

УДК 725.36:623.042.5

**НАПРЯЖЕННО - ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ НА КУСОЧНО - ПОСТОЯННОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПРИ ТЕМПЕРАТУРНОМ КЛИМАТИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ**

**Жданов А.А.**, к.т.н., доцент,  
*Одесская государственная академия строительства и архитектуры*  
zhdanov45@rambler.ru

**Аннотация.** В работе продолжены ранее выполненные исследования напряженно-деформированного состояния вертикальной металлической цилиндрической тонкой оболочки, покоящейся изнутри на упругом Винклеровском основании при температурных климатических воздействиях. Так, в [1], исследованы температурные климатические воздействия на цилиндрические металлические оболочки, в [2] исследованы параметры упругого основания, моделирующего отпор зерна пшеницы, в [3] исследовано напряженно-деформированное состояние оболочки на упругом основании с кусочно-постоянным, а в [4] с кусочно-линейным коэффициентом постели при осесимметричном охлаждении оболочки.

В настоящей работе, на основе безмоментной теории тонких оболочек и простого краевого эффекта изучено напряженно-деформированное состояние вертикальной цилиндрической тонкостенной оболочки, покоящейся изнутри на кусочно-постоянном упругом основании, при не осесимметричных температурных климатических воздействиях. Решение получено в рядах Фурье, содержащих по десять членов ряда.

**Ключевые слова:** безмоментная теория оболочек, теория краевого эффекта, упругое основание, температурные климатические воздействия, усилия и перемещения в вертикальной цилиндрической оболочке.

**НАПРУЖЕНО - ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ЦИЛІНДРИЧНОЇ МЕТАЛЕВОЇ ОБОЛОНКИ НА КУСКОВО – ПОСТІЙНІЙ ПРУЖНІЙ ОСНОВІ ПРИ ТЕМПЕРАТУРНОМУ КЛІМАТИЧНОМУ ВПЛИВІ**

**Жданов О.О.**, к.т.н., доцент,  
*Одеська державна академія будівництва та архітектури*  
zhdanov45@rambler.ru

**Анотація.** У роботі продовжені раніше виконані дослідження напружено-деформованого стану вертикальної металевої циліндричної тонкої оболонки, яка покоїться з середини на пружній Вінклерівській основі при температурних кліматичних впливах. Так, в [1], досліджені температурні кліматичні впливи на циліндричні металеві оболонки, в [2] досліджені параметри пружної основи, що моделює відпір зерна пшениці, в [3] досліджено напружено-деформований стан оболонки на пружній основі з кусково-постійним, а в [4] з кусково-лінійним коефіцієнтом постелі при осесиметричному охолодженні оболонки.

У даній роботі, на основі безмоментної теорії тонких оболонок і простого крайового ефекту вивчено напружено-деформований стан вертикальної циліндричної тонкостінної оболонки, яка покоїться з середини на кусково-постійній пружній основі, при не осесиметричних температурних кліматичних впливах. Рішення отримано в рядах Фур'є, що містять, в загальному випадку нагрівання-охолодження оболонок, по десять членів ряду.

**Ключові слова:** безмоментна теорія оболонок, теорія крайового ефекту, пружна основа, температурні кліматичні впливи, зусилля і переміщення у вертикальній циліндричній оболонці.

# STRESSED - DEFORMED CONDITION CYLINDRICAL METALLIC SHELL ON A PIECEWISE - STANDING ELASTIC BASIS AT TEMPERATURE CLIMATIC INFLUENCE

Zhdanov A.A., PhD., Assistant Professor,  
Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture  
zhdanov45@rambler.ru

**Abstract.** The previous executed researches of the tense-deformed condition of a vertical metal thin cylindrical shell lying inside on the elastic Winkler foundation under temperature climatic influences are continued in this work. So in [1], the temperature climatic influences on cylindrical metal shells are investigated, in [2] the parameters of the elastic base simulating the wheat repulse are investigated, in [3] the tense-deformed condition of a shell on the elastic base with piecewise-constant is investigated, and in [4] with a piecewise-linear Winkler coefficient for axisymmetric cooling of the shell.

The tense-deformed condition of a vertical cylindrical thin-wall shell lies on a piecewise-constant elastic base under non-axisymmetric temperature climatic influences has been studied in the present study based on membrane theory of shells and a simple edge effect. The decision is received in the Fourier series, containing in the general case of heating-cooling the shell, ten members of the Fourier series.

**Keyword:** the membrane theory of shells, the theory of the boundary effect, the elastic base, the temperature climatic influences, the forces and displacements of the vertical cylindrical shell.

**Введение.** Хранилища сыпучих материалов в виде вертикальных цилиндрических металлических тонкостенных оболочек, заполненные сыпучим материалом (зерном, например) испытывают температурные климатические воздействия, описанные в [1]. При охлаждении оболочки ее стенка перемещается в сторону сыпучего материала, который, вследствие трения между частицами сыпучего материала, оказывает сопротивление этому перемещению в виде дополнительного давления на оболочку-отпора, пропорционального начальному давлению сыпучего материала на стенку и величине радиального смещения стенки хранилища, как следствие охлаждения стенки хранилища. При резком и значительном снижении температуры стенки хранилища были случаи разрушения хранилищ в виде разрыва стенок. Напряженно-деформированное состояние стенок хранилищ сыпучих материалов при температурных климатических воздействиях необходимо знать при проектировании новых хранилищ сыпучих материалов и оценке прочности существующих.

**Анализ последних исследований и публикаций.** В [2] исследованы параметры упругого Винклеровского основания, моделирующего отпор зерна пшеницы, в [3] исследовано напряженно-деформированное состояние оболочки на упругом основании с кусочно-постоянным, а в [4] с кусочно-линейным коэффициентом постели при осесимметричном охлаждении оболочки.

