**УДК 624.012.45: 620.191/192**

**В.М. Карпюк[1], О.М. Петров[1], М.М. Петров[1]**

# Розрахунок залізобетонного стержня у загальному випадку напружено – деформованого стану.

**Вступ.** Раціональне проектування будівельних конструкцій наштовхується на відомі труднощі внаслідок того, що залізобетон є композитним, непружним, неоднорідним і анізотропним матеріалом, здатним як до утворення тріщин, крихкого руйнування, так і до появи пластичних властивостей, повзучості, усадки та набухання.

До теперішнього часу недостатньо вивченим є опір залізобетонних елементів дії зовнішнього навантаження при складному напружено – деформованому стані, який характеризується виникненням в них поперечних та повздовжніх сил, згинальних та крутних моментів. Наслідком цього являється напівемпіричний підхід до їхнього розрахунку.

Отже, дослідження за вказаним напрямком є важливими та актуальними. Вони тісно пов’язані з науковою тематикою академії, носять системний характер і являються складовою частиною держбюджетної теми № 0108U000559 Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України.

**Аналіз попередніх досліджень.** Вивченню фізичної нелінійності бетону та залізобетону присвячені піонерні розробки А.Ф. Лолейта [1], В.І. Мурашева [2]. Вони створили передумови для розвитку інженерних методів розрахунку залізобетонних конструкцій, що згинаються. Проте, ці теорії дають відповідь про характер розподілу напружень по висоті перерізу елементів тільки на окремих стадіях їхньої роботи й не дозволяють простежити за дійсним напружено – деформованим станом аж до появи граничного стану,як правило, нормальних перерізів.

[1]Одеська державна академія будівництва та архітектури, м.Одеса.

Для вивчення процесу деформування дослідних складно напружених залізобетонних елементів потрібно, як виявилося, застосувати теорію пластичності, методи механіки деформування та руйнування твердого тіла.

Початок дослідженням пластичності матеріалів при складному напружено – деформованому стані покладено роботами Л. Прандтля, Е. Рейсса, О.А. Ільюшина та ін. Проте, досить швидко виявилася непридатність вказаних класичних теорій для описання пластичності бетону, оскільки бетон має різну міцність на стиск і розтяг, в ньому можуть утворюватися тріщини, що разом визиває появу деформаційної анізотропії та ефект дилатації при тривісному стиску.

Г.О. Генієв, В.М. Киссюк, Г.О. Тюпін [3] вперше запропонували урахувати всі перераховані вище особливості деформування бетону, який розглядається як нелінійно – пружний ізотропний матеріал, а залізобетон – трансверсально ізотропним як до, так і після утворення тріщин.

Праці А.І. Козачевського, В.М. Круглова [4], С.Ф. Клованича [5], В.І. Корсуна [6] суттєво розвили запропоновану в [3] теорію пластичності бетону і залізобетону.

В дослідженнях М.І. Карпенко та його учні [7,8,9] розвивають теорію малих пружно – пластичних деформацій, у якій бетон як до, так і після появи тріщин розглядаються як анізотропний матеріал з дискретним розташуванням арматури.

Основи сучасних уявлень про теорію міцності бетону при тривісному напруженому стані були закладені М.М. Філоненко – Бородичем [10], Г.О. Генієвим, В.М. Киссюком, Г.О. Тюпіним [3], Г.С. Писаренком, А.А. Лєбєдєвим [11], Т.А. Баланом, С.Ф. Клованичем [12], М.І. Карпенком і його учнями [7], Dei Poli [13], K.H. Gerstle [14], H.B. Kupfer [15] та ін.

Поява сучасних високопродуктивних ЕОМ з великим об’ємом пам’яті зробила можливим розв’язання задач зі складними розрахунковими моделями числовими методами. У такій ситуації головним постає питання про вибір ефективного числового методу [9].

**Формулювання задачі та основні передумови.** Розглядається залізобетонний стержень прямокутного перерізу (рис.1) сталої за довжиною жорсткості, у розрахункових перерізах якого має місце загальний випадок напруженого стану.

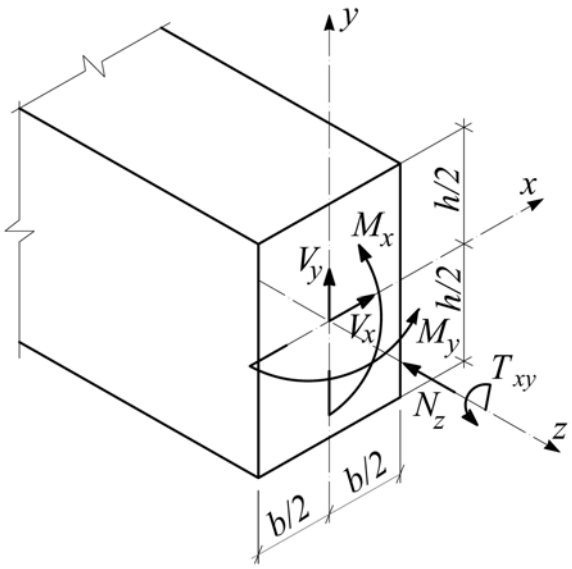


Рис. 1 Схема внутрішніх зусиль у поперечному перерізі стержня у загальному випадку його напружено – деформованого стану

Стержень виготовлений з важкого бетону, твердіння якого відбувалося у нормальних природних умовах. Його армування довільне у вигляді системи ортогонально направлених стержнів робочої і монтажної арматури вздовж осі $z$, поперечної вертикальної (вздовж осі $y$) і горизонтальної (вздовж осі $x$) арматури.

Розглядається просте пропорційне навантаження стержня.

Задача на даному етапі досліджень – визначення несучої здатності залізобетонного стержня з урахуванням його центрального стиску (розтягу), косого згину з вільним чи стисненим крученням, впливу конструктивних чинників та факторів зовнішньої дії, нелінійних властивостей бетону й арматури.

Основні символи, індекси та позначення використовуються в даній моделі згідно з рекомендаціями діючих норм [16,17].

**Основні передумови:**

- залізобетонний стержневий елемент є негнучким, тобто достатньо коротким і масивним.

- зв’язки між напруженнями і відносними деформаціями в бетоні та арматурі встановлюються за допомогою повних діаграм стиску - розтягу та зсуву;
- розглядаються нормальні до повздовжньої осі розрахункові перерізи;
- розподіл загальних лінійних відносних деформацій по висоті розрахункового перерізу при деформації стиску (розтягу) та згину відповідає гіпотезі плоских перерізів;
- дотичні напруження у розрахунковому перерізі елемента при вільному його крученні визначаються згідно з рекомендаціями [18,19];
- дотичні і нормальні напруження у розрахункових перерізах стержня при його стисненому крученні визначаються з урахуванням рішення М.І. Безухова [20] та згідно з рекомендаціями Ю.О. Школи [21];
- бетон і стержні повздовжньої арматури сприймають нормальні $\sigma_x$, $\sigma_y$, $\sigma_z$ та дотичні $\tau_{zx}$, $\tau_{zy}$, $\tau_{xy}$ напруження;
- стержні поперечної арматури сприймають тільки дотичні напруження $\tau_{zx}$ та $\tau_{zy}$. Їх розподіл по довжині цих стержнів вважається нерівномірним;
- у якості критерію руйнування бетону (виникнення макротріщин) може бути прийнята феноменологічна умова міцності В.М. Круглова [4] або М.І. Карпенка [7] та його учнів;
- до появи макротріщин вважається справедливою умова сумісності деформацій бетону і арматури. Після їх появи бетон виключається з роботи і всі зусилля у перерізі з тріщиною сприймаються тільки арматурою;
- арматурні стержні виключаються із роботи з виникненням в них деформацій текучості. У якості критерію приймається умова текучості Губера – Мізеса – Генкі [20,22];
- при переході від напружень до узагальнених внутрішніх силових факторів застосовується процедура числового інтегрування елементарних внутрішніх силових факторів по всій площі розрахункового перерізу. При цьому, розрахунковий переріз стержневого елемента умовно поділяється

на окремі малі елементи – частки, в межах яких напруження вважаються однаковими.

