

Calculation on stability of resilient cores with the arbitrariest continuous variable transversal rigidity the method of the direct integration

*Крутий Юрий, Одесская государственная академия строительства и архитектуры,
профессор, кандидат физико-математических наук,
факультет экономики и управления в строительстве*

Расчет на устойчивость упругих стержней с произвольной непрерывной переменной поперечной жесткостью методом прямого интегрирования

1. Постановка научной проблемы и ее значение

Задача отыскания критических сил для сжатых стержней с переменной жесткостью является одной из актуальных проблем механики деформируемого твердого тела. Особо следует выделить стержни с непрерывно изменяющейся жесткостью, которые часто применяются в самолетостроении, мостостроении, при строительстве телевизионных башен, дымовых труб, опор линий электропередач и т.п. Расчет на устойчивость указанных объектов имеет важное практическое значение.

В данной статье рассматривается устойчивость равновесия сжатого стержня с произвольной непрерывной переменной поперечной жесткостью, свободного от внешних изгибающих воздействий. При этом предполагается, что стержень нагружен осевыми силами только у концов, то есть продольная сила N является постоянной всюду вдоль длины стержня (рис. 1). Традиционно для таких задач продольную силу считают положительной, если она является сжимающей.

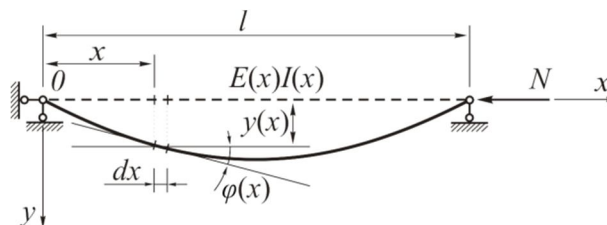


Рис. 1

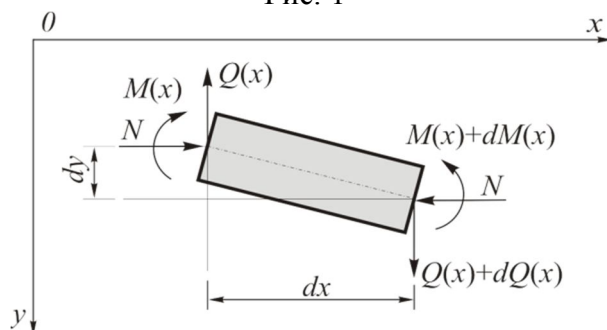


Рис. 2

При критической нагрузке стержень утратит устойчивость и деформируется. Согласно концепции Эйлера, критическую силу определяют из дифференциального уравнения равновесия стержня в новом деформированном состоянии. Это уравнение

выражает условие равенства момента внутренних сил внешнему моменту в каждом сечении стержня.

Считая прогибы малыми по сравнению с длиной стержня, а также пренебрегая продольными деформациями, указанное дифференциальное уравнение равновесия стержня (уравнение продольного изгиба) запишется в виде [1]

$$(E(x)I(x)y''(x))'' + Ny''(x) = 0. \quad (1)$$

где $E(x)I(x)$ – переменная поперечная жесткость стержня в точке x (жесткость на изгиб);

$E(x)$ – модуль упругости материала стержня;

$I(x)$ – момент инерции поперечного сечения стержня;

$y(x)$ – неизвестная функция, представляющая собой поперечное перемещение (прогиб) сечения стержня в точке x (рис. 1).

Когда концы стержня шарнирно оперты, часто вместо уравнения (1) используют дифференциальное уравнение равновесия стержня в искривленном состоянии второго порядка [2]

$$E(x)I(x)y''(x) + Ny(x) = 0. \quad (2)$$

Очевидно, уравнение (1) получается из (2) двукратным дифференцированием.

