УДК 624.071.3:539.4

УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЯ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Орлов А.А., Бекирова М.М., Хоменко О.И. *(Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса)*

В настоящей статье приведено решение задачи об устойчивости стержня в условиях ползучести в геометрически нелинейной постановке. Получены формулы для определения критических сил и соответствующих значений критического времени. Задача решена с использованием зависимостей теории упругой наследственности.

В устойчивости упругих стержней и стержневых систем различают: а – потерю устойчивости первого рода, связанную с возможностью существования двух форм равновесия – устойчивой и неустойчивой; б – потерю устойчивости второго рода, связанную с возможностью неограниченного развития перемещений стержня или системы, обладающей несовершенствами.

Поскольку ползучесть увеличивает деформации, а следовательно и перемещения, что естественно при изучении устойчивости стержней и стержневых систем, выполненных из материалов обладающих ползучестью, рассматривать потерю устойчивости второго рода. У прямолинейного стержня такая потеря устойчивости возможна при наличии начальных несовершенств формы (начальная погибь) или состояния (внецентренное положение сжимающей силы, отклонении от прямолинейной формы вследствие внешнего воздействия).

Поведение сжатых гибких стержней при длительном действии нагрузки в условиях линейной ползучести описано достаточно полно в ряде работ, в частности в работах [1], [2]. Однако, следует отметить, что все полученные решения получены на основе приближённого выражения для кривизны (геометрически линейные задачи). Несомненный интерес представляют решения, полученные с использованием полного (точного) выражения для кривизны (геометрически нелинейные задачи). В настоящей статье приведено решение задачи об устойчивости стержня в условиях ползучести в геометрически нелинейной постановке.

Рассматривается гибкий стержень с симметричным поперечным сечением, выполненный из материала, обладающего ползучестью. Опирание шарнирное. Загружен стержень продольной сжимающей силой **P**, постоянной во времени, приложенной с эксцентриситетом $\mathbf{e_o}$ в направлении перемещений.

Интегро-дифференциальное уравнение медленного движения стержня имеет вид [3]:

$$\frac{1}{\rho(x,t)}-\frac{P}{EJ}\left[y(x,t)+e_o\right]+\frac{P}{J}\int_{to}^{t}\left[y(x,\tau)+e_o\right]\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau=0 \qquad (1)$$

Здесь y(x,t) – перемещение стержня в плоскости деформирования (в направлении e_o), $\frac{1}{\rho(x,t)}$ - кривизна стержня в той же плоскости.

$$\frac{1}{\rho(x,t)}=-y''(x,t)\left[1+y'^2(x,t)\right]^{-\frac{3}{2}}, \qquad (2)$$

штрихами обозначены производные по переменной **x**.

Ползучесть в дальнейшем учитывается на уровне теории упругой наследственности (ТУН) [4]

$$\delta(t,x)=\frac{1}{E}+C_O\left[1-e^{-\gamma(t-\tau)}\right];\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}=-\gamma C_O e^{-\gamma(t-\tau)};\varphi=EC_O \qquad (3)$$

С учетом (3) уравнение (1) принимает вид:

$$\frac{1}{\rho(x,t)}-\frac{P}{EJ}\left[y(x,t)+e_O\right]-\frac{\gamma\varphi P}{EJ}\int_{t_o}^{t}\left[y(x,\tau)+e_O\right]e^{-\gamma(t-\tau)}d\tau=0 \qquad (4)$$

Интегро-дифференциальное уравнение (4) преобразовывается в дифференциальное с

частными производными.

$$-\frac{\dot{1}}{\rho(x,t)}-\gamma\frac{1}{\rho(x,t)}+\frac{P}{EJ}\dot{y}(x,t)+\gamma(1+\varphi)\frac{P}{EJ}\left[y(x,t)+e_O\right]=0 \qquad (5)$$

с начальным $-\dfrac{1}{\rho(x,t_o)}+\dfrac{P}{EJ}\left[y(x,t_o)+e_o\right]=0$ (6)

и граничными условиями $y(0,t)=0,\ \ y(l,t)=0$ (7)

Здесь и далее точками сверху обозначены производные по t.