Згідно з [3,7,23] міцність бетону в системі координат головних напружень $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ описується безперервною, випуклою, симетричною відносно октаедричного нормального напруження $\sigma_0$ та однаково нахиленою до вказаних координатних осей поверхнею, побудованою за методом М.М. Філоненка – Бородича з використанням рівняння

$$f\left(\sigma_{oc},\tau_{oc},\theta_c,\right)=\tau_{oc}-\tau_{o1c}\left(\sigma_{oc}\right)\cdot\rho\left(\theta_c\right)=0, \qquad (1)$$

де $\sigma_{oc},\tau_{oc}$ - октаедричні нормальні і дотичні напруження;

$\theta$ - кут виду напруженого стану;

$\rho\left(\theta_c\right)$ - інтерполяційна між $\tau_{o1}\left(\theta_c=60°\right)$ і $\tau_{o2}\left(\theta_c=0°\right)$ функція [23]:

$$\rho\left(\theta_c\right)=\left[2a_c\cos\theta_c+b_c\sqrt{a_c\left(4\cos^2\theta_c-1\right)+b_c^2}\right]\Big/\left(4a_c\cos^2\theta_c+b_c^2\right), \qquad (2)$$

де $a_c=1-c_c^2,\ b_c=2c_c-1,\ c_c=\tau_{o2c}/\tau_{o1c}$.

Зв'язок між октаедричними напруженнями при кутах виду напруженого стану $\theta_c=60°$ і $\theta_c=0°$ згідно з [23] можна представити:

$$\sigma_{oc}=A_1\tau_{o1c}^2+B_1\tau_{o1c}+C_1,\ \ \sigma_{oc}=A_2\tau_{o2c}^2+B_2\tau_{o2c}+C_1. \qquad (3)$$

Коефіцієнти $A_1,A_2,B_1,B_2,C_1$ отриманні шляхом «прив'язки» характерних точок на поверхні міцності бетону. Використовуючи експериментальні залежності В.М. Бондаренка і В.І. Колчунова [24] з урахуванням [16,23] їх пропонується визначати за такими спрощеними формулами:

$$\begin{aligned}
&A_1=4{,}14\big/\left(f_{ck}-f_{ctk}\right);\\
&B_1=\left(5{,}38f_{ck}^2+f_{ck}f_{ctk}-6{,}38f_{ck}^2\right)\Big/\left[4{,}24\left(f_{ck}-f_{ctk}\right)^2\right];\\
&A_2=\left(4{,}09f_{ck}-4{,}16f_{ctk}\right)\Big/\left(1{,}20f_{ck}^2-2{,}20f_{ck}f_{ctk}+f_{ctk}^2\right); \qquad (4)\\
&B_2=\left(4{,}46f_{ck}^2-2{,}04f_{ck}f_{ctk}-0{,}73f_{ctk}^2\right)\Big/\left(4{,}32f_{ck}^2-7{,}92f_{ck}f_{ctk}+3{,}60f_{ctk}^2\right);\\
&C_1=-H=-\left(0{,}82f_{ck}f_{ctk}\right)\Big/\left(f_{ck}-f_{ctk}\right),
\end{aligned}$$

де $f_{ck},f_{ctk}$ - характеристична (при проектуванні розрахункова $f_{cd},f_{ctd}$) міцність бетону, відповідно, на стиск та розтяг. За формулою (1) можна

однозначно описати поверхню міцності бетону, оскільки до неї через коефіцієнти (4) входять п’ять незалежних параметрів (його) міцності, які відповідають окремим випадкам напруженого стану:

одновісному стиску $R_c = f_{ck}$ і розтягу $R_p = f_{ctk}$,

двовісному стиску $R_{2c} \cong 1,2R_c = 1,2f_{ck}$ і розтягу $R_{2p} \cong R_p = f_{ctk}$,

а також тривісному рівномірному розтягу $R_{3p} = H \cong \left(0,82R_c \cdot R_p\right)\Big/\left(R_c - R_p\right)$.

Кут виду напруженого стану в бетоні стержня, що розглядається, можна визначити за [20,23] з урахуванням $\sigma_x = \sigma_y = 0$

$$\theta_c = \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3\sqrt{3D_3}}{2\sqrt{D_2^3}}\right) = \frac{1}{3}\arccos\left[\frac{\sqrt{\sigma_{zc}\left[2\sigma_{zc}^2 + 9\left(\tau_{xyc}^2 + \tau_{zyc}^2 + \tau_{zxc}^2\right)\right]}}{2\sqrt{\left(\sigma_{zc}^2/3 + \tau_{xyc}^2 + \tau_{zyc}^2 + \tau_{zxc}^2\right)^3}}\right], \tag{5}$$

де $D_2, D_3$ - другий та третій інваріанти девіатора напружень.

З урахуванням (1), (3)

$$\sigma_{oc} = \frac{A_1}{\rho^2\left(\theta_c\right)}\tau_{oc}^2 + \frac{B_1}{\rho\left(\theta_c\right)}\tau_{oc} + C_1. \tag{6}$$

Граничні значення міцності бетону (на «поверхні» міцності) у вигляді $\hat{\sigma}_{oc}$ та $\hat{\tau}_{oc}$ визначаються розв’язком системи рівнянь:

$$\begin{cases} \hat{\tau}_{oc} - \tau_m = m_\sigma\left(\hat{\sigma}_{oc} - \sigma_m\right); \\ \hat{\sigma}_{oc} = \dfrac{A_1}{\rho^2\left(\theta_c\right)}\hat{\tau}_{oc}^2 + \dfrac{B_1}{\rho\left(\theta_c\right)}\hat{\tau}_{oc} + C_1, \end{cases} \tag{7}$$

де $\sigma_m$ та $\tau_m$ - напруження на попередньому рівні навантаження (при простому пропорційному навантаженні $\sigma_m = \tau_m = 0$);

$m_\sigma$ - коефіцієнт, що характеризує напружено – деформований стан бетону. Наприклад, при рівномірному тривісному розтязі $m_\sigma = 0$, двовісному розтязі – стиску $m_\sigma = \pm\sqrt{2}/2$, одновісному розтязі – стиску $m_\sigma = \pm\sqrt{2}$ (знак «+» відповідає деформації розтягу, «-» - стиску).

Умова текучості арматурної сталі Губера – Мізеса – Генкі [20,22] при $\sigma_x=\sigma_y=0$ має вид:

$$\sigma_{zs}^2 + 3\tau_{xys}^2 + 3\tau_{zxs}^2 + 3\tau_{zys}^2 = \tilde{f}_{yd}^2, \tag{8}$$

де $\tilde{f}_{yd}^2$ – розрахункова міцність арматури на границі текучості з урахуванням її зменшення внаслідок складного напруженого стану у порівнянні з центральним розтягом – стиском.