В тех случаях, когда прямым интегрированием удастся найти точное решение уравнения равновесия, вопрос об отыскании критической нагрузки можно считать практически решенным. Однако до сих пор такие случаи составляли редкое исключение. Как отмечается в [3-5], в общем случае, при произвольном непрерывном законе изменения жесткости, данное уравнение не удастся проинтегрировать. В более современном издании [6] также констатируется, что интегрирование уравнения продольного изгиба, когда жесткость не является константой, представляет собой достаточно сложную математическую задачу. Очевидно, указанные трудности связаны с известной математической проблемой, заключающейся в отсутствии универсального метода интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Именно поэтому метод прямого интегрирования отошел на задний план, уступив место различного рода приближенным методам.

Несмотря на широкое распространение приближенных методов, точное решение, при условии его наличия, всегда обладает несомненным преимуществом. Именно точное решение несет в себе информацию качественного характера и формирует наиболее полную картину рассматриваемого явления. Поэтому отыскание точного решения для уравнения продольного изгиба стержня с произвольной непрерывной поперечной жесткостью является актуальной научной и практической проблемой. Решение этой проблемы позволит сформулировать качественно новый метод отыскания критической нагрузки.

2. Анализ исследований по данной проблеме

Фундаментальные исследования проблемы устойчивости стержней выполнены известными учеными, среди которых можно отметить работы Т. Кармана, Ф. Энгессера, Ф.С. Ясинского, А.Н. Динника, И.Г. Бубнова, С.П. Тимошенко, П.Ф. Попковича, Н.С. Стрелецкого, А.Р. Ржаницына, Ф.Р. Шенли, А.С. Вольмира, Н.В. Карнаухова, А.Ф. Смирнова, В.В. Болотина, В.Д. Потапова, Б.Я. Лашенникова, Н.Н. Шапошникова, Л.М. Каган-Розенцвейга, М.Д. Корчака, А.М. Иващенко, Ю.Б. Гольдштейна и др.

Множество работ посвящено устойчивости стержней переменной жесткости, среди которых особо следует выделить публикации [1-5, 7-15]. В большинстве этих публикаций

исследования основаны на различных приближенных методах. К одному из наиболее полных собраний точных решений задач устойчивости стержней следует отнести книгу [16].

3. Цель и задачи статьи

Главная цель данной работы – сформулировать качественно новый метод расчета на устойчивость упругих стержней с произвольной непрерывной поперечной жесткостью. Для достижения этой цели необходимо решить следующие главные задачи:

- проинтегрировать дифференциальные уравнения продольного изгиба (1), (2);
- получить в аналитическом виде формулы для параметров состояния стержня;
- получить аналитическое представление для критических сил;
- указать эффективный метод численной реализации найденных точных решений.

4. Результаты исследования

Точные решения дифференциальных уравнений равновесия второго и четвертого порядка. Вначале методом прямого интегрирования построим точное решение дифференциального уравнения (2). Вместе с данным уравнением будем рассматривать равносильную ему систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = R(x)\Phi(x), \quad (3)$$

где

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} - \text{вектор неизвестных};$$

$$R(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{N}{E(x)I(x)} & 0 \end{pmatrix} - \text{матрица коэффициентов системы}.$$

Пусть $a_{n,0}(x), a_{n,k}(x)$ ($n=1,2$) ($k=1,2,3,\dots$) – две бесконечных системы пока неизвестных дважды непрерывно дифференцируемых функций. Образует посредством этих функций и их производных ряды по степеням неизвестного параметра N :

$$U_n(x) = a_{n,0}(x) - Na_{n,1}(x) + N^2a_{n,2}(x) - N^3a_{n,3}(x) + \dots; \quad (4)$$

$$U'_n(x) = a'_{n,0}(x) - Na'_{n,1}(x) + N^2a'_{n,2}(x) - N^3a'_{n,3}(x) + \dots; \quad (5)$$

$$U''_n(x) = a''_{n,0}(x) - Na''_{n,1}(x) + N^2a''_{n,2}(x) - N^3a''_{n,3}(x) + \dots. \quad (6)$$

Относительно этих рядов пока предполагаем, что все они равномерно сходятся на отрезке $x \in [0, l]$. В таком случае будет возможна операция почленного дифференцирования и, как следствие, обозначения $U'_n(x), U''_n(x)$ для сумм рядов (5), (6) будут законными.

