

УДК 624.012.45

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЪЕМНОГО МОДУЛЯ
УПРУГОСТИ И МОДУЛЯ СДВИГА ДЛЯ БЕТОНА ПРИ
ЦИКЛИЧЕСКОМ ЗАГРУЖЕНИИ (2)**

Фомин В.М. (Одесская государственная академия строительства и архитектуры)

В статье [1] был предложен алгоритм определения текущих объемного модуля упругости и модуля сдвига для бетона при одноосном циклическом нагружении, когда процессы нагрузки чередуются с процессами разгрузки. Был исследован случай *A*, когда продольная сила знака не меняет (т.е. остается сжимающей). В настоящей работе рассматривается случаи, когда продольная сила может менять знак.

Как и в [1] будем рассматривать бетонную колонну постоянного поперечного сечения *S*, испытывающую одноосное растяжение или сжатие. Будем рассматривать только такие значения продольной силы *N*, при которых точка с координатами σ, ε находится на восходящей ветви диаграммы (σ, ε) (т.е. $\hat{\sigma}_b < \sigma < \hat{\sigma}_{bt}, \sigma = N/S$).

Сначала изложим обобщение алгоритма определения объемных модулей упругости и сдвига для бетона при одноосном циклическом нагружении, когда в отличие от [1] не предполагается постоянство знака продольной силы. Разобьем все этапы на три типа и введем специальный параметр *Q* для характеристики каждого из этапов. К первому типу отнесем этапы первичного нагружения, которым не предшествует этап разгрузки. При этом параметр *Q* принимает следующие значения: *nc* (первичное нагружение при сжатии), *nt* (первичное нагружение при растяжении). Ко второму типу отнесем этапы разгрузки, при которых параметр *Q* принимает два значения – *pc* (разгрузка при сжатии) и *pt* (разгрузка при растяжении). К третьему типу отнесем этапы повторного нагружения. Параметр *Q* принимает следующие значения: *nsc* (нагружение при сжатии после разгрузки при сжатии, т.е. повторное сжатие), *nst* (нагружение при растяжении после разгрузки при сжатии), *ntc* (нагружение при сжатии после разгрузки при растяжении).

Отрезок $X_j X_{j+1}$ диаграммы, соответствующий этапу с номером *j*, записывается в следующем виде [1]-[2]:

$$\varepsilon_{j\Delta}(\sigma_{j\Delta}) = (k_j \sigma_j^* + \sigma_{j\Delta}) / [E_j^{[0]} V_j(\eta_{j\Delta})] - k_j \varepsilon_j^*, \quad (1)$$

где $\varepsilon_{j\Delta} = \varepsilon - \varepsilon_j^*, \sigma_{j\Delta} = \sigma - \sigma_j^*, \eta_{j\Delta} = \eta - \eta_j^*, V_j$ – коэффициент изменения секущего модуля упругости:

$$V_j(\eta_{j\Delta}) = \hat{V}_j + (V_{j0} - \hat{V}_j) \sqrt{1 - \omega_{j1} |k_j \eta_j^* + \eta_{j\Delta}| - \omega_{j2} (k_j \eta_j^* + \eta_{j\Delta})^2}. \quad (2)$$

Здесь η – уровень напряжений: $\eta = \sigma / \hat{\sigma}_m$ (*m* – индекс, который принимает два значения: *b* при сжатии и *bt* при растяжении; последний символ в значении параметра *Q* (*c* или *t*) определяет значение индекса *m*); $\sigma_j^*, \varepsilon_j^*, \eta_j^*$ – значения напряжений, относительных продольных деформаций и уровня напряжений в начале этапа; $E_j^{[0]}, \hat{V}_j, V_{j0}, \omega_{j1}$ и ω_{j2} – величины, значения которых определяются параметром *Q*; k_j – множитель, определяемый по следующему правилу:

$$k_j = 1 \text{ при нагружении, } k_j = 0 \text{ при разгрузке,} \quad (3)$$

т.е. первый символ в значении параметра *Q* (*n* или *p*) определяет значение этого множителя.

При $Q_j = nc$ либо при $Q_j = nt$ (т.е. для этапа первого типа)

$$k_j = 1, E_j^{[0]} = E^{[0]}, \hat{V}_j = \hat{V}_m = \hat{\sigma}_m / [E^{[0]} \hat{\varepsilon}_m], V_{j0} = 1, \quad (4)$$

$$\omega_{j1} = 2 - 2,5 \hat{V}_m, \omega_{j2} = 1 - \omega_{j1}$$

($E^{[0]}$ – начальный модуль упругости бетона).

