

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАЗРУШЕНИЯ ДЛИННЫХ СТЕН ПРИ НЕРАВНОМЕРНОЙ ПРОСАДКЕ ОСНОВАНИЯ

Фомин В. М. (Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса)

В настоящее время существует значительный разрыв между хорошо разработанной теорией возникновения и развития трещин в деформируемых средах и практическими задачами, возникающими при исследовании разрушения конструкций. Настоящая работа является одной из попыток уменьшения этого разрыва. В статье предлагается решение задачи о распространении трещин (без учета возникающих при этом динамических процессов) в упругой полосе, на нижней границе которой заданы перемещения, а на верхней – напряжения, а также вычислительный алгоритм, основанный на этом решении и на некоторых дополнительных предположениях, изложенных ниже. Алгоритм используется при моделировании процесса разрушения длинной бетонной стены при просадке основания.

1. Рассмотрим сначала плоскую задачу определения напряжений и перемещений в бесконечной упругой полосе, на одной границе которой $y = h$ заданы напряжения, а на другой $y = 0$ – перемещения.

Используя формулы Колосова [1, 2], связывающие компоненты смещений и напряжений с комплексными потенциалами $\phi(z)$ и $\psi(z)$ ($z = x + iy$, i – мнимая единица),

$$\begin{aligned}\sigma_x + \sigma_y &= 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}]; \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[\overline{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]; \\ 2G(u + iv) &= \kappa\phi(z) - z\overline{\Phi(z)} - \overline{\psi(z)}; \\ \Phi(z) &= \phi'(z); \quad \Psi(z) = \psi'(z),\end{aligned}\tag{1.1}$$

(G – модуль сдвига, u и v – компоненты вектора смещений вдоль осей x и y , $\kappa = 3 - 4\nu$ для плоской деформации и $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ для плоского напряженного состояния, ν – коэффициент Пуассона; черта означает комплексное сопряжение) можно получить следующие формулы

для напряжений

$$\sigma_n(t) + i\sigma_\tau(t) = \Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + \frac{d\bar{t}}{dt} [t\overline{\Phi'(t)} + \overline{\Psi(t)}], \quad t = \xi + i\eta \in \gamma \quad (1.2)$$

($\sigma_n(t)$ и $\sigma_\tau(t)$ – нормальная и касательная составляющие напряжений на элементарной площадке с координатами ξ и η , расположенной на контуре γ ; $\frac{d\bar{t}}{dt} = -\exp(-2i\alpha)$, α – угол между нормалью к контуру в точке t и осью x), и производных смещений

$$2G[u'(t) + iv'(t)] = \kappa\Phi(t) - \overline{\Phi(t)} - \frac{d\bar{t}}{dt} [t\overline{\Phi'(t)} + \overline{\Psi(t)}], \quad t \in \gamma. \quad (1.3)$$

Для составления уравнений задачи используем метод, изложенный в работах [3, 4], т.е. будем считать, что в упругой плоскости сделано два параллельных разреза $\gamma_1: y = h$ и $\gamma_2: y = 0$. На первом из них заданы напряжения

$$\sigma_n + i\sigma_\tau = p_1(t), \quad t \in \gamma_1, \quad (1.4)$$

а перемещения испытывают разрыв при переходе через этот разрез.

На втором заданы производные от смещений

$$2G \frac{d}{dt}(u + iv) = f_2'(t), \quad t \in \gamma_2, \quad (1.5)$$

а напряжения претерпевают скачок при переходе через этот разрез.

Комплексные потенциалы, определяющие напряженно-деформированное состояние полосы, будем искать в следующем виде [3, 4]:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{\gamma_j} \frac{Q_j(t_j)}{t_j - z} dt_j, \quad (1.6)$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{\gamma_j} \left[\frac{\overline{Q_j(t_j)} - 2iq_j(t_j)}{t_j - z} dt_j - \frac{\overline{t_j Q_j(t_j)}}{(t_j - z)^2} dt_j \right]$$

$$Q_j(t_j) = g_j'(t_j) - 2iq_j(t_j)/(1 + \kappa) \quad (j = 1, 2). \quad (1.6a)$$

Функции $q_j(t_j)$ и $g_j(t_j)$ ($j = 1, 2$) связаны со скачками напряжений и производных от смещений на разрезах следующим образом:

$$\frac{d}{dt_1} [(u + iv)_1^+ - (u + iv)_1^-] = \frac{i(1 + \kappa)}{2G} g_1'(t_1), \quad q_1(t_1) = 0, \quad t_1 \in \gamma_1; \quad (1.7)$$

$$(\sigma_n + i\sigma_\tau)_2^+ - (\sigma_n + i\sigma_\tau)_2^- = 2q_2(t_2), \quad g_2'(t_2) = 0, \quad t_2 \in \gamma_2.$$

Из (1.2), (1.3) и (1.6) получаем

$$\sigma_n(z) + i\sigma_\tau(z) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{\gamma_j} [N_j^{(1)}(t_j, z) Q_j(t_j) dt_j + L_j(t_j, z) \overline{Q_j(t_j)} dt_j]; \quad (1.8)$$

$$-2G[u'(z) + iv'(z)] = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{\gamma_j} [N_j^{(2)}(t_j, z) Q_j(t_j) dt_j + L_j(t_j, z) \overline{Q_j(t_j)} dt_j].$$

Здесь

$$N_j^{(m)}(t_j, z) = \frac{1}{2} \left(\frac{a_n}{t_j - z} + \frac{d\bar{z}}{dz} \frac{a_j}{t_j - z} \right), \quad a_1 = 1, \quad a_2 = -\kappa; \quad (1.8a)$$

$$L_j(t_j, z) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{t_j - z} - \frac{d\bar{z}}{dz} \frac{t_j - z}{(t_j - z)^2} \right], \quad z \in \gamma,$$

γ — некоторый контур в полосе.

Учитывая соотношения (1.8), можно записать (1.4) и (1.5) в виде следующих уравнений:

$$\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{\gamma_j} [N_j^{(n)}(t_j, z_n) Q_j(t_j) dt_j + L_j(t_j, z_n) \overline{Q_j(t_j)} dt_j] = r_n(z_n) \quad (z_n \in \gamma_n; \quad (1.9)$$

$$n = 1, 2),$$

где $r_1(z_1) = p_1(z_1)$, $r_2(z_2) = -f_2'(z_2)$.

Равенства (1.8a) показывают, что (1.9) представляют собой систему сингулярных интегральных уравнений.

Уравнения (1.9) можно представить и так:

$$\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{\gamma_j} [N_{nj}^{(n)}(t_j, x) Q_j(t_j) dt_j + L_{nj}(t_j, x) \overline{Q_j(t_j)} dt_j] = r_n(x) \quad (n = 1, 2). \quad (1.9a)$$

В (1.9a) приняты обозначения $N_{nj}^{(n)}(t_j, x) = N_j^{(n)}(t_j, z_n)$ и $L_{nj}(t_j, x) = L_j(t_j, z_n)$, где $z_n = x + z_n^0$ ($n = 1, 2$; $z_1^0 = ih$, $z_2^0 = 0$), а $N_j^{(n)}(t_j, z_n)$ и $L_j(t_j, z_n)$ определяются по формулам (1.8a) при $\alpha = \pi/2$. Функции $r_n(x + z_n^0)$

для краткости обозначены через $r_n(x)$.

Предполагается, что функции $p_1(x)$ и $f_2'(x)$ абсолютно суммируемы на всей числовой оси. Произведем в (1.9) преобразование Фурье по x . В результате будем иметь

$$\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{\gamma_j} [\tilde{N}_{nj}^{(n)}(t_j, s) Q_j(t_j) dt_j + \tilde{L}_{nj}(t_j, s) \overline{Q_j(t_j)} dt_j] = \tilde{r}_n(s) \quad (n=1,2). \quad (1.10)$$

Здесь знак \sim над обозначением функции означает ее преобразование Фурье, т.е.

$$\tilde{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(isx) dx, \quad \text{причем} \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(s) \exp(-isx) ds. \quad (1.11)$$

Из (1.8а) следует, что

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{nj}^{(n)}(t_j, s) &= \frac{1}{2} [a_n Z(t_j - z_n^0, s) + a_j \frac{dz_n}{dz_n} Z(\overline{t_j - z_n^0}, s)]; \\ \tilde{L}_{nj}(t_j, s) &= \frac{1}{2} [Z(\overline{t_j - z_n^0}, s) - \frac{dz_n}{dz_n} Y(t_j - z_n^0, s)], \end{aligned} \quad (1.12)$$

где

$$Z(z, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\xi s)}{z - \xi} d\xi, \quad Y(z, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(z - \xi) \exp(i\xi s)}{(z - \xi)^2} d\xi$$

(при $\text{Im}(z) = 0$ интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши).

