

УДК 539.3

В.Ф.Оробей, д-р техн. наук, проф., Н. Г. Сурьянинов, канд. техн. наук, доц.,
Д. В. Лазарева, специалист (Одесский национальный политехнический университет)

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ МЕТОДАМИ ГРАНИЧНЫХ И КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Приведен сравнительный анализ результатов решения задач динамики стержневых систем методами граничных и конечных элементов. Дана оценка точности спектра частот и форм собственных колебаний. Сформулированы выводы по практическому применению двух наиболее эффективных методов расчета стержневых систем.

Задачи определения спектра частот и построения форм собственных колебаний стержневых систем является актуальными и важными для различных отраслей промышленности и строительства. Для их решения разработано множество методов, среди которых можно выделить метод граничных элементов (МГЭ) [1], метод конечных элементов (МКЭ), методы сил и перемещений [2]. К наиболее мощным и эффективным методам решения задач динамики относят МГЭ и МКЭ. Поскольку МКЭ развит раньше, чем МГЭ, то рынок расчетных услуг предлагает множество компьютерных пакетов реализации МКЭ. К числу самых современных пакетов можно отнести системы SCAD и ANSYS [3,4]. Вызывает определённый интерес сопоставление результатов решения задач динамики стержневых систем по МГЭ и МКЭ, которые довольно трудно найти в литературе. В этой связи рассмотрим стержневую систему в виде неразрезной балки с линейно неподвижными узлами (рис. 1).

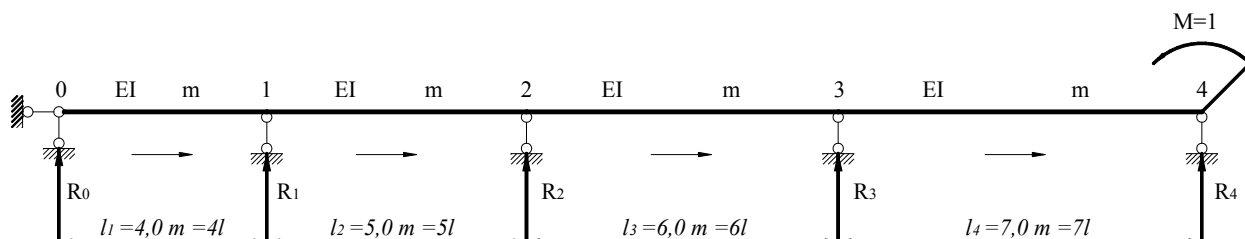


Рис.1

Определим для неё спектр частот и формы собственных колебаний по МГЭ и МКЭ (система ANSYS).

Для поиска частот собственных колебаний нужно найти корни нелинейного уравнения

$$|A_*(\omega)| = 0, \quad (3)$$

которые обычно представляются в форме

$$\omega_i = \frac{a_i}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \left[\frac{1}{сек} \right], \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

где i — номер тона колебаний, a_i — коэффициент собственной частоты.

Их число теоретически бесконечно. Корни уравнения (3) удобно определять в среде MATLAB, которая позволяет получать численные результаты и необходимые графики. Соответствующие программы можно найти на наших сайтах www.odsopromat.narod.ru, www.listlib.narod.ru.

Пакет МКЭ (ANSYS) определяет так называемые технические частоты по формуле

$$\omega_i = 2\pi \frac{c_i}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \left[\frac{рад}{сек} \right], \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

Поэтому в табл. 1 по МГЭ представлены 20 собственных частот в виде коэффициента a_i ($l=EI=m=1$) и в абсолютных значениях (5) при $E=2 \cdot 10^{11} Па$; $I=bh^3/12$; $b=0,1 м$; $h=0,2 м$; $\gamma=7800 кг/м^3$; $\mu=0,3$; $l=1,0 м$; $m=\gamma bh$.

