ВІСНИК

ОДЕСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО МОРСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

21

Міністерство освіти і науки України

ВІСНИК

ОДЕСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО МОРСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Збірник наукових праць

ВИПУСК 21

Заснований у 1998 році

Одеса – 2007

УДК 539.3

В.Ф. Оробей
Н.Г. Сурьянинов
А.М. Лимаренко

КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

Приведены решения задачи Коши крутильных колебаний тонкостенных стержней с учетом всех членов уравнения В.З. Власова. Показано применение этих решений для задач динамики крутильных колебаний тонкостенных стержневых систем по алгоритму метода граничных элементов. Результаты решений приведены в численной и визуальных формах.

***Ключевые слова**: Matlab, метод граничных элементов, тонкостенный стержень, численные методы, крутильные колебания.*

Уравнение и параметры крутильных колебаний прямолинейного тонкостенного стержня открытого профиля с двумя осями симметрии имеют вид [1]

$$EI_\omega \frac{\partial^4 \bar\theta(x,t)}{\partial x^4} - GI_{кр}\frac{\partial^2 \bar\theta(x,t)}{\partial x^2} - \rho I_\omega \frac{\partial^4 \bar\theta(x,t)}{\partial z^2 \partial t^2} + \rho\left(I_z + I_y\right)\frac{\partial^2 \bar\theta(x,t)}{\partial t^2} = \overline{m_A}(x,t),$$

где $GI_{кр}\bar\theta(x,t)$ – динамический угол поворота сечения стержня в масштабе крутильной жесткости вокруг центра изгиба, совпадающего в этом случае с центром тяжести сечения;

$GI_{кр}\bar\theta'(x,t) = \overline{M}_{кр}(x,t)$ – динамический крутящий момент в сечении, возникающий от неравномерного распределения по толщине стенок касательных напряжений;

$EI_\omega \bar\theta''(x,t) = -\overline{B_\omega}(x,t)$ – динамический бимомент, вызванный нормальными напряжениями от депланации сечения;

$EI_\omega \bar\theta'''(x,t) = -\overline{M_\omega}(x,t)$ – динамический изгибно-крутящий момент, вызванный осевыми сдвигающими силами, действующими по касательной к дуге контура сечения;

$$\overline{L}(x,t) = \overline{M}_\omega(x,t) + \overline{M}_{кр}(x,t) = -EI_\omega \bar\theta'''(x,t) + GI_{кр}\bar\theta'(x,t)$$ –

полный крутящий момент относительно центра изгиба.

В данном уравнении третье слагаемое учитывает инерционные силы от продольных секториальных перемещений точек стержня. Рассмотрим гармонические колебания, для которых можно применить метод Фурье разделения переменных следующим образом:

$$\overline{\theta}(x,t)=\theta(x)\sin\lambda t;\ \overline{m}(x,t)=m(x)\sin\lambda t,$$

где λ – частота гармонических колебаний.

Если подставить последние соотношения в уравнение колебаний и выражения для параметров, то получим исходные данные для задачи Коши крутильных колебаний тонкостенного стержня с двумя осями симметрии в амплитудном состоянии

$$\theta^{IV}(x)+2r^2\theta''(x)-s^4\theta(x)=\frac{k^2 m(x)}{GI_{кр}}; \tag{1}$$

$$GI_{кр}\theta(x);\ GI_{кр}\theta'(x);\ B_\omega(x)=-\frac{GI_{кр}}{k^2}\theta''(x);\ M_\omega(x)=-\frac{GI_{кр}}{k^2}\theta'''(x),$$

где $r^2=\left(\dfrac{\rho\lambda^2}{E}-k^2\right)\Big/2;\ s^4=\dfrac{\rho\lambda^2\left(I_z+I_y\right)}{EI_\omega};$

$k^2=\dfrac{GI_{кр}}{EI_\omega}$ – изгибно-крутильная характеристика.