У загальному випадку складного напружено – деформованого стану цей критерій має вид:

$$\sigma_{xs}^2 + \sigma_{ys}^2 + \sigma_{zs}^2 - \sigma_{xs}\sigma_{ys} - \sigma_{ys}\sigma_{zs} - \sigma_{zs}\sigma_{xs} + 3\tau_{xys}^2 + 3\tau_{zys}^2 + 3\tau_{zxs}^2 = \tilde{f}_{yd}^2. \tag{9}$$

Для побудови діаграми зсуву у [21] використана гіпотеза теорії пружнопластичних деформацій, згідно з якою інтенсивність напружень пов'язана з інтенсивністю деформацій однією і тією ж залежністю для всіх видів напружених станів. Для випадку одноосного розтягу за пропозицією М.М. Малініна [25] інтенсивність напружень та інтенсивність деформацій представлена:

$$\sigma_i = \sigma; \qquad \varepsilon_i = \varepsilon\left(1-2v\right)/3E, \tag{10}$$

де $\sigma$ – нормальні напруження;

$\varepsilon$ – відносні осьові деформації.

При чистому зсуві інтенсивність напружень та інтенсивність деформацій можна знайти за формулами:

$$\sigma_i = \sqrt{3\tau}; \qquad \varepsilon_i = \gamma/\sqrt{3}, \tag{11}$$

де $\tau$ – дотичні напруження; $\gamma$ – кутові деформації.

Користуючись вищезазначеною гіпотезою М.М. Малінін [25] з (10) і (11) отримав вирази:

$$\sigma_i = \frac{\sigma}{\sqrt{3}}; \qquad \gamma = \sqrt{3}\left[\varepsilon - \frac{\left(1-2v\right)\sigma}{3E}\right]. \tag{12}$$

Отже, діаграму зсуву матеріалу можна отримати з діаграми його осьового розтягу. Звідси модуль пружності матеріалу при зсуві:

$$G = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{\sigma}{3}\left( \varepsilon - \frac{1-2v}{3E}\sigma \right)^{-1}. \qquad (13)$$

Згідно з рекомендаціями М.І. Карпенка [7] діаграму деформування бетону при стиску (розтязі) з урахуванням [16] можна представити у вигляді:

$$\varepsilon_b = \frac{\sigma_b}{E_b^0 \nu_b} = \frac{\sigma_c}{E_{cm}\zeta_c} = \varepsilon_c, \qquad (14)$$

де $\varepsilon_b = \varepsilon_c$ - відносні лінійні деформації бетону;

$\sigma_b = \sigma_c$ - нормальні напруження в бетоні;

$E_b{}^0 = E_{cm}$ – початковий модуль пружності бетону;

$\nu_b = \zeta_c$ – коефіцієнт зміни січного модуля пружності бетону.

Деформаційні залежності для бетону, що знаходиться у складному напружено – деформованому стані, доцільно формулювати також у вигляді зв’язку між октаедричними напруженнями і деформаціями [23]. При цьому, вважаються справедливими наступні гіпотези[7]:

- зв'язок між октаедричними напруженнями $\tau_{oc}$ і зсувами на октаедричних площинках $\gamma_{oc}$ нелінійний: $\tau_{oc} = G_c(\gamma_{oc}) \cdot \gamma_{oc}$, де $G_c(\gamma_{oc})$ - січний (октаедричний) модуль зсуву бетону;
- зв'язок між октаедричними нормальними напруженнями $\sigma_{oc}$ та середніми деформаціями $\varepsilon_{oc}$ також нелінійний і має вигляд $\sigma_{oc} = K(\gamma_{oc}) \cdot \left( \varepsilon_{oc} - \rho_c \gamma_{oc}^2 \right)$, де $\rho_c$ - модуль дилатації (за Г.О. Генієвим [3] - $g_{oc}$); $K(\gamma_{oc})$ - модуль об'ємних деформацій.

Для визначення січних модулів по аналогії з гіпотезою [3,7] про «єдину криву деформування» доцільно використати гіпотезу [23], згідно з якою форма зв’язку між напруженнями та деформаціями не залежить від виду напруженого стану, тобто зв'язок між $\tau_{oc}$ і $\gamma_{oc}$ можна прийняти таким же, як і при одновісному стиску, і для визначення січного модуля зсуву прийняти (рис.2) залежність ЕКБ, запропоновану Саєнсом, $G_c(\gamma_{oc}) = G_{oc} \cdot f(\gamma_o)$, в якій

$$f(\gamma_{oc}) = \frac{1}{1 + A\eta + B\eta^2 + C\eta^3}, \qquad (15)$$

де $C = \lambda(1-\xi_r)\Big/\left[\xi_r(\eta_r - 1)^2 - 1/\eta_r\right]$; $B = 1 - 2C$; $A = C + \lambda - 2$; $\xi_r = \overline{\sigma}_r / f_{ck} \approx 0{,}85$ і $\eta_r = \gamma/\overline{\gamma}_r \approx 1{,}41$; $\xi = \sigma_{oc}/f_{ck}$; $\eta = \gamma_{oc}/\overline{\gamma}_{oc}$; $\lambda = \xi/\eta$; початковий модуль зсуву $G_{oc} = G_{cm} = E_{cm}\Big/\left[2(1+\nu_c)\right]$; $\sigma_{oc} = \left(\sigma_{xc} + \sigma_{yc} + \sigma_{zc}\right)\Big/3$; $\varepsilon_{oc} = \left(\varepsilon_{xc} + \varepsilon_{yc} + \varepsilon_{zc}\right)\Big/3$;

$$\gamma_{oc} = 2/3\sqrt{\left(\varepsilon_{xc} - \varepsilon_{yc}\right)^2 + \left(\varepsilon_{zc} - \varepsilon_{yc}\right)^2 + \left(\varepsilon_{zc} - \varepsilon_{xc}\right)^2 + 3/2\left(\gamma_{xyc}^2 + \gamma_{zyc}^2 + \gamma_{zxc}^2\right)}.$$

З урахуванням $\sigma_{xc} = \sigma_{yc} = 0$ для стержня, що розглядається: $\sigma_{oc} = \sigma_{zc}/3$; $\varepsilon_{oc} = \varepsilon_{zc}/3$; $\tau_{oc} = 1\Big/3\sqrt{2\sigma_{zc}^2 + 6\left(\tau_{xyc}^2 + \tau_{zyc}^2 + \tau_{zxc}^2\right)}$;

$$\gamma_{oc} = 2\Big/3\sqrt{2\varepsilon_{zc}^2 + 3/2\left(\gamma_{xyc}^2 + \gamma_{zyc}^2 + \gamma_{zxc}^2\right)}.$$

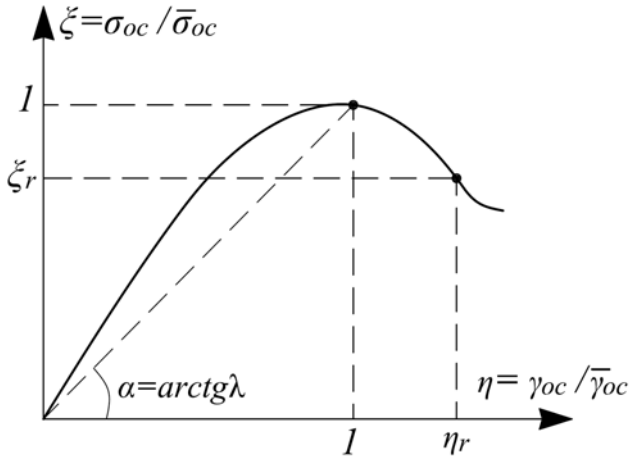


Рис. 2 Діаграма деформування бетону в умовах складного напруженого стану

Граничні (максимально можливі) зсуви $\overline{\gamma}_r$ на октаедричних площинках рекомендується визначати за рівнянням регресії [23], отриманим в результаті обробки відомих експериментальних даних при тривісному стиску А.В. Яшина і М.Д. Котсовоса:

$$\overline{\gamma}_r = 7{,}97\left(\tau_{oc}/f_{ck}\right)^2 + 15{,}22\left(\tau_{oc}/f_{ck}\right) - 3{,}713. \qquad (16)$$