Кривизна (2) представляется в виде разложения в ряд по степеням $y''(x,t)$

$$\frac{1}{\rho(x,t)}=-y''(x,t)\left[1-\frac{3}{2}y'^2(x,t)+\frac{15}{8}y'^4(x,t)-...\right] \quad (8)$$

Предполагается, что изогнутая ось стержня как при кратковременном, так и при длительном действии нагрузки описывается полуволной синусоиды, а в выражении (8) удерживается два члена ряда

$$y(x,t_o)=f(t_o)\sin\frac{\pi x}{l},\ y(x,t)=f(t)\sin\frac{\pi x}{l},\ \frac{1}{\rho(x,t)}=-y''(x,t)\left[1-\frac{3}{2}y'^2(x,t)\right] \quad (9)$$

После выполнения процедуры Бубнова-Галёркина [5] над начальным условием (6) получено уравнение

$$f^3(t_o)+\frac{8l^4}{3\pi^4}\left(\frac{P}{EJ}-\frac{\pi^2}{l^2}\right)f(t_o)+\frac{32l_o}{3\pi}\cdot\frac{l^4}{\pi^4}\cdot\frac{P}{EJ}=0, \quad (10)$$

устанавливающее связь между перемещением, эксцентриситетом и нагрузкой при кратковременном загружении. После введения относительных эксцентриситетов и перемещений

$$s=\frac{l_o}{l},\ F(t_o)=\frac{\pi}{l}f(t_o),\ F(t)=\frac{\pi}{l}f(t) \quad (11)$$

уравнение (10) записывается так:

$$F^3(t_o)+\frac{8}{3}\left(\frac{P}{P_Э}-1\right)F(t_o)+\frac{32}{3}s\frac{P}{P_Э}=0 \quad (12)$$

Здесь $P_э=\dfrac{\pi^2EJ}{l^2}$ - эйлерова сила, т.е. критическая сила при кратковременном действии нагрузки в случае приближенного значения кривизны (линейная постановка).

Из уравнения (12) следует зависимость

$$P=\frac{1}{8}P_э\frac{8F(t_o)-3F^3(t_o)}{4s+F(t_o)}, \quad (13)$$

которая устанавливает связь между нагрузкой, перемещением и эксцентриситетом. При фиксированном эксцентриситете кривая (13), т.е. зависимость $P-F(t_o)$, является кривой равновесных состояний. Максимум на этой кривой определяет критическую силу $P_{кр}$ при кратковременном действии нагрузки. Критическая сила $P_{кр}$ разыскивается из условия

$$\frac{\partial P}{\partial F}=0 \quad (14)$$

Из (14) следует

$$F^3(t_o)+6sF^2(t_o)-\frac{16}{3}s=0 \quad (15)$$

Критическая сила $P_{кр}$ определяется по формуле

$$P_{кр}=\frac{1}{8}P_э\frac{F_{кр}\left(8-3F^2_{кр}\right)}{4s+F_{кр}}, \quad (16)$$

где $F_{кр}$ - отвечающее максимуму нагрузки перемещение, являющееся корнем уравнения (15)

$$F_{кр}=2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{3}s\left(1-3s^2+\sqrt{1-6s^2}\right)}+2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{3}s\left(1-3s^2-\sqrt{1-6s^2}\right)}-2s \quad (17)$$

При малых значениях s ($s\le 0{,}001$) можно пользоваться зависимостью

$$F_{кр}=2\left[\sqrt[3]{\frac{1}{3}s\left(1-3s^2+\sqrt{1-6s^2}\right)}-s\right] \quad (18)$$

