УДК 519.642:624.044:624.15

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕДІНКИ ПАЛІ В ЛІНІЙНОМУ СЕРЕДОВИЩІ ГРУНТУ ЗА МЕТОДОМ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ.

Моргун А. С. *(Вінниця)*, **Сорока М. М.** *(Одеса)*

Проведено порівняльний аналіз сучасних числових методів розв'язку крайових задач та МГЕ. Визначено несучу спроможність та напружено деформований стан палі (лінійна задача).

Одна із переваг математичного моделювання – це універсальність мови математики, яка не потребує ні геометричної подібності, ні збереження явищ фізики.

При побудові інженером кількісної математичної моделі системи практично будь якого роду зазвичай розглядається поведінка нескінченно малого (диференціального) її елемента на основі взаємовідношень між головними змінними, що характеризують систему. Це приводить до запису диференціальних рівнянь. Як тільки побудована основна модель, подальші зусилля направляються на отримання розв'язку в конкретній області. На границях цієї області можуть бути задані самі різні умови. Часто "лобова атака" такої крайової задачі не дає результатів, отже не диво, що розв'язок саме диференціальних рівнянь цікавив аналітиків на протязі більше двох століть.

Наявність нерегулярних границь в більшості практичних задач не дозволяє отримати аналітичний розв'язок диференціальних рівнянь.

У випадку, коли математична модель об'єкту (сукупність рівнянь за допомогою яких досліджуються реальні фізичні об'єкти) настільки складна, що аналітичного розв'язку не існує, чисельний метод стає єдиним можливим варіантом математичного моделювання, та дає змогу отримати достовірні кінцеві результати. Чисельне моделювання тим чи іншим методом можна трактувати як спосіб алгоритмізації вихідної математичної моделі, що адекватно описує поведінку конструкції (об'єкта). Найбільш широко вживані чисельні методи сьогодення – це метод скінчених різниць (МСР) та метод скінчених елементів (МСЕ). МСР можна застосовувати до будь якої системи диференціальних рівнянь, але врахування граничних умов є для нього громіздкою процедурою.

МСЕ є синтез енергетичних методів та структурного моделювання за допомогою ЕОМ. МСЕ зараз є найбільш популярним, але слабкою стороною його є те що він потребує дискретизації всього тіла, що неминуче веде до дуже великої кількості скінчених елементів, особливо в тривимірних задачах з віддаленими границями.

Робота присвячується такому універсальному альтернативному МСЕ та МСР методу, який заснований на вивчені не самих диференціальних рівнянь, що описують конкретну задачу, а відповідних цій задачі граничних інтегральних рівнянь. Термін "Метод граничних елементів" який в останній час з'явився в вітчизняній та зарубіжній літературі, означає сукупність універсальних чисельних методів, які швидко розвиваються і знаходять практичне застосування в прикладних задачах механіки, фізики та техніки. Сама назва виділяє характерну особливість МГЕ: можливість розв'язку задачі з використанням дискретизації лише границі області. Історично методу граничних елементів МГЕ передував споріднений йому метод скінчених елементів МСЕ, який на сьогодення є одним із найбільш популярних чисельних методів розв'язку інженерних задач механіки суцільного середовища. Також до попередників МГЕ слід віднести теорію потенціалів, математичну фізику, теорію функцій впливу Гріна.

Ідея зведення задач теорії потенціалів до розв'язку інтегральних рівнянь не нова, а в МГЕ вона реалізована у вигляді достатньо загальної обчислювальної процедури. Суть МГЕ – перетворення диференціального рівняння, що описує поведінку невідомої функції на границі і в середині області в інтегральне рівняння, що визначає лише граничні значення, а потім його числова реалізація. Коли потрібно знайти значення потенціалу у внутрішніх точках, то їх отримують із розв'язків на границі. Відправною точкою будь якого варіанту МГЕ є те що фактично для всіх класичних рівнянь механіки суцільного середовища напрацьовані розв'язки, що відповідають дії одиничних зосереджених сил, прикладених у внутрішніх точках однорідної необмеженої (задача Кельвіна), та обмеженої (задача Буссінеска, Мілана, Міндліна) областей. Це так звані одиничні (фундаментальні) сингулярні розв'язки, або функції Гріна. МГЕ має ряд суттєвих переваг:

1. МГЕ зменшує розмірність вихідної задачі на одиницю, (оскільки дискретизується лише границя) тобто, для двовимірних задач теорії пружності та пластичності отримуємо одновимірне граничне рівняння, а для тривимірних задач – двовимірне інтегральне рівняння

по поверхні.