**Цели и задачи.** Целью настоящей работы является исследование напряженно-деформированного состояния цилиндрической металлической тонкостенной оболочки кусочно-постоянной (по высоте) толщины, покоящейся изнутри на упругом Винклеровском основании с кусочно-постоянным коэффициентом постели (рис. 1, а), вызванное температурными климатическими воздействиями – не осесимметричным охлаждением оболочки до состояния одинаковой температуры во всех её точках.

Выпишем основные уравнения безмоментной теории тонких цилиндрических оболочек [3, 4]:

Геометрические уравнения:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \alpha_t t, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} + w \right) + \alpha_t t, \quad (1)$$

где  $u$ ,  $v$ ,  $w$  – компоненты перемещений точек срединной поверхности оболочки (положительные направления показаны на рис. 2, а);

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$  – деформации срединной поверхности, соответственно, в осевом и в окружном направлениях;

$\alpha, \beta$  – безразмерные координаты точек срединной поверхности:  $\alpha = \frac{x}{R}$ ,  $\beta$  – угловая координата;

$t$  – температура стенки – заданная функция координат  $\alpha$  и  $\beta$ ;

$R$  – радиус срединной поверхности оболочки;

$h$  – толщина оболочки;

$E, \mu, \alpha_t$  – модуль Юнга, коэффициент Пуассона и коэффициент линейного температурного расширения материала оболочки.

Положительные направления усилий и перемещений показаны на рис. 2.

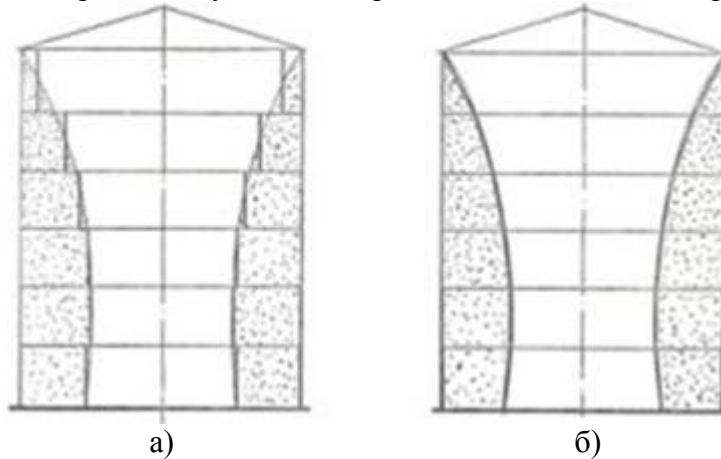


Рис. 1. Варианты аппроксимации коэффициента постели:  
 а – кусочно-постоянной функцией; б – кусочно-линейной функцией

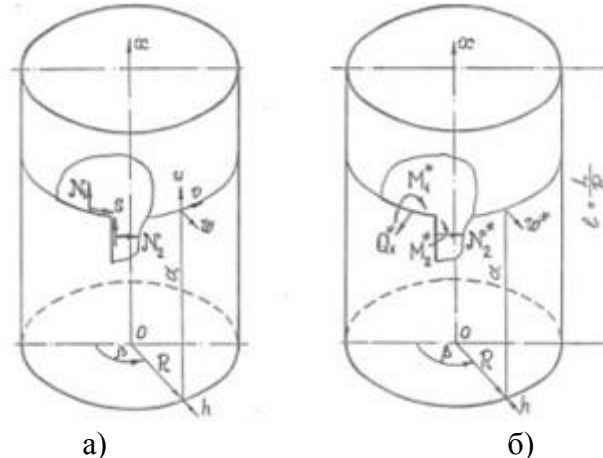


Рис. 2. Положительные направления усилий и перемещений:  
 а – безмоментное напряженно-деформированное состояние; б – состояние краевого эффекта

Физические уравнения:

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{Eh}{(1-\mu^2)R} \left[ \frac{\partial u}{\partial \beta} + \mu \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} + w \right) - (1+\mu) \cdot \alpha_t \cdot R \cdot t \right], \\ N_2 &= \frac{Eh}{(1-\mu^2)R} \left[ \frac{\partial v}{\partial \beta} + w + \mu \frac{\partial u}{\partial \alpha} - (1+\mu) \cdot \alpha_t \cdot R \cdot t \right], \\ S &= \frac{Eh}{2(1+\mu) \cdot R} \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Уравнения равновесия в перемещениях имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + \mu \frac{\partial w}{\partial \alpha} &= (1+\mu) \cdot \alpha_t \cdot R \cdot \frac{\partial t}{\partial \alpha}, \\ \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + \frac{\partial w}{\partial \beta} &= (1+\mu) \cdot \alpha_t \cdot R \cdot \frac{\partial t}{\partial \beta}, \\ \mu \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta} + w &= (1+\mu) \cdot \alpha_t \cdot R \cdot t - \frac{R^2(1-\mu^2)}{Eh} k(\alpha) \cdot w. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Внешним воздействием является плоское температурное поле оболочки вида:

$$t(\beta) = \sum_{n=1}^{10} (t_{nC} \cos n\beta + t_{nS} \sin n\beta). \quad (4)$$

Амплитуды гармоник в (4) можно рассчитать по рекомендациям [1].

Для сшивки поясов и на опорных краях оболочки воспользуемся теорией простого краевого эффекта, основные зависимости которой представлены ниже [5]:

Разрешающее уравнение простого краевого эффекта для  $i$ -го пояса с учетом отпора упругого основания принимает вид [4, 5]:

$$\frac{d^4 w_i^*}{d\alpha^4} + 4g_i^4 w_i^* = 0, \quad (5)$$

где  $g_i^4 = 3(1-\mu^2) \frac{R^2}{h_i^2} + \frac{k_i R^4}{D_i}$ ,  $D_i = \frac{Eh_i^3}{12(1-\mu^2)}$ .