После применения процедуры Бубнова-Галёркина к дифференциальному уравнению с частными производными (5) с учётом зависимостей (11) получено дифференциальное уравнение в обыкновенных производных

$$\left[\frac{9}{8}F^2(t)+\left(\frac{P}{P_э}-1\right)\right]\overset{\circ}{F}(t)+\gamma\left\{\frac{3}{8}F^3(t)+\left[\frac{P}{(1+\varphi)P_э}-1\right]F(t)+\frac{P}{(1+\varphi)P_э}\cdot 4s\right\}=0 \quad (19)$$

или

$$\frac{F^2(t)+\left[\frac{P}{(1+\varphi)P_Э}-1\right]\cdot\frac{8}{9}}{F^3(t)+\frac{8}{3}\cdot\left[\frac{P}{(1+\varphi)P_Э}-1\right]\cdot F(t)+\frac{32}{3}\cdot s\cdot\frac{P}{(1+\varphi)P_Э}}dF(t)=-\frac{1}{3}\gamma dt \quad (20)$$

Вид интеграла от левой части уравнения (20) зависит от характера корней полинома

$$F^3(t)+\frac{8}{3}\left[\frac{P}{(1+\varphi)P_э}-1\right]F(t)+\frac{32}{3}s\frac{P}{(1+\varphi)P_э}=0 \quad (21)$$

Возможны три случая: 1) $D>0$, один действительный корень и два комплексно-сопряжённых; 2) $D=0$, три действительных корня, два из которых совпадают; 3) $D<0$, три разных действительных корня.

D - дискриминант кубического уравнения (21)

$$D=\left(\frac{16}{3}\right)^2\left[\frac{P}{(1+\varphi)P_э}\right]^2 s^2-\left(\frac{8}{9}\right)^3\left[1-\frac{P}{(1+\varphi)P_э}\right]^3 \quad (22)$$

Ниже приведены решения уравнения (20) для трёх возможных случаев

1. Случай первый, $D>0$

$R(t)=R(t_o)e^{-\frac{1}{3}\gamma(t-t_o)}$ (23) или $t-t_o=-\frac{3}{\gamma}\ln\frac{R(t)}{R(t_o)}$ (24), где

$$R(t)=\left|F(t)-\omega_1\right|^{\alpha_1}\left|F^2(t)+c_1F(t)+c_2\right|^{0{,}5\alpha_2}\cdot\exp\left[\frac{2\alpha_3-\alpha_2c_1}{\sqrt{4c_2-c_1^2}}arctg\frac{2F(t)+c_1}{\sqrt{4c_2-c_1^2}}\right], \quad (25)$$

$R(t_o)$ вычисляется по формуле (24) с заменой $F(t)$ на $F(t_o)$.

2. Случай второй, $D=0$

$$\left|\frac{F(t)-\omega_1}{F(t_o)-\omega_1}\right|^{\alpha_1}\cdot\left|\frac{F(t)-\omega_2}{F(t_o)-\omega_2}\right|^{\alpha_2}\cdot\exp\left\{\alpha_3\left[\frac{1}{F(t_o)-\omega_2}-\frac{1}{F(t)-\omega_2}\right]\right\}=e^{-\frac{1}{3}\gamma(t-t_o)} \quad (26)$$

или

$$t-t_o=-\frac{3}{\gamma}\left\{\ln\left|\frac{F(t)-\omega_1}{F(t_o)-\omega_1}\right|^{\alpha_1}\cdot\left|\frac{F(t)-\omega_2}{F(t_o)-\omega_2}\right|^{\alpha_2}+\alpha_3\left[\frac{1}{F(t_o)-\omega_2}-\frac{1}{F(t)-\omega_2}\right]\right\} \quad (27)$$

3. Случай третий, $D<0$

$$\prod_{i=1}^{3}\left|F(t)-\omega_i\right|^{\alpha_i}=\prod_{i=1}^{3}\left|F(t_o)-\omega_i\right|^{\alpha_i}\cdot e^{-\frac{1}{3}\gamma(t-t_o)} \quad (28)$$

или

$$t-t_o=-\frac{3}{\gamma}\ln\prod_{i=1}^{3}\left|\frac{F(t)-\omega_i}{F(t_o)-\omega_i}\right|^{\alpha_i} \quad (29)$$

В приведенных решениях $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ - действительные корни полинома (21) при заданной нагрузке Р. Коэффициенты c_1 и c_2 разыскиваются путём деления трёхчлена (21) на разность $F(t)-\omega_1$. Коэффициенты $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ находятся при помощи известных методов, в частности, метода неопределённых коэффициентов.