По стандартному алгоритму [2] решение задачи Коши крутильных колебаний предстанет следующим образом:

$$\begin{bmatrix} GI_{kp}\theta(x) \\ GI_{kp}\theta'(x) \\ B_\omega(x) \\ M_\omega(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & -A_{13} & -A_{14} \\ A_{21} & A_{11} & -A_{23} & -A_{13} \\ -A_{31} & -A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ -A_{41} & -A_{31} & A_{43} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} GI_{kp}\theta(0) \\ GI_{kp}\theta'(0) \\ B_\omega(0) \\ M_\omega(0) \end{bmatrix} + \int_0^x \begin{bmatrix} A_{14}(x-\xi) \\ A_{13}(x-\xi) \\ -A_{34}(x-\xi) \\ -A_{33}(x-\xi) \end{bmatrix} m(\xi)d\xi \tag{2}$$

где фундаментальные ортонормированные функции имеют вид

$$A_{11}=\frac{\beta^2 ch\alpha x+\alpha^2\cos\beta x}{\alpha^2+\beta^2};\ A_{12}=\frac{\beta^3 sh\alpha x+\alpha^3\sin\beta x}{\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)};$$

$$A_{13}=\frac{k^2\left(ch\alpha x-\cos\beta x\right)}{\alpha^2+\beta^2};\ A_{14}=\frac{k^2\left(sh\alpha x-\sin\beta x\right)}{\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)};\ A_{21}=\left(\frac{\alpha\beta}{k}\right)^2\cdot A_{14};$$

$$A_{23}=\frac{k^2(\alpha sh\alpha x+\beta\sin\beta x)}{\alpha^2+\beta^2};$$

$$A_{31}=\frac{(\alpha\beta)^2}{k^4}\cdot A_{13};\ A_{32}=\frac{\alpha\beta^2 sh\alpha x-\alpha^2\beta\sin\beta x}{k^2(\alpha^2+\beta^2)}=\frac{(\alpha\beta)^2}{k^4}\cdot A_{14}; \tag{3}$$

$$A_{33}=\frac{\alpha^2 ch\alpha x+\beta^2\cos\beta x}{\alpha^2+\beta^2};\ A_{34}=\frac{\alpha sh\alpha x+\beta\sin\beta x}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{A_{23}}{k^2};$$

$$A_{41}=\left(\frac{\alpha\beta}{k}\right)^2\frac{\alpha sh\alpha x+\beta\sin\beta x}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{(\alpha\beta)^2}{k^4}\cdot A_{23};\ A_{43}=\frac{\alpha^3 sh\alpha x-\beta^3\sin\beta x}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Элементы матрицы нагрузки запишутся следующим образом:

$$B_{11}(x)=B_\omega\cdot A_{13}(x-a_1)_+ +M_{кр}\cdot A_{14}(x-a_2)_+ +m\cdot\left[A_{15}(x-a_3)_+ -A_{15}(x-a_4)_+\right];$$

$$B_{21}(x)=B_\omega\cdot A_{23}(x-a_1)_+ +M_{кр}\cdot A_{13}(x-a_2)_+ +m\cdot\left[A_{14}(x-a_3)_+ -A_{14}(x-a_4)_+\right];$$

$$B_{31}(x)=B_\omega\cdot A_{33}(x-a_1)_+ +M_{кр}\cdot A_{34}(x-a_2)_+ +m\cdot\left[A_{13}(x-a_3)_+ -A_{13}(x-a_4)_+\right]/k^2; \tag{4}$$

$$B_{41}(x)=B_\omega\cdot A_{43}(x-a_1)_+ +M_{кр}\cdot A_{33}(x-a_2)_+ +m\cdot\left[A_{34}(x-a_3)_+ -A_{34}(x-a_4)_+\right];$$

$$A_{15}=\frac{k^2\left[\beta^2(ch\alpha x-H(\alpha x))+\alpha^2(\cos\beta x-H(\beta x))\right]}{(\alpha\beta)^2(\alpha^2+\beta^2)},$$

где B_ω – сосредоточенный бимомент; M_{kp} – сосредоточенный крутящий момент; m – распределенный крутящий момент.