При помощи несложных выкладок получаем

$$Y(z, s) = [1 + 2sy] Z(\overline{z}, s). \quad (1.13)$$

Используя теорему о вычетах, можно убедиться, что

$$Z(z, s) = \exp(ixs) Z_0(y, s), \quad Z_0(y, s) = -\pi i \text{sgn}(s) [1 + \text{sgn}(sy)] \exp(-ys). \quad (1.14)$$

В (1.13) и (1.14) $x = \text{Re}(z)$, $y = \text{Im}(z)$. Заметим, что при любом фиксированном $y \neq 0$ функция $Z_0(y, s)$ на одной из полуосей s равна нулю, а на другой экспоненциально убывает при $|s| \rightarrow \infty$.

Тогда

$$\begin{aligned}
Z(t_j - z_n^0, s) &= \exp(isx)Z_0(y_j^0 - y_n^0, s), \\
Y(t_j - z_n^0, s) &= \exp(isx)Y_0(y_j^0 - y_n^0, s), \\
Y_0(y_j^0 - y_n^0, s) &= [1 + 2s(y_j^0 - y_n^0)]Z_0(y_n^0 - y_j^0, s).
\end{aligned}
\tag{1.15}$$

Представляя t_j в виде $\xi + z_j^0$, (1.10) можно записать так:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{N}_{nj}^{(n)}(\xi + z_j^0, s) Q_j(\xi) + \tilde{L}_{nj}(\xi + z_j^0, s) \overline{Q_j(\xi)}] d\xi = \\
= \tilde{r}_n(s) \quad (n=1,2),
\end{aligned}
\tag{1.10a}$$

где для краткости $Q_j(\xi + z_j^0)$ обозначено через $Q_j(\xi)$.

Подставляя сюда (1.15), получаем

$$\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^2 [N_{0nj}(s) \tilde{Q}_j(s) + L_{0nj}(s) \overline{\tilde{Q}_j(s)}] = \tilde{r}_n(s),
\tag{1.16}$$

где

$$\begin{aligned}
N_{0nk}(s) &= \frac{1}{2} [a_n Z_0(y_k^0 - y_n^0, s) + a_k Z_0(y_n^0 - y_k^0, s)]; \\
L_{0nk}(s) &= \frac{1}{2} [Z_0(y_n^0 - y_k^0, s) - Y_0(y_k^0 - y_n^0, s)].
\end{aligned}$$

Учитывая, что $\tilde{f}(s) = \overline{\tilde{f}(-s)}$ и $L_{0nn}(s) = 0$ ($n=1,2$), (1.16) можно записать так:

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_1(s) + d_{12}(s) \tilde{Q}_2(s) + d_{14}(s) \overline{\tilde{Q}_2(-s)} &= F_1(s); \\
\tilde{Q}_2(s) + d_{21}(s) \tilde{Q}_1(s) + d_{23}(s) \overline{\tilde{Q}_1(-s)} &= F_2(s).
\end{aligned}
\tag{1.17}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
d_{12}(s) &= \frac{N_{012}(s)}{N_{011}(s)}, \quad d_{14}(s) = \frac{L_{012}(s)}{N_{011}(s)}, \quad d_{21}(s) = \frac{N_{021}(s)}{N_{022}(s)}, \\
d_{23}(s) &= \frac{L_{021}(s)}{N_{022}(s)}, \quad F_1(s) = \frac{\tilde{r}_1(s)}{N_{011}(s)}, \quad F_2(s) = -\frac{\tilde{r}_2(s)}{N_{022}(s)}.
\end{aligned}
\tag{1.18}$$

Используя (1.15), можно убедиться, что

$$\begin{aligned}
d_{12}(s) &= -\frac{1}{2}[\kappa(1 + \operatorname{sgn}(s)) + \operatorname{sgn}(s) - 1]\exp(-h|s|), \\
d_{14}(s) &= hs[1 + \operatorname{sgn}(s)]\exp(-h|s|), \\
d_{21}(s) &= \frac{1}{2\kappa}[\kappa(1 + \operatorname{sgn}(s)) + \operatorname{sgn}(s) - 1]\exp(-h|s|), \\
d_{23}(s) &= \frac{hs}{\kappa}[1 - \operatorname{sgn}(s)]\exp(-h|s|), \\
F_1(s) &= i \operatorname{sgn}(s) \tilde{r}_1(s), \quad F_2(s) = \frac{i \operatorname{sgn}(s)}{\kappa} \tilde{r}_2(s).
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Из второго уравнения (1.17) получаем

$$\tilde{Q}_2(s) = F_2(s) - d_{21}(s)\tilde{Q}_1(s) - d_{23}(s)\overline{\tilde{Q}_1(-s)}. \tag{1.20}$$

После подстановки этого выражения в первое уравнение (1.17), получим равенство, содержащее в качестве неизвестных только $\tilde{Q}_1(s)$ и $\overline{\tilde{Q}_1(-s)}$. Заменяя в этом равенстве s на $-s$ и переходя к комплексно сопряженным величинам, будем иметь еще одно уравнение относительно этих же функций. Таким образом приходим к следующей системе:

$$\begin{aligned}
g_{11}(s)\tilde{Q}_1(s) + g_{12}\overline{\tilde{Q}_1(-s)} &= G_1(s); \\
g_{21}(s)\tilde{Q}_1(s) + g_{22}\overline{\tilde{Q}_1(-s)} &= G_2(s);
\end{aligned} \tag{1.21}$$

где

$$\begin{aligned}
g_{11}(s) &= 1 - d_{12}(s)d_{21}(s) - d_{14}(s)\overline{d_{23}(-s)}; \\
g_{12}(s) &= -[d_{12}(s)d_{23}(s) - d_{14}(s)\overline{d_{21}(-s)}]; \\
g_{21}(s) &= \overline{g_{12}(-s)}; \quad g_{22}(s) = \overline{g_{11}(-s)}; \\
G_1(s) &= F_1(s) - d_{12}(s)F_2(s) - f_{13}(s)\overline{F_2(-s)}; \quad G_2(s) = \overline{G_1(-s)}.
\end{aligned} \tag{1.21a}$$

Из (1.21) получаем

$$\tilde{Q}_1(s) = \sum_{k=1}^4 q_{1k}(s)F_k(s). \tag{1.22}$$

Здесь

$$F_3(s) = \overline{F_1(-s)}, \quad F_4(s) = \overline{F_2(-s)},$$

$$q_{11}(s) = \frac{g_{22}}{\Delta}, \quad q_{12}(s) = \frac{-d_{12}(s)g_{22}(s) + \overline{d_{14}(-s)g_{12}(s)}}{\Delta}, \quad (1.22a)$$

$$q_{13}(s) = -\frac{g_{12}(s)}{\Delta}, \quad q_{14}(s) = \frac{-d_{14}(s)g_{22}(s) + \overline{d_{12}(-s)g_{12}(s)}}{\Delta},$$

$$\Delta = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}.$$

Аналогично с учетом (1.18) будем иметь

$$\tilde{Q}_2(s) = \sum_{k=1}^4 q_{2k}(s)F_k(s), \quad (1.23)$$

где

$$\begin{aligned} q_{21}(s) &= -d_{21}(s)q_{11}(s) - d_{23}(s)\overline{q_{13}(-s)}, \\ q_{22}(s) &= 1 - d_{21}(s)q_{12}(s) - d_{23}(s)\overline{q_{14}(-s)}, \\ q_{23}(s) &= -d_{21}(s)q_{13}(s) - d_{23}(s)\overline{q_{11}(-s)}, \\ q_{24}(s) &= -d_{21}(s)q_{14}(s) - d_{23}(s)\overline{q_{12}(-s)}. \end{aligned} \quad (1.23a)$$

Легко убедиться, что функции $q_{jk}(s)$, а следовательно, и $\tilde{Q}_j(s)$ экспоненциально убывают при $|s| \rightarrow \infty$, и поэтому их оригиналы легко могут быть получены при помощи численного интегрирования.

