omega - \text{ch} \omega}$

Таблица 2  
Спектры частот собственных колебаний

1 $l = 1$	2	3	4	5	6
					
$\cos \omega \cdot \operatorname{ch} \omega = 1$	$\sin \omega \cdot \operatorname{ch} \omega = \cos \omega \cdot \operatorname{sh} \omega$	$\cos \omega \cdot \operatorname{ch} \omega = -1$	$\sin \omega = 0$	$\sin \omega \cdot \operatorname{ch} \omega = \cos \omega \cdot \operatorname{sh} \omega$	$\cos \omega \cdot \operatorname{ch} \omega = 1$
$\omega_1 = 4,730$ $\omega_2 = 7,859$ $\omega_3 = 10,996$ $\omega_4 = 14,137$	$\omega_1 = 3,927$ $\omega_2 = 7,069$ $\omega_3 = 10,210$ $\omega_4 = 13,352$	$\omega_1 = 1,875$ $\omega_2 = 4,694$ $\omega_3 = 7,855$ $\omega_4 = 10,996$	$\omega_1 = \pi$ $\omega_2 = 2\pi$ $\omega_3 = 3\pi$ $\omega_4 = 4\pi$	$\omega_1 = 0$ $\omega_2 = 3,927$ $\omega_3 = 7,069$ $\omega_4 = 10,210$	$\omega_1 = 0$ $\omega_2 = 4,730$ $\omega_3 = 7,853$ $\omega_4 = 10,996$

Рассмотрим пластинку со свободными краями в направлении  $OY$ .

$$q(y) = \int_0^{l_1} q(x, y) \left[ \sin \frac{\omega x}{l_1} - \operatorname{sh} \frac{\omega x}{l_1} - \alpha_* \left( \cos \frac{\omega x}{l_1} - \operatorname{ch} \frac{\omega x}{l_1} \right) \right] dx \quad (19)$$

$$\alpha_* = \frac{\sin \omega_1 - \operatorname{sh} \omega_1}{\cos \omega_1 - \operatorname{ch} \omega_1} = \frac{\sin 4,73 - \operatorname{sh} 4,73}{\cos 4,73 - \operatorname{ch} 4,73}.$$

Будем последовательно вычислять четыре компонента (19), интегрируя (17) с каждым из слагаемых, стоящих в квадратных скобках выражения (19).

