

УДК 539.3..681.3.004

В.Ф. Оробей, докт. техн. наук, проф., Одес. нац. политехн. ун-т,
Н.Г. Сурьянинов, канд. техн. наук, доц., Одес. нац. политехн. ун-т,
Д.В. Лазарева, бакалавр, Одес. нац. политехн. ун-т

РАСЧЕТ НЕРАЗРЕЗНОЙ БАЛКИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ И ДИНАМИКУ ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ

В.Ф. Оробей, Н.Г. Сур'янінов, Д.В. Лазарева.

Розрахунок нерозрізної балки на стійкість і динаміку чисельними методами. Знайдено критичні сили та відповідні їм форми втрати стійкості, а також власні частоти і форми коливань нерозрізної балки двома чисельними методами — граничних і кінцевих елементів. Здійснено порівняння отриманих результатів.

V.F. Orobey, N.G. Surianinov, D.V. Lazareva.

Calculation of not cutting beam on stability and dynamics numerical methods. Critical forces and forms of loss of stability corresponding to them, and also own frequencies and forms of fluctuations of not cutting beam by two numerical methods - boundary and final elements are determined. Comparison of the received results is executed.

Вопросы точного определения собственных значений упругих систем имеют большое практическое значение и весьма актуальны, несмотря на наличие мощных средств численного анализа. Связано это с формированием математических моделей. В методе конечных элементов такие модели приближенны и точность достигается дроблением сетки конечных элементов. Методы сил, перемещений, начальных параметров позволяют создать точные математические модели, но определители этих методов содержат точки разрывов 2-го рода уже после второго собственного значения (частоты или критической силы), что существенно сказывается на точности определения старших собственных значений.

В численно-аналитическом варианте метода граничных элементов [1] можно составить такие модели, где будут отсутствовать недостатки и аккумулироваться преимущества существующих методов расчета. Собственные значения и соответствующие им собственные формы по данному варианту МГЭ определяются из матричных уравнений

$$|A_*(F_{kp}, \omega, l)| = 0, \quad (1)$$

$$A_*(F_{kp}, \omega, l) \cdot X_*(0, l) = E, \quad (2)$$

где $A_*(F_{kp}, \omega, l)$ — квадратная матрица граничных значений фундаментальных функций

соответствующего дифференциального уравнения задачи;

$X_*(0, l)$ — вектор начальных и конечных граничных параметров системы;

E — единичная матрица-вектор;

F_{kp} — критические силы потери устойчивости;

ω — частоты собственных колебаний;

l — длины элементов конструкции.

В данном представлении уравнение (1) не содержит точек разрыва 2-го рода (отбрасываются недостатки методов начальных параметров, сил и перемещений), а собственные значения F_{kp} и ω определяются точно в рамках принятых гипотез и допущений (отбрасывается недостаток МКЭ). Использование уравнения (2) позволяет сравнительно просто строить формы собственных значений упругих систем, привлекая, например, среду моделирования и визуализации расчетов MATLAB [2].

Таким образом, применение МГЭ снимает ряд проблем при решении задач устойчивости и динамики различных упругих систем. Однако вызывает научный и

практический интерес сравнение результатов МГЭ и МКЭ при решении задач устойчивости и динамики. Таких данных в литературе весьма мало и они касаются лишь специфических задач. Необходима более обширная картина такого сопоставления по ряду конструкций.

В качестве первого шага на этом пути авторами выбрана неразрезная трехпролетная балка с консолью (рис. 1), для которой определялись первые пять критических сил и соответствующие им формы потери устойчивости.

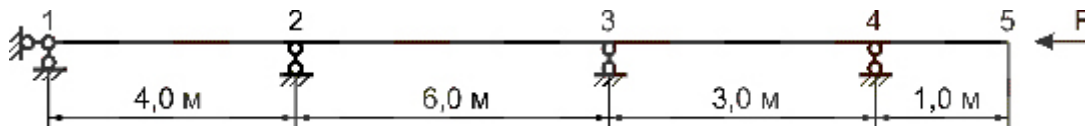


Рис. 1. Расчетная схема для исследования устойчивости неразрезной балки

Расчеты выполнялись методом граничных элементов в среде MATLAB и методом конечных элементов в программном комплексе ANSYS. При использовании МКЭ каждый участок балки аппроксимировался последовательно двумя, пятью и десятью конечными элементами. Значения критических сил, вычисленные по обоим методам и относительная погрешность вычислений представлены в таблице 1.

Таблица 1

Значения критических сил ($H \cdot 10^{-6}$) по методам граничных и конечных элементов

№ силы	МГЭ	МКЭ 2 КЭ	Погр. %	МКЭ 5 КЭ	Погр. %	МКЭ 10 КЭ	Погр. %
1	1,47894	1,4879	0,61	1,4793	0,02	1,4790	0,004
2	2,17521	2,2048	1,36	2,1761	0,04	2,1753	0,004
3	3,50344	3,5917	2,52	3,5090	0,16	3,5038	0,010
4	5,39596	6,5578	21,53	5,4167	0,38	5,3975	0,070
5	8,10133	9,6708	19,37	8,1663	0,80	8,1061	0,060

Как следует из приведенной таблицы, хорошее совпадение результатов расчета в ANSYS с результатами расчета методом граничных элементов достигается уже при разбиении каждого пролета неразрезной балки на 5 конечных элементов, а при разбиении на 10 элементов различие вообще становится пренебрежимо малым.

Соответствующие вычисленным критическим силам формы потери устойчивости представлены на рис. 2.

