Технические науки

Сурьянинов Н.Г.

Одесский национальный политехнический университет, Украина

К расчету пластин, подкрепленных ребрами жесткости, методом граничных элементов

Дифференциальное уравнение изгиба ребристой пластинки имеет вид

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}=\frac{\bar{q}}{D}, \qquad (1)$$

где $W=W(x,y)$ — прогиб пластинки; $\bar{q}=\bar{q}(x,y)$ — свободный член уравнения, учитывающий не только внешние нагрузки, но и наличие подкрепляющих ребер в продольном направлении, под которым будем понимать направление, параллельное оси *y* (рисунок 1).

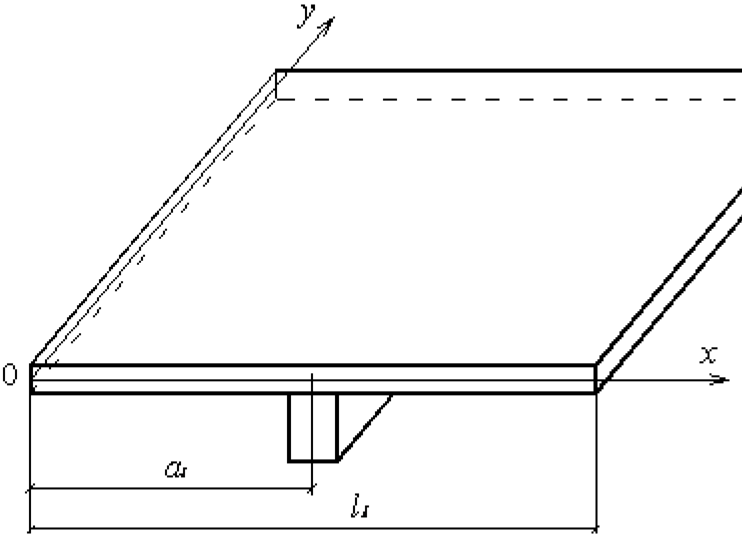

Рисунок 1 — пластинка с ребром в продольном направлении

Наиболее общий вид $\bar{q}=\bar{q}(x,y)$ имеет в том случае, когда подкрепляющие ребра будут как сплошного сечения, так и тонкостенного:

$$\bar{q}(x,y)=q(x,y)-\sum_{i=1}^{n} EI_x W^{IV}(y) X(a_i)\delta(x-a_i)-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\left[EI_\omega W^{IV}(y) X'(a_i)-GI_K W''(y) X'(a_i)\right]\delta'(x-a_i), \qquad (2)$$

где EI_x, EI_ω, EI_k — жесткости ребер при изгибе и кручении;

a_i — координата расположения *i*-го ребра (рисунок 1).

Применим для (1) метод Канторовича-Власова, т.е. прогиб срединной плоскости пластинки будем искать в виде

$$W(x,y)=W_1(y)X_1(x)+W_2(y)X_2(x)+\ldots+W_k(y)X_k(x). \qquad (3)$$

Усечем ряд (3) до одного члена и возьмем вариацию прогиба только по направлению *y*, что равносильно принятию расчетной схемы пластины, имеющей бесконечное число степеней свободы в одном направлении и одну степень свободы в другом направлении. Тогда прогиб точки срединной плоскости пластины будет

$$W(x,y) = W(y)X(x). \tag{4}$$

Функцию поперечного распределения прогибов пластины $X(x)$ нужно выбирать так, чтобы она максимально точно описывала форму изогнутой поверхности пластины в направлении оси *x*. Этому требованию в полной мере удовлетворяют кривые прогиба балки, имеющей такие же условия опирания, как и пластина, в направлении оси *x*.

В результате получим задачу Коши одномерной модели изгиба прямоугольной пластины, подкрепленной продольными ребрами:

$$W^{IV}(y) - 2r^2W''(y) + s^4W(y) = \frac{\overline{q}(y)}{D} \tag{5}$$

при начальных условиях

$$DW(0);\; D\theta(0) = DW'(0);\; M(0) = -D\overline{A}\left[W''(0) - \mu r^2W(0)\right];$$
$$Q(0) = -D\overline{A}\left[W'''(0) - (2-\mu)r^2W'(0)\right]; \tag{6}$$

где

$$r^2 = -\overline{B}/\overline{A};\; s^4 = C/\overline{A};\; \overline{q}(y) = \int_0^{l_1}\overline{q}(x,y)X(x)dx/\overline{A}; \tag{7}$$

$$\overline{A} = A + \sum_{i=1}^{n}EI_xX^2(a_i) + \sum_{i=1}^{n}EI_\omega\left[X'(a_i)\right]^2; \tag{8}$$

$$\overline{B} = B + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}EI_k\left[X'(a_i)\right]^2; \tag{9}$$

$$A = \int_0^{l_1}X^2(x)dx;\; B = \int_0^{l_1}X''(x)X(x)dx;\; C = \int_0^{l_1}X^{IV}(x)X(x)dx. \tag{10}$$

Дифференциальное уравнение (5) по своей структуре аналогично уравнению, описывающему изгиб пластин без подкреплений, однако вид (7)-(9) свидетельствует о том, что в (5) учтены параметры ребер. Применительно к реализации алгоритма метода граничных элементов это означает, что параметры ребер будут учтены и в выражениях фундаментальных функций.