Структура решений (23), (26) и (28) такова, что при $t\to\infty$ правые части обращаются в нули. Это говорит о том, что $F(\infty)$ есть величина ω_1. т. е. перемещение при $t\to\infty$ определяется как корень уравнения

$$F^3(\infty)-\frac{8}{3}\left[1-\frac{P}{(1+\varphi)P_э}\right]F(\infty)+\frac{32}{3}s\frac{P}{(1+\varphi)P_э}=0 \quad (30)$$

Из этого следует $P=\frac{1}{8}(1+\varphi)P_э\frac{8F(\infty)-3F^3(\infty)}{4s-F(\infty)}$ (31)

Эта зависимость устанавливает связь между нагрузкой и перемещением в случае длительного действия нагрузки. Эта кривая равновесных состояний. Максимум на этой кривой определяет критическую силу $P_{дл}$. Из условия (14) следует

$$F^3(\infty)+6sF^2(\infty)-\frac{16}{3}s=0 \qquad (32)$$

Критическая сила $P_{дл}$ разыскивается по формуле

$$P_{дл}=\frac{1}{8}(1+\varphi)P_э\frac{F_{дл}(8-3F_{дл}^2)}{4s+F_{дл}}, \text{ где} \qquad (33)$$

$F_{дл}$ - перемещения, отвечающие максимуму нагрузки, являющиеся корнем уравнения (32).

Очевидно, что корни уравнений (15) и (32), представляющие собой критические перемещения $F_{кр}$ и $F_{дл}$ при кратковременном и длительном действии нагрузки соответственно, одинаковы.

$$F_{кр}=F_{дл}=F^* \qquad (34)$$

В случае $t=t_o$ перемещение F^* развивается при действии силы $P_{кр}$, а в случае $t\to\infty$ при действии силы $P_{дл}$.

В силу того, что критические силы как при кратковременном, так и при длительном действии нагрузки одинаковы, следует вывод, что в любой промежуточный момент времени $t_o\le t\le\infty$ такое перемещение F* может быть достигнуто при нагрузке, лежащей в интервале

$$P_{кр}>P>P_{дл} \qquad (35)$$

Время достижения перемещением величины F^* - критическое, а нагрузка ему соответствующая – критическая сила. Существует множество критических сил из интервала (35) и каждой отвечает своё критическое время. Критическое время при нагрузке, лежащей в интервале (35), разыскивается по формулам (24), (27) и (25) для трёх случаев соответственно.

Выводы

Решение задачи устойчивости в условии ползучести с учетом геометрической нелинейности позволяет получить значения не только критических сил, но и критического времени, что в принципе невозможно при решении задачи в геометрически линейной постановке, где понятие о критическом времени отсутствует, а критическая сила определяется из условий стремления перемещений к бесконечности при $t\to\infty$.

Литература

1. Орлов А. Н. Влияние ползучести на устойчивость сжатых железобетонных стержней. Сборник «Строительные конструкции», Киев, «Будівельник», вып. 10, 1968.
2. Орлов А. Н., Прокопович И. Е. О влиянии ползучести и старения на величины критических сил для гибких однородных и неоднородных стоек. «Изв. А. Н. АрмССР, Механика», 1965, т. *XXII* , №3.
3. Орлов А. Н. Решение задачи о напряжённо-деформированном состоянии сжато-изогнутого железобетонного стержня на основе теории линейной ползучести. Сборник «Строительные конструкции», вып. *XXXI* , «Будівельник», Киев, 1978.
4. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М., Гостехиздат, 1952.
5. Тимошенко С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М., «Наука», 1971.