Положим теперь, что в формулах (1.8) y и β зафиксированы, а x является переменной величиной. Произведем преобразование Фурье по этой переменной. Аналогично изложенному выше будем иметь

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_n + i\tilde{\sigma}_\tau &= \sum_{j=1}^2 [N_{0j}^{(1)}(y, s)\tilde{Q}_j(s) + L_{0j}(y, s)\overline{\tilde{Q}_j(-s)}]; \\ -2G(\tilde{u}' + i\tilde{v}') &= \sum_{j=1}^2 [N_{0j}^{(2)}(y, s)\tilde{Q}_j(s) + L_{0j}(y, s)\overline{\tilde{Q}_j(-s)}], \end{aligned} \quad (1.24)$$

где

$$\begin{aligned} N_{0j}^{(n)}(y, s) &= \frac{1}{2\pi} [a_n Z_0(\delta_{j1}h - y, s) + a_j \exp(-2i\beta) Z_0(y - \delta_{j1}h, s)]; \\ L_{0j}(y, s) &= \frac{1}{2\pi} [1 - a_j \exp(-2i\beta) - 2s(\delta_{j1}h - y)] Z_0(y - \delta_{j1}h, s), \end{aligned}$$

δ_{jk} – символ Кронекера.

Можно показать, что $\tilde{\sigma}_n + i\tilde{\sigma}_\tau$ и $\tilde{u}' + i\tilde{v}'$ являются экспоненциально убывающими функциями s при $0 < y < h$ и $|s| \rightarrow \infty$. Поэтому их оригиналы могут быть найдены при помощи численного обращения преобразования Фурье.

Действие собственного веса сводится к созданию одномерного напряженного состояния, при котором напряжения и перемещения зависят только от координаты y . Отсюда следует, что напряжения $\tau_{xy}^{(p)}(y)$ и деформации $\varepsilon_x^{(p)}(y)$, вызванные собственным весом, равны нулю. Напряжения $\sigma_y^{(p)}(y)$ легко определяются из равновесия столба, ограниченного двумя вертикальными прямыми:

$$\sigma_y^{(p)}(y) = -\gamma(h - y)$$

(γ – объемный вес). Из условия $\sigma_z^{(p)} = 0$, характерного для плоского напряженного состояния, получаем

$$\sigma_x^{(p)}(y) = \nu\sigma_y^{(p)}(y).$$

Аналогично для плоской деформации ($\varepsilon_z^{(p)} = 0$) будем иметь

$$\sigma_x^{(p)}(y) = \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_y^{(p)}(y).$$

Напряжения в полосе, вызванные собственным весом вычисляются по формуле

$$\begin{aligned} \sigma^{(p)}(y) + i\tau^{(p)}(y) &= \sigma_x^{(p)}(y)\cos^2\alpha + \sigma_y^{(p)}(y)\sin^2\alpha + \\ &+ i[\sigma_x^{(p)}(y) - \sigma_y^{(p)}(y)]\sin\alpha\cos\alpha \end{aligned} \quad (1.25)$$

2. Пусть теперь в упругой полосе имеется система трещин, свободных от нагрузки. Задача заключается в определении напряженно-деформированного состояния полосы, в частности, в определении коэффициентов интенсивности напряжений в вершинах трещин. Пользуясь обычным приемом, разложим эту задачу на две, суперпозиция решений которых дает искомое решение. Первая из них состоит в определении напряжений в сплошной полосе, на верхней грани которой заданы напряжения, а на нижней – перемещения, на площадках, распо-

ложенных вдоль контуров трещин. Эта задача решена в предыдущем параграфе. Вторая – в определении напряжений и перемещений в полосе, верхняя грань которой свободна, а нижняя закреплена, ослабленной системой трещин, к которым приложены напряжения, равные найденным при решении предыдущей задачи, но с обратным знаком.

Напряженно-деформированное состояние такой полосы определяется комплексными потенциалами Колосова-Мусхелишвили следующего вида:

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{n_0} \int_{\gamma_j} \frac{Q_j(t_j)}{t_j - z} dt_j, \\ \Psi(z) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{n_0} \int_{\gamma_j} \left[\frac{\overline{Q(t_j)} - 2i\overline{q_j(t_j)}}{t_j - z} dt_j - \frac{\overline{t_j Q_j(t_j)}}{(t_j - z)^2} dt_j \right].\end{aligned}\quad (2.1)$$

Здесь n_0 равно общему числу разрезов, включая верхнюю и нижнюю грани полосы, которым соответствуют номера 1 и 2. Таким образом, число трещин в полосе равно $n_0 - 2$.

Действуя аналогично изложенному в предыдущем параграфе, получаем следующую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n_0} \int_{\gamma_j} [N_j^{(m)}(t_j, z_n) Q_j(t_j) dt_j + L_j(t_j, z_n) \overline{Q_j(t_j)} dt_j] = \\ = p_n(z_n) \quad (z_n \in \gamma_n, n = 1, 2, \dots, n_0)\end{aligned}\quad (2.2)$$

Здесь $p_n(z_n) = 0$ ($n = 1, 2$); $m = n$ ($n = 1, 2$); $m = 1$ ($n/3$).

Первые два уравнения системы (2.2) могут быть представлены в виде системы (1.9а), в которой

$$r_n(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=3}^{n_0} \int_{\gamma_k} [N_{nk}^{(1)}(t_k, x) Q_k(t_k) dt_k + L_{nk}(t_k, x) \overline{Q_k(t_k)} dt_k] \quad (n = 1, 2), \quad (2.3)$$

Производя преобразование Фурье по x и действуя далее как в предыдущем параграфе, получаем систему (1.21), из которой находим, что

$$\tilde{Q}_j(s) = \sum_{n=1}^4 q_{jn}(s) F_n(s) \quad (j = 1, 2) \quad (2.4)$$

Здесь $q_{jn}(s)$ определяются по формулам (1.22а) и (1.23а), а $F_n(s)$ – по формулам (1.18), в которых

$$\tilde{r}_n(s) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=3}^{n_0} \int_{\gamma_k} [\tilde{N}_{nk}^{(1)}(t_k, s) Q_k(t_k) dt_k + \tilde{L}_{nk}(t_k, s) \overline{Q_k(t_k)} dt_k] \quad (n=1,2). \quad (2.5)$$

Из (2.4) и (2.5) получаем

$$\tilde{Q}_j(s) = \sum_{k=3}^{n_0} \int_{\gamma_k} [\tilde{R}_{1jk}(t_k, s) Q_k(t_k) dt_k + \tilde{R}_{2jk}(t_k, s) \overline{Q_k(t_k)} dt_k] \quad (j=1,2). \quad (2.6)$$

Здесь через $\tilde{R}_{nj}(t_k, s)$ ($n, j=1,2; k=3, \dots, n_0$) обозначены следующие функции:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{1jk}(t_k, s) = & -\frac{1}{\pi} \left[\frac{q_{j1}(s)}{N_{011}(s)} \tilde{N}_{1k}^{(1)}(t_k, s) + \frac{q_{j2}(s)}{N_{022}(s)} \tilde{N}_{2k}^{(1)}(t_k, s) + \right. \\ & \left. + \frac{q_{j3}(s)}{N_{011}(-s)} \overline{\tilde{L}_{1k}(t_k, -s)} + \frac{q_{j4}(s)}{N_{022}(-s)} \overline{\tilde{L}_{2k}(t_k, -s)} \right]; \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{2jk}(t_k, s) = & -\frac{1}{\pi} \left[\frac{q_{j1}(s)}{N_{011}(s)} \tilde{L}_{1k}(t_k, s) + \frac{q_{j2}(s)}{N_{022}(s)} \tilde{L}_{2k}(t_k, s) + \right. \\ & \left. + \frac{q_{j3}(s)}{N_{011}(-s)} \overline{\tilde{N}_{1k}^{(1)}(t_k, -s)} + \frac{q_{j4}(s)}{N_{022}(-s)} \overline{\tilde{N}_{2k}^{(1)}(t_k, -s)} \right]. \end{aligned}$$

Функции $\tilde{R}_{nj}(t_k, s)$ ($n, j=1,2; k=3, \dots, n_0$) экспоненциально убывают при $s \rightarrow \infty$.