Геометрические уравнения:

$$\varepsilon_2^* = \frac{w^*}{R}, \quad \gamma^* = \frac{1}{R} \frac{dw^*}{d\alpha}, \quad \varepsilon_1^* = 0. \quad (6)$$

Физические уравнения:

$$\left. \begin{aligned} N_1^* &= 0, & N_2^* &= \frac{Eh}{R} w^*, & M_1^* &= -\frac{D}{R^2} \frac{d^2 w^*}{d\alpha^2}, \\ M_2^* &= \mu \cdot M_1^*, & Q_1^* &= \frac{D}{R^3} \frac{d^3 w^*}{d\alpha^3}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Положительные направления усилий, изгибающих моментов и перемещений краевого эффекта показаны на рис. 2, б.

С учетом вида температурного поля (4), варианта кусочно-постоянной аппроксимации функции коэффициента постели упругого основания, уравнения равновесия (3) для каждого пояса оболочки принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + \mu \frac{\partial w}{\partial \alpha} &= 0, \\ \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + \frac{\partial w}{\partial \beta} &= (1+\mu) \cdot \alpha_t \cdot R \cdot \frac{\partial t}{\partial \beta}, \\ \mu \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta} + \left[ 1 + \frac{k \cdot R^2}{Eh} (1-\mu^2) \right] \cdot w &= (1+\mu) \cdot \alpha_t \cdot R \cdot t. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

В выражениях (6-8) опущен индекс пояса, для которого записана система уравнений.

Получим безмоментное решение для не осесимметричных составляющих температурного поля ( $n \geq 1$ ).

Решение (8) с учетом вида температурного поля ищем в виде суммы частного решения (9) неоднородной системы и общего решения (10) соответствующей однородной:

$$\left. \begin{aligned} u_t &= \sum_{n=1}^{10} u_{\#}^n \cos n\beta, \\ v_t &= \sum_{n=1}^{10} v_{\#}^n \sin n\beta, \\ w_t &= \sum_{n=1}^{10} w_{\#}^n \cos n\beta, \end{aligned} \right\} (9) \quad \left. \begin{aligned} u_0 &= \sum_{n=1}^{10} u_0^n(\alpha) \cos n\beta, \\ v_0 &= \sum_{n=1}^{10} v_0^n(\alpha) \sin n\beta, \\ w_0 &= \sum_{n=1}^{10} w_0^n(\alpha) \cos n\beta, \end{aligned} \right\} (10)$$

Здесь  $u_{\#}^n, v_{\#}^n, w_{\#}^n$  – коэффициенты, а  $u_0^n(\alpha), v_0^n(\alpha), w_0^n(\alpha)$  – функции только координаты  $\alpha$ .

Подставив (9) в (8) и учитывая вид температурного поля (4), получим для  $n$ -го члена частного решения систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} n^2 \frac{1-\mu}{2} u_{\#}^n \cos n\beta &= 0, \\ n^2 v_{\#}^n \sin n\beta + n w_{\#}^n \sin n\beta &= (1+\mu) \alpha_t \cdot R \cdot t_n \sin n\beta, \\ n v_{\#}^n \cos n\beta + \left[ 1 + \frac{k \cdot R^2}{Eh} (1-\mu^2) \right] \cdot w_{\#}^n \cos n\beta &= (1+\mu) \cdot \alpha_t \cdot R \cdot t_n \cos n\beta. \end{aligned} \right\} (11)$$

Из первого уравнения (11) следует, что  $u_{\#}^n = 0$ , то есть  $u_t \equiv 0$ . После деления второго уравнения (11) на  $n \sin n\beta$ , а третьего на  $-\cos n\beta$  и их сложения, получим, что:

$$\frac{kR^2}{Eh} (1-\mu^2) w_{\#}^n = 0, \quad w_{\#}^n = 0, \quad w_t = 0.$$

И далее, подставляя полученные результаты в третье, либо во второе уравнение, найдем:

$$v_{\#}^n = (1+\mu) \cdot \alpha_t R \frac{t_{nc}}{n}. \quad (12)$$

Окончательный вид частного решения следующий:

$$u_t = 0, \quad v_t = \sum_{n=1}^{10} (1+\mu) \alpha_t R \frac{t_{nc}}{n} \sin n\beta, \quad w_t = 0. \quad (13)$$

Получим решение однородной системы, соответствующей (8):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_o}{\partial \alpha^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u_o}{\partial \beta^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v_o}{\partial \alpha \cdot \partial \beta} + \mu \frac{\partial w_o}{\partial \alpha} &= 0, \\ \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u_o}{\partial \alpha \cdot \partial \beta} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v_o}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + \frac{\partial w_o}{\partial \beta} &= 0, \\ \mu \frac{\partial u_o}{\partial \alpha} + \frac{\partial v_o}{\partial \beta} + \left[ 1 + \frac{k \cdot R^2}{Eh} (1-\mu^2) \right] \cdot w_o &= 0. \end{aligned} \right\} (14)$$

Введем функцию  $\Phi(\alpha, \beta)$  таким образом, чтобы через неё перемещения  $u_o, v_o, w_o$  выражались в виде [6]:

$$\left. \begin{aligned} u_o &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} - \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} \right), \\ v_o &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} + (2+\mu) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} \right), \\ w_o &= \nabla^2 \nabla^2 \Phi \end{aligned} \right\} (15)$$

где  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}$  – оператор Лапласа.

