УДК 624.074

К МЕХАНИЧЕСКОМУ РАСЧЕТУ КОНСТРУКЦИЙ, БЛИЗКИХ К СИММЕТРИЧНЫМ

Бекшаев С. Я. *(Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса)*

Инженерные сооружения, обладающие распределением физических и геометрических свойств, близким к симметричному в обобщенном смысле, рассматриваются как возмущения вполне симметричных. Предложен прием определения поправок к характеристикам симметричных систем, учитывающих нарушения симметрии.

Известно, что расчет сооружений, обладающих симметрией, может быть выполнен значительно проще и точнее, чем при отсутствии симметрии [1 – 5]. Однако по разным причинам реальные сооружения, как правило, не являются вполне симметричными. В тех случаях, когда нарушения симметрии относительно невелики, представляется перспективным рассмотреть сооружение как некоторое возмущение вполне симметричной системы, которая допускает применение эффективной теоретико-групповой методики, а затем ввести соответствующие поправки, связанные с учетом малой асимметрии.

Настоящая работа посвящена некоторым приемам получения таких поправок для симметричных конструкций.

Один из подходов, который опирается на использование теории возмущений линейных операторов, в общих чертах сводится к следующему. Пусть ищется напряженно-деформированное состояние конструкции, которое определяется функцией $f(M)$ точки M этой конструкции, под действием заданного нагружения, определяемого функцией $p(M)$. Решение этой задачи в линейной постановке сводится к решению операторного уравнения

$$\left(C+\varepsilon D\right)f = p, \tag{1}$$

где C – оператор жесткости (статической или динамической в зависимости от постановки задачи) симметричной конструкции, а εD – малое возмущение этого оператора, отвечающее нарушению симметрии.

Приближенное решение уравнения (1) ищется в виде

$$f = f_0 + \varepsilon u,$$

где f_0 – решение уравнения (1) при $\varepsilon = 0$, т.е. отвечающее состоянию симметричной конструкции, u – поправка к этому состоянию, определяемая из уравнения

$$Cu = -Df_0. \qquad (2)$$

Заметим, что поправка u находится из уравнения, содержащего оператор C симметричной системы, так что к этому уравнению применимы все упрощения, связанные с симметрией.

Описанный подход удобен, когда возмущения конструкции не приводят к изменениям области определения операторов, например, при изменениях жесткости или массы некоторых ее элементов без изменения ее геометрии.

В тех же случаях, когда асимметрия вызвана геометрическими изменениями (например, смещением узла фермы), построение оператора D в уравнении (1) может натолкнуться на значительные трудности.

Для таких случаев поправки могут быть найдены с помощью другого приема (пригодного и в «негеометрических» случаях), который, хотя и не дает готового уравнения наподобие (2) для определения поправок, но приводит к вычислению поправок от таких возмущений конструкции, которые не нарушают ее симметрии и поэтому находятся проще.

Пусть для конструкции $S(x_1,...,x_n)$, полностью определяемой набором n параметров $x_1,...,x_n$, ищется значение некоторой характеристики $\lambda(x_1,...,x_n)$, которое уже найдено для симметричной конструкции, для которой, не нарушая общности, можно принять $x_1 = ... = x_n = 0$.

Симметрия в обобщенном смысле [2,3] конструкции S означает, что существует множество $G = \{g\}$ движений (поворотов, зеркальных отражений и их комбинаций), переводящих ее в конструкцию gS, неотличимую от исходной, т.е. $\forall g \in G : gS = S$, причем это множество образует группу в алгебраическом смысле [6]. Тогда возмущение $v = (x_1,...,x_n)$ будет порождать семейство возмущений $gv = (y_1,...,y_n)$, $g \in G$, получаемых применением движений $g \in G$ к конструкции $S(x_1,...,x_n)$. Рассматривая y_i как функции $x_1,...,x_n$ и g и учитывая малость x_k, можем записать

$$y_i = \sum_k a_{ik}(g) x_k, \tag{3}$$

где

$$a_{ik}(g) = \frac{\partial y_i}{\partial x_k}\bigg|_{x_1 = \ldots x_n = 0}(g).$$

Теорема 1. *Семейство матриц $\|a_{ik}(g)\|$ образует линейное представление группы G симметрии конструкции.*

Доказательство. Применим к возмущенной конструкции $S(x_1, \ldots, x_n)$ вначале движение h, а затем движение g, в результате чего получим возмущенную конструкцию $S(z_1, \ldots, z_n)$, для которой в соответствии с (3)

$$z_j = \sum_k a_{jk}(gh) x_k. \tag{4}$$

В то же время для составляющих движений

$$y_i = \sum_k a_{ik}(h) x_k,\ z_j = \sum_i a_{ji}(g) y_i,$$

откуда, исключая y_i, находим

$$z_j = \sum_k \left[\sum_i a_{ji}(g) a_{ik}(h)\right] x_k,$$

что в сочетании с (4) приводит к соотношениям

$$a_{jk}(gh) = \sum_i a_{ji}(g) a_{ik}(h),\ j,k = 1,\ldots,n,$$

характеризующим представление группы G. Теорема доказана.