Произведя в (2.6) обратное преобразование Фурье, будем иметь

$$Q_j(t_j) = \sum_{k=3}^{n_0} \int_{\gamma_k} [R_{1jk}(t_k, t_j) Q_k(t_k) dt_k + R_{2jk}(t_k, t_j) \overline{Q_k(t_k)} dt_k] \quad (j=1,2). \quad (2.8)$$

Здесь $R_{nj}(t_k, t_j)$ ($n, j=1,2; k=3, \dots, n_0$) – оригиналы функций (2.7).

Рассмотрим теперь остальные $n_0 - 2$ уравнений системы (2.2). Используя (2.8), их можно записать так:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \sum_{k=3}^{n_0} \int_{\gamma_k} \{ [N_k^{(1)}(t_k, z_n) + U_k(t_k, z_n)] Q_k(t_k) dt_k + [L_k(t_k, z_n) + \\ V_k(t_k, z_n)] \overline{Q_k(t_k)} dt_k \} = p_n(z_n) \quad (z_n \in \gamma_n, n=3, \dots, n_0), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где

$$U_k(t_k, z_n) = \sum_{j=1}^2 \int_{\gamma_j} [N_j^{(1)}(t_j, z_n) R_{1jk}(t_j, t_k) dt_j + L_j(t_j, z_n) \overline{R_{2jk}(t_j, t_k)} dt_j]; \quad (2.10)$$

$$V_k(t_k, z_n) = \sum_{j=1}^2 \int_{\gamma_j} [N_j^{(1)}(t_j, z_n) R_{2jk}(t_j, t_k) dt_j + L_j(t_j, z_n) \overline{R_{1jk}(t_j, t_k)} dt_j].$$

Выразим функции $R_{nj k}(t_j, t_k)$ через их образы $R_{nj k}(s, t_k)$ по одной из формул (1.11), подставим эти выражения в (2.10), а затем поменяем порядок интегрирования. В результате получим

$$U_k(t_k, z_n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{N}_j^{(1)}(s, z_n) \tilde{R}_{1jk}(-s, t_k) + \tilde{L}_j(s, z_n) \overline{\tilde{R}_{2jk}(s, t_k)}] ds; \quad (2.11)$$

$$V_k(t_k, z_n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{N}_j^{(1)}(s, z_n) \tilde{R}_{2jk}(-s, t_k) + \tilde{L}_j(s, z_n) \overline{\tilde{R}_{1jk}(s, t_k)}] ds.$$

Здесь $\tilde{N}_j^{(1)}(s, z_n) = \int_{-\infty}^{\infty} N_j^{(1)}(x + z_j^0, z_n) \exp(ixs) dx$; $\tilde{L}_j(s, z_n) =$
 $= \int_{-\infty}^{\infty} L_j(x + z_j^0, z_n) \exp(ixs) dx.$

Можно убедиться, что

$$\tilde{N}_j^{(1)}(s, z_n) = -\frac{1}{2} [Z(z_n - z_j^0, s) + a_j \frac{d\bar{z}_n}{z_n} \overline{Z(z_n - z_j^0, s)}];$$

$$\tilde{L}_j(s, z_n) = -\frac{1}{2} [1 - \frac{d\bar{z}_n}{z_n} - 2s \operatorname{Im}(z_n - z_j^0) \frac{d\bar{z}_n}{z_n}] \overline{Z(z_n - z_j^0, s)}.$$

Тогда

$$U_{nk}(t_k, z_n) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^2 [\langle \tilde{R}_{1jk}(-s, t_k), Z(z_n - z_j^0, s) \rangle +$$

$$+ a_j \frac{d\bar{z}_n}{dz_n} \langle \tilde{R}_{1jk}(-s, t_k), \overline{Z(z_n - z_j^0, s)} \rangle +$$

$$+ (1 - \frac{d\bar{z}_n}{dz_n}) \langle \overline{\tilde{R}_{2jk}(s, t_k)}, \overline{Z(z_n - z_j^0, s)} \rangle -$$

$$\begin{aligned}
& -2(y_n^0 - \delta_{1j}h) \frac{d\bar{z}_n}{dz_n} \left\langle s \bar{R}_{2,jk}(s, t_k), Z(\bar{z}_n - z_j^0, s) \right\rangle]; \\
V_{nk}(t_k, z_n) = & -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^2 \left[\left\langle \bar{R}_{2,jk}(-s, t_k), Z(z_n - z_j^0, s) \right\rangle + \right. \\
& + a_j \frac{d\bar{z}_n}{dz_n} \left\langle \bar{R}_{2,jk}(-s, t_k), Z(\bar{z}_n - z_j^0, s) \right\rangle + \\
& + \left(1 - \frac{d\bar{z}_n}{dz_n}\right) \left\langle \bar{R}_{1,jk}(s, t_k), Z(z_n - z_j^0, s) \right\rangle - \\
& \left. -2(y_n^0 - \delta_{1j}h) \frac{d\bar{z}_n}{dz_n} \left\langle s \bar{R}_{1,jk}(s, t_k), Z(\bar{z}_n - z_j^0, s) \right\rangle \right], \tag{2.12}
\end{aligned}$$

где $\langle f(s), Z(z, s) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) Z(z, s) ds$.

Используя методы численного преобразования Фурье [5], можно показать, что

$$\begin{aligned}
\langle f(s), Z(z, s) \rangle = & \\
= -2\pi s_y \frac{1 - \exp(-ixs_y\Delta)}{x} \sum_{k=0}^{\infty} f(ks_y\Delta) \exp[-(|y| + ix)ks_y\Delta], \tag{2.13}
\end{aligned}$$

Здесь $z = x + iy$, $s_y = \text{sgn}(y)$, Δ – шаг суммирования. Из (2.13) видно, что если $f(s)$ ограничена, то при $y \neq 0$ члены ряда экспоненциально убывают при $k \rightarrow \infty$.

Введем параметр $\xi_k = -1 + 2s_k / l_k$ (l_k – длина трещины γ_k , s_k – дуговая координата, отсчитываемая от одного из концов трещины z_k^0). Тогда $t_k = t_k(\xi_k)$ ($-1 \leq \xi_k \leq 1$) будет уравнением контура трещины. Сделаем в (2.9) подстановку $t_k = t_k(\xi_k)$. В результате будем иметь

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} \sum_{k=3}^{n_0} \int_{-1}^1 \{ [N_k^{(1)}(\xi, \eta) + U_k(\xi, \eta)] \frac{\psi_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} + \\
+ [L_k(\xi, \eta) + V_k(\xi, \eta)] \frac{\bar{\psi}_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \} d\xi = p_n(\eta) \quad (-1 \leq \eta \leq 1; n = 3, \dots, n_0), \tag{2.14}
\end{aligned}$$

В (2.14) приняты следующие обозначения:

$$N_k^{(1)}(\xi, \eta) = N_k^{(1)}(t_k(\xi), z_n(\eta)); U_k(\xi, \eta) = U_k(t_k(\xi), z_n(\eta));$$

$$L_k(\xi, \eta) = L_k(t_k(\xi), z_n(\eta)); V_k(\xi, \eta) = V_k(t_k(\xi), z_n(\eta)); p_n(\eta) = p_n(z_n(\eta)).$$

Кроме того, поскольку напряжения и производные смещений на концах трещины имеют корневую особенность, в (2.14) введено еще одно обозначение

$$\frac{dt_k(\xi)}{d\xi} Q_k(t_k(\xi)) = \frac{\psi_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}. \quad (2.15)$$

Используя метод механических квадратур [6, 3, 4], из (2.14) получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=3}^{n_0} \frac{1}{J_k} \sum_{j=1}^{J_k} \{ [N_k^{(1)}(\xi_{kj}, \eta_{nl}) + U_k(\xi_{kj}, \eta_{nl})] \psi_k(\xi_{kj}) + [L_k(\xi_{kj}, \eta_{nl}) +$$

$$+ V_k(\xi_{kj}, \eta_{nl})] \overline{\psi_k(\xi_{kj})} \} = p_n(\eta_{nl}) \quad (n = 3, \dots, n_0; l = 1, 2, \dots, J_n - 1). \quad (2.16)$$

Здесь ξ_{kj} – корни полинома Чебышева первого рода $T_{J_k}(\xi)$, а η_{nl} – корни полинома Чебышева второго рода $U_{J_l-1}(\eta)$. При учете собственного веса к правым частям системы (2.16) должны быть добавлены напряжения (1.25).