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что введенная функция удовлетворяет первым двум уравнениям системы. После подстановки в третье уравнение (14) получаем разрешающее уравнение для функции  $\Phi(\alpha, \beta)$ :

$$\mu \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} - \mu^2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} - \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \beta^4} - (2 + \mu) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \left[ 1 + \frac{k \cdot R^2}{Eh} (1 - \mu^2) \right] \nabla^2 \nabla^2 \Phi = 0. \quad (16)$$

Раскрывая двойной оператор Лапласа и приводя подобные члены в (16), получим разрешающее уравнение для функции  $\Phi(\alpha, \beta)$  в виде:

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi + \frac{Eh}{kR^2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \beta^4} = 0. \quad (17)$$

Представим функцию  $\Phi(\alpha, \beta)$  в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от  $\alpha$ , а другая только от  $\beta$ :

$$\Phi(\alpha, \beta) = \sum_{n=1}^{10} \Phi_n(\alpha) \cos n\beta. \quad (18)$$

После подстановки (18) в (17) и деления на  $\cos n\beta$  получаем разрешающее уравнение для функции  $\Phi_n(\alpha)$ :

$$\frac{d^4 \Phi_n}{d\alpha^4} - 2n^2 \frac{d^2 \Phi_n}{d\alpha^2} + n^4 \Phi_n + \frac{kR^2}{Eh} \frac{\partial^4 \Phi_n}{\partial \alpha^4} = 0. \quad (19)$$

Характеристическое уравнение, соответствующее (19), имеет вид:

$$\lambda^4 - 2n^2 \lambda^2 + n^4 + \frac{kR^2}{Eh} \lambda^4 = 0. \quad (20)$$

решение этого уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{\frac{n^2}{1+d^2} + i \frac{n^2 d}{1+d^2}}; \quad \lambda_{3,4} = \sqrt{\frac{n^2}{1+d^2} - i \frac{n^2 d}{1+d^2}}; \quad (21)$$

$$i = \sqrt{-1}, \quad d = \frac{Eh}{kR^2}.$$

Для извлечения корня из комплексного числа воспользуемся формулой [7]:

$$\sqrt[k]{\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[k]{\rho} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi \cdot m}{k} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi \cdot m}{k} \right), \quad (22)$$

$$(m = 0, 1, 2, \dots, k-1).$$

Представим подкоренные выражения  $\lambda_{1,2}, \lambda_{3,4}$  в тригонометрической форме:

$$\rho^2 = \frac{n^4}{1+d^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{n^2 d(1+d^2)}{n^2(1+d^2)}, \quad (23)$$

так как  $n \geq 1, d > 0$ , то  $\rho = \frac{n^2}{\sqrt{1+d^2}}, \varphi = \operatorname{arctg} d$ . (24)

В нашем случае  $k = 2$ , поэтому после преобразований получим:

$$\lambda_1 = p + iq, \quad \lambda_2 = -p - iq, \quad \lambda_3 = p - iq, \quad \lambda_4 = -p + iq, \quad (25)$$

$$p = \frac{n}{d} \cos 0,5\varphi, \quad q = \frac{n}{d} \sin 0,5\varphi, \quad \bar{d} = \sqrt[4]{1+d^2}.$$

С учетом (25) решение уравнения (19) записывается так:

$$\Phi_n(\alpha) = C_1^n e^{\lambda_1^n \alpha} + C_2^n e^{\lambda_2^n \alpha} + C_3^n e^{\lambda_3^n \alpha} + C_4^n e^{\lambda_4^n \alpha} \quad (26)$$

или через тригонометрические функции:

$$\Phi_n(\alpha) = e^{p\alpha} \left( A_1^n \cos q\alpha + B_1^n \sin q\alpha \right) + e^{-p\alpha} \left( A_2^n \cos q\alpha + B_2^n \sin q\alpha \right), \quad (27)$$

Подставив (27) в (18) и далее в (15) получим решение системы (14).

Выпишем все необходимые производные функции  $\Phi_n(\alpha)$ :

$$\frac{d\Phi_n}{d\alpha} = e^{p\alpha} \left[ \left( A_1^n a_1 + B_1^n b_1 \right) \cos q\alpha - \left( A_1^n b_1 - B_1^n a_1 \right) \sin q\alpha \right] + e^{-p\alpha} \left[ \left( B_2^n b_1 - A_2^n a_1 \right) \cos q\alpha - \left( A_2^n b_1 + B_2^n a_1 \right) \sin q\alpha \right], \quad (28)$$

$$a_1 = p, \quad b_1 = q.$$

$$\frac{d^2\Phi_n}{d\alpha^2} = e^{p\alpha} \left[ \left( A_1^n a_2 + B_1^n b_2 \right) \cos q\alpha - \left( A_1^n b_2 - B_1^n a_2 \right) \sin q\alpha \right] + e^{-p\alpha} \left[ \left( A_2^n a_2 - B_2^n b_2 \right) \cos q\alpha - \left( A_2^n b_2 + B_2^n a_2 \right) \sin q\alpha \right], \quad a_1 = p^2 - q^2, \quad b_2 = 2pq. \quad (29)$$

$$\frac{d^3\Phi_n}{d\alpha^3} = e^{p\alpha} \left[ \left( A_1^n a_3 + B_1^n b_3 \right) \cos q\alpha - \left( A_1^n b_3 - B_1^n a_3 \right) \sin q\alpha \right] + e^{-p\alpha} \left[ \left( B_2^n b_3 - A_2^n a_3 \right) \cos q\alpha - \left( A_2^n b_3 + B_2^n a_3 \right) \sin q\alpha \right], \quad a_3 = p^3 - 3pq^2, \quad b_3 = 3p^2q - q^3. \quad (30)$$

$$\frac{d^4\Phi_n}{d\alpha^4} = e^{p\alpha} \left[ \left( A_1^n a_4 + B_1^n b_4 \right) \cos q\alpha - \left( A_1^n b_4 - B_1^n a_4 \right) \sin q\alpha \right] + e^{-p\alpha} \left[ \left( A_2^n a_4 - B_2^n b_4 \right) \cos q\alpha + \left( A_2^n b_4 + B_2^n a_4 \right) \sin q\alpha \right], \quad a_4 = p^4 - 6p^2q^2 + q^4, \quad b_4 = 4p^3q - 4pq^3. \quad (31)$$