При $Q_j = pc$ либо при $Q_j = pt$ (т.е. для этапа второго типа)

$$k_j = 0, E_j^{[0]} = E^{[0]}, \hat{V}_j = 0,7 + 0,3 V_{j-1} (\eta_j^* - \eta_{j-1}^*), \quad (5)$$

$$V_{j0} = 1/V_{j-1} (\eta_j^* - \eta_{j-1}^*),$$

$$\omega_{j1} = (2 - 2,5 \hat{V}_j) / \eta_j^*, \omega_{j2} = -(1 - 2,5 \hat{V}_j) / (\eta_j^*)^2.$$

При $Q_j = nsc, Q_j = nst$ или при $Q_j = ntc$ (т.е. для этапа третьего типа)

$$k_j = 1, E_j^{[0]} = \tilde{\gamma}_3 E^{[0]}, \hat{V}_j = \hat{\sigma}_j^* / (E_j^{[0]} \hat{\varepsilon}_j^*), \hat{\sigma}_j = \tilde{\gamma}_1 \hat{\sigma}_m, \hat{\varepsilon}_j = \tilde{\gamma}_2 \hat{\varepsilon}_m,$$

$$V_{j0} = 1, \omega_{j1} = [2 - 2,5 \hat{V}_j + (36/V_{j-1,0} - 28) \sqrt{|\hat{V}_j - \hat{V}_m|}] / \tilde{\gamma}_1,$$

$$\omega_{j2} = [-1 + 2,5 \hat{V}_j - (36/V_{j-1,0} - 28) \sqrt{|\hat{V}_j - \hat{V}_m|}] / \tilde{\gamma}_1^2, \quad (6)$$

$$\tilde{\gamma}_i = 1 + \beta_{1i} \varphi_v + \beta_{2i} \varphi_v^2 + \beta_{3i} \varphi_v^3 \quad (i = 1, 2, 3), \varphi_v = \frac{1 - 1/V_{j-1,0}}{1 - \hat{V}_m}.$$

Величины β_{ki} ($k, i = 1, 2, 3$) принимают следующие значения [2]: при $Q_j = nsc$

$$\begin{aligned} \beta_{1,1} &= 0,86, & \beta_{2,1} &= 1,78, & \beta_{3,1} &= 0,77, \\ \beta_{1,2} &= -0,2, & \beta_{2,2} &= 0, & \beta_{3,2} &= 0, \\ \beta_{1,3} &= 0,43, & \beta_{2,3} &= -0,88, & \beta_{3,3} &= 0,37; \end{aligned} \quad (7)$$

при $Q_j = nct$

$$\begin{aligned} \beta_{1,1} &= -0,55, \beta_{2,1} = 0,1, \beta_{3,1} = 0, \\ \beta_{1,2} &= 0,2, \beta_{2,2} = 0, \beta_{3,2} = 0, \\ \beta_{1,3} &= -0,27, \beta_{2,3} = -0,02, \beta_{3,3} = 0; \end{aligned} \quad (8)$$

при $Q_j = ntc$

$$\begin{aligned} \beta_{1,1} &= -0,17, \beta_{2,1} = 0,02, \beta_{3,1} = 0, \\ \beta_{1,2} &= 0,13, \beta_{2,2} = -0,12, \beta_{3,2} = 0, \\ \beta_{1,3} &= -0,06, \beta_{2,3} = -0,02, \beta_{3,3} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Средняя относительная деформация (среднее удлинение) при одноосном удлинении (сжатии) может быть записана так

$$\bar{\varepsilon}(\sigma) = \frac{\sigma[1 - 2\nu_m(\eta)]}{3E^{[0]}V_m(\eta)}, \quad (10)$$

где ν_m – коэффициент Пуассона [2]:

$$\nu_m(\eta) = \hat{\nu}_m + (\nu_0 - \hat{\nu}_m)\sqrt{1 - \eta^2} \quad (11)$$

$$(\nu_0 = 0,2, \hat{\nu}_b = \nu_0 + 1 - \sqrt[3]{\hat{V}_b}, \hat{\nu}_{bt} = \nu_0 \hat{V}_{bt}).$$

Из (1) и (10) находим, что

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{j\Delta}(\sigma_{j\Delta}) &= (k_j \sigma_j^* + \sigma_{j\Delta})(1 - 2\nu_j(\eta_{j\Delta})) / (3E^{[0]}V_j(\eta_{j\Delta})) - k_j \bar{\varepsilon}_j^* \\ (\bar{\varepsilon}_{j\Delta} &= \bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_j^*, \bar{\varepsilon}_j^* = \bar{\varepsilon}(\sigma_j^*), \nu_j(\eta_{j\Delta}) = \nu_m(\eta_j^* + \eta_{j\Delta})). \end{aligned} \quad (12)$$

Введем величину ζ , которая характеризует уровень средней относительной деформации:

$$\zeta = \bar{\varepsilon} / \hat{\varepsilon}_m. \quad (13)$$

Тогда (12) запишется так

$$\zeta_{j\Delta}(\eta_{j\Delta}) = A_j(k_j \eta_j^* + \eta_{j\Delta})f_j(\eta_{j\Delta}) - k_j \zeta_j^*. \quad (14)$$