Рассмотрим тонкостенные конструкции с двутавровым сечением. Геометрические параметры сечения следующие:

$$I_z=68479{,}33\,см^4;\ I_y=4504{,}83\,см^4;\ I_\omega=3{,}91\cdot10^6\,см^6;$$

$$I_{кр}=39{,}792\,см^4;\ A=118{,}0\,см^2.$$

Модули упругости $E=2\cdot10^4\ \dfrac{kH}{см^2};\ G=0{,}4E=0{,}8\cdot10^4\ \dfrac{kH}{см^2}.$

Плотность материала стержня $\rho = 7800\dfrac{кг}{м^3}$, длина стержня $l = 10м$. Изгибно-крутильная характеристика сечения $k = 0{,}20176 м^{-1}$.

Уравнение крутильных колебаний (2) позволяет решать по алгоритму МГЭ задачи динамики упругих конструкций любой структуры, включая неразрезные балки и рамы. В качестве примера рассмотрим задачи динамики неразрезной балки по рис. 1.

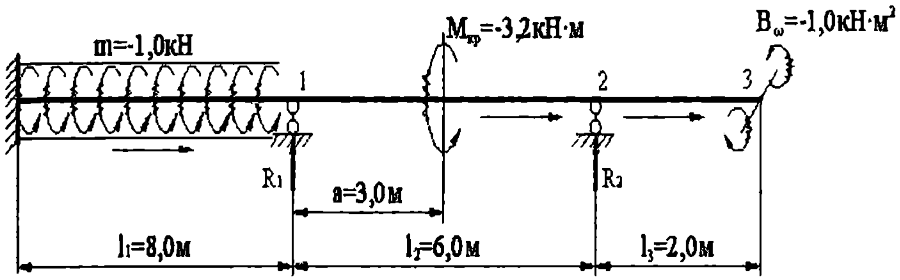


Рис.1. Расчетная схема неразрезной балки

Балка имеет поперечное сечение двутавра и нагружена динамической крутящей нагрузкой. Разбиваем ее на три стержня, нумеруем узлы и стрелками указываем начало и конец каждого элемента.

Матрицы X_*, Y, B с учетом краевых условий, уравнений связи между граничными параметрами в узлах и заданной нагрузки запишутся следующим образом:

	$X_* =$	$; Y =$	$; B =$
1	$GI_{kp}\theta_{(0)}^{0-1} = 0; M_\omega^{0-1}(l)$	$GI_{kp}\theta_{(l)}^{0-1} = 0$	$-B_{11}^{0-1}(l)$
2	$GI_{kp}\theta_{(0)}'^{0-1} = 0; M_\omega^{1-2}(l)$	$GI_{kp}\theta_{(l)}'^{0-1} = GI_{kp}\theta_{(0)}'^{1-2}$	$-B_{21}^{0-1}(l)$
3	$B_\omega^{0-1}(0)$	$B_\omega^{0-1}(l) = B_\omega^{1-2}(0)$	$B_{31}^{0-1}(l)$
4	$M_\omega^{0-1}(0)$	$M_\omega^{0-1}(l)$	$B_{41}^{0-1}(l)$
5	$GI_{kp}\theta_{(0)}^{1-2} = 0; GI_{kp}\theta^{2-3}(l)$	$GI_{kp}\theta_{(l)}^{1-2} = 0$	$-B_{11}^{1-2}(l)$
6	$GI_{kp}\theta_{(0)}'^{1-2}$	$GI_{kp}\theta_{(l)}'^{1-2} = GI_{kp}\theta_{(0)}'^{2-3}$	$-B_{21}^{1-2}(l)$
7	$B_\omega^{1-2}(0)$	$B_\omega^{1-2}(l) = B_\omega^{2-3}(0)$	$B_{31}^{1-2}(l)$
8	$M_\omega^{1-2}(0)$	$M_\omega^{1-2}(l)$	$B_{41}^{1-2}(l)$
9	$GI_{kp}\theta_{(0)}^{2-3} = 0; GI_{kp}\theta_{(l)}'^{2-3}$	$GI_{kp}\theta_{(l)}^{2-3}$	$-B_{11}^{2-3}(l)$
10	$GI_{kp}\theta_{(0)}'^{2-3}$	$GI_{kp}\theta_{(l)}'^{2-3}$	$-B_{21}^{2-3}(l)$
11	$B_\omega^{2-3}(0)$	$B_\omega^{2-3}(l) = 0$	$B_{31}^{2-3}(l)$
12	$M_\omega^{2-3}(0)$	$L_{(l)}^{2-3} = 0 \rightarrow M_\omega^{2-3}(l) = -GI_{kp}\theta_{(l)}'^{2-3}$	$B_{41}^{2-3}(l)$