С учетом (18) перепишем (15) в виде:

$$\left. \begin{aligned} u_o^n &= -n^2 \frac{d\Phi_n}{d\alpha} - \mu \frac{d^3\Phi_n}{d\alpha^3}, \\ v_o^n &= -n^3 \Phi_n + n(2+\mu) \frac{d^2\Phi_n}{d\alpha^2}, \\ w_o^n &= \frac{d^4\Phi_n}{d\alpha^4} - 2n^2 \frac{d^2\Phi_n}{d\alpha^2} + n^4 \Phi_n. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Подставив в эти равенства соответствующие производные функции  $\Phi_n(\alpha)$  получим:

$$u_o^n = -e^{p\alpha} \left[ \left( A_1^n a_u + B_1^n b_u \right) \cos q\alpha - \left( A_1^n b_u - B_1^n a_u \right) \sin q\alpha \right] - e^{-p\alpha} \left[ \left( B_2^n b_u - A_2^n a_u \right) \cos q\alpha - \left( A_2^n b_u + B_2^n a_u \right) \sin q\alpha \right], \quad a_u = a_1 n^2 + \mu \cdot a_3, \quad b_u = b_1 n^2 + \mu \cdot b_3. \quad (33)$$

$$v_o^n = e^{p\alpha} \left[ \left( A_1^n a_v + B_1^n b_v \right) \cos q\alpha - \left( A_1^n b_v - B_1^n a_v \right) \sin q\alpha \right] + e^{-p\alpha} \left[ \left( A_2^n a_v - B_2^n b_v \right) \cos q\alpha + \left( A_2^n b_v + B_2^n a_v \right) \sin q\alpha \right], \quad a_v = -n^3 + n(2+\mu) \cdot a_2, \quad b_v = n(2+\mu) \cdot b_2. \quad (34)$$

$$w_o^n = e^{p\alpha} \left[ \left( A_1^n a_w + B_1^n b_w \right) \cos q\alpha - \left( A_1^n b_w - B_1^n a_w \right) \sin q\alpha \right] + e^{-p\alpha} \left[ \left( A_2^n a_w - B_2^n b_w \right) \cos q\alpha + \left( A_2^n b_w + B_2^n a_w \right) \sin q\alpha \right], \quad a_w = a_4 - 2n^2 a_2 + n^4, \quad b_w = b_4 - 2n^2 b_2. \quad (35)$$

И, окончательно, общее решение (8) записывается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{n=1}^{10} u_o^n(\alpha) \cos n\beta \\ v &= \sum_{n=1}^{10} \left[ (1+\mu) \cdot \alpha_t R \frac{t_n}{n} + v_o^n(\alpha) \right] \sin n\beta, \\ w &= \sum_{n=1}^{10} w_o^n(\alpha) \cos n\beta. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

В этих выражениях постоянные  $A^n$  и  $B^n$  пока не определены.

Для удовлетворения нетангенциальным граничным условиям и условиям стыковки поясов воспользуемся теорией простого краевого эффекта. Для  $n$ -ой гармоники уравнение краевого эффекта имеет вид:

$$\frac{d^4 w_n^*}{d\alpha^4} + 4g^4 w_n^* = 0, \quad (37)$$

$$\text{где } g^4 = 3(1-\mu^2) \frac{R^2}{h^2} + \frac{kR^4}{D}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}.$$

Решение (37) имеет вид:

$$w_n^*(\alpha, \beta) = e^{g(\alpha-l)} \left[ C_1^{n*}(\beta) \cos g(\alpha-l) + C_2^{n*}(\beta) \sin g(\alpha-l) \right] + e^{-g\alpha} \left[ C_3^{n*}(\beta) \cos g\alpha + C_4^{n*}(\beta) \sin g\alpha \right]. \quad (38)$$

Произвольные постоянные в (38) являются функциями координаты  $\beta$ .

Положим, что  $C_1^{n*}(\beta) = C_1^{n*} \cos n\beta$ ,  $C_2^{n*}(\beta) = C_2^{n*} \cos n\beta$ ,  $C_3^{n*}(\beta) = C_3^{n*} \cos n\beta$ ,  $C_4^{n*}(\beta) = C_4^{n*} \cos n\beta$ , (39)

Подставив (39) в (38), получим:

$$w_n^*(\alpha, \beta) = \left\{ e^{g(\alpha-l)} \left[ C_1^{n*} \cos g(\alpha-l) + C_2^{n*} \sin g(\alpha-l) \right] + e^{-g\alpha} \left( C_3^{n*} \cos g\alpha + C_4^{n*} \sin g\alpha \right) \right\} \cos n\beta, \quad (40)$$

или  $w_n^*(\alpha, \beta) = w_n^*(\alpha) \cos n\beta$ ,  $w^*(\alpha, \beta) = \sum_{n=1}^{10} w_n^*(\alpha, \beta)$ . (41)

Произвольные постоянные, входящие в (35) и (40) определяются из граничных условий и из условий стыковки поясов.

Полное решение задачи для одного пояса имеет вид [5]:

$$\left. \begin{aligned} u_n &= u_o^n(\alpha, A_1^n, A_2^n, B_1^n, B_2^n), \\ v_n &= v_o^n(\alpha, A_1^n, A_2^n, B_1^n, B_2^n) + (1+\mu) \cdot \alpha_t R \frac{t_n}{n} = \bar{v}_o^n, \\ w_n &= w_o^n(\alpha, A_1^n, A_2^n, B_1^n, B_2^n) + w_n^*(\alpha, C_1^{n*}, C_2^{n*}, C_3^{n*}, C_4^{n*}), \\ \gamma_n &= \gamma_n^* = \frac{dw_n^*}{d\alpha}, \\ N_{1n} &= N_{1o}^n(\alpha, A_1^n, A_2^n, B_1^n, B_2^n), \\ N_{2n} &= N_{1o}^n(\alpha, A_1^n, A_2^n, B_1^n, B_2^n) + N_2^{n*}(\alpha, C_1^{n*}, C_2^{n*}, C_3^{n*}, C_4^{n*}), \\ S_n &= S_o^n(\alpha, A_1^n, A_2^n, B_1^n, B_2^n), \quad Q_{1n} = Q_1^{n*}(\alpha, C_1^{n*}, C_2^{n*}, C_3^{n*}, C_4^{n*}), \\ M_{1n} &= M_1^{n*}(\alpha, C_1^{n*}, C_2^{n*}, C_3^{n*}, C_4^{n*}), \quad M_{2n} = \mu \cdot M_{1n}. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

В (42) входят четыре произвольных постоянных безмоментного решения и четыре произвольных постоянных краевого эффекта (для каждого пояса и для каждой гармонике).