Неизвестные функции $a_{n,0}(x), a_{n,k}(x)$ ($n=1,2$) ($k=1,2,3,\dots$) будем искать из условия, что $U_n(x)$ удовлетворяет уравнению (2), то есть

$$E(x)I(x)U''_n(x) + NU_n(x) = 0 \quad (n=1,2). \quad (7)$$

Подставим в условие (7) вместо $U_n(x), U_n''(x)$ их представления (4), (6) и запишем результат в виде ряда по степеням N . В итоге придем к равенству

$$E(x)I(x)a_{n,0}''(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k N^k (E(x)I(x)a_{n,k}''(x) - a_{n,k-1}(x)) = 0.$$

Для удовлетворения полученного равенства приравняем к нулю все коэффициенты при степенях параметра N , начиная с нулевой степени:

$$a_{n,0}''(x) = 0; \quad (8)$$

$$E(x)I(x)a_{n,k}''(x) = a_{n,k-1}(x) \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (9)$$

В результате для определения функций $a_{n,0}(x), a_{n,k}(x)$ ($n = 1, 2$) ($k = 1, 2, 3, \dots$) имеем дифференциальные уравнения.

Выписать фундаментальную систему решений для уравнения (8) не составляет труда. Перед тем как проинтегрировать уравнение (9), зададим граничные условия

$$a_{n,k}(0) = a_{n,k}'(0) = 0 \quad (n = 1, 2) \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (10)$$

После этого, интегрируя дважды (9), получим

$$a_{n,0}(x) = x^{n-1}, \quad a_{n,k}(x) = \int_0^x \int_0^x \frac{1}{E(x)I(x)} a_{n,k-1}(x) dx dx \quad (n = 1, 2) \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (11)$$

Последняя формула является рекуррентной. Она позволяет по известной *начальной* функции $a_{n,0}(x)$ последовательно определить функции $a_{n,k}(x)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$), которые в дальнейшем будем называть *образующими*. Для таких функций равенства (7), очевидно, будут удовлетворяться тождественно.

Помимо рекуррентной формулы (11), образующие функции можно представить в развернутом виде

$$a_{n,k}(x) = \int_0^x \int_0^x \frac{1}{E(x)I(x)} \dots \int_0^x \int_0^x \frac{1}{E(x)I(x)} \int_0^x \int_0^x \frac{1}{E(x)I(x)} a_{n,0}(x) dx dx dx dx \dots dx dx \quad (12)$$

Правая часть последней формулы содержит всего $2k$ интегралов.

Покажем теперь, что ряд (4) действительно равномерно сходится, для чего построим соответствующий мажорантный ряд. С этой целью определим положительные постоянные

$$g = \max_{x \in [0, l]} \frac{1}{E(x)I(x)}, \quad h_n = \max_{x \in [0, l]} |a_{n,0}(x)|.$$

Тогда на основании представления (12), для образующих функций будем иметь оценки

$$|a_{n,k}(x)| \leq h_n g^k \left| \int_0^x \int_0^x \dots \int_0^x \int_0^x \int_0^x dx dx dx dx \dots dx dx \right| = h_n g^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Следовательно, для ряда, составленного из модулей, получим

$$\begin{aligned} & |a_{n,0}(x)| + |Na_{n,1}(x)| + |N^2a_{n,2}(x)| + |N^3a_{n,3}(x)| + \dots \leq \\ & \leq h_n \left(1 + Ng \frac{x^2}{2!} + N^2g^2 \frac{x^4}{4!} + N^3g^3 \frac{x^6}{6!} + \dots \right) = h_n ch\sqrt{Ng}x. \end{aligned}$$

Мажорантой здесь с точностью до множителя выступает элементарная функция $ch\sqrt{Ng}x$, определяемая рядом, который равномерно сходится при любом конечном x . Поэтому ряд из модулей сходится, причем сходится равномерно. Тем самым доказано, что ряд (4) сходится абсолютно и равномерно на отрезке $x \in [0, l]$.

