УДК 624.075:04:512.83

Сурьянинов Н.Г.,
Одесский национальный политехнический университет, г. Одесса

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ АРОЧНЫХ СИСТЕМ В СВОЕЙ ПЛОСКОСТИ

Получено дифференциальное уравнение вынужденных колебаний круговой арки, происходящих под действием комбинации нормальных и тангенциальных вынуждающих нагрузок произвольного вида. Уравнение отличается от аналогичного уравнения при свободных колебаниях только наличием правой части, что означает, наличие, как и при свободных колебаниях, 10 вариантов решения, причем, все 360 фундаментальных функций для этих решений остаются неизменными.
Ключевые слова: *Арка — Колебания — Функция Грина — Граничный элемент*

It Is Received differential equation of the compelled fluctuations of the circular arch, occurring under the action of combinations normal and tangential compelling loads of the free type. The Equation differs from similar equation under free fluctuation only presence of the right part that means, presence, either as under free fluctuation, 10 variants of the decision moreover, vce 360 fundamental functions for these decisions remain unchangeable.
Keywords: *Arch — Fluctuations — Function Grina — Boundary element*

I. ВВЕДЕНИЕ

Решение задач механики деформируемого твердого тела сводится, как правило, к одному или нескольким дифференциальным уравнениям. Получить решение в замкнутом виде удается далеко не всегда, поэтому используются численные методы расчета.

Одним из быстро развивающихся в последние годы является метод граничных элементов (МГЭ), применение которого во многих случаях более эффективно, чем применение метода конечных элементов (МКЭ).

Преимущества МГЭ обусловлены рядом причин. Дискретизация только границы области, занимаемой объектом, снижает на единицу размерность решаемой задачи. Метод граничных элементов строго обоснован математически, т.к. использует фундаментальные решения дифференциальных уравнений и в рамках принимаемых гипотез позволяет получить точные значения параметров задачи.

С помощью МГЭ получены решения целого ряда задач, однако многие вопросы остаются пока нерешенными.

В работе исследуется одна из важнейших и актуальных проблем — вынужденные колебания арочных систем в своей плоскости.

II. ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Рассмотрим колебания круговой арки, происходящие под действием комбинации нормальных $q_n(\alpha,t)$ и тангенциальных $q_t(\alpha,t)$ вынуждающих нагрузок произвольного вида (рис.1).

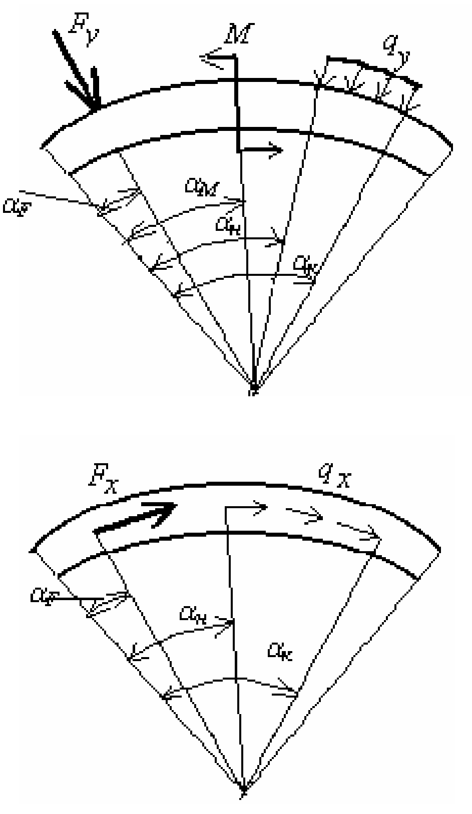

Рис.1

В этом случае уравнения равновесия выглядят так:

$$\frac{\partial Q(\alpha,t)}{\partial \alpha} = -N(\alpha,t) + mR\frac{\partial^2 V(\alpha,t)}{\partial t^2} - \qquad (1)$$
$$- q_n(\alpha,t)\cdot R;$$

$$\frac{\partial N(\alpha,t)}{\partial \alpha} = Q(\alpha,t) + mR\frac{\partial^2 U(\alpha,t)}{\partial t^2} - \tag{2}$$
$$- q_t(\alpha,t)\cdot R.$$

Если учитывать силы инерции, наличие которых обусловлено угловыми перемещениями, то третье уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{\partial M(\alpha,t)}{\partial \alpha} = Q(\alpha,t)\cdot R - \tag{3}$$
$$- \rho I\left[\frac{\partial^2 U(\alpha,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^3 V(\alpha,t)}{\partial \varphi \partial t^2}\right],$$

где ρ — плотность материала; I — осевой момент инерции поперечного сечения; m — погонная масса.

