

## ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

*Сурьянинов Н.Г., канд. техн. наук, доцент кафедры «Динамика, прочность машин и сопротивление материалов» Одесского национального политехнического университета.*

**Аннотация.** Рассмотрено решение бигармонического уравнения плоской задачи теории упругости методом граничных элементов. Переход от двумерной задачи к одномерной осуществлен на базе вариационного метода Канторовича-Власова. Для случая свободных краев продольных кромок пластины получены выражения фундаментальных ортонормированных функций метода граничных элементов.

**The summary.** The decision of the biharmonic equation of a flat problem of the theory of elasticity is considered by a method of boundary elements. Transition from a bidimensional problem to one-dimensional is carried out on the basis of Kantorovich – Vlasov variational method. For a case of free edges of longitudinal edges of a plate expressions fundamental orthonormalized functions of a method boundary elements are received.

### Введение

Многие конструкции и их элементы работают в условиях, соответствующих плоской задаче теории упругости. С математической точки зрения это означает необходимость решать краевую задачу для бигармонического уравнения в частных производных. Как известно, краевую задачу проще решать, когда неизвестные функции являются функциями одной переменной и речь идет об обыкновенных дифференциальных уравнениях. Переход от двумерной задачи к одномерной можно осуществить с помощью тригонометрических рядов. Однако такой подход эффективен только при шарнирном опирании пластины на двух противоположных кромках.

В общем случае весьма эффективен вариационный метод Власова-Канторовича. На базе этого метода рассмотрим решение плоской задачи теории упругости методом граничных элементов [1].

### Построение системы ортонормированных фундаментальных функций

Бигармоническое уравнение плоской задачи теории упругости для прямоугольных пластин имеет такую же символическую форму записи, как и уравнение изгиба:

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi(x, y) = q(x, y). \quad (1)$$

Если искать функцию напряжений Д. Эйри в виде бесконечного ряда

$$\varphi = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) X_m(x), \quad (2)$$

то после ряда преобразований при удержании одного члена ряда приходим к уравнению

$$Y^{IV} - 2r^2 Y'' + S^4 Y = q(y). \quad (3)$$

Характеристическое уравнение для соответствующего (3) однородного уравнения имеет вид

$$K^4 - 2r^2 K^2 + S^4 = 0, \quad (4)$$

где  $K_{1-4} = \pm \sqrt{r^2 \pm \sqrt{r^4 - S^4}}$ . (5)

Из (5) следует, что вид фундаментальных функций определяется соотношением между  $r$  и  $S$ , которое, в свою очередь, зависит от граничных условий на продольных кромках.

Вектор состояния плоской задачи

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} N^* \\ S^* \\ EV^* \\ EU^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r^2 Y \\ -t^2 Y' \\ \frac{1}{r^2} [Y''' - (2 + \mu)r^2 Y'] \\ \frac{1}{r^2} (-Y'' - \mu r^2 Y) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Используя аналогию Колосова-Мухелишвили, можно установить соответствие между граничными условиями теории изгиба пластин и граничными условиями плоской задачи теории упругости (табл.1).

Таблица 1

№	Изгиб пластин	Плоская задача
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Рассмотрим случай свободных краев продольных кромок ( $S > r$ ). Корни уравнения (4) будут комплексными:

$$K_{1-4} = \pm \alpha \pm \beta_i;$$

где  $\alpha = \sqrt{\frac{S^2 + r^2}{2}}$ ;  $\beta = \sqrt{\frac{S^2 - r^2}{2}}$ .

Функция  $Y$  имеет вид

$$Y = C_1\Phi_1 + C_2\Phi_2 + C_3\Phi_3 + C_4\Phi_4, \quad (7)$$

где  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$  – гиперголо-тригонометрические функции

$$\Phi_1 = ch\alpha y \sin \beta y;$$

$$\Phi_2 = ch\alpha y \cos \beta y;$$

$$\Phi_3 = sh\alpha y \cos \beta y;$$

$$\Phi_4 = sh\alpha y \sin \beta y.$$

Нетрудно убедиться, что  $\Phi_2(0) = 1, \Phi_1(0) = \Phi_3(0) = \Phi_4(0) = 0$ .

Постоянные  $C_1, C_2, C_3, C_4$  определим из матричного соотношения

$$\overline{\Phi}_0 \overline{C}_i = \overline{P}_0, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

$$\overline{\Phi}_0 = \begin{bmatrix} +r^2\Phi_1(0); & +r^2\Phi_2(0); & +r^2\Phi_3(0); & +r^2\Phi_4(0); \\ +t^2\Phi_1'(0); & +t^2\Phi_2'(0); & +t^2\Phi_3'(0); & +t^2\Phi_4'(0); \\ \frac{1}{r^2}\Phi_1''(0) - (2+\mu)\Phi_1'(0); & \frac{1}{r^2}\Phi_2''(0) - (2+\mu)\Phi_2'(0); & \frac{1}{r^2}\Phi_3''(0) - (2+\mu)\Phi_3'(0); & \frac{1}{r^2}\Phi_4''(0) - (2+\mu)\Phi_4'(0); \\ \frac{1}{r^2}\Phi_1''(0) + \mu\Phi_1; & \frac{1}{r^2}\Phi_2''(0) + \mu\Phi_2; & \frac{1}{r^2}\Phi_3''(0) + \mu\Phi_3; & \frac{1}{r^2}\Phi_4''(0) + \mu\Phi_4 \end{bmatrix}.$$

$$\overline{C}_i = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}; \quad \overline{P}_0 = \begin{bmatrix} -N_o \\ -S_o \\ EV_o \\ -EU_o \end{bmatrix};$$

Вектор-столбец  $\overline{P}_0$  содержит обобщенные кинематические и статические факторы.