Здесь

$$\zeta_{j\Delta} = \zeta - \zeta_j^*, \zeta_j^* = \bar{\varepsilon}_j^* / \hat{\varepsilon}_m, f_j(\eta_{j\Delta}) = [1 - 2\nu_j(\eta_{j\Delta})] / [(1 - 2\nu_0)V_j(\eta_{j\Delta})]. \quad (15)$$

Величина A_j определяется так: сначала находим A_m

$$A_m = \frac{\hat{\sigma}_m(1 - 2\nu_0)}{3E^{[0]}\hat{\varepsilon}_m}, \quad (16)$$

затем полагаем

$$\begin{aligned} A_j &= A_m \text{ при } Q_j = nc, nt, pc, pt; \\ A_j &= A_m / \tilde{\gamma}_3 \text{ при } Q_j = ncc, nct, ntc. \end{aligned} \quad (17)$$

Можно убедиться, что функция (14) монотонна на отрезке $[0, \eta_j^{**} - \eta_j^*]$, где $a) \eta_j^{**} \leq 1$ ($1 - \eta_j^{**} < 1$) при $Q_j = nc, nt$; $b) \eta_j^{**} \leq \hat{\eta}_j$ ($\hat{\eta}_j = \hat{\sigma}_j / \hat{\sigma}_m$,

$\hat{\eta}_j - \eta_j^{**} \ll 1$) при $Q_j = ncc, nct, ntc$; $c) \eta_j^{**} = 0$ при $Q_j = pc, pt$. Величину

η_j^{**} можно найти из условия

$$\frac{d\zeta_{j\Delta}(\eta_{j\Delta})}{d\eta_{j\Delta}} = 0. \quad (18)$$

Из монотонности функции $\zeta_{j\Delta}(\eta_{j\Delta})$ на отрезке $[0, \eta_j^{**} - \eta_j^*]$ следует, что она обратима на этом отрезке (предполагается, что в случаях $a)$ и $b)$ $\eta \leq \eta_j^{**}$). Функция, обратная $\zeta_{j\Delta}(\eta_{j\Delta})$, ищется в следующем виде:

$$\eta_{j\Delta}(\zeta_{j\Delta}) = \frac{1}{A_j} \zeta_{j\Delta} [1 + \chi_j(\zeta_{j\Delta})], \quad (19)$$

где

$$\chi_j(\zeta_{j\Delta}) = \sum_{k=0}^2 \chi_{j,k} \zeta_{j\Delta}^k.$$

Из условия

$$\eta'_{j\Delta}(0) = 1 / \zeta'_{j\Delta}(0) \quad (20)$$

находим

$$\chi_{j,0} = 1 / f_j(0) - 1. \quad (21)$$

Полагаем теперь

$$\eta_{j\Delta 1} = \eta_j^{**} - \eta_j^*, \quad (22)$$

а $\eta_{j\Delta 2}$ ($0 < \eta_{j\Delta 2} < \eta_{j\Delta 1}$) выбираем произвольно.

Находим значения $\zeta_{j\Delta}$ при $\eta_{j\Delta} = \eta_{j\Delta 1}$ и $\eta_{j\Delta} = \eta_{j\Delta 2}$:

$$\zeta_{j\Delta 1} = \zeta_{j\Delta}(\eta_{j\Delta 1}), \zeta_{j\Delta 2} = \zeta_{j\Delta}(\eta_{j\Delta 2}). \quad (23)$$

Из условий

$$\eta_{j\Delta 1} = \eta_{j\Delta}(\zeta_{j\Delta 1}), \eta_{j\Delta 2} = \eta_{j\Delta}(\zeta_{j\Delta 2}) \quad (24)$$

получаем систему линейных уравнений

$$\zeta_{j\Delta 1} \chi_{2,1} + \zeta_{j\Delta 1}^2 \chi_{2,2} = F_{j,1} - \chi_{j,0},$$

$$\zeta_{j\Delta 2} \chi_{j,1} + \zeta_{j\Delta 2}^2 \chi_{j,2} = F_{j,2} - \chi_{j,0}$$

($F_{j,1} = 1 / f_j(\eta_{j\Delta 1}) - 1$, $F_{j,2} = 1 / f_j(\eta_{j\Delta 2}) - 1$), решение которой имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \chi_{j,1} &= [(F_{j,1} - \chi_{j,0})\zeta_{j\Delta 2}^2 - (F_{j,2} - \chi_{j,0})\zeta_{j\Delta 1}^2] / [\zeta_{j\Delta 1}\zeta_{j\Delta 2}(\zeta_{j\Delta 2} - \zeta_{j\Delta 1})], \\ \chi_{j,2} &= [(F_{j,2} - \chi_{j,0})\zeta_{j\Delta 1} - (F_{j,1} - \chi_{j,0})\zeta_{j\Delta 2}] / [\zeta_{j\Delta 1}\zeta_{j\Delta 2}(\zeta_{j\Delta 2} - \zeta_{j\Delta 1})]. \end{aligned} \quad (25)$$