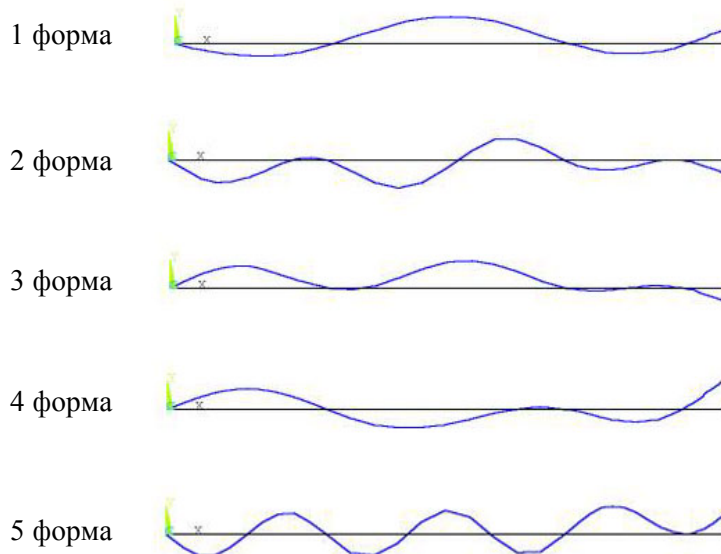


Рис. 2. Формы потери устойчивости неразрезной балки

Вторым исследуемым в работе объектом является двухпролетная неразрезная балка с бесконечным числом степеней свободы (рис. 3), для которой определялись собственные частоты и формы колебаний методами граничных и конечных элементов с последующей оценкой погрешности вычислений.

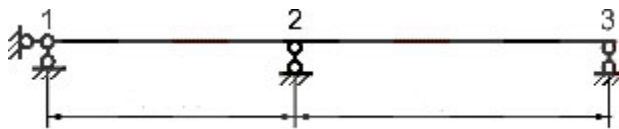


Рис. 3. Двухпролетная неразрезная балка с распределенными параметрами

Кроме того, значения двух низших частот, полученных МГЭ и МКЭ, сравнивались с аналитическим решением, полученным в [3], где первая частота определена методом перемещений (кососимметричная форма колебаний), а вторая — методом сил (симметричные колебания).

Значения первых пяти собственных частот, вычисленные по МГЭ, а также по методу конечных элементов в программе ANSYS при последовательной аппроксимации каждого пролета двумя, пятью и десятью конечными элементами, представлены в таблице 2.

Таблица 2

Значения собственных частот по методам граничных и конечных элементов

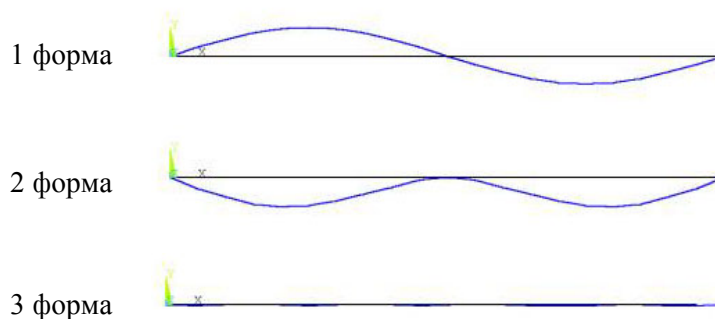
№ частоты	МГЭ	МКЭ — 2 КЭ	МКЭ — 5 КЭ	МКЭ — 10 КЭ
1	710,01	721,25	718,48	718,42
2	1110,01	1131,85	1121,80	1121,55
3	1980,64	2001,32	1990,58	1989,01
4	2850,01	3150,52	2843,77	2839,37
5	3603,34	4188,18	3597,69	3588,89

Вычисленные в [3] методами перемещений и сил первая и вторая частоты колебаний

$$\omega_1 = 711,8 \text{ c}^{-1}; \quad \omega_2 = 1112,2 \text{ c}^{-1}.$$

Таким образом, результаты расчета по МГЭ хорошо согласуются с результатами, полученными методом конечных элементов уже при использовании разбиения на 5 конечных элементов. Очевидно также, что применение МГЭ дает значения низших частот колебаний, которые ближе к аналитическим, чем при расчете по МКЭ, даже при использовании разбиения на 10 конечных элементов.

Формы собственных колебаний (рис. 4), соответствующие вычисленным частотам, практически одинаковы при решении задачи обоими методами.



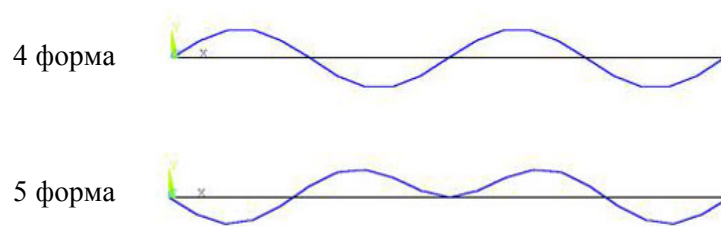


Рис. 4. Формы собственных колебаний неразрезной балки

Литература

1. Баженов В.А., Дашенко А.Ф., Коломиец Л.В., Оробей В.Ф. Строительная механика / Применение МГЭ. — Одесса: Астропринт, 2001. — 288 с.
2. Дашенко А.Ф., Кириллов В.Х., Коломиец Л.В., Оробей В.Ф. MATLAB в научных и инженерных расчетах. — Одесса: Астропринт, 2001. — 210 с.
3. Кисилев В.А. Строительная механика / Специальный курс. — Москва: Стройиздат, 1964. — 332 с.