$$\begin{aligned} a) \int_0^{l_1} q(x, y) \sin \frac{\omega x}{l_1} dx &= -n_{x1} [\delta'(y - d_{H1}) - \delta'(y - d_{K1})] \frac{l_1}{\omega} (\cos \omega - 1) - F_{x1} \delta''(y - \\ &\times (\cos \omega - 1) + n_{y1} \frac{\omega}{l_1} \left( \cos \frac{\omega a_{K1}}{l_1} - \cos \frac{\omega a_{H1}}{l_1} \right) H(y - l) + F_{y1} \frac{\omega}{l_1} \cos \frac{\omega a_{F1}}{l_1} H(y - l) \\ &\times \left( \cos \frac{\omega a_{K2}}{l_1} - \cos \frac{\omega a_{H2}}{l_1} \right) + F_{y2} \frac{\omega}{l_1} \cos \frac{\omega a_{F2}}{l_1} + \mu \frac{\omega}{l_1} n_{x1} [H(y - d_{H1}) - H(y - d_K) \\ &+ \mu \frac{\omega}{l_1} F_{x1} \delta(y - d_{F1}) + \mu n_{x2} \frac{\omega}{l_1} \cos \omega [H(y - d_{H2}) - H(y - d_{K2})] + \mu F_{x2} \frac{\omega}{l_1} \cos \omega \\ &\times \delta(y - d_{F2}) - \mu n_{y1} \frac{l}{\omega} \left( \cos \frac{\omega a_{H1}}{l_1} - \cos \frac{\omega a_{K1}}{l_1} \right) \delta'(y - l) - \mu F_{y1} \sin \frac{\omega a_{F1}}{l_1} \delta'(y - l) \\ &\times \frac{l_1}{\omega} \times \left( \cos \frac{\omega a_{H2}}{l_1} - \cos \frac{\omega a_{K2}}{l_1} \right) \delta'(y) - \mu F_{y2} \sin \frac{\omega a_{F2}}{l_1} \delta'(y); \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
\delta) \int_0^{l_1} q(x, y) sh \frac{\omega x}{l_1} dx &= n_{x1} [\delta'(y - d_{H1}) - \delta'(y - d_{K1})] \frac{l_1}{\omega} (ch \omega - 1) + F_{x1} \delta''(y - d_{F1}) \frac{l_1}{\omega} \times \\
&\times (ch \omega - 1) + n_{y1} \frac{\omega}{l_1} \left( ch \frac{\omega a_{K1}}{l_1} - ch \frac{\omega a_{H1}}{l_1} \right) H(y - l) + F_{y1} \frac{\omega}{l_1} ch \frac{\omega a_{F1}}{l_1} H(y - l) + n_{y2} \times \\
&\times \left( ch \frac{\omega a_{K2}}{l_1} - ch \frac{\omega a_{H2}}{l_1} \right) + F_{y2} \frac{\omega}{l_1} ch \frac{\omega a_{F2}}{l_1} + \mu n_{x1} \frac{\omega}{l_1} [H(y - d_{H1}) - H(y - d_{K1})] + \\
&+ \mu \frac{\omega}{l_1} F_{x1} \delta(y - d_{F1}) + \mu n_{x2} \frac{\omega}{l_1} ch \omega [H(y - d_{H2}) - H(y - d_{K2})] + \mu F_{x2} \frac{\omega}{l_1} \delta(y - d_{F2}) ch \omega + \\
&+ \mu n_{y1} \frac{l_1}{\omega} \left( ch \frac{\omega a_{H1}}{l_1} - ch \frac{\omega a_{K1}}{l_1} \right) \delta'(y - l) - \mu F_{y1} sh \frac{\omega a_{F1}}{l_1} \delta'(y - l) + \mu n_{y2} \frac{l_1}{\omega} \times \\
&\times \left( ch \frac{\omega a_{H2}}{l_1} - ch \frac{\omega a_{K2}}{l_1} \right) \delta'(y) - \mu F_{y2} sh \frac{\omega a_{F2}}{l_1} \delta'(y);
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon) \int_0^{l_1} q(x, y) \cos \frac{\omega x}{l_1} dx &= n_{x1} [\delta'(y - d_{H1}) - \delta'(y - d_{K1})] \frac{l_1}{\omega} \sin \omega + F_{x1} \delta''(y - d_{F1}) \frac{l_1}{\omega} \times \\
&\times \sin \omega + n_{y1} \left( \sin \frac{\omega a_{H1}}{l_1} - \sin \frac{\omega a_{K1}}{l_1} \right) H(y - l) - F_{y1} \frac{\omega}{l_1} \sin \frac{\omega a_{F1}}{l_1} H(y - l) + n_{y2} \frac{\omega}{l_1} \times \\
&\times \left( \sin \frac{\omega a_{H2}}{l_1} - \sin \frac{\omega a_{K2}}{l_1} \right) - F_{y2} \frac{\omega}{l_1} \sin \frac{\omega a_{F2}}{l_1} - \mu \frac{\omega}{l_1} n_{x1} \sin \omega [H(y - d_{H2}) - H(y - d_{K2})] - \\
&- \mu \frac{\omega}{l_1} F_{x2} \sin \omega \delta(y - d_{F2}) - \mu n_{y1} \frac{l_1}{\omega} \left( \sin \frac{\omega a_{K1}}{l_1} - \sin \frac{\omega a_{H1}}{l_1} \right) \delta'(y - l) - \mu F_{y1} \cos \frac{\omega a_{F1}}{l_1} \times \\
&\times \delta'(y - l) - \mu n_{y2} \frac{l_1}{\omega} \left( \sin \frac{\omega a_{K2}}{l_1} - \sin \frac{\omega a_{H2}}{l_1} \right) \delta'(y) - \mu F_{y2} \cos \frac{\omega a_{F2}}{l_1} \delta'(y);
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
\zeta) \int_0^{l_1} q(x, y) ch \frac{\omega x}{l_1} dx &= n_{x1} [\delta'(y - d_{H1}) - \delta'(y - d_{K1})] \frac{l_1}{\omega} sh \omega + F_{x1} \delta''(y - d_{F1}) \frac{l_1}{\omega} sh \omega + \\
&+ n_{y1} \frac{\omega}{l_1} \left( sh \frac{\omega a_{K1}}{l_1} - sh \frac{\omega a_{H1}}{l_1} \right) H(y - l) + F_{y1} \frac{\omega}{l_1} sh \frac{\omega a_{F1}}{l_1} H(y - l) + n_{y2} \frac{\omega}{l_1} \times \\
&\times \left( sh \frac{\omega a_{K2}}{l_1} - sh \frac{\omega a_{H2}}{l_1} \right) + F_{y2} \frac{\omega}{l_1} sh \frac{\omega a_{F2}}{l_1} - \mu \frac{\omega}{l_1} n_{x2} sh \omega [H(y - d_{H2}) - H(y - d_{K2})] + \\
&+ \mu \frac{\omega}{l_1} F_{x2} sh \omega \delta(y - d_{F2}) + \mu n_{y1} \frac{l_1}{\omega} \left( sh \frac{\omega a_{H1}}{l_1} - sh \frac{\omega a_{K1}}{l_1} \right) \delta'(y - l) - \mu F_{y1} ch \frac{\omega a_{F1}}{l_1} \times \\
&\times \delta'(y - l) - \mu n_{y2} \frac{l_1}{\omega} \left( sh \frac{\omega a_{H2}}{l_1} - sh \frac{\omega a_{K2}}{l_1} \right) \delta'(y) - \mu F_{y2} ch \frac{\omega a_{F2}}{l_1} \delta'(y).
\end{aligned} \tag{23}$$