Уравнение для определения постоянных  $C_1, C_2, C_3, C_4$  принимает вид

$$\begin{bmatrix} 0 & r^2 & 0 & 0 \\ t^2\beta & 0 & t^2\alpha & 0 \\ \frac{S^2 - \mu r^2}{r^2}\beta & 0 & -\frac{S^2 + \mu r^2}{r^2}\alpha & 0 \\ 0 & 1 + \mu & 0 & \frac{2\alpha\beta}{r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -N_o \\ -S_o \\ EV_o \\ -EU_o \end{bmatrix}. \quad (8)$$

В результате решения уравнения (8) получим

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{Er^2}{2S^2\beta}V_o - \frac{S^2 + \mu r^2}{2S^2t^2\beta}S_o \\ C_2 &= -N_o / r^2 \\ C_3 &= -\frac{Er^2}{2S^2\alpha}V_o - \frac{S^2 - \mu r^2}{2S^2t^2\alpha}S_o \\ C_4 &= \frac{(1+\mu)}{2\alpha\beta}N_o - \frac{Er^2}{2\alpha\beta}U_o \end{aligned} \right\}. \quad (9)$$

Вычислив первые три производные (7) с учетом (9) после подстановки в вектор состояния плоской задачи (6), найдем все фундаментальные ортонормированные функции задачи:

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= \Phi_2 - \frac{r^2(1+\mu)}{2\alpha\beta} \Phi_4; \\ A_{12} &= \frac{r^2(S^2 + \mu r^2)}{2S^2 t^2 \beta} \Phi_1 + \frac{r^2(S^2 - \mu r^2)}{2S^2 t^2 \alpha} \Phi_3; \\ A_{13} &= \frac{Er^4}{2S^2 \alpha} \Phi_3 - \frac{Er^4}{2S^2 \beta} \Phi_1 = \frac{Er^4}{2\alpha\beta S^2} [-\alpha\Phi_1 + \beta\Phi_3]; \\ A_{14} &= \frac{Er^4}{2\alpha\beta} \Phi_4 \end{aligned} \right\};$$

$$\left. \begin{aligned} A_{21} &= \frac{t^2(S^2 - \mu r^2)}{2r^2 \alpha} \Phi_3 - \frac{t^2(S^2 + \mu r^2)}{2r^2 \beta} \Phi_1; \\ A_{22} &= \frac{r^2(1+\mu)}{2\alpha\beta} \Phi_4 + \Phi_2; \\ A_{23} &= -\frac{Er^2 t^2}{2\alpha\beta} \Phi_4; \\ A_{24} &= \frac{Er^2 t^2}{2\beta} \Phi_1 - \frac{Er^2 t^2}{2\alpha} \Phi_3 \end{aligned} \right\};$$

$$\left. \begin{aligned} A_{31} &= \frac{S^4 - \mu^2 r^4 - 2r^2 S^2(1+\mu)}{2\beta r^4} \Phi_1 + \frac{S^4 - \mu^2 r^4 + 2r^2 S^2(1+\mu)}{2\alpha r^4} \Phi_3; \\ A_{32} &= \frac{S^4 + \mu(2+\mu)r^4}{2\alpha\beta t^2 r^2} \Phi_4; \\ A_{33} &= E\Phi_2 - \frac{(1+\mu)Er^2}{2\alpha\beta} \Phi_4; \\ A_{34} &= \frac{E(S^2 + \mu r^2)}{2\beta} \Phi_1 - \frac{E[S^2 + (4+\mu)r^2]}{2\alpha} \Phi_3 \end{aligned} \right\};$$

$$A_{41} = \frac{S^4 + (1+\mu)\mu r^4 + \mu^4}{2\alpha\beta r^4} \Phi_4;$$

$$A_{42} = -\left[ \frac{S^4 + (2+\mu)\mu r^4}{2S^2 t^2 \beta r^2} \Phi_1 + \frac{S^4 + (2+\mu)\mu r^4}{2S^2 t^2 \alpha r^2} \Phi_3 \right];$$

$$A_{43} = \frac{E(S^2 + \mu r^2)}{2S^2 \beta} \Phi_1 + \frac{E(S^2 - \mu r^2)}{2S^2 \alpha} \Phi_3;$$

$$A_{44} = -\left[ E\Phi_2 + \frac{Er^2(1-\mu)}{2\alpha\beta} \Phi_4 \right]$$

Вычисленные фундаментальные ортонормированные функции позволяют теперь, следуя обычному алгоритму метода граничных элементов [1], определить все параметры вектора состояния плоской задачи теории упругости.

#### **Литература**

1. Баженов В.А., Дащенко А.Ф., Коломиец Л.В., Оробей В.Ф. Строительная механика / Применение МГЭ. — Одесса: Астропринт, 2001. — 288 с.