Совершенно аналогично можно доказать абсолютную и равномерную сходимость ряда (5). Что же касается ряда (6), то его сходимость вытекает непосредственно из тождества (7), согласно которому он отличается от ряда (4) только множителем. Следовательно, ряды (4), (5) можно почленно дифференцировать, то есть принятые обозначения $U'_n(x)$ и $U''_n(x)$ для рядов (5) и (6) законны.

Таким образом, формулами (4), (11), (12) определены два решения $U_n(x)$ ($n=1,2$) уравнения (2). Докажем, что эти решения образуют фундаментальную систему.

Каждое из решений $U_n(x)$ ($n=1,2$) уравнения (2) порождает вектор

$$\Phi_n(x) = \begin{pmatrix} U_n(x) \\ U'_n(x) \end{pmatrix} \quad (n=1,2) \quad (13)$$

– решение системы (3), в чем легко убедиться подстановкой. Как следствие, матрица, образованная из этих векторов

$$\Lambda(x) = \begin{pmatrix} U_1(x) & U_2(x) \\ U'_1(x) & U'_2(x) \end{pmatrix},$$

также будет удовлетворять системе (3).

Найдем значение $\Lambda(x)$ в точке $x=0$. Полагая в формулах (13), (4), (5) переменную x равной нулю и учитывая (10), получим

$$\Phi_n(0) = \begin{pmatrix} U_n(0) \\ U'_n(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n,0}(0) \\ a'_{n,0}(0) \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим

$$\Phi_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\Lambda(0) = \begin{pmatrix} U_1(0) & U_2(0) \\ U'_1(0) & U'_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Следовательно, матрица $\Lambda(x)$ является нормированным решением системы (3). Как известно [17], такое решение системы дифференциальных уравнений определяется однозначно и называется *матрицантом*.

Определитель матрицанта легко найти по формуле Якоби [17]

$$|\Lambda(x)| = |\Lambda(0)| \exp \left(\int_0^x \text{Sp } R(x) dx \right) = 1,$$

где $\text{Sp } R(x)$ – след матрицы $R(x)$, который в нашем случае равен нулю. Отсюда получаем важное тождество

$$U_1(x)U_2'(x) - U_1'(x)U_2(x) = 1. \quad (15)$$

Левая часть найденного тождества представляет собою вронскиан [18]

$$W(x) = |\Lambda(x)| = \begin{vmatrix} U_1(x) & U_2(x) \\ U_1'(x) & U_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Известно [18], что из неравенства нулю вронскиана вытекает линейная независимость соответствующей системы функций. Поскольку $W(x) = 1$, то функции $U_1(x)$, $U_2(x)$ линейно независимы и, следовательно, образуют фундаментальную систему решений уравнения (2).

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения равновесия второго порядка (2) имеет вид

$$y(x) = D_1 U_1(x) + D_2 U_2(x), \quad (16)$$

где D_1, D_2 – постоянные интегрирования.

Обратимся теперь к дифференциальному уравнению (1). Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что найденные решения $U_n(x)$ ($n = 1, 2$) уравнения (2) удовлетворяют также уравнению (1). Очевидными решениями уравнения (1) также будут x и 1 . В итоге имеем систему четырех решений. Для вронскиана такой системы функций, с учетом тождества (15), будем иметь

$$\begin{vmatrix} U_1(x) & U_2(x) & x & 1 \\ U_1'(x) & U_2'(x) & 1 & 0 \\ U_1''(x) & U_2''(x) & 0 & 0 \\ U_1'''(x) & U_2'''(x) & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \left(\frac{N}{E(x)I(x)} \right)^2 \neq 0.$$

Тем самым доказано, что функции $U_1(x), U_2(x), x, 1$ линейно независимы и, следовательно, образуют фундаментальную систему решений уравнения (1).

Окончательно, для дифференциального уравнения равновесия четвертого порядка (1) имеем общее решение

$$y(x) = C_1 U_1(x) + C_2 U_2(x) + C_3 x + C_4, \quad (17)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – постоянные интегрирования.