Для построения форм собственных колебаний можно воспользоваться соотношениями метода начальных параметров отдельных граничных элементов (локальная система координат)

$$EIv_k(x) = EIv_k(0) \cdot C_{11}(x) + EI\varphi_k(0) \cdot C_{12}(x) - M_k(0) \cdot C_{13}(x) - Q_k(0) \cdot C_{14}(x), \quad (6)$$

где k — номер граничного элемента; $x \in [0; l_k]$.

Возбуждение собственных колебаний выполняется с помощью внешнего воздействия, например в виде единичного момента в узле 4. Тогда в нулевом векторе правых частей B слагаемое $B(15,1)=1$ и нужно определить граничные параметры балки при собственной частоте ω_i из уравнения

$$A_*(\omega_i) \cdot X_* = -B. \quad (7)$$

Вектор начальных и конечных параметров X_* должен нормироваться относительно какого-либо граничного параметра. Здесь это может быть

$EI\varphi^{3-4}(l)=X(9,1)$. По относительным начальным параметрам формы собственных колебаний строятся в среде MATLAB в соответствии с (6). 1; 5; 11; 17 и 24 формы по МГЭ представлены на рис.2.

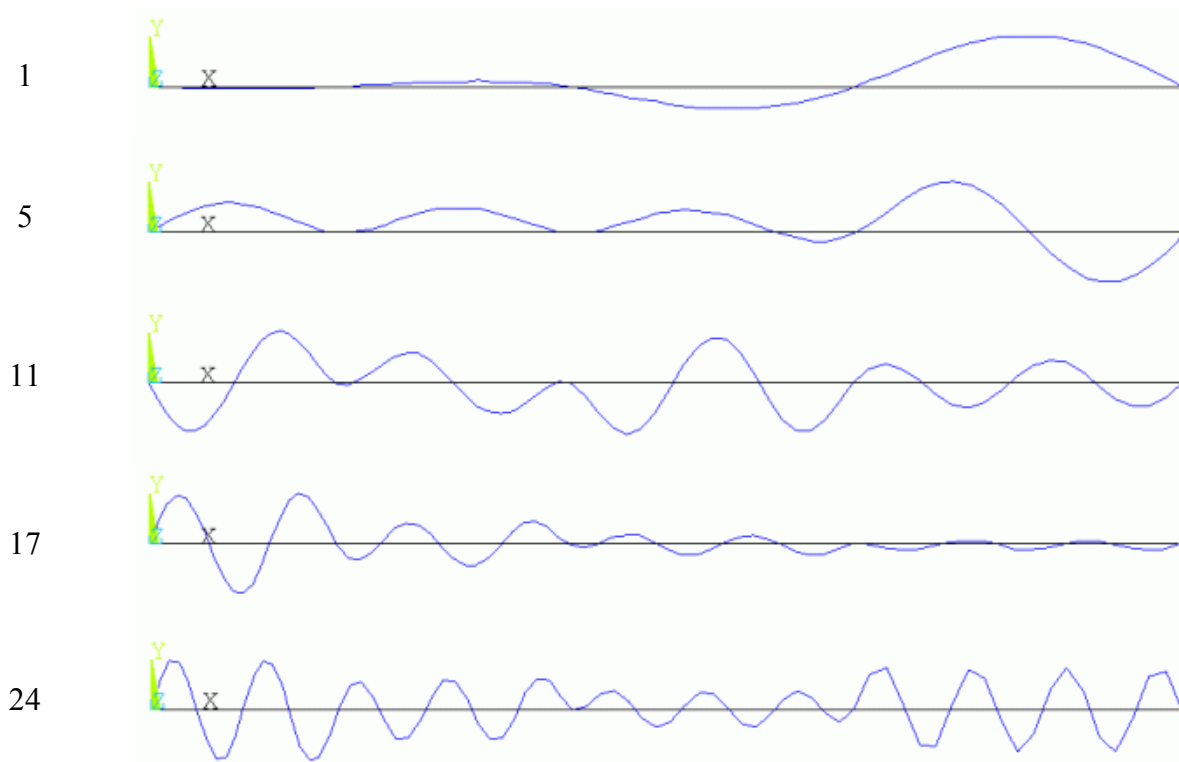


Рис.2

Решение по МКЭ (система ANSYS)