В систему (2.16) должны быть включены дополнительные уравнения [3, 4]

$$\int_{\gamma_n} Q_n(t_n) dt_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, n_0), \quad (2.16a)$$

которые обеспечивают однозначность смещений при обходе контуров трещин. Если трещина выходит на свободную границу полосы, то соответствующее условие из (2.16a) заменятся другим

$$\psi_n(\mp 1) = 0, \quad (2.16b)$$

показывающим, что на конце трещины отсутствует корневая особенность (знак + или – выбирается в зависимости от того, какой конец трещины находится на границе полосы).

Определив из (2.16) $\psi_k(\xi_{kj})$ ($k = 3, \dots, n_0; j = 1, 2, \dots, J_k$) и используя интерполяционную формулу Лагранжа, можно определить $\psi_k(\xi)$ в любой точке промежутка $[-1, 1]$:

$$\psi_k(\xi) = \frac{1}{J_k} \sum_{j=1}^{J_k} (-1)^{j+1} \psi_k(\xi_{kj}) \sqrt{1 - \xi_{kj}^2} \frac{T_{J_k}(\xi)}{\xi - \xi_{kj}}. \quad (2.17)$$

Коэффициенты интенсивности напряжений вычисляются по формулам [3,4]:

$$k_1^{(b,e)} - ik_2^{(b,e)} = \pm \sqrt{|t'_k(\mp 1)|} \frac{\psi_k(\mp 1)}{t'_k(\mp 1)} \quad (2.18)$$

($k_{1,2}^{(b)}$ – коэффициенты интенсивности напряжений в начальной точке трещины, $k_{1,2}^{(e)}$ – в конечной).

Если на сторонах разреза заданы уравновешенные усилия, то как следует из (1.6а), $Q_k(t_k) = g'_k(t_k)$. Левая часть формулы (2.15) совпадает тогда с $g'_k(\xi)$. Используя (2.17) и интегрируя по ξ , получаем

$$g_k(\xi) = \frac{1}{J_k} \sum_{j=1}^{J_k} (-1)^{j+1} \psi_k(\xi_{kj}) \sqrt{1 - \xi_{kj}^2} I_j(\xi); \quad I_j(\xi) = \int_{-1}^{\xi} \frac{T_{J_k}(\tau)}{\tau - \xi_{kj}} d\tau. \quad (2.19)$$

Интеграл $I_j(\xi)$ легко вычисляется, поскольку $\frac{T_{J_k}(\tau)}{\tau - \xi_{kj}} =$

$= 2^{J_k-1} \prod_{m=1}^{J_k} (\tau - \xi_{km})$ (штрих у знака произведения означает, что в нем отсутствует множитель с $m = j$).

Заметим, что условие (2.16а) может быть записано в следующем виде:

$$g_n(1) = 0.$$

3. Рассмотрим теперь проблему моделирования распространения трещины (без учета возникающих при этом динамических явлений). Алгоритм основан на следующих принципах:

А. Трещина распространяется, если коэффициент интенсивности напряжений нормального отрыва в одной из вершин трещины не менее критического значения K_{lc} , характерного для данного материала и определяемого экспериментальным путем:

$$k_1 \geq K_{lc}. \quad (3.1)$$

В. Направление развития трещины определяется гипотезой макси-

мальных растягивающих окружных напряжений: распространение трещины происходит в плоскости, в которой нормальные растягивающие напряжения σ_θ принимают максимальное значение. Соответствующий угол θ определяется из формулы

$$\theta = 2 \operatorname{arctg} \frac{k_1 - \sqrt{k_1^2 + 8k_2^2}}{4k_2}. \quad (3.2)$$

С. В процессе развития трещины берега ее могут смыкаться полностью или частично. Определение участков контакта трещины производится при помощи специального итерационного алгоритма, описанного в [4]. При этом предполагается, что между контактирующими берегами имеется полное сцепление, однако, внутренние трещины (т.е. не контактирующие участки берегов не примыкающие к концам трещины) развиваться не могут. На каждом шаге алгоритма производится пересчет границ участков контакта.

Д. Трещина прекращает распространяться, если условие (3.1) не выполняется, т.е. если имеет место неравенство

$$k_1^{(b,e)} < K_{lc}. \quad (3.3)$$

В частности условие (3.3) выполняется, если берега трещины смыкаются на участках, примыкающих к ее концам.

Описание алгоритма проведем на примере балки-стенки, расположенной на жестком основании и находящейся под действием собственного веса. На участке $[-l_1, l_1]$ основание начинает опускаться, причем отрезок $[-l_0, l_0]$ ($l_0 < l_1$) перемещается параллельно самому себе, т.е. остается горизонтальным. Функция, задающая перемещения точек основания имеет следующий вид:

$$f_2(x) = \begin{cases} -if & (|x| \leq l_0) \\ -i \frac{f}{2} \left[1 + \cos \frac{(|x| - l_0)\pi}{l_1 - l_0} \right] & (l_0 < |x| \leq l_1) \\ 0 & (|x| > l_1) \end{cases} \quad (3.4)$$

(f – глубина просадки основания).

Предполагается, что в стенке имеется сеть микротрещин, поэтому алгоритм начинается с «разбрасывания» при помощи метода Монте-

Карло микротрещин по участку стенки, в котором наиболее вероятно их развитие (например, от $-2l_1$ до $2l_1$). При этом плотности вероятностей их распределения по площади и по угловой ориентации считаются равномерными, а для плотности вероятности их длин принята следующая формула [7]:

$$\phi(l) = \frac{r+1}{d} \left(1 - \frac{l}{d}\right)^r \quad (r \geq 0, 0 \leq l \leq d), \quad (3.5)$$

где r – параметр трещиноватости материала, а d – максимальная длина микротрещины.

Затем глубине просадки основания f придается некоторое начальное значение f_0 , при котором значения коэффициентов интенсивности нормального отрыва оказываются меньшими K_{Ic} . С увеличением f на величины, кратные некоторому шагу Δf , т.е. по мере опускания основания абсолютные величины коэффициентов интенсивности напряжений в вершинах микротрещин растут.

Пусть при некотором значении f один из двух коэффициентов интенсивности нормального отрыва у одной из микротрещин становится равным K_{Ic} . Это приводит к ее развитию, т.е. к появлению у одного из ее концов дополнительного прямолинейного отрезка длины Δl , направление которого определяется по формуле (3.2). Назовем этот момент появлением трещины. Поскольку наличие точек излома приводит к значительному усложнению решения, в некоторой малой окрестности этой точки участок ломаной заменяется дугой некоторой кривой (например, окружности), плавно соединяющейся с остальной частью ломаной (рис. 1). Если при том же значении f по крайней мере один из коэффициентов интенсивности больше или равен K_{Ic} , то процедура удлинения трещины повторяется и т.д. Так продолжается до тех пор, пока не выполняются условия пункта D.

