Сурьянинов Н.Г.
Одесский национальный политехнический университет, Украина

Функция Грина в задаче о кручении тонкостенных стержней открытого профиля

Решение задач механики деформируемого твердого тела сводится, как правило, к одному или нескольким дифференциальным уравнениям. Получить решение в замкнутом виде удается далеко не всегда, поэтому используются численные методы расчета.

Одним из быстро развивающихся в последние годы является метод граничных элементов (МГЭ), применение которого во многих случаях более эффективно, чем применение метода конечных элементов (МГЭ). С помощью МГЭ получены решения целого ряда задач, однако многие вопросы остаются пока нерешенными.

В работе исследуется одна из важнейших и актуальных проблем, возникающих при использовании МГЭ для решения задачи о стесненном кручении тонкостенного стержня открытого поперечного сечения — построение функции Грина.

В практических расчетах чаще всего встречается случай, когда продольные края стержня свободны от сдвигающих сил, а внешняя нагрузка представлена только погонными поперечными силами $q_x(z)$, $q_y(z)$ и моментом $m(z)$. Соответствующие дифференциальные уравнения равновесия получены в [1] и имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &EA\zeta'' = 0; \\ &EI_y\xi^{IV} = q_x; \\ &EI_x\eta^{IV} = q_y; \\ &EI_\omega\theta^{IV} - GI_d\theta'' = m. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Первое из уравнений (1) определяет продольные перемещения $\zeta(z)$ от продольной силы, приложенной по концам стержня и распределенной по сечению равномерно. Второе и третье уравнения относятся к поперечному изгибу и определяют перемещения $\xi(z)$, $\eta(z)$ той точки K поперечного сечения, относительно которой секториальная площадь $\omega(s)$ ортогональна к функциям $x(s)$, $y(s)$. Четвертое уравнение соответствует кручению стержня под действием поперечной нагрузки, которая относительно точки K дает внешний погонный крутящий момент $m(z)$.

При выполнении условий ортогональности и в отсутствие продольных сжимающих или растягивающих внешних нагрузок, что чаще всего имеет место, из четырех уравнений (1) останутся только три:

$$\left.\begin{aligned} &EI_y\xi^{IV} = q_x; \\ &EI_x\eta^{IV} = q_y; \\ &\theta^{IV} - k^2\theta'' = \frac{m}{EI_\omega}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где $k^2 = \dfrac{GI_d}{EI_\omega}$.

Рассмотрим последнее из уравнений (2), определяющее стесненное кручение стержня под действием некоторой поперечной нагрузки, дающей внешний погонный крутящий момент $m(z)$.

Представим решение этого уравнения в виде

$$\theta(z) = C_9\Phi_9 + C_{10}\Phi_{10} + C_{11}\Phi_{11} + C_{12}\Phi_{12}, \tag{3}$$

где

$$\Phi_9 = 1; \quad \Phi_{10} = z; \quad \Phi_{11} = shkz; \quad \Phi_{12} = chkz. \tag{4}$$

Величины $C_9 - C_{12}$ можно определить из системы алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \Phi_9 C_9 + \Phi_{10}C_{10} + \Phi_{11}C_{11} + \Phi_{12}C_{12} = 0; \\ \Phi_9' C_9 + \Phi_{10}'C_{10} + \Phi_{11}'C_{11} + \Phi_{12}'C_{12} = 0; \\ \Phi_9'' C_9 + \Phi_{10}''C_{10} + \Phi_{11}''C_{11} + \Phi_{12}''C_{12} = 0; \\ \Phi_9''' C_9 + \Phi_{10}'''C_{10} + \Phi_{11}'''C_{11} + \Phi_{12}'''C_{12} = 1. \end{cases} \tag{5}$$