Модуль дилатації бетону з урахуванням [141,2] можна визначити за формулою:

$$\rho_c = g_{oc} = -\theta_c \big/ \tilde{A}_c^2 = -\left(\varepsilon_{xc} + \varepsilon_{yc} + \varepsilon_{z\tilde{n}}\right) G_{oc}/4 f_{bk}, \qquad (17)$$

де $\theta_c, \tilde{A}_c$- відповідно, граничні об’ємні деформації та інтенсивність деформацій бетону зсуву при чистому зсуві;

$f_{bk}$ - характеристичне (при проектуванні – розрахункове $f_{bd}$) значення граничних напружень зчеплення [17], яке приблизно дорівнює $R_{b,sh} = 0,7\sqrt{R_b R_{bt}}$ за [28].

Модуль об'ємних деформацій за [23] визначається аналогічно: $K_c(\gamma_{oc}) = K_{oc} \cdot f(\gamma_{oc})$,

де $K_{oc} = \dfrac{E_{cm}}{1-2v_c}$ - початковий модуль об'ємних деформацій.

З урахуванням викладеного, січний модуль пружності $E_c$ та коефіцієнт поперечних деформацій $v_c$ складно напруженого бетону згідно з [8] визначається:

$$\begin{aligned} E_c &= 3K_c(\gamma_{oc})G_c(\gamma_{oc})\big/\big[G_c(\gamma_{oc}) + K_c(\gamma_{oc})\big], \\ v_c &= \big[K_c(\gamma_{oc}) - 2G_c(\gamma_{oc})\big]\big/\big\{2\big[G_c(\gamma_{oc}) + K_c(\gamma_{oc})\big]\big\}. \end{aligned} \tag{18}$$

Аналогічно з виразами для бетону можна отримати формули для січного модуля пружності при зсуві для арматурної сталі та залежності для діаграми її зсуву:

$$G_s = \frac{E_{sk}\vartheta_s}{\big[2(1+v_s)\big]}; \qquad \tau_s = \frac{E_{sk}\vartheta_s}{\big[2(1+v_s)\big]}\gamma_s, \tag{19}$$

де $\vartheta_s$ – коефіцієнт зміни січного модуля пружності.

Осьову деформацію в стержнях поперечної арматури та відносну кутову деформацію у прилеглому бетоні можна обчислити за [26]:

$$\varepsilon_{sw}^{*} = \gamma_c^{*} = \gamma_c\left[1 + d_{sw}E_{sw}v_{sw}(1+v_c)\big/(2l_{sw}E_{cm}\vartheta_c)\right]^{-1} \tag{20}$$

Сумісна робота поздовжньої та поперечної арматури при розрахунку залізобетонних елементів ураховується зменшенням розрахункового значення границі текучості поздовжньої арматури згідно з [26,28]:

$$\tilde{f}_{yd} = f_{yd}\sqrt{1 - 3s^2\hat{e}_1\left(ctg^2\alpha/l_{sw,x}^2 + ctg^2\beta/l_{sw,y}^2\right)\Big/\left[4(1+v_s)^2\right]}, \tag{21}$$

де $\kappa_1$-понижуючий коефіцієнт, встановлений експериментальним шляхом, $\kappa_1 = 0,08...0,10$.

**Розрахунковий поперечний переріз елемента.** Бетонну частину поперечного перерізу стержня умовно розбиваємо на малі частки прямокутної форми (рис.3), розмір яких узгоджується з крупністю найбільшої фракції бетону. Кожній з цих часток присвоюється відповідний номер [26]. Для кожної *n*-ної частки бетону в розрахунковому перерізі фіксуються координати її центру ваги відносно центру осей симетрії перерізу $x_{cn}$, $y_{cn}$, площа $A_{cn}$, характеристична (нормативна) міцність бетону на стиск $f_{ck}$, розтяг $f_{ctk}$, початковий модуль пружності $E_{cm}$. Коефіцієнт Пуассона ($v_c$=*0,2*) приймається сталим. Така фіксація міцнісних і деформаційних характеристик бетону для кожного елемента дозволяє розраховувати залізобетонні стержні складеного залізобетонного перерізу, бетонування або підсилення яких здійснювали за декілька етапів бетонами різної міцності й деформативності, а також залізобетонні елементи, пошкоджені корозією, температурними та іншими впливами.

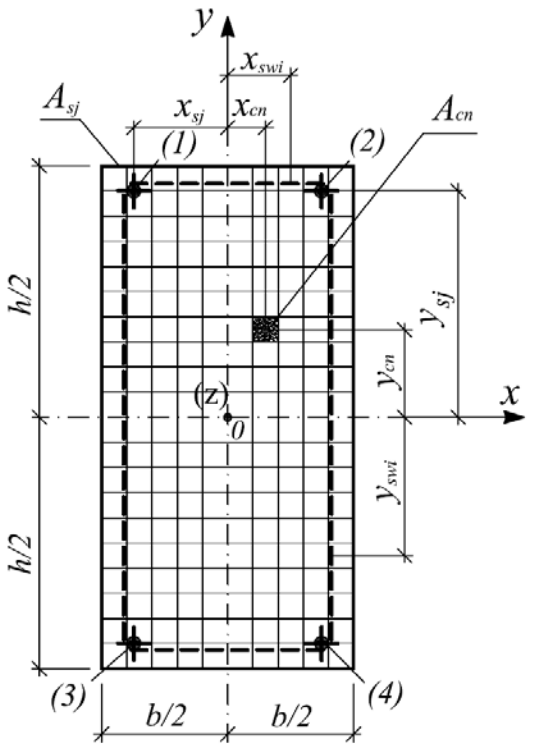


Рис. 3 Складові частки розрахункового поперечного перерізу стержня

Розташування стержнів поздовжньої арматури приймається дискретним. Кожному поздовжньому арматурному стержню присвоюється свій номер *j*, вказується його діаметр $d_{sj}$, положення центру ваги відносно центру осей симетрії перерізу елемента $x_{sj}$, $y_{sj}$, характеристичне значення міцності на границі текучості $f_{ykj}$ (або $f_{0,2kj}$), характеристичне значення відносних деформацій арматурної або попередньо напруженої сталі при максимальному навантаженні $\varepsilon_{uk}$, початковий модуль пружності $E_{skj}$ та клас

арматури. Коефіцієнт Пуассона $v_s$ приймається сталим для всіх стержнів поздовжньої арматури і таким, що дорівнює 0,25.Розташування стержнів поперечної арматури в площині розрахункового перерізу приймається також дискретним. Горизонтальні і вертикальні стержні поперечної арматури (хомути) умовно розбиваються на окремі ділянки, кожній з яких присвоюється номер $i$, фіксується її діаметр $d_{swi}$, площа поперечного перерізу $A_{swi}$, площа поверхні дотику з бетоном $A_{cswi}$ та координати її центру ваги у площині розрахункового поперечного перерізу $x_{swi}$, $y_{swi}$ відносно осей симетрії. Для всіх поперечних стержнів, що розташовані в площині перерізу, задаються міцнісні та деформаційні характеристики: характеристичне значення міцності на границі текучості $f_{ywk}$, характеристичне значення міцності на розтяг $f_{twk}$ , модуль пружності $E_{sw}$ , коефіцієнт Пуассона $v_{sw}=0,25$, характеристичне значення відносних деформацій $\varepsilon_{uwk}$, границя або рівень пружності та клас поперечної арматури.