Решение задачи Коши (5)-(6) можно представить в соответствии с алгоритмом метода граничных элементов:

$$\begin{bmatrix} DW(y) \\ D\theta(y) \\ M(y) \\ Q(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & -A_{13} & -A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & -A_{23} & -A_{13} \\ -A_{31} & -A_{32} & A_{22} & A_{12} \\ -A_{41} & -A_{31} & A_{21} & A_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} DW(0) \\ D\theta(0) \\ M(0) \\ Q(0) \end{bmatrix} + \int_0^y \begin{bmatrix} A_{14}(y-\xi) \\ A_{13}(y-\xi) \\ -A_{12}(y-\xi) \\ -A_{11}(y-\xi) \end{bmatrix} \overline{q}(\xi)d\xi. \tag{11}$$

Таким образом, при использовании метода Канторовича-Власова решение основного дифференциального уравнения задачи сводится к определению прогиба (4), где функция

$X(x)$ задана, а $W(y)$ определяется из (11) в виде

$$DW(y) = A_{11} \cdot Dw(0) + A_{12} \cdot D\theta(0) - A_{13} \cdot M(0) - A_{14} \cdot Q(0) + \int_0^y A_{14}(y-\xi)q(\xi)d\xi. \qquad (12)$$

Решение уравнения (5) зависит от корней соответствующего ему характеристического уравнения, которые представляются выражением

$$k_{1-4} = \pm\sqrt{r^2 \pm \sqrt{r^4 - s^4}}. \qquad (13)$$

Вид фундаментальных функций определяется соотношением между *r* и *s*, которое зависит от граничных условий на продольных кромках пластины. При этом здесь возможны шесть случаев.

Рассмотрим вариант, когда $|s| > |r|$, при этом

$$k_{1-4} = \pm\alpha \pm i\beta,$$

где $\boldsymbol{\alpha} = \sqrt{\dfrac{s^2 + r^2}{\mathbf{2}}}$; $\boldsymbol{\beta} = \sqrt{\dfrac{s^2 - r^2}{\mathbf{2}}}$.

Прогиб $W(y)$ запишется в виде

$$W(y) = C_1\Phi_1 + C_2\Phi_2 + C_3\Phi_3 + C_4\Phi_4, \qquad (14)$$

где $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ — гиперболо-тригонометрические функции:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= ch\alpha y \sin\beta y; \\ \Phi_2 &= ch\alpha y \cos\beta y; \\ \Phi_3 &= sh\alpha y \cos\beta y; \\ \Phi_4 &= sh\alpha y \sin\beta y. \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Фундаментальные функции задачи, получение которых аналогично описанному в [1, 2], предстанут в форме:

$$\begin{cases} A_{11} = \Phi_2 - \dfrac{(1-\mu)r^2}{2\alpha\beta}\Phi_4; \\ A_{12} = \dfrac{s^2 - \mu r^2}{2\beta s^2}\Phi_1 + \dfrac{s^2 + \mu r^2}{2\alpha s^2}\Phi_3; \\ A_{13} = \dfrac{\Phi_4}{2\alpha\beta\overline{A}}; \\ A_{14} = \dfrac{\alpha\Phi_1 - \beta\Phi_3}{2\alpha\beta s^2\overline{A}}; \\ A_{21} = \dfrac{s^2 + \mu r^2}{2\alpha}\Phi_3 - \dfrac{s^2 - \mu r^2}{2\beta}\Phi_1. \end{cases} \qquad (16)$$

$$\begin{cases} A_{22} = \Phi_2 + \dfrac{(1+\mu)r^2}{2\alpha\beta}\Phi_4; \\ A_{23} = \dfrac{\alpha\Phi_1 + \beta\Phi_3}{2\alpha\beta\overline{A}}; \\ A_{31} = \dfrac{\overline{A}\left[\mu r^4(2-\mu) - s^4\right]}{2\alpha\beta}\Phi_4; \\ A_{32} = \dfrac{\overline{A}\left[-s^4 + 2(1-\mu)s^2r^2 + \mu^2r^4\right]}{2\beta s^2}\Phi_1 + \dfrac{\overline{A}\left[s^4 + 2(1-\mu)s^2r^2 - \mu^2r^4\right]}{2\alpha s^2}\Phi_3; \\ A_{41} = \dfrac{\overline{A}\left[-s^4 + 2(1-\mu)s^2r^2 + \mu^2r^4\right]}{2\beta}\Phi_1 - \dfrac{\overline{A}\left[s^4 + 2(1-\mu)s^2r^2 - \mu^2r^4\right]}{2\alpha}\Phi_3. \end{cases} \quad (17)$$

Литература:

1. В.А. Баженов, А.Ф. Дащенко, Л.В. Коломиец, В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов / Численные методы в механике. — Одесса, «СТАНДАРТЪ», 2005. — 563 с.

2. Оробей В. Ф., Работягов Д. Д. Расчет пластин на изгиб одномерным вариантом метода граничных интегральных уравнений // Изв. вузов. Строительство. — 1993. — № 1. — С. 20-27.