Параметры состояния стержня, выраженные через начальные параметры. Такие искомые параметры задачи устойчивости, как перемещение $y(x)$, угол поворота $\varphi(x)$, изгибающий момент $M(x)$ и поперечную силу $Q(x)$, характеризующие напряженно-деформируемое состояние стержня, коротко будем называть *параметрами состояния*. Под поперечной силой здесь понимаем силу, перпендикулярную недеформированной оси стержня (рис. 2). Как известно [5, 6], перечисленные параметры состояния связаны между собой формулами:

$$\varphi(x) = y'(x); \quad M(x) = -E_0 I_0 A(x) \varphi'(x); \quad Q(x) = M'(x) - N \varphi(x). \quad (18)$$

Исходя из решения (17) и выполняя операции, предписанные формулами (18), находим:

$$\varphi(x) = C_1 U_1'(x) + C_2 U_2'(x) + C_3; \quad (19)$$

$$M(x) = N(C_1 U_1(x) + C_2 U_2(x)); \quad (20)$$

$$Q(x) = -N C_3. \quad (21)$$

Обратим внимание на то, что поперечная сила оказывается постоянной всюду вдоль длины стержня, что является следствием отсутствия поперечной нагрузки на стержень.

Выразим постоянные интегрирования в формулах (17) - (21) через начальные параметры $y(0), \varphi(0), M(0), Q(0)$ – перемещение, угол поворота, изгибающий момент и поперечную силу в точке $x=0$. Для этого положим в указанных формулах $x=0$ и воспользуемся формулой (14). В итоге получим: $y(0) = C_1 + C_4$; $\varphi(0) = C_2 + C_3$; $M(0) = N C_1$; $Q(0) = -N C_3$. Отсюда

$$C_1 = \frac{M(0)}{N}; \quad C_2 = \varphi(0) + \frac{Q(0)}{N}; \quad C_3 = -\frac{Q(0)}{N}; \quad C_4 = y(0) - \frac{M(0)}{N}.$$

Следовательно, для параметров состояния будем иметь:

$$y(x) = y(0) + \varphi(0) U_2(x) - \frac{M(0)}{N} (1 - U_1(x)) - \frac{Q(0)}{N} (x - U_2(x)); \quad (22)$$

$$\varphi(x) = \varphi(0) U_2'(x) + \frac{M(0)}{N} U_1'(x) - \frac{Q(0)}{N} (1 - U_2'(x)); \quad (23)$$

$$M(x) = \varphi(0) N U_2(x) + M(0) U_1(x) + Q(0) U_2(x); \quad (24)$$

$$Q(x) = Q(0). \quad (25)$$

Формулу (16) также перепишем в терминах начальных параметров

$$y(x) = y(0) U_1(x) + \varphi(0) U_2(x). \quad (26)$$

Пример. В качестве апробации полученных здесь формул обратимся к хорошо изученному однородному стержню постоянного сечения. В таком случае, очевидно, следует положить $E(x)I(x) = EI = const$.

Тогда по формулам (4), (11), (12) будем иметь:

$$a_{n,0}(x) = x^{n-1};$$

$$a_{n,k}(x) = \frac{1}{(EI)^k} \int_0^x \int_0^x \dots \int_0^x \int_0^x \int_0^x a_{n,0}(x) dx dx dx dx \dots dx dx = \frac{1}{(EI)^k} \frac{x^{n+2k-1}}{(n+2k-1)!} (k=1,2,3,\dots);$$

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k N^k a_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{N}{EI} \right)^k \frac{x^{n+2k-1}}{(n+2k-1)!} (n=1,2).$$

Отсюда, обозначая $q = \sqrt{\frac{N}{EI}}$, находим $U_1(x) = \cos qx$, $U_2(x) = \frac{1}{q} \sin qx$. После этого формула (22) преобразуется к известному виду [2]

$$y(x) = y(0) + \frac{\varphi(0)}{q} \sin qx - \frac{M(0)}{q^2 EI} (1 - \cos qx) - \frac{Q(0)}{q^3 EI} (qx - \sin qx).$$

Интересно также заметить, что в данном примере формула (15) вырождается в основное тригонометрическое тождество.