(5)

Из матрицы X_* видно, что в матрице A_* нужно обнулить 1, 2, 5 и 9 столбцы. На место нулевых строк матрицы X_* переносят независимые граничные параметры

$$M_{\omega}^{0-1}(l), M_{\omega}^{1-2}(l), GI_{кр}\theta^{2-3}(l) \, и \, GI_{кр}\theta'^{2-3}(l).$$

Зависимые параметры также переносятся в матрицу X_* путем введения соответствующих компенсирующих элементов в матрицу A_*. Матричное уравнение МГЭ краевой задачи балки предстанет в виде

$$\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
\hline
1 & & & -A_{13} & -A_{14} & & & & & & & & \\
2 & & & -A_{23} & -A_{13} & & -1 & & & & & & \\
3 & & & A_{33} & A_{34} & & & -1 & & & & & \\
4 & -1 & & A_{43} & A_{33} & & & & & & & & \\
\hline
5 & & & & & & A_{12} & -A_{13} & -A_{14} & & & & \\
6 & & & & & & A_{11} & -A_{23} & -A_{13} & & -1 & & \\
7 & & & & & & -A_{32} & A_{33} & A_{34} & & & -1 & \\
8 & & -1 & & & & -A_{31} & A_{43} & A_{33} & & & & \\
\hline
9 & & & & & -1 & & & & & A_{12} & -A_{13} & -A_{14} \\
10 & & & & & & & & & -1 & A_{11} & -A_{23} & -A_{13} \\
11 & & & & & & & & & & -A_{32} & A_{33} & A_{34} \\
12 & & & & & & & & & 1 & -A_{31} & A_{43} & A_{33} \\
\hline
\end{array}
\cdot
\begin{array}{|c|}
\hline
M_{\omega}^{0-1}(l) \\
M_{\omega}^{1-2}(l) \\
B_{\omega}^{0-1}(0) \\
M_{\omega}^{0-1}(0) \\
\hline
GI_{кр}\theta^{2-3}_{(l)} \\
GI_{кр}\theta'^{2-3}_{(0)} \\
B_{\omega}^{1-2}(0) \\
M_{\omega}^{1-2}(0) \\
\hline
GI_{кр}\theta'^{2-3}_{(l)} \\
GI_{кр}\theta'^{2-3}_{(0)} \\
B_{\omega}^{2-3}(0) \\
M_{\omega}^{2-3}(0) \\
\hline
\end{array}
=
\begin{array}{|c|}
\hline
-B_{11}^{0-1}(l) \\
-B_{21}^{0-1}(l) \\
B_{31}^{0-1}(l) \\
B_{41}^{0-1}(l) \\
\hline
-B_{11}^{1-2}(l) \\
-B_{21}^{1-2}(l) \\
B_{31}^{1-2}(l) \\
B_{41}^{1-2}(l) \\
\hline
-B_{11}^{2-3}(l) \\
-B_{21}^{2-3}(l) \\
B_{31}^{2-3}(l) \\
B_{41}^{2-3}(l) \\
\hline
\end{array}
\qquad (6)$$

Частоты балки (рис. 1) определяют из уравнения $|A_*(\omega)| = 0$, а формы собственных крутильных колебаний строятся по уравнению метода начальных параметров. Для краевой задачи в форме (6) оно примет вид

$$GI_{кр}\theta(x) = -X(1,3)\cdot A_{13}(x) - X(4,1)\cdot A_{14}(x) - R_1 \cdot A_{14}(x - l_1)_+ - R_2 \cdot A_{14}(x - l_1 - l_2)_+, \qquad (7)$$