По довжині залізобетонного елемента (вздовж осі $z$) поперечна арматура для вказаного на рис. 3 перерізу ураховується у вигляді розподіленого на його грані шару погонної площі згідно з рекомендаціями [26]

$$A_{zswi} = \pi d_{swi}^2 / \left(4 s_i\right), \tag{22}$$

де $s_i$ – крок поперечних стержнів у поздовжньому напрямку.

**Рівняння рівноваги.** З урахуванням наведених вище припущень і передумов рівняння рівноваги у розрахунковому перерізі прогінного залізобетонного елемента можна представити у вигляді

$$N_z = \sum_{n=1}^{k} A_{\tilde{n}\ddot{i}} \sigma_{z\tilde{n}\ddot{i}} + \sum_{j=1}^{m} A_{sj} \sigma_{zsj}, \quad M_y = \sum_{n=1}^{k} A_{\tilde{n}\ddot{i}} \sigma_{z\tilde{n}\ddot{i}} X_{\tilde{n}\ddot{i}} + \sum_{j=1}^{m} A_{sj} \sigma_{zsj} X_{sj},$$

$$M_x = \sum_{n=1}^{k} A_{\tilde{n}\ddot{i}} \sigma_{z\tilde{n}\ddot{i}} Y_{\tilde{n}\ddot{i}} + \sum_{j=1}^{m} A_{sj} \sigma_{zsj} Y_{sj}, \quad V_x = \sum_{n=1}^{k} A_{\tilde{n}\ddot{i}} \tau_{zx\tilde{n}\ddot{i}} + \sum_{j=1}^{m} A_{sj} \tau_{zxsj} + \sum_{i=1}^{l_{xsw,1-2,3-4}} A_{xswi} \sigma_{xswi},$$

$$V_y = \sum_{n=1}^{k} A_{\tilde{n}\ddot{i}} \tau_{zy\tilde{n}\ddot{i}} + \sum_{j=1}^{m} A_{sj} \tau_{zysj} + \sum_{i=1}^{l_{ysw,1-4,2-3}} A_{yswi} \sigma_{yswi}, \tag{23}$$

$$T_{xy} = \sum_{n=1}^{k} A_{\tilde{n}\ddot{i}} \left( \tau_{zy\tilde{n}\ddot{i}} X_{cn}^{tor} - \tau_{zx\tilde{n}\ddot{i}} Y_{cn}^{tor} \right) + \sum_{j=1}^{m} A_{sj} \left( \tau_{zysj} X_{sj}^{tor} - \tau_{zxsj} Y_{sj}^{tor} \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{l_{xysw,1...4}} A_{swi} \left( \sigma_{yswi} X_{swi}^{tor} - \sigma_{xswi} Y_{swi}^{tor} \right),$$

де $\sigma_{zcn}$ – нормальні напруження в $n$-ій частці бетонного перерізу;

$\sigma_{zsj}$ – нормальні напруження в $j$-му поздовжньому стержні;

$\tau_{zxcn}$, $\tau_{zycn}$ – дотичні напруження в $n$-ій частці бетонного перерізу;

$\tau_{zxsj}$, $\tau_{zysj}$ – дотичні напруження в $j$-му поздовжньому стержні;

$\sigma_{xswi}$, $\sigma_{yswi}$ – нормальні напруження, які виникають на $i$-ій ділянці, відповідно, горизонтальної та вертикальної поперечної арматури.

**Нормальні та дотичні напруження** в рівняннях (23) визначаються за допомогою повних діаграм деформування бетону і арматури [7, 24, 26, 30] та прийнятих гіпотез за наступними формулами:

$$\sigma_{zml} = \mathring{A}_{ml} \zeta_{zml} \varepsilon_{zml}; \qquad \tau_{zxml} = G_{ml} \vartheta_{zxml} \gamma_{zxml};$$

$$\tau_{zyml} = G_{ml} \vartheta_{zyml} \gamma_{zyml}; \qquad \tau_{xyml} = G_{ml} \vartheta_{xyml} \gamma_{xyml}; \tag{24}$$

$$\sigma_{yswi} = \mathring{A}_{swi} \zeta_{yswi} \varepsilon_{yswi}^{*}; \quad \sigma_{xswi} = E_{swi} \zeta_{xswi} \varepsilon_{xswi}^{*},$$

де $\zeta$ - коефіцієнт зміни січного модуля пружності $E_{ml}$, $\vartheta$ - коефіцієнт зміни січного модуля пружності зсуву $G_{ml}$; $m=c$ для часток бетонного перерізу, $m=s$ для стержнів поздовжньої арматури; $m=sw$ для стержнів поперечної арматури; $l$ – номер частки бетону або стержня.

**Узагальнені лінійні та кутові деформації** визначаються з урахуванням гіпотези плоских перерізів, розв'язків теорії пружності [31] при поперечному згині, а також функцій розподілу напружень при стисненому [29] та вільному [32] крученні. Вони можуть бути представлені у вигляді:

$$\varepsilon_{zml} = \varepsilon_0 + \chi_x X_{ml} + \chi_y Y_{ml} + \beta_z \theta_z \varphi\left(X_{ml}^{tor}, Y_{ml}^{tor}\right)$$
$$\gamma_{zxml} = K_x g_{xml} + K_y h_{yml} + \theta_z f_{zxml},$$
$$\gamma_{zyml} = K_y g_{yml} + K_x h_{xml} - \theta_z f_{zyml},$$
$$\gamma_{xyml} = -\theta_z f_{xyml}, \qquad (25)$$

де $\varepsilon_0$ - осьова відносна деформація елемента по лінії повздовжньої осі z; $\chi_x, \chi_y$ - кривизни згину у площинах дії згинальних моментів $M_x$, $M_y$ відповідно. Їх можна знайти через середні деформації розтягнутої арматури і стиснутого бетону; $K_x$, $K_y$ – кривизни зсуву в площинах дії поперечних сил $V_x$, $V_y$ відповідно; $\theta_z$ - відносний (погонний) кут закручування одиниці довжини стержня (рад/м); $\varphi\left(X_{ml}^{tor}, Y_{ml}^{tor}\right)$ - функція кручення Сен – Венана відносно центру кручення; $\beta_z$ - коефіцієнт депланації перерізу, який при стисненому крученні визначається за формулою $\beta_z = \eta e^{-\eta z}$; $\eta$ - коефіцієнт стиснення [21]; $z$ – відстань вздовж осі елемента до найближчого жорсткого закріплення. При вільному крученні стержнів $\beta_z = 1$; $g_{xml}, g_{yml}, h_{xml}, h_{yml}$ - функції розподілу кутових деформацій при поперечному згині [31]; $f_{zxml} = \tau_{zxml} / \theta_z G_{ml}$; $f_{zyml} = \tau_{zyml} / \theta_z G_{ml}$; $f_{xyml} = \tau_{xyml} / \theta_z G_{ml}$ - функції розподілу при вільному [32] та стисненому [29] крученні.