Здесь реализуется классическая схема МКЭ, когда каждый пролет разбивается на равное число конечных элементов. Матрица жесткости формируется на основе фундаментальных функций А.Н.Крылова. Частоты собственных колебаний определяются из векового уравнения

$$|K^{-1} \cdot M - \lambda E| = 0, \quad (8)$$

где K^{-1} – обратная матрица жесткости (матрица податливости) системы в глобальной системе координат, M – матрица эквивалентных масс в глобальной системе координат; $\lambda = 1/\omega^2$; E – единичная матрица.

Вектор перемещений (собственные формы) определяется из уравнения

$$V = \lambda E + B_1, \quad (9)$$

где $B_1 = A - S_p A \cdot E$; $A = K^{-1} \cdot M$.

Частоты по МКЭ при различных сетках дискретизации представлены в табл.1, а формы колебаний — на рис.2. Формы колебаний по МКЭ и МГЭ идентичны.

Сравнительный анализ результатов

В качестве эталонных результатов спектра частот нужно принять результаты по МКЭ при сетке $4 \cdot 25 = 100$ КЭ. Из табл.1 следует, что значения частот после сетки $4 \cdot 10 = 40$ КЭ практически не уточняются. Таким образом, для точного определения частот собственных колебаний призматического стержня по МКЭ достаточно разбиения его на 10 КЭ, что приводит к решению системы линейных уравнений в 5 раз большей, чем в МГЭ. Для данной балки это 80 и 16 уравнений соответственно. В методах сил и перемещений потребуется составить системы из 3 уравнений. Однако при этом существенно усложнится логика формирования коэффициентов податливости и жесткости, а определитель матриц коэффициентов (частотные уравнения) будут содержать точки разрывов 2-го рода [2], что также существенно усложняет поиск спектра частот. Мало заметная разница между частотами по МГЭ и МКЭ наблюдается только с 15-й частоты, что объясняется погрешностью в определении корней уравнения (3) при больших аргументах фундаментальных функций. Здесь наглядно проявляются замечательные свойства системы ортонормированных фундаментальных функций. Даже у 20-й частоты по МГЭ погрешность меньше 2,0%, т.е. алгоритм МГЭ весьма устойчив при погрешности исходных данных (неточности значений фундаментальных функций при больших аргументах). Этому факту есть мотивированное обоснование. При формировании матрицы A^* (2) выполняется стыковка задач Коши отдельных граничных элементов (стержней) при условии непрерывности статических и кинематических параметров и точного выполнения краевых условий расчетной схемы.

Этот процесс осуществляется путем квазидиагонализации матрицы A^* , обнулении ее отдельных столбцов и введении компенсирующих элементов, описывающих топологию системы. Результат такого преобразования наглядно иллюстрируется данными табл. 1.

Отметим также, что матрица A^* (2) представляет собой результат решения задачи Коши всей балки. Согласно теореме математики решение задачи Коши существует и оно единственно. Поэтому спектр МГЭ не

содержит фиктивных частот и не пропускаются действительные частоты. В спектре МКЭ фиктивные частоты появляются (см. табл.1), а формы колебаний этих частот представляются практически прямыми линиями, совпадающими с упругой линией балки. Таким образом, можно заключить, что МГЭ имеет более высокие показатели эффективности алгоритма по сравнению с МКЭ, а другие методы значительно уступают рассмотренным методам.