Заметим, что среднее напряжение $\bar{\sigma} = \sigma / 3$ при одноосном сжатии. Тогда приращение его $\bar{\sigma}_{j\Delta} = \sigma_{j\Delta} / 3$. Учитывая это, получаем из (19)

$$\bar{\sigma}_{j\Delta} = 3K_j(\bar{\varepsilon}_{j\Delta})\bar{\varepsilon}_{j\Delta},$$

$$K_j(\bar{\varepsilon}_{j\Delta}) = K^{[0]}[1 + \tilde{\delta}_j + (1 + \tilde{\delta}_j)\chi_j(\bar{\varepsilon}_{j\Delta}/\hat{\varepsilon}_b)] \quad (26)$$

($K^{[0]}$ – начальный объемный модуль упругости бетона, $\tilde{\delta}_j = 0$ при $Q_j = нс, нт, рс, pt$ и $\tilde{\delta}_j = \tilde{\gamma}_3 - 1$ при $Q_j = нсс, нст, нтс$). Первое равенство (26) означает, что $K_j(\bar{\varepsilon}_{j\Delta})$ представляет собой секущий объемный модуль упругости бетона на j -ом этапе деформирования.

Аналогично (1) можно записать равенство [1]

$$\bar{\gamma}_{j\Delta} = \frac{2\sqrt{2} |k_j \sigma_j^* + \sigma_{j\Delta}| [1 + \nu_j(\eta_{j\Delta})]}{3 E^{[0]} V_j(\eta_{j\Delta})} - k_j \bar{\gamma}_j^* \quad (27)$$

где $\bar{\gamma}_{j\Delta} = \bar{\gamma} - \bar{\gamma}_j^*$ ($\bar{\gamma}$ – сдвиг на октаэдрической площадке, $\bar{\gamma}_j^*$ – его значение в начале j -го этапа).

Введя уровень сдвига на октаэдрической площадке

$$\rho = \frac{\bar{\gamma}}{|\hat{\varepsilon}_b|}, \quad (28)$$

запишем (27) так

$$\rho_{j\Delta}(\eta_{j\Delta}) = B_j(k_j \eta_j^* + \eta_{j\Delta})g_j(\eta_{j\Delta}) - k_j \rho_j^* \quad (29)$$

($\rho_{j\Delta} = \rho - \rho_j^*$, $\rho_j^* = \bar{\gamma}_j^* / |\hat{\varepsilon}_m|$).

Здесь

$$g_j(\eta_{j\Delta}) = \frac{1 + \nu_j(\eta_{j\Delta})}{(1 + \nu_0)V_j(\eta_{j\Delta})}, \quad (30)$$

а величина B_j определяется аналогично A_j :

$$B_j = B_m \text{ при } Q_j = нс, нт, рс, pt;$$

$$B_j = B_m / \tilde{\gamma}_3 \text{ при } Q_j = нсс, нст, нтс; \quad (31)$$

$$B_m = \frac{2\sqrt{2}\hat{\sigma}_m(1 + \nu_0)}{3E^{[0]}\hat{\varepsilon}_m}.$$

Функция, обратная (29), ищется в следующем виде:

$$\rho_{j\Delta}(\zeta_{j\Delta}) = \frac{1}{B_j} \rho_{j\Delta} [1 + \Psi_j(\rho_{j\Delta})], \quad (32)$$

где

$$\Psi_j(\rho_{j\Delta}) = \sum_{k=0}^2 \Psi_{j,k} \rho_{j\Delta}^k.$$

Как и $\chi_{j,k}$ ($k = 0, 1, 2$) коэффициенты $\Psi_{j,k}$ ($k = 0, 1, 2$) определяются из следующих условий:

$$\eta'_{j\Delta}(0) = 1/\rho'_{j\Delta}(0), \quad \eta_{j\Delta}(\rho_{j\Delta 1}) = \eta_{j\Delta 1}, \quad \eta_{j\Delta}(\rho_{j\Delta 2}) = \eta_{j\Delta 2}. \quad (33)$$

в которых $\rho_{j\Delta 1}$ и $\rho_{j\Delta 2}$ находятся из равенств

$$\rho_{j\Delta 1} = \rho_{j\Delta}(\eta_{j\Delta 1}), \quad \rho_{j\Delta 2} = \rho_{j\Delta}(\eta_{j\Delta 2}). \quad (34)$$