**Загальні фізичні співвідношення.** Використовуючи рівняння рівноваги (23), узагальнені лінійні та кутові деформації (25), діаграми деформування матеріалів, [30], загальні фізичні співвідношення для розрахункового поперечного перерізу залізобетонного стержня можна представити:

$$\begin{Bmatrix} N_z \\ M_y \\ M_x \\ V_x \\ V_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & D_{26} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 & D_{36} \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & D_{45} & D_{46} \\ 0 & 0 & 0 & D_{54} & D_{55} & D_{56} \\ D_{61} & D_{62} & D_{63} & D_{64} & D_{65} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \chi_y \\ \chi_x \\ K_x \\ K_y \\ \theta \end{Bmatrix}, \qquad (26)$$

або $$\{N\} = [D]\{\varepsilon\},$$

(27)

де $D_{11}$ – осьова жорсткість елемента:

$$D_{11} = \sum_{n=1}^{k} A_{cn} E_{cmn} \zeta_{cn} + \sum_{j=1}^{m} A_{sj} E_{sj} \zeta_{zsj} / \psi_{sj}; \tag{28}$$

$D_{22}$, $D_{33}$ – згинальні жорсткості в площинах *zox*, *zoy*:

$$D_{22} = \sum_{n=1}^{k} A_{cn} E_{cmn} \zeta_{cn} X_{cn}^2 + \sum_{j=1}^{m} A_{sj} E_{sj} \zeta_{zsj} X_{sj}^2 / \psi_{sj}, \tag{29}$$

$$D_{33} = \sum_{n=1}^{k} A_{cn} E_{cmn} \zeta_{cn} Y_{cn}^2 + \sum_{j=1}^{m} A_{sj} E_{sj} \zeta_{zsj} Y_{sj}^2 / \psi_{sj}; \tag{30}$$

$D_{23}$ – жорсткість взаємного впливу згину в двох площинах:

$$D_{23} = D_{32} = \sum_{n=1}^{k} A_{cn} E_{cmn} \zeta_{cn} X_{cn} Y_{cn} + \sum_{j=1}^{m} A_{sj} E_{sj} \zeta_{zsj} X_{sj} Y_{sj} / \psi_{sj}; \tag{31}$$

$D_{12}$, $D_{13}$ – жорсткості впливу повздовжньої сили на згин та згинальних моментів на видовження елемента:

$$D_{12} = D_{21} = \sum_{n=1}^{k} A_{cn} E_{cmn} \zeta_{cn} X_{cn} + \sum_{j=1}^{m} A_{sj} E_{sj} \zeta_{zsj} X_{sj} / \psi_{sj}, \tag{32}$$

$$D_{13} = D_{31} = \sum_{n=1}^{k} A_{cn} E_{cmn} \zeta_{cn} Y_{cn} + \sum_{j=1}^{m} A_{sj} E_{sj} \zeta_{zsj} Y_{sj} / \psi_{sj}; \tag{33}$$

$D_{44}$, $D_{55}$ – жорсткості зсуву в площинах *zox*, *zoy* від дії поперечних сил:

$$D_{44} = \sum_{n=1}^{k} \frac{A_{cn} E_{cmn} \vartheta_{zxcn} g_{xcn}}{\left[2(1+\nu_c)\right]} + \sum_{j=1}^{m} \frac{A_{sj} E_{sj} \vartheta_{zxsj} g_{xsj}}{\left[2(1+\nu_s)\right]} + \sum_{i=1}^{l_{sw,x}} A_{swi} E_{sw} \zeta_{xswi} g_{xswi,c}, \tag{34}$$

$$D_{55} = \sum_{n=1}^{k} \frac{A_{cn} E_{cmn} \vartheta_{zycn} g_{ycn}}{\left[2(1+\nu_c)\right]} + \sum_{j=1}^{m} \frac{A_{sj} E_{sj} \vartheta_{zysj} g_{ysj}}{\left[2(1+\nu_s)\right]} + \sum_{i=1}^{l_{sw,y}} A_{swi} E_{sw} \zeta_{swi} g_{yswi,c}; \tag{35}$$

$D_{45}$, $D_{54}$ – жорсткості взаємного впливу згину в площинах *zox*, *zoy*:

$$D_{45} = \sum_{n=1}^{k} \frac{A_{cn} E_{cmn} \vartheta_{zxcn} h_{xcn}}{\left[2(1+\nu_c)\right]} + \sum_{j=1}^{m} \frac{A_{sj} E_{sj} \vartheta_{zxsj} h_{xsj}}{\left[2(1+\nu_s)\right]} + \sum_{i=1}^{l_{sw,x}} A_{swi} E_{sw} \zeta_{xswi} h_{xswi,c}; \tag{36}$$

$$D_{54} = \sum_{n=1}^{k} \frac{A_{cn} E_{cmn} \vartheta_{zycn} h_{ycn}}{\left[2(1+\nu_c)\right]} + \sum_{j=1}^{m} \frac{A_{sj} E_{sj} \vartheta_{zysj} h_{ysj}}{\left[2(1+\nu_s)\right]} + \sum_{i=1}^{l_{sw,y}} A_{swi} E_{sw} \zeta_{yswi} h_{yswi,c}, \tag{37}$$

$D_{16}$, $D_{26}$, $D_{36}$ – жорсткості впливу крутного моменту $T_{xy}$ на видовження та кривизни згину в площинах *zox*, *zoy*, поздовжньої сили $N$ та згинальних моментів $M_x$, $M_y$ на зсув у площині *xoy*:

$$D_{16} = D_{61} = \sum_{n=1}^{k} A_{cn} E_{cmn} \zeta_{cn} \beta_z \varphi\left(X_{cn}^{tor}, Y_{cn}^{tor}\right) + \sum_{j=1}^{m} A_{sj} E_s \zeta_{zsj} \beta_z \varphi\left(X_{sj}^{tor}, Y_{sj}^{tor}\right) \Big/ \psi_{sj}, \quad (38)$$

$$D_{26} = D_{62} = \sum_{n=1}^{k} A_{cn} E_{cmn} \zeta_{cn} X_{cn}^{tor} \beta_z \varphi\left(X_{cn}^{tor}, Y_{cn}^{tor}\right) + \sum_{j=1}^{m} A_{sj} E_{sj} \zeta_{zsj} X_{sj}^{tor} \beta_z \varphi\left(X_{sj}^{tor}, Y_{sj}^{tor}\right) \Big/ \psi_{sj}, \quad (39)$$

$$D_{36} = D_{63} = \sum_{n=1}^{k} A_{cn} E_{cmn} \zeta_{cn} Y_{cn}^{tor} \beta_z \varphi\left(X_{cn}^{tor}, Y_{cn}^{tor}\right) + \sum_{j=1}^{m} A_{sj} E_{sj} \zeta_{zsj} Y_{sj}^{tor} \beta_z \varphi\left(X_{sj}^{tor}, Y_{sj}^{tor}\right) \Big/ \psi_{sj}; \quad (40)$$

$D_{46}$, $D_{56}$, – жорсткості впливу крутного моменту $T_{xy}$ на зсув у площинах *zox*, *zoy* та поперечних сил $V_x$, $V_y$ на зсув в площині *xoy*:

$$D_{46} = D_{64} = \sum_{n=1}^{k} \frac{A_{cn} E_{cmn} \vartheta_{zxcn} f_{zxcn}}{\left[2\left(1+\nu_c\right)\right]} + \sum_{j=1}^{m} \frac{A_{sj} E_{sj} \vartheta_{zxsj} f_{zxsj}}{\left[2\left(1+\nu_s\right)\right]} + \sum_{i=1}^{l_{sw,x}} A_{swi} E_{sw} \zeta_{xswi} f_{zxswi,c}, \quad (41)$$

$$D_{56} = D_{65} = \sum_{n=1}^{k} \frac{A_{cn} E_{cmn} \vartheta_{zycn} f_{zycn}}{\left[2\left(1+\nu_c\right)\right]} + \sum_{j=1}^{m} \frac{A_{sj} E_{sj} \vartheta_{zysj} f_{zysj}}{\left[2\left(1+\nu_s\right)\right]} + \sum_{i=1}^{l_{sw,y}} A_{swi} E_{sw} \zeta_{yswi} f_{zyswi,c}; \quad (42)$$