Таблица 1

Собственные частоты по МКЭ и МГЭ с оценкой погрешности вычислений

Номер тона колеб. по МКЭ	МКЭ, 100 КЭ	МКЭ, 40 КЭ		МКЭ, 8 КЭ		МГЭ, 4 ГЭ		
		Частоты	Погрешность, Δ, %	Частоты	Погрешность, Δ, %	Коэфф. a в (4)	Частоты по (5)	Погрешность Δ, %
1	11,020	11,020	0,000	11,075	0,500	0,2370	11,02746	0,068
2	18,887	18,887	0,000	19,043	0,826	0,4061	18,89558	0,045
3	27,117	27,118	0,004	27,383	0,981	0,5833	27,14059	0,087
4	39,584	39,585	0,003	40,446	2,178	0,8517	39,62907	0,114
5	42,711	42,716	0,012	47,679	11,632	0,9191	42,76515	0,127
6	57,543	57,547	0,007	57,672	0,224	-	-	-
7	63,703	63,713	0,016	74,144	16,390	1,3719	63,83365	0,205
8	88,422	88,451	0,033	104,20	17,844	1,9061	88,68965	0,303
9	94,563	94,602	0,041	127,11	34,418	2,0385	94,85014	0,304
10	127,20	127,24	0,031	151,74	19,292	2,7455	127,74641	0,430
11	136,00	136,08	0,059	-	-	2,9350	136,5637	0,414
12	160,91	161,17	0,162	-	-	3,4765	161,75938	0,528
13	172,65	172,74	0,052	-	-	-	-	-
14	191,11	191,26	0,078	-	-	4,1329	192,30126	0,623
15	225,21	225,71	0,222	-	-	4,8767	226,90981	0,755
16	250,74	251,64	0,359	-	-	5,4329	252,78945	0,817
17	274,26	274,50	0,088	-	-	5,9495	276,8265	0,936
18	287,84	288,22	0,132	-	-	-	-	-
19	321,08	322,09	0,315	-	-	6,9757	324,57497	1,089
20	342,21	344,02	0,529	-	-	7,4379	346,08086	1,131
21	367,17	-	-	-	-	7,9833	371,45798	1,168
22	403,15	-	-	-	-	-	-	-
23	452,09	-	-	-	-	9,8697	459,23100	1,580
24	466,23	-	-	-	-	10,1789	473,61788	1,585

Все расчеты данной работы выполнялись в межкафедральной лаборатории “Вычислительная механика” Одесского национального политехнического университета.

Литература

1. Баженов В.А., Дашченко А. Ф., Коломиец Л. В., Оробей В. Ф.
Строительная механика. Специальный курс. Применение МГЭ.- Одесса:
Астропринт, 2001.- 288с.
2. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений/ Под ред.
А. Ф. Смирнова.- М.: Стройиздат, 1984.- 415с.
3. Баженов В.А., Криксунов Е.З., Перельмутер А.В., Шишов О.В.
Информатика. Інформаційні технології в будівництві. Системи
автоматизованого проектування: Підручник для студ. вищих навч. закл.-
Київ: Каравела, 2004.- 360с.
4. Чигарев А. В., Кравчук А. С., Смалюк А. Ф. ANSYS для инженеров.
Справочное пособие. - М: Машиностроение, 2004.- 512с.

Реферат

В статье построена точная модель поперечных колебаний неразрезной балки по алгоритму метода граничных элементов. Приведен сравнительный анализ результатов решения задач динамики стержневых систем методами граничных и конечных элементов. Дана оценка точности спектра частот и форм собственных колебаний. Сформулированы выводы по практическому применению двух наиболее эффективных методов расчета стержневых систем.

V. Orobey, N. Surianinov, D. Lazareva
MODELING of the PROBLEMS SPEAKERS PIVOTAL SYSTEMS
by METHODS BOUNDERY And FINITE ELEMENTS

В.Ф. Оробей, Н. Г. Сурьянинов, Д. В. Лазарева

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ
МЕТОДАМИ ГРАНИЧНЫХ И КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