где реакции опор определяются соотношениями:

$$R_1 = -M_{\omega}^{0-1}(l) + M_{\omega}^{1-2}(0) = -X(1,1) + X(8,1);$$

$$(8)$$

$$R_2 = -M_{\omega}^{1-2}(l) + M_{\omega}^{2-3}(0) = -X(2,1) + X(12,1),$$

а символ «+» в фундаментальных функциях обозначает сплайн-функцию соответствующего аргумента [2]. Поиск частот собственных крутильных колебаний балки привел к следующим значениям:

$$\theta_1 = 3{,}0510 \quad c^{-1};\ \theta_2 = 4{,}2510 \quad c^{-1};\ \theta_3 = 7{,}6510 \quad c^{-1};$$
$$\theta_4 = 10{,}4510 \quad c^{-1};\ \theta_5 = 16{,}6510 \quad c^{-1} \text{ и т.д.} \tag{9}$$

На рис. 2 представлена первая форма колебаний при условии, что

$$GI_{кр}\theta^{2-3}(l) = X(5,1) = 1.$$

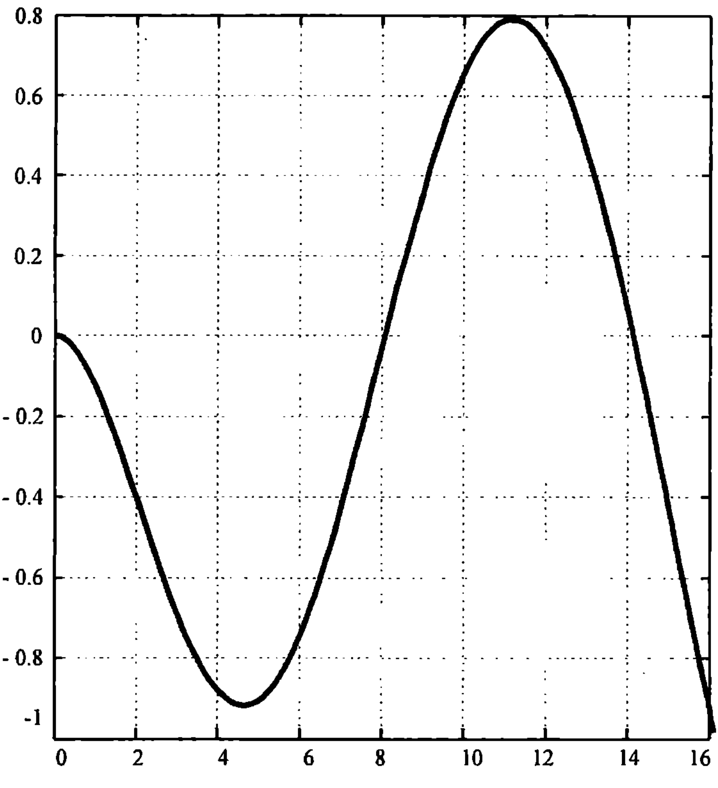
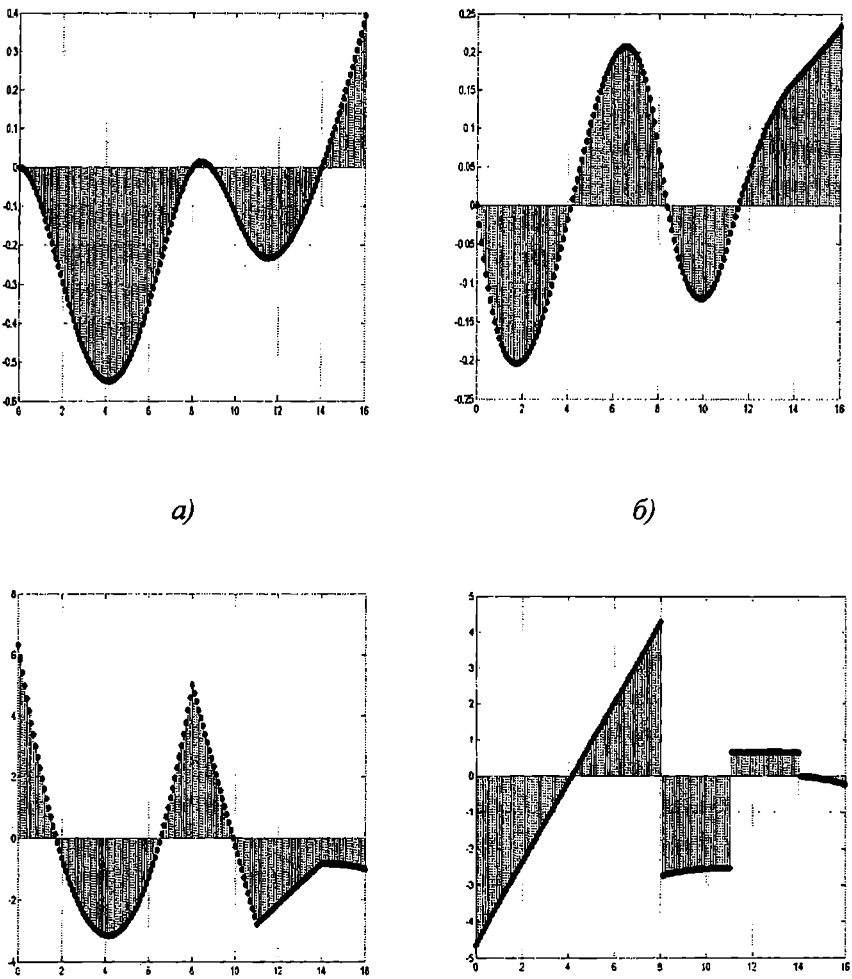