Из первого из условий (33) следует

$$\Psi_{j,0} = 1/g_j(0) - 1, \quad (35)$$

а из второго и третьего условий получаем

$$\Psi_{j,1} = [(G_{j,1} - \Psi_{j,0})\rho_{j\Delta 2}^2 - (G_{j,2} - \Psi_{j,0})\rho_{j\Delta 1}^2] / [\rho_{j\Delta 1}\rho_{j\Delta 2}(\rho_{j\Delta 2} - \rho_{j\Delta 1})],$$

$$\Psi_{j,2} = [(G_{j,2} - \Psi_{j,0})\rho_{j\Delta 1} - (G_{j,1} - \Psi_{j,0})\rho_{j\Delta 2}] / [\rho_{j\Delta 1}\rho_{j\Delta 2}(\rho_{j\Delta 2} - \rho_{j\Delta 1})].$$

$$(G_{j,1} = 1/g_j(\eta_{j\Delta 1}) - 1, \quad G_{j,2} = 1/g_j(\eta_{j\Delta 2}) - 1).$$

Из (28) и (32) следует

$$\tau_{j\Delta} = G_j(\gamma_{j\Delta})\gamma_{j\Delta},$$

$$G_j(\gamma_{j\Delta}) = G^{[0]}[1 + \tilde{\delta}_j + (1 + \tilde{\delta}_j)\Psi_j(\gamma_{j\Delta}/|\hat{\varepsilon}_m|)] \quad (37)$$

($G^{[0]}$ – начальный модуль сдвига бетона, $\tilde{\delta}_j = 0$ при $Q_j = нс, нт, рс, pt$ и

$\tilde{\delta}_j = \tilde{\gamma}_3 - 1$ при $Q_j = нсс, нст, нтс$). Первое равенство (37) означает, что

$G_j(\gamma_{j\Delta})$ представляет собой секущий модуль сдвига бетона на j -ом этапе деформирования колонны.

Замечание. Величины $\hat{\varepsilon}_b$ и $\hat{\varepsilon}_{bt}$ определяются из формул [2]

$$\hat{\varepsilon}_b = - \frac{(18 + R_{b,ser})(62R_{b,ser} + 0.675R_{b,ser}^2 + 22)}{(53000 - 62R_{b,ser})(7R_{b,ser} + R_{b,ser}^2 + 22)}, \quad (38)$$

$$\hat{\varepsilon}_{bt} = R_{bt,ser} / (E_0 \hat{V}_{bt}), \quad \hat{V}_{bt} = 0,6 + 0,15R_{btm}. \quad (39)$$

Случай Б. Как и в [1] полагаем, что на начальном этапе деформирования колонны (называемом «нулевым», на рис.1 он изображен в виде отрезка OX_1 диаграммы (σ, ε)) она испытывает сжатие и величина продольной силы увеличивается от нуля до некоторого значения $|N_1^*| < |\hat{N}|$, $\hat{N} = \hat{\sigma}_b S$. В конце этого этапа нормальные напряжения на поперечных сечениях и относительная продольная деформация в колонне равны σ_1^* и ε_1^* .

Допустим, что величина продольной сжимающей силы N продолжает возрастать. Процесс увеличения $|N|$ от $|N_1^*|$ до некоторого значения $|N_2^*| < |\hat{N}|$ и сопутствующие изменения σ и ε именуется первым этапом деформирования колонны. Он относится к первому типу этапов. Соответствующий отрезок $X_1 X_2$ диаграммы представлен на рис.1. Пусть теперь величина сжимающей силы N начинает убывать, т.е. начинается процесс разгрузки. Этот этап деформирования колонны получил номер $j = 2$. Он относится ко второму типу этапов. В [1] предполагалось, что сила N_3^* , соответствующая концу этапа, оставалась сжимающей. Теперь примем, что $N_3^* = 0$. Далее сила, действующая на колонну, становится растягивающей, т.е. начинается процесс нагружения при растяжении. Он получает номер 3. Продольная сила увеличивается при этом от нуля до некоторого значения $N_4^* < \hat{N}_{br} = \hat{\sigma}_{br} S$. Этот этап относится к третьему типу. Соответствующий отрезок диаграммы

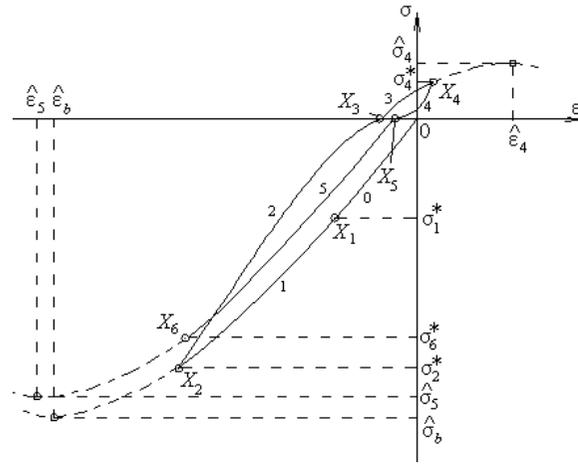


Рис.1

представлен в виде кривой $X_3 X_4$ на рис.1. Следующий этап 4 деформирования колонны состоит в уменьшении продольной силы от N_4^* до нуля, т.е. он является процессом разгрузки и изображен на рис.1 в виде отрезка $X_4 X_5$ диаграммы (σ, ε) . Этот этап – второго типа. Наконец, этап 5 является процессом нагружения при сжатии и состоит в увеличении модуля продольной силы от нуля до $|N_6^*| < |\hat{N}_b|$. На рис.1 он представлен отрезком $X_5 X_6$ диаграммы. Этот этап относится к третьему типу.