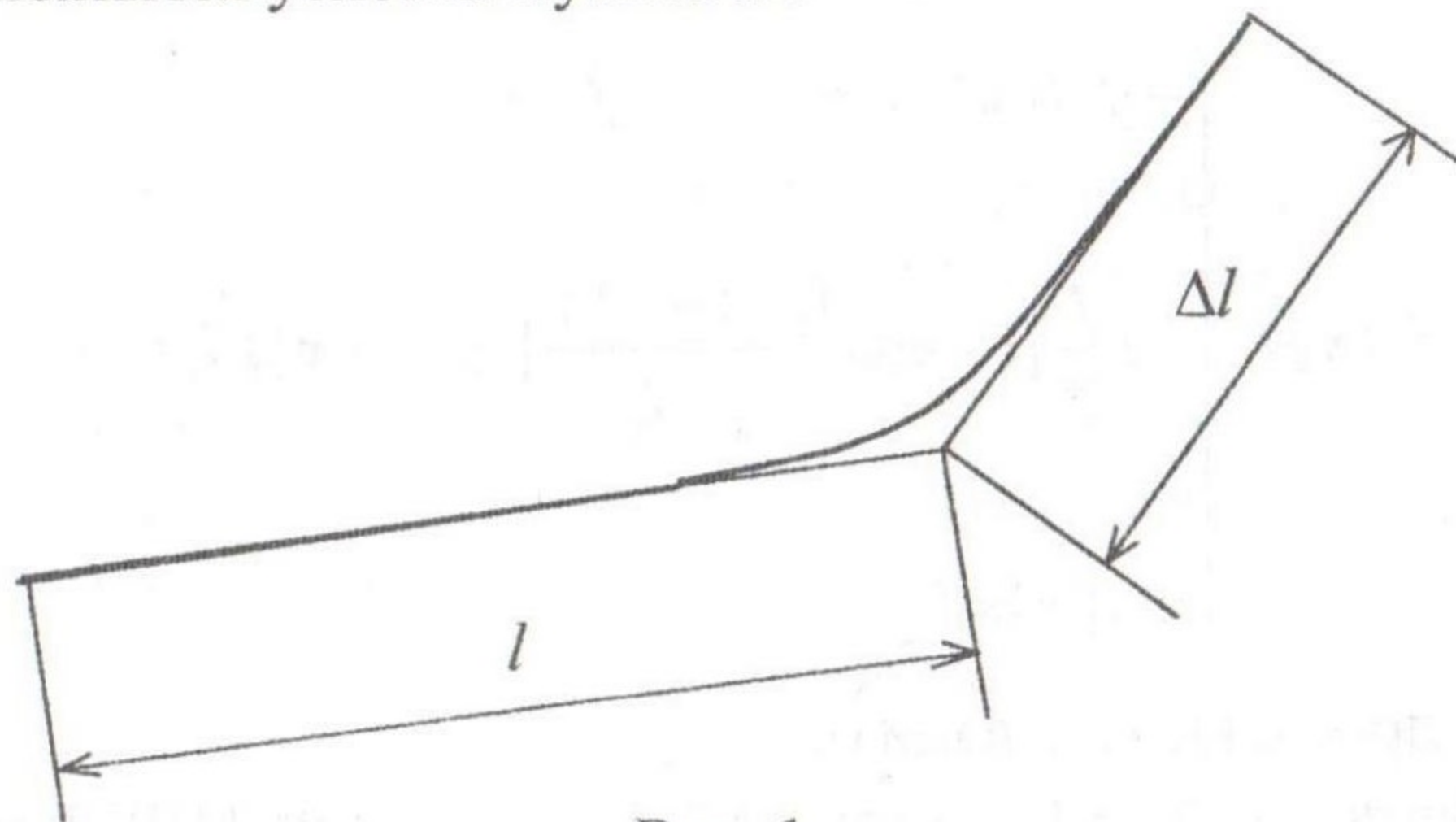


Рис. 1.

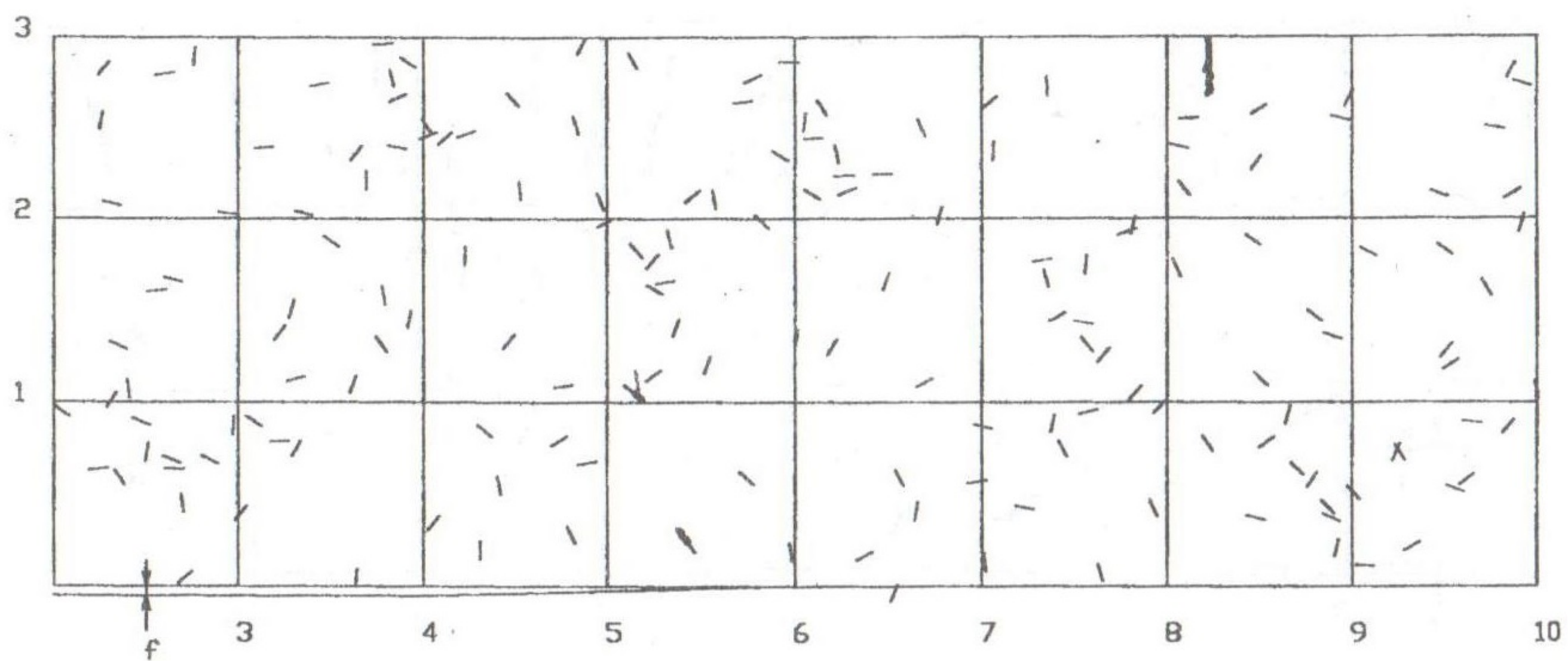


Рис. 2 ($f = 2,97$ см)