Симметрия конструкции предполагает, в частности, что приращения искомой величины l, отвечающие возмущениям $v = (x_1, \ldots, x_n)$ и $gv = (y_1, \ldots, y_n)$, равны, т.е.

$$\forall g \in G : d\lambda(gv) = d\lambda(v).$$

Это обстоятельство позволяет во многих случаях определить это общее приращение (поправку) $d\lambda(v)$. Установим вначале следующую теорему.

Теорема 2. *Суперпозиция возмущений gv, где g пробегает всю группу G симметрии конструкции, при любом v образует конструкцию с той* *же группой G симметрии.*

Другими словами, теорема 2 означает, что возмущение

$$V = \sum_{g \in G} gv \tag{5}$$

не приводит к нарушению симметрии конструкции.

Доказательство. Для доказательства достаточно убедиться, что применение произвольного движения $h \in G$ к конструкции $S(V) = S\left(\sum_{g \in G} gv\right)$ приводит к той же конструкции. i-й параметр Y_i конструкции $S(V)$ равен

$$Y_i = \sum_{g \in G} y_i = \sum_{g \in G}\left[\sum_k a_{ik}(g) x_k\right] = \sum_k \left[\sum_{g \in G} a_{ik}(g)\right] x_k .$$

В конструкции $hS(V)$ он равен согласно (3)

$$\sum_j a_{ij}(h) Y_j = \sum_j a_{ij}(h) \left\{\sum_k \left[\sum_{g \in G} a_{jk}(g) x_k\right]\right\} =$$

$$= \sum_k \left\{\sum_{g \in G}\left[\sum_j a_{ij}(h) a_{jk}(g)\right]\right\} x_k = \sum_k \left[\sum_{g \in G} a_{ik}(hg)\right] x_k = Y_i ,$$

т.к. множества $\{g\}$ и $\{hg\}$ при зафиксированном $h \in G$, когда g пробегает всю группу, совпадают. Следовательно, конструкции $S(V)$ и $hS(V)$ также совпадают. Теорема доказана.

Пусть N – порядок группы G (число различных движений $g \in G$). Для произвольного возмущения v построим согласно (5) симметрич-ное возмущение V. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Приращение dl (v), соответствующее возмущению v, равно*

$$d\lambda(v) = \frac{1}{N} d\lambda(V) \tag{6}$$

Доказательство. Поскольку в силу симметрии конструкции $d\lambda(gv) = d\lambda(v)$, с учетом линейности, обусловленной малостью x_k, $k = 1,\ldots,n$,

$$d\lambda(V) = d\lambda\left(\sum_{g\in G} gv\right) = \sum_{g\in G} d\lambda(gv) = Nd\lambda(V),$$

откуда и следует (6). Теорема доказана.

Замечание. Среди возмущений gv могут оказаться одинаковые. Множество элементов $h \in G$, для которых $hv = v$, образует подгруппу H_v группы G, порядок которой обозначим через N_v. В этом случае можно построить симметричное возмущение $V' = \sum g'v$, суммируя по всем тем элементам $g' \in G$, для которых $g'v$ различны. Тогда формулу (6) можно заменить соотношением

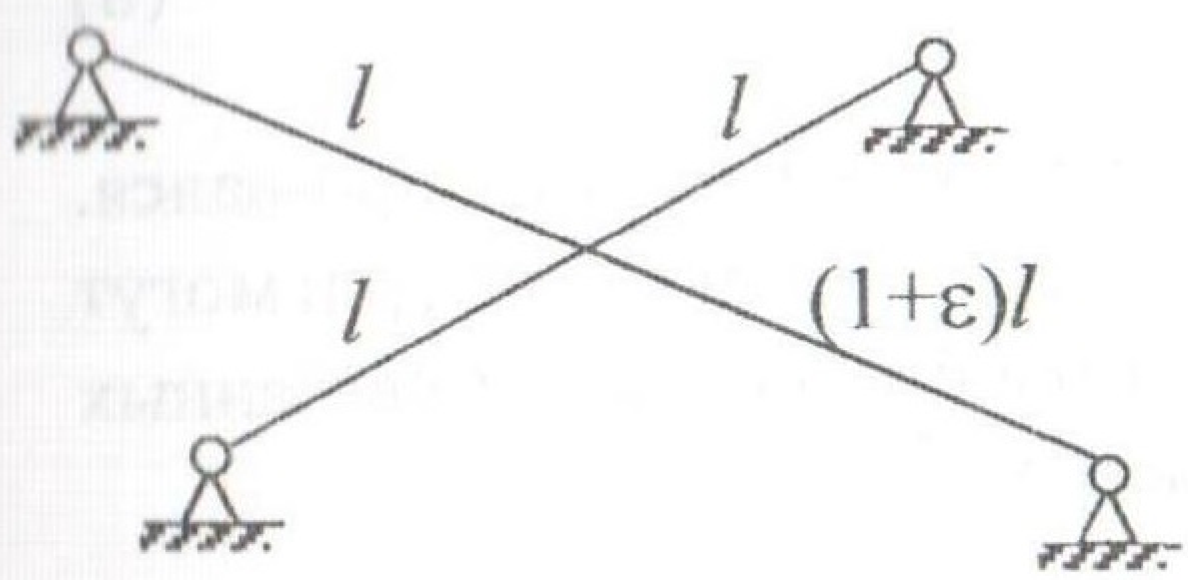
$$d\lambda(v) = \frac{N_v}{N} d\lambda(V'), \tag{6'}$$