Предполагается, что дальнейшее изменение продольной силы состоит в повторении цикла этапов 2 – 3 – 4 – 5.

Алгоритм (1) – (37) применим к любому этапу деформирования колонны. Для этого необходимо определить значения параметров Q и m на каждом из этапов.

Этап 1: $Q_1 = nc, m = b$. Заметим, что $\hat{\sigma}_b = R_{b,ser}$. Из формулы (38) определяем $\hat{\varepsilon}_b$. Из (4) находим $k_1 = 1$, $E_1^{[0]} = E^{[0]}$, $\hat{V}_1 = \hat{V}_b = \hat{\sigma}_b / [E^{[0]} \hat{\varepsilon}_b]$, $\hat{V}_1 = \hat{V}_b = \hat{\sigma}_b / [E^{[0]} \hat{\varepsilon}_b]$, $V_{1,0} = 1$, $\omega_{1,1} = 2 - 2,5\hat{V}_b$, $\omega_{1,2} = 1 - \omega_{1,1}$. Таким образом, функция

$$V_1(\eta_{1\Delta}) = \hat{V}_1 + (V_{1,0} - \hat{V}_1) \sqrt{1 - \omega_{1,1}(\eta_1^* + \eta_{1\Delta}) - \omega_{1,2}(\eta_1^* + \eta_{1\Delta})^2}$$

вполне определилась.

Далее из (16) и (17) получаем $A_1 = A_b = \hat{\sigma}_b(1 - 2\nu_0) / (3E^{[0]} \hat{\varepsilon}_b)$ и из (15) и (21) находим $\chi_{1,0}$. Полагаем

$$\eta_{1\Delta 1} = \eta_2^* - \eta_1^*, \eta_{1\Delta 2} = \eta_{1\Delta 1} / 2,$$

и из (14) определяем $\zeta_{1\Delta 1}$ и $\zeta_{1\Delta 2}$. Затем по формулам (25) вычисляем $\chi_{1,1}$ и $\chi_{1,2}$. Наконец, из (26) находим

$$K_1(\bar{\varepsilon}_{1\Delta}) = K^{[0]} [1 + \chi_{1,0} + \chi_{1,1} \frac{\bar{\varepsilon}_{1\Delta}}{\hat{\varepsilon}_b} + \chi_{1,2} (\frac{\bar{\varepsilon}_{1\Delta}}{\hat{\varepsilon}_b})^2].$$

Аналогично, из (31) определяем B_1 , а из (29), (30), (35) и (36) коэффициенты $\psi_{1,0}$, $\psi_{1,1}$ и $\psi_{1,2}$. Согласно (37) получаем

$$G_1(\bar{\gamma}_{1\Delta}) = G^{[0]} [1 + \psi_{1,0} + \psi_{1,1} \frac{\bar{\gamma}_{1\Delta}}{|\hat{\varepsilon}_b|} + \psi_{1,2} (\frac{\bar{\gamma}_{1\Delta}}{|\hat{\varepsilon}_b|})^2].$$

Этап 2: $Q_2 = pc, m = b$. Из (5) находим

$$k_2 = 0, E_2^{[0]} = E^{[0]}, \hat{V}_2 = 0,7 + 0,3V_1(\eta_2^* - \eta_1^*), V_{2,0} = 1/V_1(\eta_2^* - \eta_1^*),$$

$$\omega_{2,1} = (2 - 2,5\hat{V}_2) / \eta_2^*, \omega_{2,2} = -(1 - 2,5\hat{V}_2) / (\eta_2^*)^2.$$

Таким образом, функция

$$V_2(\eta_{2\Delta}) = \hat{V}_2 + (V_{2,0} - \hat{V}_2) \sqrt{1 - \omega_{2,1} |\eta_{2\Delta}| - \omega_{2,2} \eta_{2\Delta}^2}$$

является вполне определенной.

Так же, как и на предыдущем этапе получаем $A_2 = A_b$.