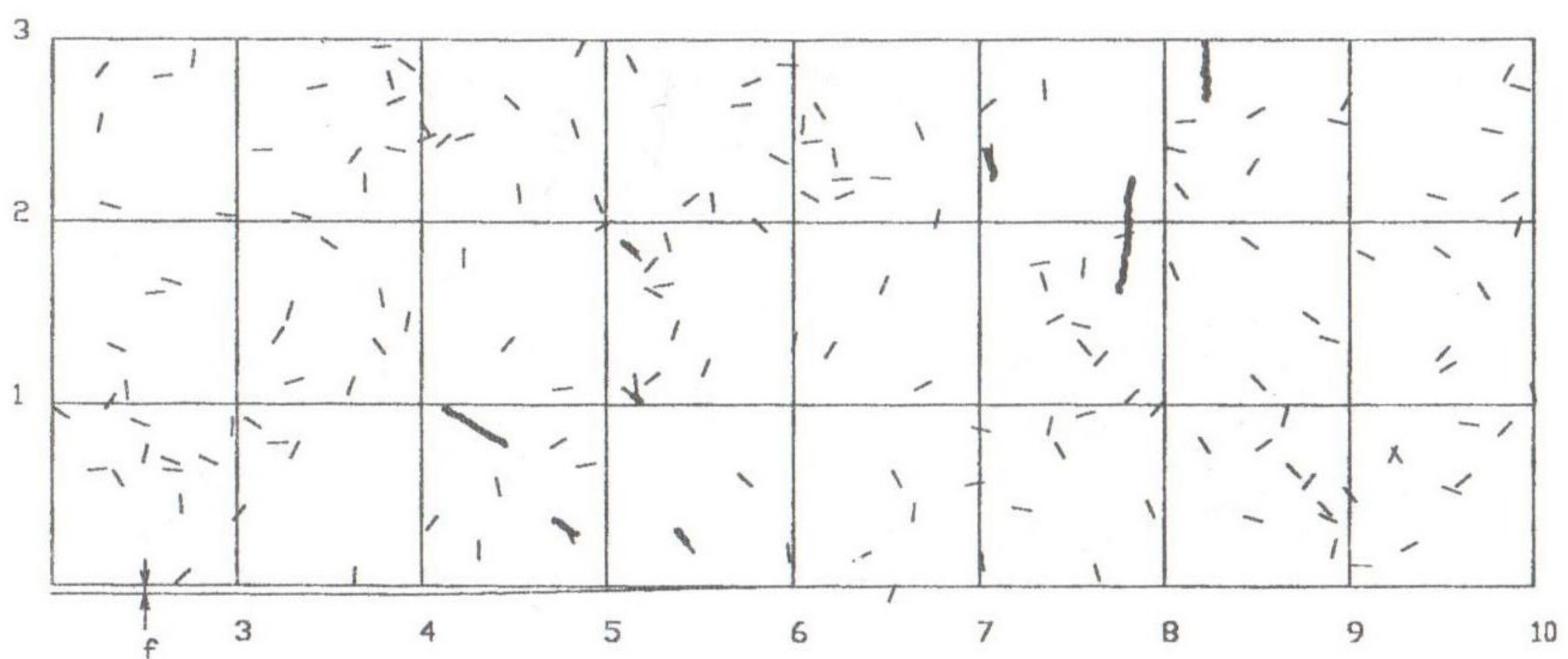


Рис. 3 ($f = 3,41$ см)

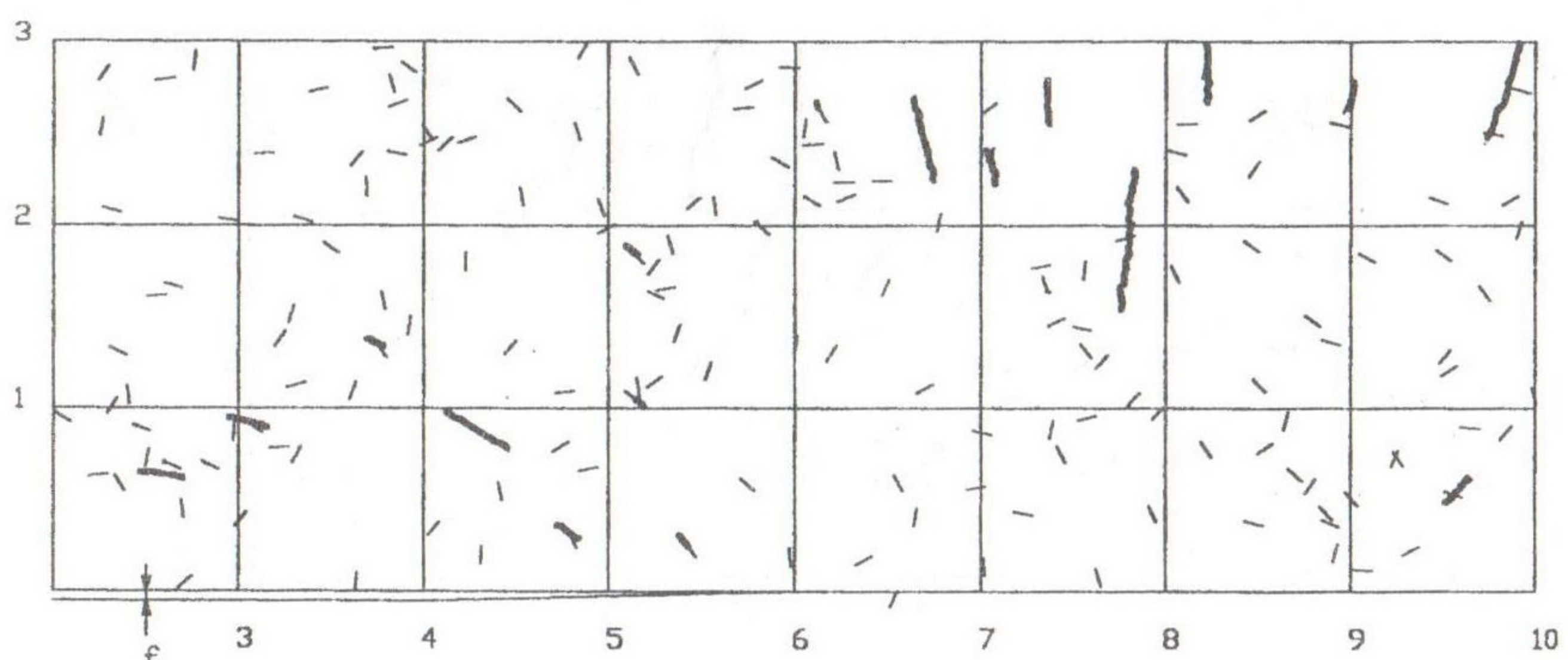


Рис. 4 ($f = 4,29$ см)

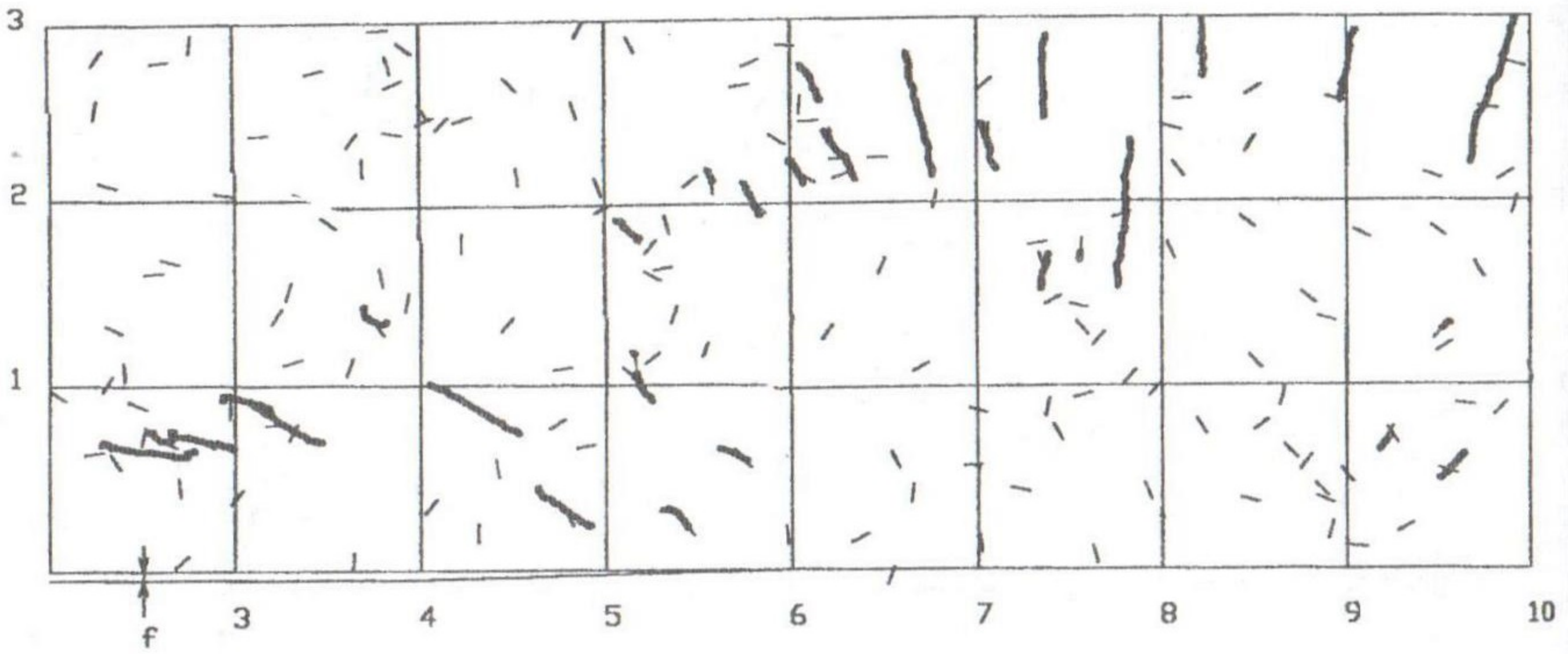


Рис. 5 ($f = 5,89$ см)