Эти постоянные определяются раздельно – сначала из тангенциальных граничных условий и условий стыковки поясов определяются произвольные постоянные безмоментного решения, а затем, из нетангенциальных граничных условий и условий стыковки поясов, определяются постоянные краевого эффекта [5].

Для оболочки, состоящей из  $m$  поясов, имеем  $4 \times (m-1)$  условий стыковки поясов и по два граничных условия на каждом крае оболочки.

Условия стыковки безмоментного решения:

$$\left. \begin{aligned} u_{oi}^n(l) &= u_{oi+1}^n(0), \\ \bar{v}_{oi}^n(l) &= \bar{v}_{oi+1}^n(0), \quad (i=1,2,\dots,m-1) \\ N_{1oi}^n(l) &= N_{1oi+1}^n(0), \quad (n=1,2,\dots,10) \\ S_{oi}^n(l) &= S_{oi+1}^n(0). \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} \text{опертый край} & \left. \begin{aligned} u_{o1}^n(0) &= 0, \\ \bar{v}_{o1}^n(0) &= 0. \end{aligned} \right\} \\ \text{свободный край} & \left. \begin{aligned} N_{1om}^n(l) &= 0, \\ S_{om}^n(l) &= 0. \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (n=1,2,\dots,10) \quad (44)$$



После определения произвольных постоянных безмоментного решения  $A^n$  и  $B^n$  для нахождения произвольных постоянных краевого эффекта  $C^{n*}$  удовлетворяем условиям стыковки для каждой гармоники решения по радиальным перемещения, углам поворота, моментам и перерезывающим силам – нетангенциальным условиям стыковки и граничным условиям.

Выразим через разрешающую функцию  $\Phi(\alpha, \beta)$  все усилия безмоментного решения. Из (2), с учетом (28) - (30) получим выражения для амплитуд усилий  $n$ -й гармоники:

$$N_{10}^n = -\frac{Eh}{R} \left( \alpha_t R \cdot t_n + n^2 \frac{d^2 \Phi_n}{d\alpha^2} \right) = -\frac{Eh}{R} \left\{ \alpha_t R \cdot t_n + n^2 e^{p\alpha} \left[ \left( A_1^n a_2 + B_1^n b_2 \right) \cos q\alpha - \left( A_1^n b_2 - B_1^n a_2 \right) \sin q\alpha \right] + \right. \\ \left. + n^2 e^{-p\alpha} \left[ \left( A_2^n a_2 - B_2^n b_2 \right) \cos q\alpha - \left( A_2^n b_2 + B_2^n a_2 \right) \sin q\alpha \right] \right\}, \quad (45)$$

$$N_{20}^n = \frac{Eh}{R} \frac{d^4 \Phi_n}{d\alpha^4} = \frac{Eh}{R} \left\{ e^{p\alpha} \left[ \left( A_1^n a_4 + B_1^n b_4 \right) \cos q\alpha - \left( A_1^n b_4 - B_1^n a_4 \right) \sin q\alpha \right] + \right. \\ \left. + e^{-p\alpha} \left[ \left( A_2^n a_4 - B_2^n b_4 \right) \cos q\alpha + \left( A_2^n b_4 + B_2^n a_4 \right) \sin q\alpha \right] \right\}, \quad (46)$$

$$S_0^n = \frac{Eh}{R} n \frac{d^3 \Phi_n}{d\alpha^3} = \frac{Eh}{R} n \left\{ e^{p\alpha} \left[ \left( A_1^n a_3 + B_1^n b_3 \right) \cos q\alpha - \left( A_1^n b_3 - B_1^n a_3 \right) \sin q\alpha \right] + \right. \\ \left. + e^{-p\alpha} \left[ \left( B_2^n b_3 - A_2^n a_3 \right) \cos q\alpha - \left( A_2^n b_3 + B_2^n a_3 \right) \sin q\alpha \right] \right\}. \quad (47)$$

$$\text{При этом } N_{10} = \sum_{n=1}^{10} N_{10}^n \cos n\beta, \quad N_{20} = \sum_{n=1}^{10} N_{20}^n \cos n\beta, \quad S_0 = \sum_{n=1}^{10} S_0^n \sin n\beta, \quad (48)$$

Выпишем условия стыковки (42)  $i$ -го и  $i+1$ -го поясов для  $n$ -й гармоники:

$$e^{pi l} \left[ \left( A_{1i}^n a_{ui} + B_{1i}^n b_{ui} \right) \cos q_i l - \left( A_{1i}^n b_{ui} - B_{1i}^n a_{ui} \right) \sin q_i l \right] + e^{-pi l} \left[ \left( B_{2i}^n b_{ui} - A_{2i}^n a_{ui} \right) \cos q_i l - \left( A_{2i}^n b_{ui} + B_{2i}^n a_{ui} \right) \sin q_i l \right] = \\ = \left( A_{1i+1}^n a_{ui+1} + B_{1i+1}^n b_{ui+1} \right) - \left( B_{2i+1}^n b_{ui+1} - A_{2i+1}^n a_{ui+1} \right), \quad (i = 1, 2, \dots, m-1) \quad (49)$$