Подставляя (20) – (23) в (19) и учитывая значение  $\alpha_*$ , получим полное выражение для нагрузки  $q(y)$  при свободных краях пластинки в направлении оси  $OY$ . Заметим, что выражение (20) – (23) могут использоваться в дальнейшем и при других граничных условиях.

Наиболее простой вид функция  $X(x)$  имеем при шарнирном закреплении кромок пластинки в направлении оси  $OY$ :

$$X(x) = \sin \frac{\omega x}{l_1},$$

следовательно, выражение для нагрузки  $q(y)$  можно записать, используя (20):

$$\begin{aligned} \int_0^{l_1} q(x, y) X(x) dx = & -n_{x1} [\delta'(y - d_{H1}) - \delta'(y - d_{K1})] \frac{l_1}{\omega} (\cos \omega - 1) - F_{x1} \delta''(y - d_{F1}) \frac{l_1}{\omega} \times \\ & \times (\cos \omega - 1) + n_{y1} \left( \cos \frac{\omega a_{K1}}{l_1} - \cos \frac{\omega a_{H1}}{l_1} \right) H(y - l) + F_{y1} \frac{\omega}{l_1} \cos \frac{\omega a_{F1}}{l_1} H(y - l) + n_{y2} \frac{\omega}{l_1} \times \\ & \times \left( \cos \frac{\omega a_{K2}}{l_1} - \cos \frac{\omega a_{H2}}{l_1} \right) + F_{y2} \frac{\omega}{l_1} \cos \frac{\omega a_{F2}}{l_1} + \mu \frac{\omega}{l_1} n_{x1} [H(y - d_{H1}) - H(y - d_{K1})] + \\ & + \mu \frac{\omega}{l_1} F_{x1} \delta(y - d_{F1}) + \mu n_{x2} \frac{\omega}{l_1} \cos \omega [H(y - d_{H2}) - H(y - d_{K2})] + \mu F_{x2} \frac{\omega}{l_1} \cos \omega \times \\ & \times \delta(y - d_{F2}) - \mu n_{y1} \frac{l}{\omega} \left( \cos \frac{\omega a_{H1}}{l_1} - \cos \frac{\omega a_{K1}}{l_1} \right) \delta'(y - l) - \mu F_{y1} \sin \frac{\omega a_{F1}}{l_1} \delta'(y - l) - \mu n_{y2} \times \\ & \times \frac{l_1}{\omega} \times \left( \cos \frac{\omega a_{H2}}{l_1} - \cos \frac{\omega a_{K2}}{l_1} \right) \delta'(y) - \mu F_{y2} \sin \frac{\omega a_{F2}}{l_1} \delta'(y). \end{aligned} \quad (24)$$