Рис.2. Первая форма колебаний неразрезной балки

Определение напряженно-деформированного состояния балки при вынужденных колебаниях выполняется после решения уравнения (6). Граничные параметры вектора X_* и уравнения задачи Коши (2) позволяют решить данную задачу. Численные значения параметров кручения представлены в таблице, а соответствующие эпюры при частоте вынужденных колебаний $\theta = 0{,}5\theta_1$ показаны на рис. 3.



а) *б)*

в) *г)*

Рис.3. Эпюра:

а – динамических углов поворота $GI_{kp}\theta(x), кНм^2$;

б – динамических крутящих моментов $GI_{kp}\theta'(x), кНм$;

в – динамических изгибно-крутящих моментов $M_{\omega}(x), кНм$;

г – динамических бимоментов $B_{\omega}(x), кНм^2$

Таблица

Численные значения параметров кручения неразрезной балки

Координата x, м	Угол закручивания $GI_{кр}\theta(x)$, $кНм^2$	Производная (крутящий момент) $GI_{кр}\theta'(x)$, $кНм$	Бимомент $B_\omega(x)$, $кНм^2$	Изгибно-крутящий момент $M_\omega(x)$, $кНм$	Полный крутящий момент $L(x)$, $кНм$
0,0	0,0	0,0	6,33	-4,65	-4,65
1,0	-0,10	-0,17	2,28	-3,47	-3,64
2,0	-0,30	-0,20	-0,63	-2,36	-2,56
3,0	-0,47	-0,13	-2,44	-1,26	-1,40
4,0	-0,55	-0,02	-3,15	-0,16	-0,18
5,0	-0,50	0,11	-2,76	0,94	1,04
6,0	-0,35	0,19	-1,28	2,03	2,22
7,0	-0,15	0,20	1,30	3,13	3,33
8,0	0,0	0,07	5,0	-2,76	-2,69
9,0	-0,01	-0,08	2,32	-2,62	-2,69
10,0	-0,12	-0,12	-0,25	-2,55	-2,67
11,0	-0,22	-0,06	-2,79	0,66	0,60
12,0	-0,22	0,04	-2,13	0,66	0,70
13,0	-0,14	0,12	-1,47	0,66	0,78
14,0	0,0	0,16	-0,81	-0,01	0,15
15,0	0,18	0,2	-0,85	-0,08	0,12
16,0	0,39	0,23	-0,0	-0,23	-0,00

Из представленных результатов видно, что с помощью алгоритма МГЭ на базе решений задачи Коши можно весьма эффективно решать разнообразные задачи динамики крутильных колебаний тонкостенных конструкций, которые широко распространены в различных объектах машиностроения, судостроения, авиастроения и строительства.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. – М.: Физматгиз, 1959. – 568 с.*
2. *Баженов В.А., Дащенко А.Ф., Коломиец Л.В., Оробей В.Ф. Строительная механика. Применение метода граничных элементов. – Одесса: Астропринт, 2001. – 288 с.*

Надійшла 10.12.06