2. Для переважної більшості практичних випадків гранична дискретизація веде до значно меншої системи рівнянь, ніж довільна схема дискретизації всього тіла. При цьому матриці, що формуються за допомогою МГЕ, є повністю заповнені, в той час, як розрахункові матриці скінчених елементів мають стрічкову структуру, тобто заповнені відносно рідко.
3. Із досліджень, виконаних різними авторами [1] випливає, що час необхідний для розв'язку тривимірних задач теорії пружності та пластичності за МСЕ та МГЕ при практично однаковій точності результатів в чотири – десять разів менший для метода граничних елементів.
4. Перевагою МГЕ є і те, що коли отримана інформація про переміщення і напруження на границях області, що досліджується, переміщення та напруження в довільній внутрішній точці можна знайти з дуже високою точністю, що особливо важливо для областей концентрації напружень.
5. Розв'язок граничного інтегрально рівняння чисельними методами потребує використання процедур чисельного інтегрування. В зв'язку з цим потрібно відмітити, що чисельне інтегрування завжди було більш стійким і точним процесом, ніж чисельне диференціювання.
6. МГЕ потребує суттєво менше зусиль на підготовку вхідних даних в порівнянні з МСЕ.

Наведена характеристика МГЕ підкреслює його універсальність. Крім універсальності є області найбільш ефективного застосування того чи іншого методу. Однією з ефективних областей застосування МГЕ є геофізична задача поведінки паль в лінійному середовищі грунту. Саме завдяки властивості ідеально пружного тіла "забувати все пережите ним раніше" з'являється можливість не зважати як зростало навантаження на тіло від нуля до моменту, що розглядається, тобто реалізовувати принцип суперпозиції до розв'язків Міндліна для півплощини.

За МГЕ розглянуто напружено – деформований стан палі (лінійна задача) (рис. 1).

Програма складена на алгоритмічній мові Delpfi. Граничне інтегральне рівняння взаємозв'язку між переміщеннями та напруженнями на границі в матричній формі має вигляд [1]

$$C_i U_i + \int_{\Gamma} P^*_{ij} U_{d\Gamma} = \int_{\Gamma} U^*_{ij} P_{d\Gamma} \tag{1}$$

де U – відомі з граничних умов переміщення на поверхні палі;

P – поверхневі зусилля, що розшукуються;

P^*_{ij}, U^*_{ij} – відомі фундаментальні розв'язки Міндліна;

C_i – визначається із умови переміщення тіла як цілого [2]

Дискретна форма рівняння (1):

$$C_i U_i + \sum_{J=1}^{N} \int_{\Gamma j} U g^* d\Gamma = \sum_{J=1}^{N} \int_{\Gamma j} U^* g d\Gamma \tag{2}$$

При інтегруванні рівняння(2) використовувалася схема чисельного інтегрування за Гаусом, з вибором чотирьох точок інтегрування по довжині кожного граничного елемента. Поверхня палі дискретизувалась лінійними елементами оскільки вони дають прийняту точність не потребуючи значних зусиль з точки зору числової реалізації. Якобіан лінійного елемента $J=l/2$. З урахуванням симетрії задачі (рис. 1) для опису поверхні палі (довжина l = 5м, радіус r = 0,2645 м) використовувались 10 граничних елементів, 5 ГЕ на боковій поверхні та 5 ГЕ на вістрі палі. Припускалось, що невідомі напруження, відносяться до центру граничного елементу і мають постійне значення по довжині граничного елементу. Модуль пружності основи Е = 10 кПа. Коефіцієнт поперечного розширення V = 0,35. До (2) додаються відомі граничні умови (переміщення палі на границі), в результаті отримуємо систему, подану в матричному вигляді

$$\vec{F} = A * \vec{V} \tag{3}$$

або в розгорнутому вигляді

$$\vec{F} = \sum_{j=r}^{10} \left(\frac{l_j}{2} \sum_{k=1}^{k} \left(U^*\right)_k W_k \right) \vec{g}i \tag{4}$$

де $\vec{F}$ – вектор переміщень на границі (відомі граничні умови);

$\vec{Y}, \vec{g}i$ – вектор напружень що розшукуються на границі палі;

U^* – фундаментальний розв'язок Міндліна для переміщень від P = = 1 в середині півплощини;

A – повністю заповнена матриці впливу (10 × 10);

$l_i/2$ – якобіан перетворення локальної системи координат в глобальну;

$W_к$ – вагові коефіцієнти точок інтегрування за Гаусом.

Розв'язок системи (3) дає величини напружень на поверхні паль: дотичні напруження на боковій поверхні (τ) та нормальні на вістрі палі

(σ) (рис 2). Інтегруючи величини поверхневих напружень по боковій поверхні та вістрі палі за (5) визначається сила опору яку спричиняє бокова поверхня та сила опору на вістрі палі. Сума цих сил визначає несучу спроможність палі.