Далее, из (15) и (21) находим $\chi_{2,0}$. Полагаем ($\eta_3 = 0$)

$$\eta_{2\Delta 1} = -\eta_2^*, \eta_{2\Delta 2} = -\eta_2^* / 2,$$

и из (14) определяем $\zeta_{2\Delta 1}$ и $\zeta_{2\Delta 2}$. Затем по формулам (25) вычисляем $\chi_{2,1}$ и $\chi_{2,2}$. Наконец, из (26) находим

$$K_2(\bar{\varepsilon}_{2\Delta}) = K^{[0]} [1 + \chi_{2,0} + \chi_{2,1} \frac{\bar{\varepsilon}_{2\Delta}}{\hat{\varepsilon}_b} + \chi_{2,2} (\frac{\bar{\varepsilon}_{2\Delta}}{\hat{\varepsilon}_b})^2].$$

Аналогично, из (31) определяем B_2 , а из (29), (30), (35) и (36) коэффициенты $\psi_{2,0}$, $\psi_{2,1}$ и $\psi_{2,2}$. Согласно (37) получаем

$$G_2(\gamma_{2\Delta}) = G^{[0]} \left[1 + \psi_{2,0} + \psi_{2,1} \frac{\bar{\gamma}_{2\Delta}}{|\hat{\epsilon}_b|} + \psi_{2,2} \left(\frac{\bar{\gamma}_{2\Delta}}{|\hat{\epsilon}_b|} \right)^2 \right].$$

Этап 3: $Q_3 = nct, m = bt, k_3 = 1$. Заметим, что $\hat{\sigma}_{bt} = R_{bt,ser}$. Из формулы (39) определяем $\hat{\epsilon}_{bt}$. Из (8) определяем β_{ki} ($k, i = 1, 2, 3$), затем следуя (6) находим $\varphi_v = (1 - 1/V_{2,0}) / (1 - \hat{V}_3)$ и $\tilde{\gamma}_i$ ($i = 1, 2, 3$). Далее из (6) находим

$$E_3^{[0]} = \tilde{\gamma}_3 E^{[0]}, \hat{\sigma}_3 = \tilde{\gamma}_1 \hat{\sigma}_{bt}, \hat{\epsilon}_3 = \tilde{\gamma}_2 \hat{\epsilon}_{bt}, \hat{V}_3 = \hat{\sigma}_3 / (E_3^{[0]} \hat{\epsilon}_3), V_{3,0} = 1,$$

$$\omega_{3,1} = [2 - 2,5\hat{V}_3 + (36/V_{2,0} - 28)\sqrt{|\hat{V}_3 - \hat{V}_{bt}|}] / \tilde{\gamma}_1,$$

$$\omega_{3,2} = [-1 + 2,5\hat{V}_3 - (36/V_{2,0} - 28)\sqrt{|\hat{V}_3 - \hat{V}_{bt}|}] / \tilde{\gamma}_1^2,$$

откуда следует, что функция

$$V_3(\eta_{3\Delta}) = \hat{V}_3 + (V_{3,0} - \hat{V}_3) \sqrt{1 - \omega_{3,1}\eta_{3\Delta} - \omega_{3,2}\eta_{3\Delta}^2}$$

вполне определилась.

Далее из (16) и (17) получаем $A_3 = A_{bt} / \tilde{\gamma}_3 = \hat{\sigma}_{bt} (1 - 2\nu_0) / (3\tilde{\gamma}_3 E^{[0]} \hat{\epsilon}_{bt})$ и из (15) и (21) находим $\chi_{3,0}$. Полагаем

$$\eta_{3\Delta 1} = \eta_4^*, \eta_{3\Delta 2} = \eta_{3\Delta 1} / 2,$$

и из (14) определяем $\zeta_{3\Delta 1}$ и $\zeta_{3\Delta 2}$. Затем по формулам (25) вычисляем $\chi_{3,1}$ и $\chi_{3,2}$. Наконец, из (26) находим

$$K_3(\bar{\epsilon}_{3\Delta}) = K^{[0]} \left[1 + \tilde{\delta}_3 + (1 + \tilde{\delta}_3) (\chi_{3,0} + \chi_{3,1} \frac{\bar{\epsilon}_{3\Delta}}{\hat{\epsilon}_{bt}} + \chi_{3,2} \left(\frac{\bar{\epsilon}_{3\Delta}}{\hat{\epsilon}_{bt}} \right)^2) \right]$$

$$(\tilde{\delta}_3 = \tilde{\gamma}_3 - 1).$$

Аналогично, из (31) определяем B_3 , а из (29), (30), (35) и (36) коэффициенты $\psi_{3,0}$, $\psi_{3,1}$ и $\psi_{3,2}$. Согласно (37) получаем

$$G_3(\bar{\gamma}_{3\Delta}) = G^{[0]} \left[1 + \tilde{\delta}_3 + (1 + \tilde{\delta}_3) (\psi_{3,0} + \psi_{3,1} \frac{\bar{\gamma}_{3\Delta}}{|\hat{\epsilon}_{bt}|} + \psi_{3,2} \left(\frac{\bar{\gamma}_{3\Delta}}{|\hat{\epsilon}_{bt}|} \right)^2) \right].$$

Этап 4 (аналогичен второму): $Q_4 = pt, m = bt$. Из (5) находим $k_4 = 0, E_4^{[0]} = E^{[0]}, \hat{V}_4 = 0,7 + 0,3V_3(\eta_4^* - \eta_3^*), V_{4,0} = 1/V_3(\eta_4^* - \eta_3^*),$

$$\omega_{4,1} = (2 - 2,5\hat{V}_4) / \eta_4^*, \omega_{4,2} = -(1 - 2,5\hat{V}_4) / (\eta_4^*)^2.$$

В результате функция $V_4(\eta_{4\Delta})$ становится вполне определенной.