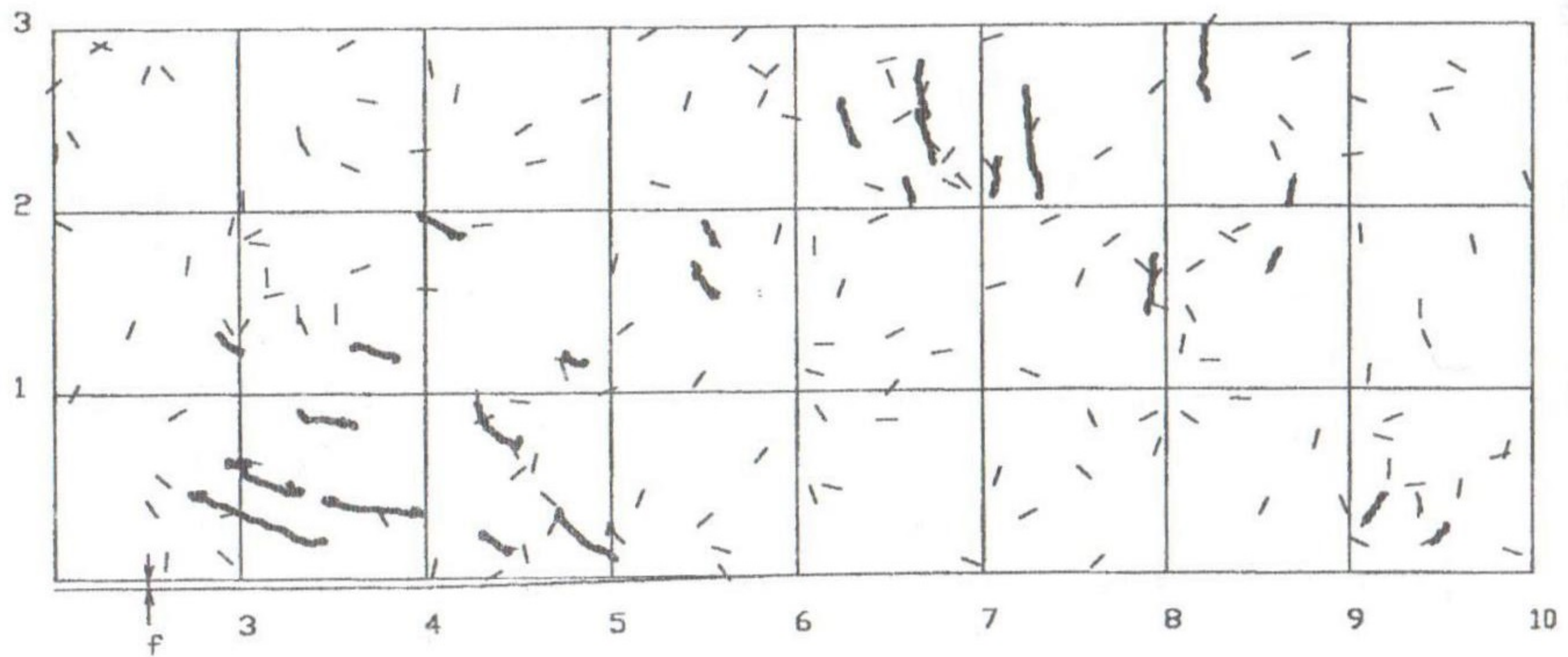


Рис. 6 ($f = 5,43$ см)

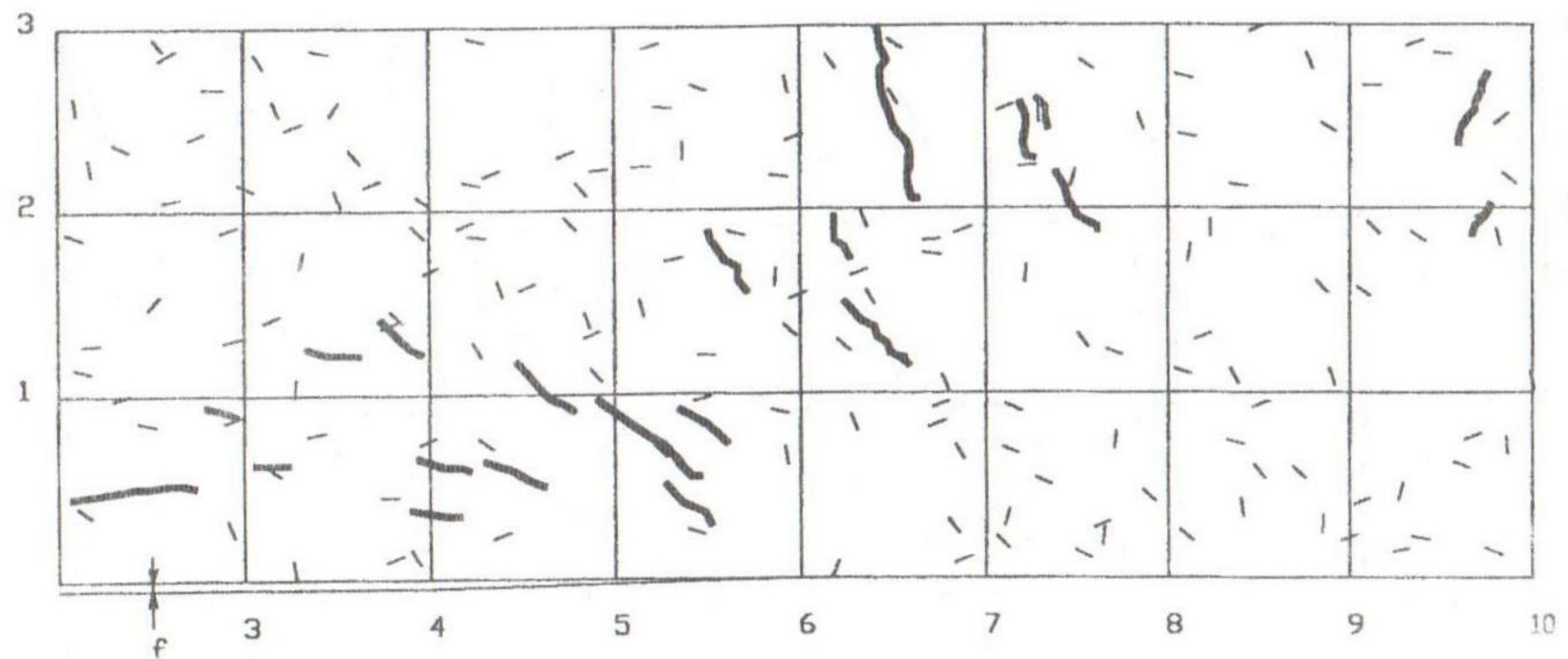


Рис. 7 ($f = 5,59$ см)

Далее величине f придается приращение Δf , что может привести к появлению новых трещин, а также к дальнейшему развитию старых, которое осуществляется аналогично, и т.д.

На рис. 2 показан участок от $x = 2$ м до $x = 10$ м бетонной стены ($K_{1c} = 0,17 \text{ МН/м}^{3/2}$) высотой $h = 3$ м, основание которой опускается на отрезке $[-6 \text{ м}, 6 \text{ м}]$. Показана сеть микротрещин на этом участке. При $f = 2,04$ см появляется первая трещина. О дальнейшем появлении и развитии трещин можно судить по рис. 3 – 5.

На рис. 6 и 7 показано распределение трещин в стене при других расположениях, ориентациях и длинах исходных микротрещин. Легко заметить, что качественно картины распределения трещин идентичны: на участке $[2 \text{ м}, 5 \text{ м}]$ ориентация трещин близка к горизонтальной и расположены они в основном в нижней половине стены, а на участке $[6 \text{ м}, 10 \text{ м}]$ – ориентация близка к вертикальной с преимущественным расположением в верхней половине стены.

Литература

1. Колосов Г. В. Применение комплексной переменной в теории упругости. М.: Л.: ОНТИ, 1935. 224 с.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
3. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 444 с.
4. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 324 с.
5. Задирака В. К. Теория вычисления преобразования Фурье. Киев: Наук. думка, 1983. 216 с.
6. Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. М.: Наука, 1964. 352 с.
7. Витвицкий П. М., Попина С. Ю. Прочность и критерии хрупкого разрушения стохастически дефектных тел. Киев: Наук. думка, 1980. 186 с.