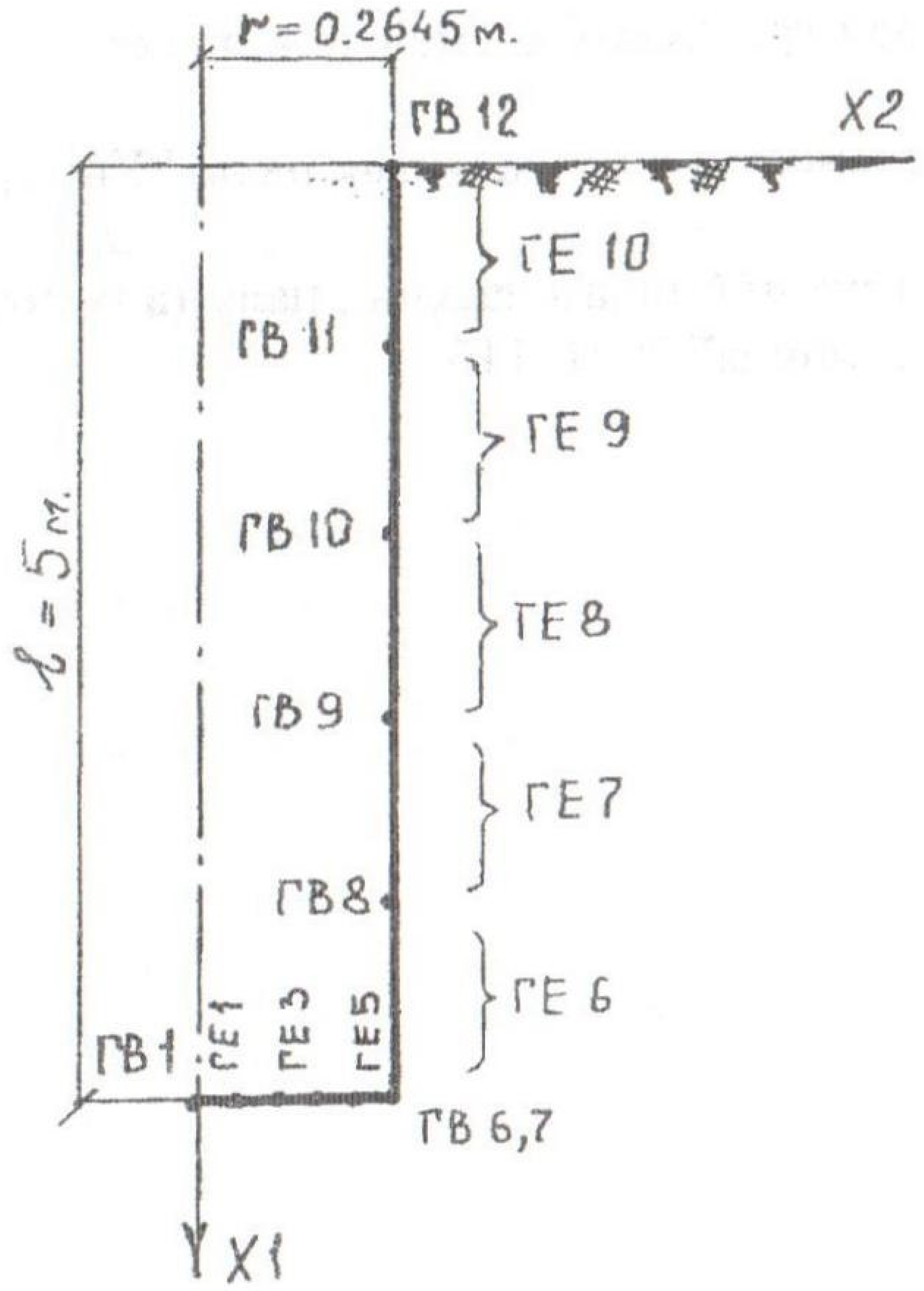

Рис. 1.