Из (17) получаем $A_4 = A_{bt}$, а из (30) $B_4 = B_{bt}$.

Аналогично второму этапу определяем коэффициенты $\chi_{4,0}$, $\chi_{4,1}$ и $\chi_{4,2}$, а также $\psi_{4,0}$, $\psi_{4,1}$ и $\psi_{4,2}$. Из (26) и (37) находим

$$K_4(\bar{\epsilon}_{4\Delta}) = K^{[0]} \left[1 + \chi_{4,0} + \chi_{4,1} \frac{\bar{\epsilon}_{4\Delta}}{\hat{\epsilon}_{bt}} + \chi_{4,2} \left(\frac{\bar{\epsilon}_{4\Delta}}{\hat{\epsilon}_{bt}} \right)^2 \right],$$

$$G_4(\bar{\gamma}_{4\Delta}) = G^{[0]} \left[1 + \psi_{4,0} + \psi_{4,1} \frac{\bar{\gamma}_{4\Delta}}{|\hat{\epsilon}_{bt}|} + \psi_{4,2} \left(\frac{\bar{\gamma}_{4\Delta}}{|\hat{\epsilon}_{bt}|} \right)^2 \right].$$

Этап 5 (аналогичен третьему): $Q_5 = ntc, m = b, k_5 = 1$. Из (8) определяем β_{ki} ($k, i = 1, 2, 3$), затем следуя (6) находим $\varphi_v = (1 - 1/V_{4,0}) / (1 - \hat{V}_5)$ и $\tilde{\gamma}_i$ ($i = 1, 2, 3$). Далее из (6) находим

$$E_5^{[0]} = \tilde{\gamma}_3 E^{[0]}, \hat{\sigma}_5 = \tilde{\gamma}_1 \hat{\sigma}_b, \hat{\epsilon}_5 = \tilde{\gamma}_2 \hat{\epsilon}_b, \hat{V}_5 = \hat{\sigma}_5 / (E_5^{[0]} \hat{\epsilon}_5), V_{5,0} = 1,$$

$$\omega_{5,1} = [2 - 2,5\hat{V}_5 + (36/V_{4,0} - 28)\sqrt{|\hat{V}_5 - \hat{V}_b|}] / \tilde{\gamma}_1,$$

$$\omega_{5,2} = [-1 + 2,5\hat{V}_5 - (36/V_{4,0} - 28)\sqrt{|\hat{V}_5 - \hat{V}_b|}] / \tilde{\gamma}_1^2.$$

Затем из (16) и (17) получаем $A_5 = A_b / \tilde{\gamma}_3 = \hat{\sigma}_b (1 - 2\nu_0) / (3\tilde{\gamma}_3 E^{[0]} \hat{\epsilon}_b)$, а из (31) определяем B_5 . Далее вычисляем $\chi_{5,0}$, $\chi_{5,1}$ и $\chi_{5,2}$, а также $\psi_{5,0}$, $\psi_{5,1}$ и $\psi_{5,2}$. Наконец, из (26) и (37) находим

$$K_5(\bar{\epsilon}_{5\Delta}) = K^{[0]} \left[1 + \tilde{\delta}_5 + (1 + \tilde{\delta}_5) (\chi_{5,0} + \chi_{5,1} \frac{\bar{\epsilon}_{5\Delta}}{\hat{\epsilon}_b} + \chi_{5,2} \left(\frac{\bar{\epsilon}_{5\Delta}}{\hat{\epsilon}_b} \right)^2) \right],$$

$$G_5(\bar{\gamma}_{5\Delta}) = G^{[0]} \left[1 + \tilde{\delta}_5 + (1 + \tilde{\delta}_5) (\psi_{5,0} + \psi_{5,1} \frac{\bar{\gamma}_{5\Delta}}{|\hat{\epsilon}_b|} + \psi_{5,2} \left(\frac{\bar{\gamma}_{5\Delta}}{|\hat{\epsilon}_b|} \right)^2) \right],$$

где $\tilde{\delta}_5 = \tilde{\gamma}_3 - 1$.

Вывод

Метод определения секущих объемного модуля упругости и модуля сдвига для бетона при циклическом нагружении, предложенный в [1], распространяется на случай знакопеременной продольной силы.

1. Фомин В.М. Определение секущих объемного модуля упругости и модуля сдвига для бетона при циклическом нагружении (1) // Вестник ОГАСА. Вып. 30, – Одесса, 2008. – с. 311-318.

2. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. М: Стройиздат, 1996. – 416 с.