$$e^{pi l} \left[ \left( A_{1i}^n a_{vi} + B_{1i}^n b_{vi} \right) \cos q_i l - \left( A_{1i}^n b_{vi} - B_{1i}^n a_{vi} \right) \sin q_i l \right] + e^{-pi l} \left[ \left( A_{2i}^n a_{vi} - B_{2i}^n b_{vi} \right) \cos q_i l + \right. \\ \left. + \left( A_{2i}^n b_{vi} + B_{2i}^n a_{vi} \right) \sin q_i l \right] = \left( A_{1i+1}^n a_{vi+1} + B_{1i+1}^n b_{vi+1} \right) - \left( B_{2i+1}^n b_{vi+1} - A_{2i+1}^n a_{vi+1} \right), \quad (i = 1, 2, \dots, m-1) \quad (50)$$

$$e^{pi l} \left[ \left( A_{1i}^n a_{2i} + B_{1i}^n b_{2i} \right) \cos q_i l - \left( A_{1i}^n b_{2i} - B_{1i}^n a_{2i} \right) \sin q_i l \right] - e^{-pi l} \left[ \left( B_{2i}^n b_{2i} - A_{2i}^n a_{2i} \right) \cos q_i l - \right. \\ \left. - \left( A_{2i}^n b_{2i} + B_{2i}^n a_{2i} \right) \sin q_i l \right] = \frac{\alpha_t \cdot R \cdot t_n}{n^2} \left( \frac{h_{i+1}}{h_i} - 1 \right) \left[ \left( A_{1i+1}^n a_{2i+1} + B_{1i+1}^n b_{2i+1} \right) - \left( B_{2i+1}^n b_{2i+1} - A_{2i+1}^n a_{2i+1} \right) \right] \frac{h_{i+1}}{h_i}. \\ (i = 1, 2, \dots, m-1). \quad (51)$$

$$e^{pi l} \left[ \left( A_{1i}^n a_{3i} + B_{1i}^n b_{3i} \right) \cos q_i l - \left( A_{1i}^n b_{3i} - B_{1i}^n a_{3i} \right) \sin q_i l \right] + e^{-pi l} \left[ \left( B_{2i}^n b_{3i} - A_{2i}^n a_{3i} \right) \cos q_i l - \right. \\ \left. - \left( A_{2i}^n b_{3i} + B_{2i}^n a_{3i} \right) \sin q_i l \right] = \frac{h_{i+1}}{h_i} \left[ \left( A_{1i+1}^n a_{3i+1} + B_{1i+1}^n b_{3i+1} \right) - \left( B_{2i+1}^n b_{3i+1} - A_{2i+1}^n a_{3i+1} \right) \right]. \quad (i = 1, 2, \dots, m-1). \quad (52)$$

Условия опертого края имеют вид:

$$u_{01}^n(0) = 0, \Rightarrow A_{11}^n a_{u1} + B_{11}^n b_{u1} + B_{21}^n b_{u1} - A_{21}^n a_{u1} = 0, \quad (53)$$

$$\bar{v}_{o1}^n(0) = 0, \Rightarrow A_{11}^n a_{v1} + B_{11}^n b_{v1} + A_{21}^n a_{v1} - B_{21}^n b_{v1} = -(1 + \mu) \cdot \alpha_t \cdot R \frac{t_n}{n}. \quad (54)$$

Условия свободного края следующие:

$$\begin{aligned} N_{1om}^n(l) &= 0, \\ \frac{\alpha_t R \cdot t_n}{n^2} + e^{Pml} &\left[ \left( A_{1m}^n a_{2m} + B_{1m}^n b_{2m} \right) \cos q_m l - \left( A_{1m}^n b_{2m} - B_{1m}^n a_{2m} \right) \sin q_m l \right] + \\ + e^{-Pml} &\left[ \left( A_{2m}^n a_{2m} - B_{2m}^n b_{2m} \right) \cos q_m l - \left( A_{2m}^n b_{2m} + B_{2m}^n a_{2m} \right) \sin q_m l \right] = 0, \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} S_{1om}^n(l) &= 0, \\ e^{Pml} &\left[ \left( A_{1m}^n a_{3m} + B_{1m}^n b_{3m} \right) \cos q_m l - \left( A_{1m}^n b_{3m} - B_{1m}^n a_{3m} \right) \sin q_m l \right] + \\ + e^{-Pml} &\left[ \left( B_{2m}^n b_{3m} - A_{2m}^n a_{3m} \right) \cos q_m l - \left( A_{2m}^n b_{3m} + B_{2m}^n a_{3m} \right) \sin q_m l \right] = 0. \end{aligned} \quad (56)$$

Для каждого стыка имеем четыре условия стыковки и восемь произвольных постоянных, входящих в решения соседних поясов. Поэтому для определения всех произвольных постоянных необходимо решение полной системы уравнений.

Имеем  $4m$  произвольных постоянных,  $4(m-1)$  условий стыковки поясов и четыре условия на торцах оболочки.

Формулами (49-56) определены все коэффициенты системы уравнений. После решения этой системы  $4m$  уравнений получаем произвольные постоянные, соответствующие  $n$ -ой гармонике решения.

Зная безмоментное решение, можно перейти к определению произвольных постоянных краевого эффекта.