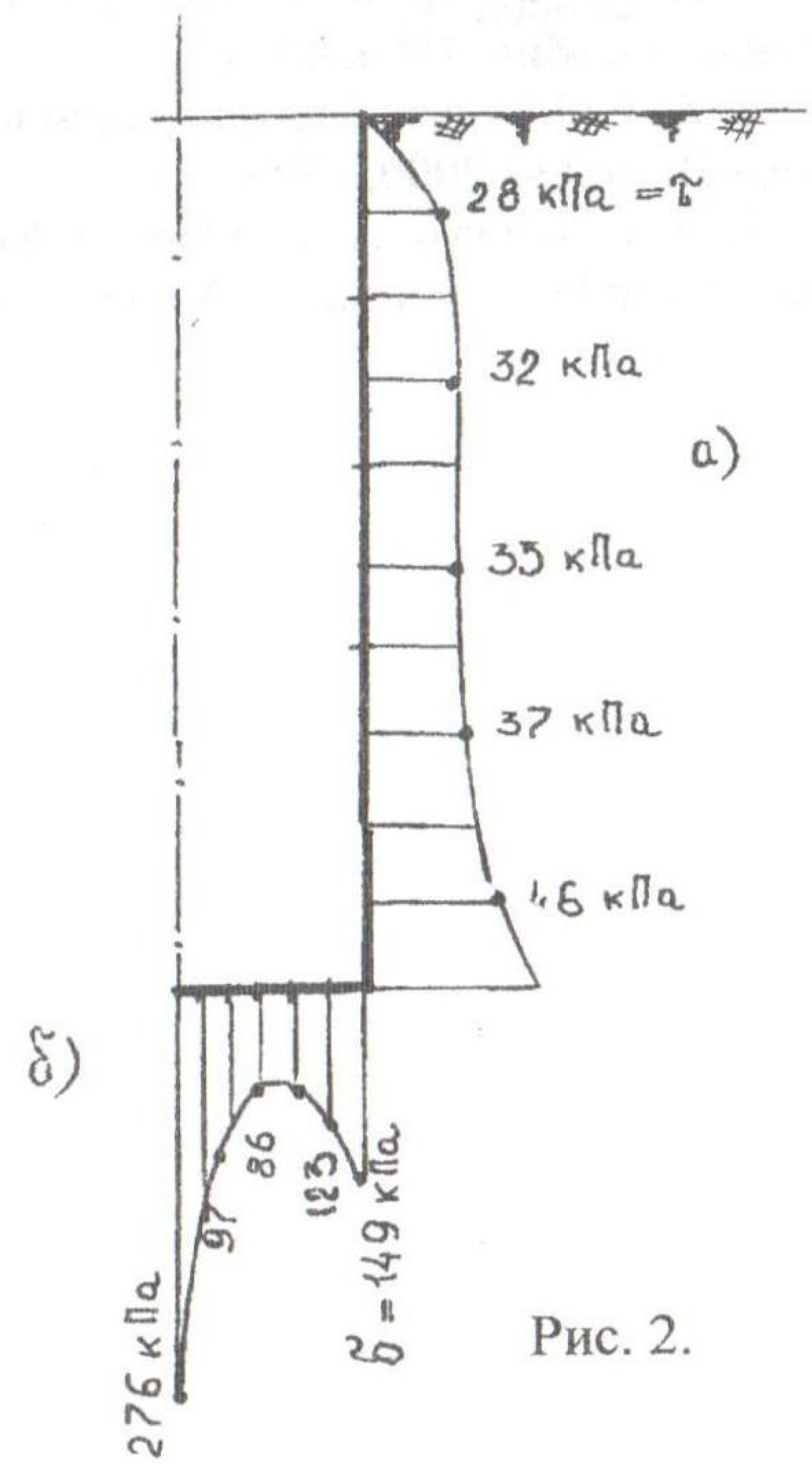

Рис. 2.

$$P = \int_{0} 2\pi r \tau dh_1 + \int_{0}^{\pi} 2\pi\epsilon G dh_2 , \qquad (5)$$

де r – радіус палі; h_1 , τ – відповідно висота ГЕ та дотичне напруження по боковій поверхні; h_2 , σ – висота ГЕ та нормальне напруження на вістрі палі; ϵ – відстань до середини кінцевого елемента вістря палі.

Несуча спроможність палі склала 321,14 кН, що добре погоджується з експериментальними даними ($P_{екс}$ = 330 кН, [3]). З метою перевірки стійкості програми ця ж сама задача розв'язана з вдвічі більшою кількістю граничних елементів. Отримана несуча спроможність палі 317 кН, тобто різниця з попереднім розрахунком – 1,24%.

Математичне моделювання поведінки палі за МГЕ дає достовірні результати визначення несучої спроможності палі та відображає реальний напружений стан на границі палі.

Література

1. П. Бенерджи, Р. Баттерфілд. Методи граничних елементів в прикладних науках, М: Мир, 1984, 495 с.

2. А. С. Моргун. Метод граничних елементів в розрахунках паль, "Універсум – Вінниця" 2000, 130 с.

3. А. І. Моргун, А. С. Моргун. Конструкції біпірамідальних паль та їх розрахунок за МГЕ, Вінниця, "Універсум – Вінниця" 2001, 116 с.