Второе слагаемое в правой части (3) представляет собой момент инерции вращения

$$M_{ин}(\alpha,t) = -\rho I\varepsilon\, ds =$$
$$= -\left[\frac{\partial^2 U(\alpha,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^3 V(\alpha,t)}{\partial \varphi \partial t^2}\right],$$

где

$\varepsilon = \dfrac{\partial^2 \varphi(\alpha,t)}{\partial t^2}$ — угловое ускорение угла поворота сечения арки.

Учет инерции вращения значительно усложняет третье уравнение равновесия, но при этом не оказывает сколь-нибудь значительного влияния на окончательный результат, поэтому в дальнейшем будем использовать (3) в виде

$$\frac{\partial M(\alpha,t)}{\partial \alpha} = Q(\alpha,t)\cdot R. \tag{4}$$

Используя известные соотношения между напряжениями, деформациями и перемещениями, выразим нормальную силу и изгибающий момент через перемещения U и V:

$$N = EA\varepsilon = \frac{EA}{R}(U' - V); \tag{5}$$
$$M = -EI\chi = -\frac{EI}{R^2}(U' + V'').$$

С учетом (4) и (5) уравнения (1) и (2) записываются так:

$$-\frac{EI}{R^3}\cdot\frac{\partial^3 U(\alpha,t)}{\partial \alpha^3} - \frac{EI}{R^3}\cdot\frac{\partial^4 V(\alpha,t)}{\partial \alpha^4} + \frac{EA}{R}\cdot\frac{\partial U(\alpha,t)}{\partial \alpha} -$$
$$-\frac{EA}{R}\cdot V(\alpha,t) - mR\cdot\frac{\partial^2 V(\alpha,t)}{\partial t^2} = -q_n(\alpha,t)\cdot R;$$

$$\frac{EA}{R}\cdot\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{\partial U(\alpha,t)}{\partial \alpha} - V(\alpha,t)\right] + \frac{EI}{R^3}\cdot\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{\partial U(\alpha,t)}{\partial \alpha} +\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 V(\alpha,t)}{\partial \alpha^2}\right] - mR\cdot\frac{\partial^2 U(\alpha,t)}{\partial t^2} = -q_t(\alpha,t)\cdot R.$$

Применим к этим уравнениям метод Фурье, полагая

$$U(\alpha,t) = U(\alpha)\cdot T(t),$$
$$V(\alpha,t) = V(\alpha)\cdot T(t),$$

тогда

$$-\frac{EI}{R^3}\cdot U'''T - \frac{EI}{R^3}\cdot V^{IV}T + \frac{EA}{R}\cdot U'T -$$
$$-\frac{EA}{R}\cdot VT - mR\cdot VT'' = -q_n(\alpha)\cdot T\cdot R;$$
$$\frac{EA}{R}\cdot U''T - \frac{EA}{R}\cdot V'T + \frac{EI}{R^3}\cdot(U'' + V''')T -$$
$$- mR\cdot UT'' = -q_t(\alpha)\cdot T\cdot R.$$

Теперь, исходя из частотного уравнения $T'' + \omega^2 T = 0$, заменим T'' на $(-\omega^2 T)$. После подстановки и сокращения на T получим

$$V^{IV} + \frac{EAR^2 - m\omega^2 R^4}{EI}V + U''' -$$
$$-\frac{EAR^2}{EI}U' = \frac{R^4}{EI}q_n(\alpha); \tag{6}$$
$$\left(1 + \frac{EAR^2}{EI}\right)U'' + \frac{m\omega^2 R^4}{EI}U +$$
$$+ V''' - \frac{EAR^2}{EI}V' = -\frac{R^4}{EI}q_t(\alpha).$$

Полагая $\varepsilon = 0$, то есть пренебрегая деформацией растяжения, имеем:

$$U'(\alpha) = V(\alpha). \tag{7}$$

Учитывая (7), продифференцируем по α первое из уравнений (6) и сложим со вторым:

$$U^{VI} + 2U^{IV} + \left(1 - \frac{m\omega^2 R^4}{EI}\right)U'' + \tag{8}$$
$$+\frac{m\omega^2 R^4}{EI}U = \frac{R^4}{EI}(q_n' - q_t).$$

III. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как и следовало ожидать, уравнение вынужденных колебаний арки в своей плоскости (8) отличается от аналогичного уравнения при свободных колебаниях, полученного нами ранее [1], только наличием правой части. А это означает, что, как и при свободных колебаниях, здесь возможны 10 вариантов решения, причем, все 360 фундаментальных функций для этих решений остаются неизменными.

После вычисления функции Грина и вектора внешних нагрузок, следуя обычному алгоритму метода граничных элементов, можно получить все компоненты вектора состояния арочной системы при вынужденных колебаниях.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.А. Баженов, А.Ф. Дащенко, Л.В. Коломиец, В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов / Численные методы в механике. — Одесса, «СТАНДАРТЪ», 2005. — 563 с.