Решаем систему (5) методом Гаусса. Умножим первое уравнение на Φ_9', второе — на Φ_9 и вычтем из первого уравнения второе; затем умножим первое на Φ_9'', третье — на Φ_9 и вычтем из первого третье и, наконец, умножим первое на Φ_9''', четвертое — на Φ_9 и вычтем из первого четвертое:

$$\begin{cases} (\Phi_9'\Phi_{10} - \Phi_9\Phi_{10}')C_{10} + (\Phi_9'\Phi_{11} - \Phi_9\Phi_{11}')C_{11} + (\Phi_9'\Phi_{12} - \Phi_9\Phi_{12}')C_{12} = 0; \\ (\Phi_9''\Phi_{10} - \Phi_9\Phi_{10}'')C_{10} + (\Phi_9''\Phi_{11} - \Phi_9\Phi_{11}'')C_{11} + (\Phi_9''\Phi_{12} - \Phi_9\Phi_{12}'')C_{12} = 0; \\ (\Phi_9'''\Phi_{10} - \Phi_9\Phi_{10}''')C_{10} + (\Phi_9'''\Phi_{11} - \Phi_9\Phi_{11}''')C_{11} + (\Phi_9'''\Phi_{12} - \Phi_9\Phi_{12}''')C_{12} = -\Phi_9. \end{cases} \tag{6}$$

Производные функций (4), определяющие вид коэффициентов этой системы:

$$\Phi_9' = 0; \quad \Phi_{10}' = 1; \quad \Phi_9' = kchkz; \quad \Phi_9' = kshkz;$$

$$\Phi_9'' = 0; \quad \Phi_{10}'' = 0; \quad \Phi_{11}'' = k^2 shkz; \quad \Phi_{12}'' = k^2 chkz;$$

$$\Phi_9''' = 0; \quad \Phi_{10}''' = 0; \quad \Phi_{11}''' = k^3 chkz; \quad \Phi_{12}''' = k^3 shkz.$$

Таким образом, (6) принимает вид

$$\begin{cases} C_{10} + kchkzC_{11} + kshkzC_{12} = 0; \\ \qquad shkzC_{11} + chkzC_{12} = 0; \\ \qquad chkzC_{11} + shkzC_{12} = 1/k^3. \end{cases}$$

Обратный ход метода Гаусса позволяет определить все константы:

$$\begin{cases} C_9 = \dfrac{1}{k^2} z; \\ C_{10} = -\dfrac{1}{k^2}; \\ C_{11} = \dfrac{1}{k^3} chkz; \\ C_{12} = -\dfrac{1}{k^3} shkz. \end{cases} \tag{7}$$

Функция Грина принимает форму:

$$\begin{aligned} G(z-\xi) &= C_9(\xi)\Phi_9(z) + C_{10}(\xi)\Phi_{10}(z) + C_{11}(\xi)\Phi_{11}(z) + C_{12}(\xi)\Phi_{12}(z) = \\ &= \frac{1}{k^2}\xi - \frac{1}{k^2}z + \frac{1}{k^3}chk\xi shkz - \frac{1}{k^3}shk\xi chkz = -\frac{1}{k^2}(z-\xi) + \frac{1}{k^3}shk(z-\xi). \end{aligned} \tag{8}$$

Легко убедиться, что функция (8) обладает всеми свойствами, характерными для функции Грина.

1. $G(z,\xi)=0$ при $z<\xi$.

2. $G(z,\xi)$, как функция от z при фиксированном ξ в $(0,l)$, за исключением точки $z=\xi$, удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению.

3. $G(z,\xi)$ и ее производные по z до n-го порядка включительно непрерывны для $z\in(0,l)$ за исключением точки $z=\xi$, в которой производные по z непрерывны лишь до $(n-2)$ порядка, а $(n-1)$ производная имеет разрыв 1-го рода со скачком

$$\left.\frac{d^{(n-1)}G(z,\xi)}{dz^{(n-1)}}\right|_{z=\xi+0}-\left.\frac{d^{(n-1)}G(z,\xi)}{dz^{(n-1)}}\right|_{z=\xi-0}=\frac{1}{a_0}.$$

4. При $z=\xi$

$$G(\xi,\xi)=G'(\xi,\xi)=...=G^{(n-2)}(\xi,\xi)=0,\quad G^{(n-1)}(\xi,\xi)=\frac{1}{a_0}.$$

5. $G(z,\xi)$ для уравнений с постоянными коэффициентами зависит только от разности двух переменных $(z-\xi)$.

Литература:

1. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. — 568 с.

2. В.А. Баженов, А.Ф. Дащенко, Л.В. Коломиец, В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов / Численные методы в механике. — Одесса, «СТАНДАРТЪ», 2005. — 563 с.