$D_{66}$, – жорсткість при крученні стержня в площині *xoy*:

$$D_{66} = \sum_{n=1}^{k} \frac{A_{cn} E_{cmn} \vartheta_{xycn}}{\left[2\left(1+\nu_c\right)\right]} \left(f_{zycn} X_{cn}^{tor} - f_{zxcn} Y_{cn}^{tor}\right) + \sum_{j=1}^{m} \frac{A_{sj} E_{sj} \vartheta_{xysj}}{\left[2\left(1+\nu_s\right)\right]} \left(f_{zysj} X_{sj}^{tor} - f_{zxsj} Y_{sj}^{tor}\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{l_{sw,y}+l_{sw,x}} A_{swi} E_{sw} \zeta_{xyswi} \left(f_{zyswi} X_{swi}^{tor} - f_{zxswi} Y_{swi}^{tor}\right), \quad (43)$$

де $\psi_{sj}$ – коефіцієнт В.І. Мурашева, який може бути визначений згідно з російськими нормами за формулою:

$$\psi_{sj} = 1 - \omega \sigma_{sj,cr} \big/ \sigma_{sj}, \quad (44)$$

де $\sigma_{sj,cr}$ – напруження в $j$ – тому стержні в момент виникнення тріщин;

$\sigma_{sj}$ – поточне напруження в $j$ – тому стержні повздовжньої арматури на рівні навантаження, що розглядається;

$\omega$ - коефіцієнт повноти епюри розтягнутого бетону, який згідно з рекомендаціями [3] можна приймати: $\omega = 0,7$.

Вважається [30], що фізичні співвідношення (26)…(43) є справедливими на всіх стадіях напружено – деформованого стану стержневих залізобетонних елементів прямокутного перерізу при простому пропорційному їх

навантаженні. Вони є частиною алгоритму визначення міцності та деформативності окремих розрахункових перерізів (рис.4) цих елементів.

**Висновки.** Використаний підхід дає змогу ураховувати дискретність розташування поздовжньої та поперечної арматури, нелінійність властивостей матеріалів шляхом введення січних модулів при їх розтязі (стиску) та зсуві, нерівномірний розподіл напружень по довжині поперечної арматури, а також розглядати загальний випадок складного напруженого стану зі стисненим або вільним крученням, центральним чи позацентровим стиском (розтягом) з малими або великими ексцентриситетами, косим згином.

Вказані фізичні співвідношення можна застосовувати й до інших стержневих залізобетонних елементів, що випробують складний напружено – деформований стан, з довільною формою поперечного перерізу за наявності відповідних функцій розподілу дотичних напружень.

При сталому співвідношенні зовнішніх силових факторів на будь – якій стадії навантаження можна знайти вектор деформацій, використовуючи фізичні співвідношення (26)…(43):

$$\{\varepsilon\} = [D]^{-1}\{N\}. \qquad (45)$$

**Анотація.** Представлена розрахункова модель дозволяє оцінювати зміну напружено-деформованого стану залізобетонного стержня в процесі простого пропорційного навантаження на всіх стадіях його роботи, включаючи руйнування, з урахуванням реальних властивостей матеріалів.

**Abstrack.** Presented calculation model allows to estimate the change in the stress-strain state ofreinforced concrete bar during a simple proportionalloading at all stages of its work, including thedestruction, taking into account the real properties of materials.

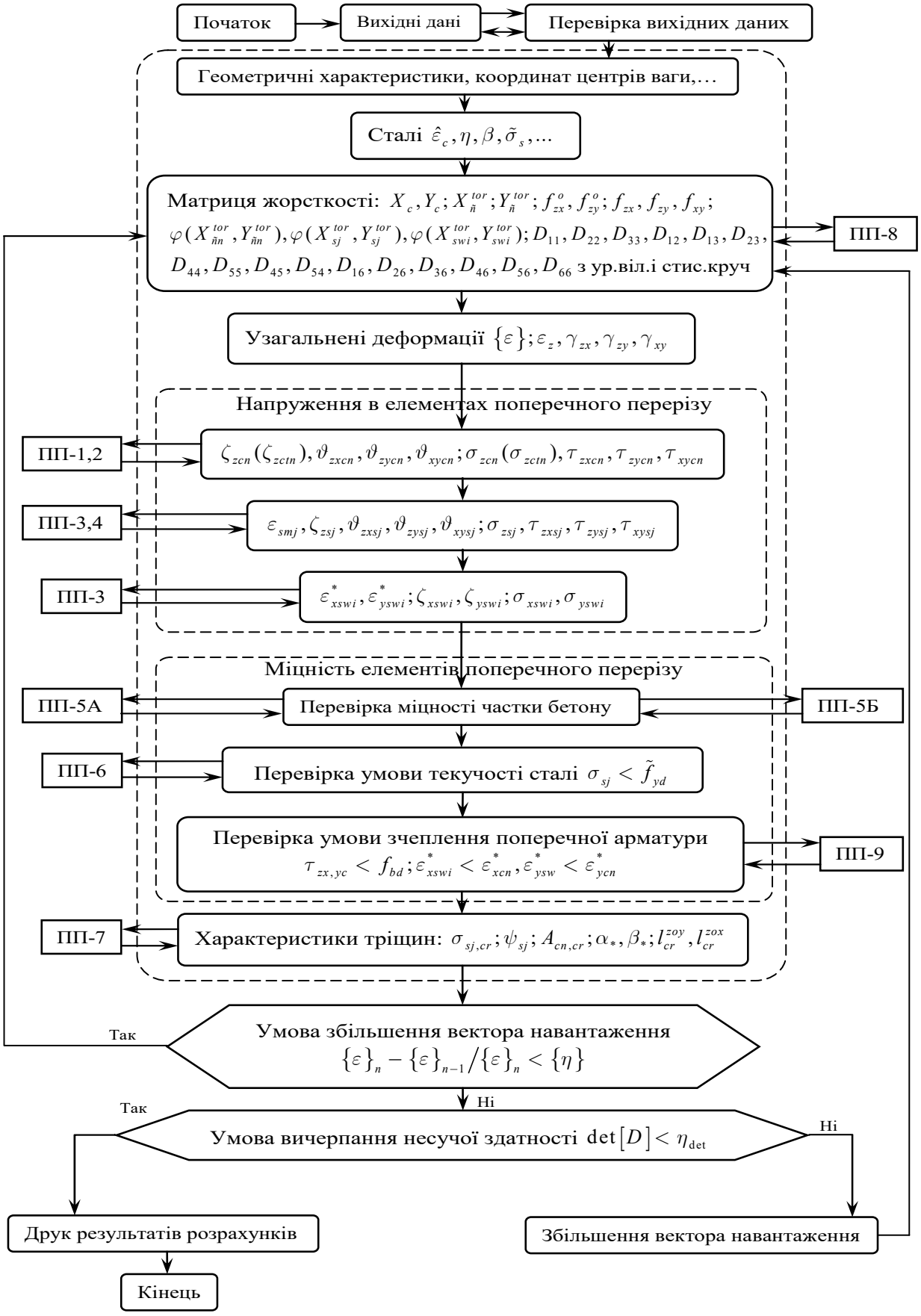


Рис.4 Блок – схема алгоритму визначення несучої здатності розрахункового перерізу складного напруженого залізобетонного стержня.