Выражение (24) значительно упростится, если ограничиться рассмотрением только нагрузок  $n_{y1}$  и  $F_{y1}$  (рис. 4), что в наибольшей степени соответствует реальному нагружению пластинки.

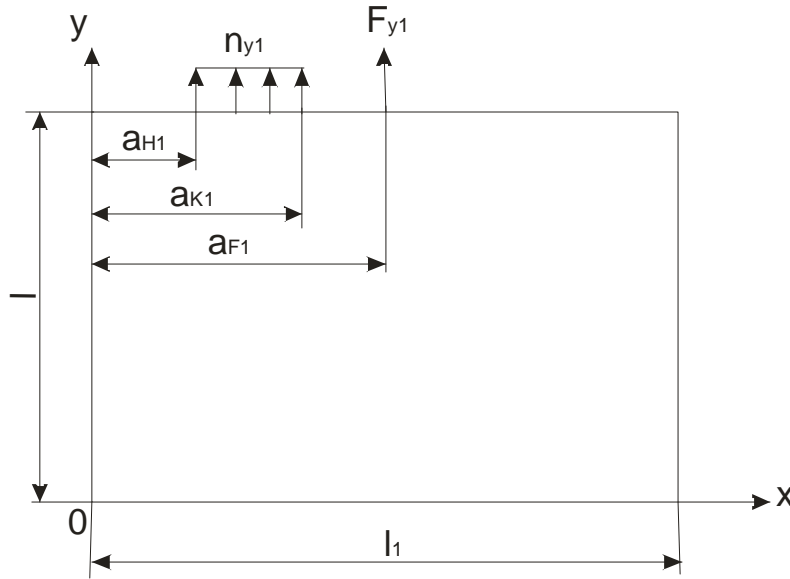


Рис. 4. Частный случай нагружения

В этом случае имеем:

$$\begin{aligned} q(y) = & n_{y1} \frac{\omega}{l_1} \left( \cos \frac{\omega a_{K1}}{l_1} - \cos \frac{\omega a_{H1}}{l_1} \right) H(y - l) + F_{y1} \frac{\omega}{l_1} \cos \frac{\omega a_{F1}}{l_1} H(y - l) - \mu n_{y1} \frac{l_1}{\omega} \times \\ & \times \left( \cos \frac{\omega a_{H1}}{l_1} - \cos \frac{\omega a_{K1}}{l_1} \right) \delta'(y - l) - \mu F_{y1} \sin \frac{\omega a_{F1}}{l_1} \delta'(y - l). \end{aligned}$$



Таким образом, изложенная методика позволяет, используя Н-функцию Хевисайда и  $\delta$ -функцию Дирака, описать любую нагрузку, рассматриваемую в плоской задаче теории упругости. Приведенный алгоритм хорошо программируется и может быть реализован в MATLAB, DELPHI или какой-либо иной среде программирования.

### **Литература**

1. Теоретичні основи динаміки машин: Навчальний посібник / Сурьянінов М.Г., Дашенко О.Ф., Білоус В.О.- Одеса: Бахва, 2003. — 308 с.
2. Баженов В.А., Дашенко А.Ф., Коломиец Л.В., Орбей В.Ф. Строительная механика / Применение МГЭ. — Одесса: Астропринт, 2001. — 288 с.