которое на практике может оказаться более удобным (см. пример)

Кроме того, элементы g' позволяют определить класс возмущений $g'v - v$, для которых $d\lambda = 0$. Действительно

$$d\lambda(g'v - v) = d\lambda(g'v) - d\lambda(v) = 0.$$

Пример. Пусть $\lambda = \lambda(\varepsilon)$ представляет собой основную частоту колебаний крестообразного перекрытия (см. рисунок), одно из плеч которого отличается на εl от остальных. Известно [7], что



$$\lambda(0) = \frac{\pi^2}{4l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

при стандартных обозначениях, m – линейная плотность, балки призматические. Рассматривая εl как возмущение, построим симметричное возмущение V', в котором все плечи удлинены на εl. Тогда, используя (6′), найдем в линейном приближении

$$\lambda(\varepsilon) \approx \lambda(0) + d\lambda(\varepsilon) = \lambda(0) + \frac{1}{4} d\lambda(V') = \frac{\pi^2}{4}\sqrt{\frac{EI}{m}}\left(\frac{1}{l^2} - \frac{dl}{2l^3}\right),$$

откуда при $dl = \varepsilon l$

$$\lambda(\varepsilon) \approx \frac{\pi^2}{8l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}(2-\varepsilon) = \frac{1{,}2337}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}(2-\varepsilon). \tag{7}$$

Точный расчет, требующий решения сравнительно сложного трансцендентного уравнения [7], приводит к формуле

$$\lambda(\varepsilon)=\frac{\mu}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}},$$

где значения μ для ряда значений ε приведены в таблице. В соседних колонках даны для сравнения соответствующие значения, полученные по формуле (7), а также величины относительной погрешности. Как видим, приближенный расчет по элементарной формуле (7) дает вполне удовлетворительные результаты в довольно широком диапазоне изменения ε, т.е. даже при значительном отклонении от полной симметрии. Нетрудно построить аналогичную формулу, учитывающую возмущения длин всех четырех элементов перекрытия

ε	μ	ф-ла (7)	погрешность
-0,2	2,760	2,714	1,66 %
-0,1	2,601	2,591	0,39 %
0	2,467	2,467	0
0,1	2,352	2,344	0,35 %
0,2	2,250	2,221	1,32 %

$$\lambda(\varepsilon)\approx\frac{\pi^2}{8l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}\left[2-(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)\right]. \qquad (8)$$

Смысл величины λ и параметров x_k в работе не конкретизиро-вался. Поэтому изложенные в ней соображения имеют общий характер и могут оказаться полезными при решении самых разнообразных задач, связанных с исследованиями симметричных сооружений.

Литература

1. Фомин В. М. Применение методов теории линейных представлений групп к расчету и исследованию колебаний стержневых систем. Дисс. на соиск. уч. ст. к. т. н., ОИСИ. – Одесса, 1970. – 123 с.

2. Бурышкин М. Л., Гордеев В. Н. Эффективные методы и программы расчета на ЭВМ симметричных конструкций. – К.: Будівельник, 1984. – 120 с.

3. Бекшаев С. Я. Применение обобщенных координат в расчетах симметричных механических систем. – В кн.: Механика симметричных неоднородных сред и ее приложения. – Одесса, 1997, С. 18 – 26.

4. Бекшаев С. Я. Некоторые проблемы расчета симметричных конструк-ций. – В кн.: Строительные материалы и конструкции. – Одесса, 1999, С. 13 – 21.

5. Бекшаев С. Я. К теории расчета симметричных конструкций с применением

теории представлений групп. – В кн.: Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. Випуск №2. – Одеса, "Місто майстрів", 2000, С. 25 – 37.

6. Вигнер Е. Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров. – М.: ИЛ, 1961. – 443 с.

7. Смирнов А. Ф. и др. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений. – М.: Стройиздат, 1984. – 416 с.