**1.** Новый проект Норм: тр. конф. по мат-м 1 Всесоюзн. конф. по бст. и ж. бетону 20- 25 апреля 1930 г. в г. Москве / *А.Ф. Лолейт.* М. 1931, 35с. **2.** *Мурашев В.И.* Трещиноустойчивость, жесткость и прочность железобетона */ Василий Иванович Мурашев* . – М.: Машстройиздат, 1950, 268 с.

**3.** *Гениев Г.А.* Теория пластичности бетона и железобетона // *Г.А. Гениев, В.Н. Киссюк., Г.А. Тюпин.* – М.; Стойиздат, 1974.-316 с. **4.** *Круглов В.М.* Нелинейные соотношения и критерий прочности бетона в трехосном напряженном состоянии/ *Круглов В.М.//* Строительная механика и расчет сооружений. – 1987.- №1.-с. 40-44. **5.** *Клованич С.Ф.* Метод конечных элементов в нелинейной механике грунтов и бетонов/ *С.Ф.Клованич //* Строительные конструкции: Межведомств. научн. –техн. сб. научн. тр. К.: НИИСК.- Вып. 61, т. 1, 2004.-С.103-108. **6.** *Корсун В.И.* Расчёт констукций на температурне и силове воздействия с учётом неоднородности свойств материалов: дис. доктора тех. наук: 05.23.01/ *Корсун Владимир Иванович* .- Макеевка, ДГАСА, 2005. – 365 с.

**7.** *Карпенко Н.И.* Общие модели механики железобетона/ *Карпенко Н.И.* -М.*:* Строиздат,1996. 416 с.

**8.** *Карпенко Н.И.* Определяющие соотношения для железобетона с трещинами при термосилових воздействиях/ *Н.И. Карпенко, С.Ф. Клованич//* строительная механика и рачёт сооружений.- 1993.- №2. С. 6-11. **9.** *Клованич С.Ф.* Метод конечних елементов в механике железобетона/ *С.Ф. Клованич, И.Н. Мироненко.* Одесса.: Изд-во ОНМУ. -2007. -100 с. **10.** *Филоненко- Бородич М.М.* Об условиях прочности материалов, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию / *Филоненко-Бородич М.М //* Инж.сборник. 1954.-Вып. 19. – С. 36-48. **11.** *Писаренко Г.С.* Деформирование и прочность материалов при сложном напряжённом состоянии / *Г.С. Писаренко, А.А. Лебедев.* –К.: Наукова думка, 1976.-416 с. **12.** *Балан Т.А* Определяющие соотношения для бетона при сложном непропорциональном нагружении и нагреве / *Балан Т.А, Клованич С.Ф. //* Строительная механика и расчёт сооружений. -1987. -№2. – С. 39-44 **13.** *Dei Poli S.* Present State of Some basic Researches on Concren: The behavior Until Failure, under Multiaxial Stresses/ *Deil Poli S.//*Y. Ital/ Cem.- 1980. – V 50, №9. – P.633-658. **14.** *Gerstle K.H.* Simple Formulation of Trioxial Concrete Behavior / *Gerstle K.H. // ACI Yournal. -1985.- №5.-P. 382-384.* **15.** *Kupfer N.B. /* Behavior of Concrete Under Biaxial Stresses // *Kupfer N. B. Gtrstle K.H* // Y. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE. -1997.- V. 99.-EM4. – P. 853-856. **16.** Конструкція будинків і споруд. Бетонні та залізобетонні конструкції. Основні положення проектування: ДБН В.2.6 - 98:2009. - [Чиний від 2010 - 09 - 01]. -К.: Мінрегіонбуд України, 2009. -97с. - (Державні будівельні норми України). **17.** Конструкції будинків і споруд. Бетонні та залізобетоні конструкції з важкого бетону. Правила проектування: ДСТУ Б В.2.6 - 156: 2010. -[Чиний від 2011 – 06 - 01]. -К: Мінрегіонбуд України, 2011.-118с. - (Національний стандарт України). **18.** *Тимошенко С.П.* Теория упругости / *С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер*: пер. с англ. – М.: Наука, 1975. – 576с. **19.** Прочность, устойчивость, колебания: справочник в 3т [под ред. *Биргера И.А., Пановко Я.Г.*]. – Т.1. – М.: Машиностроение, 1968. – 832с. **20**. *Безухов Н.И.* Основы теории упругости, пластичности и ползучести */ Безухов Н.И.* – М.: Высшая школа, 1956. – 420с. **21**. *Школа Ю.В.* Напряженное состояние балок, подверженных стесненному

кручению / *Ю.В. Школа*: Міжвідомч. зб. наук. Праць // Будівельні конструкції. – Вип. 52. – К.: НДІБК, 2000. – С. 208 – 213. **22.** *Тимофеев Н.И.* Исследование железобетонных тавровых балок, работающих при стесненном кручении // Известия вузов. Сер.: Строительство и архитектура. – 1970. - №6. – С. 29 – 35. **23.** *Безушко Д.І.* Нелінійні моделі матеріалів при розрахунку залізобетонних конструкцій, що згинаються, методом скінченних елементів: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.23.01 «Будівельні конструкції, будівлі та споруди» / *Д.І. Бузушко.* – Одеса,2008. – 20 с. **24.** *Бондаренко В.М.* Расчётные модели силового сопротивления железобетона / *В.М. Бондаренко, В.И. Колчунов.*- М.: Издательство «АСВ», 2004. -472 с. **25.** *Малинин Н.Н.* Прикладная теория, пластичности и ползучести / *Малинин Н.Н*. – М.: Высшая школа, 1956. – 420с. **26.** *Яременко О.Ф.* Несуча здатність та деформативність залізобетонних стержневих елементів в складному напруженому стані / *О.Ф. Яременко, Ю.О. Школа.* –Одеса: МПП «Евен», 2010.-135 с. **27.** *Байков В.Н*. Железобетонные конструкции. Общий курс: учебник [для студ. высш. учебн. зав. строит. профиля] Изд. 4-е, / *В.Н. Байков, Э.Е. Сигалов.* – М.: Стройиздат, 1985. - 767с. **28.** *Байков В.Н*. Исследование железобетонных элементов, подверженных изгибу и кручению с учетом снижения предела текучести сложнонапряженной арматуры / *В.Н. Байков* // Известия вузов. Сер.: Строительство и архитектура. – 1975. - №1. – С. 11 – 17. **29.** *Школа Ю.А.* Влияние стеснения на несущую способность и деформативность железобетонных стержневых элементов при изгибе с кручением / *Ю.А. Школа* // Будівельні конструкції: міжвідомчий наук. техн. зб. наук. праць (будівництво). – Вип.62: В 2-х т.: Том 1. – Київ: ДРДІБК, 2005.– С. 186 – 392. **30.** *Яременко О.Ф.* Фізичні співвідношення для перерізів залізобетонних стрижневих елементів у загальному випадку напруженого стану /*О.Ф. Яременко, Ю.В. Школа* // вісник національного університету «Львівська політехніка». – №600 [«Теорія і практика будівництва»] за ред. *З.Я. Бліхарського*. – Львів: «Львівська політехніка», 2007. – С. 339 – 344. **31.** *Хан Х.* Теория упругости. Основы линейной теории и ее применения / *Х. Хан* // Пер.с нем. – М.: Мир, 1988. – 344с.

**32.** *Сен – Венан*. Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм: [Пер. с фр. / под ред. *Г.Ю. Джанелидзе*]. – М.: Физматгиз, 1961. – 315с.