Для первого пояса, содержащего опорный край, с учетом (13), (35) и (38) для шарнирно опертого края и жестко защемленного получаем, соответственно:

$$\begin{aligned} w_1^n(\alpha) &= e^{P1l} \left[ \left( A_{11}^n a_{w1} + B_{11}^n b_{w1} \right) \cos q_1 l - \left( A_{11}^n b_{w1} - B_{11}^n a_{w1} \right) \sin q_1 l \right] + \\ + e^{-P1l} &\left[ \left( A_{21}^n a_{w1} - B_{21}^n b_{w1} \right) \cos q_1 l + \left( A_{21}^n b_{w1} + B_{21}^n a_{w1} \right) \sin q_1 l \right] + \\ + e^{-g1\alpha} &\left[ \left( B_{21}^n - B_{11}^n \right) b_{w1} - \left( A_{11}^n + A_{21}^n \right) a_{w1} \right] (\cos g_1 \alpha + \sin g_1 \alpha), \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} w_1^n(\alpha) &= e^{P1l} \left[ \left( A_{11}^n a_{w1} + B_{11}^n b_{w1} \right) \cos q_1 l - \left( A_{11}^n b_{w1} - B_{11}^n a_{w1} \right) \sin q_1 l \right] + \\ + e^{-P1l} &\left[ \left( A_{21}^n a_{w1} - B_{21}^n b_{w1} \right) \cos q_1 l + \left( A_{21}^n b_{w1} + B_{21}^n a_{w1} \right) \sin q_1 l \right] + \\ + e^{-g1\alpha} &\left[ \left( B_{21}^n - B_{11}^n \right) b_{w1} - \left( A_{11}^n + A_{21}^n \right) a_{w1} \right] \cos g_1 \alpha. \end{aligned} \quad (58)$$

Нетангенциальные условия стыковки соседних поясов для амплитудных значений перемещений, углов поворота, моментов и перерезывающих сил имеют вид, аналогичный полученному в [2] для осесимметричного охлаждения:

$$\begin{aligned} \left\| \begin{array}{cccc} 1, & 0, & -1, & 0, \\ g_i & g_i & g_{i+1} & -g_{i+1} \\ D_i g_i^3 & -D_i g_i^3 & D_{i+1} g_{i+1}^3 & D_{i+1} g_{i+1}^3 \\ 0, & D_i g_i^3 & 0, & D_{i+1} g_{i+1}^3 \end{array} \right\| \times \left\| \begin{array}{c} C_{li}^{n*} \\ C_{2i}^{n*} \\ C_{3i+1}^{n*} \\ C_{4i+1}^{n*} \end{array} \right\| &= \left\| \begin{array}{c} w_{oi+1}^n(0) - w_{oi}^n(l) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\| \end{aligned} \quad (59)$$

где

$$\begin{aligned}
w_{oi+1}^n(0) &= \left( A_{1i+1}^n + A_{2i+1}^n \right) a_{wi+1} + \left( B_{1i+1}^n - B_{2i+1}^n \right) b_{wi+1}, \\
w_{oi}^n(l) &= e^{P_i l} \left[ \left( A_{1i}^n a_{wi} + B_{1i}^n b_{wi} \right) \cos q_i l - \left( A_{1i}^n b_{wi} - B_{1i}^n a_{wi} \right) \sin q_i l \right] + \\
&+ e^{-P_i l} \left[ \left( A_{2i}^n a_{wi} - B_{2i}^n b_{wi} \right) \cos q_i l + \left( A_{2i}^n b_{wi} + B_{2i}^n a_{wi} \right) \sin q_i l \right].
\end{aligned} \tag{60}$$

Решение системы уравнений (59) можно получить из выражений (29-32) в [2], для чего в этих выражениях нужно положить  $C^* = C^{n*}$ ,  $w_{oi+1} = w_{oi+1}^n(0)$ ,  $w_{oi} = w_{oi}^n(l)$ . Постоянные  $g_i$ ,  $g_{i+1}$  определяются в соответствии с выражениями (5) настоящей работы.

### Выводы:

1. Для вертикальной цилиндрической оболочки, покоящейся изнутри на упругом основании с кусочно-постоянным коэффициентом постели при одностороннем охлаждении оболочки получено безмоментное решение в рядах Фурье для компонент напряженно-деформированного состояния (НДС).

2. Простым краевым эффектом в рядах Фурье ликвидируются невязки безмоментного решения.

3. С учетом [1] пяти членов ряда разложения по косинусам достаточно для описания компонент НДС при охлаждении оболочки, нагретой без экрана.

4. Для описания компонент НДС оболочки при охлаждении оболочки, нагретой при наличии экрана, закрывающего половину оболочки по всей высоте, [1] необходимо учитывать десять членов ряда разложения в окружном направлении по синусам и косинусам.

5. В продолжение выполненных работ намечено исследование напряженно-деформированного состояния вертикальной цилиндрической оболочки, покоящейся изнутри на упругом Винклеровском основании с кусочно-линейным коэффициентом постели при неосесимметричных температурных климатических воздействиях.

### Литература

1. Жданов А.А. Влияние солнечной радиации на температурные поля вертикальных цилиндрических хранилищ сыпучих материалов / А.А. Жданов. – Вісник ОДАБА. – Вип. 56. – Одеса: Зовнішрекламсервіс, 2014. – С. 249-255.

2. Жданов А.А. О коэффициенте постели упругого основания в задачах прочности цилиндрических оболочек при температурном климатическом воздействии / А.А. Жданов. – Вісник ОДАБА. – Вип. 58. – Одеса: «Зовнішрекламсервіс», 2015. – С. 124-129.

3. Жданов А.А. Цилиндрическая металлическая оболочка на упругом основании при температурном климатическом воздействии / А.А. Жданов. – Вісник ОДАБА. – Вип. 57. – Одеса: Зовнішрекламсервіс, 2015. – С. 152-160.

4. Жданов А.А. Цилиндрическая металлическая оболочка на упругом основании при осесимметричном охлаждении / А. А. Жданов // Актуальные проблемы инженерной механики. Тезисы докладов III Международной научно-практической конференции. – Одесса: «Внешрекламсервис», 2016. – С. 73-78.

5. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек / А.Л. Гольденвейзер. – М.: Гостехтеориздат, 1953. – 544 с.

6. Власов В.З. Общая теория оболочек и её приложение в технике / В. З. Власов. – М. – Л.: Гостехтеориздат, 1949. – 784 с.

7. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1970. – 720 с.

Стаття надійшла 15.08.2017