Представление параметров состояния через безразмерные фундаментальные функции. Вначале сформулируем вспомогательную лемму касательно интегрального выражения вида

$$I_p(x) = \frac{1}{l^p} \int_0^x A_p(x) \int_0^x A_{p-1}(x) \dots \int_0^x A_2(x) \int_0^x A_1(x) dx dx \dots dx dx. \quad (27)$$

Здесь $x \in [0, l]$, количество интегралов равно p , а функции $A_k(x)$ являются безразмерными и принимают положительные значения ($k=1,2,\dots,p$) ($p=1,2,3,\dots$).

Лемма. Интеграл $I_p(x)$ представляет собой безразмерную функцию, для которой при любом $x \in [0, l]$ справедливо неравенство $I_p(x) \geq 0$ ($p=1,2,3,\dots$), причем равенство нулю достигается, только в точке $x=0$. В частности, $I_p(l) > 0$ ($p=1,2,3,\dots$).

Доказательство. Введем безразмерную координату $\xi = \frac{x}{l}$ и обозначим $B_k(\xi) = A_k(l\xi)$. Далее в формуле (27) осуществим замену переменных $x = l\xi$, последовательно во всех интегралах, начиная с самого внешнего и заканчивая самым внутренним. Учитывая на каждом шаге, что $dx = l d\xi$, будем иметь

$$I_p(x) = I_p(l\xi) = \int_0^\xi B_p(\xi) \int_0^\xi B_{p-1}(\xi) \dots \int_0^\xi B_2(\xi) \int_0^\xi B_1(\xi) d\xi d\xi \dots d\xi d\xi.$$

Получили интегральное выражение, в котором каждый интеграл, начиная с самого внутреннего и заканчивая самым внешним, есть интеграл от безразмерной функции по безразмерной переменной с безразмерным верхним пределом. Следовательно, интегральное выражение $I_p(x)$ представляет собой безразмерную функцию.

Что касается свойств $I_p(x)$, выраженных неравенствами, то они вытекают из положительности функций $A_k(x)$ и известных свойств определенных интегралов.

Следствие. Интеграл

$$\tilde{I}_{p-1}(x) = l \frac{I'_p(x)}{A_p(x)} (p \geq 2), \quad (28)$$

будучи частным случаем (27), обладает теми же свойствами, что и интеграл $I_p(x)$.

Далее поставим цель - выразить параметры состояния стержня через безразмерные фундаментальные функции. Такой подход даст возможность получить аналитическое представление для критической силы и в конечном итоге, при расчете стержней на устойчивость, позволит оперировать только безразмерными величинами.

С этой целью в заданном законе изменения жесткости следует выделить безразмерный множитель. Этого легко можно добиться, ведь любую размерную величину всегда можно представить в виде произведения двух множителей. В таком случае размерность придется приписать только одному из множителей, а второй будет безразмерным.

В ситуации, когда момент инерции стержня меняется вдоль его длины, закон изменения принято представлять в виде $I(x) = I_0 \psi(x)$, где I_0 – некоторый постоянный момент инерции, а $\psi(x)$ – безразмерная функция [19]. Запишем аналогичное представление и для модуля упругости, который в общем случае также считаем переменным. Пусть $E(x) = E_0 \phi(x)$, где E_0 – постоянный модуль упругости, а $\phi(x)$ – безразмерная функция. Тогда переменная поперечная жесткость стержня запишется в виде

$$E(x)I(x) = E_0 I_0 A(x), \quad (29)$$

где $E_0 I_0$ – постоянная жесткость (жесткость в какой-либо характерной точке стержня);

$A(x) = \psi(x)\phi(x)$ – безразмерная функция.

В нашем случае функция $A(x)$ непрерывная, что вытекает из самой постановки задачи. По сути, эта функция определяет закон изменения поперечной жесткости вдоль длины стержня и по своему смыслу является положительной.

Вполне очевидно, что представление (29) никак не ограничивает общности рассматриваемой задачи и принято исключительно ради удобства.

Подставляя в формулы (11), (12) представление для поперечной жесткости (29), получим

$$a_{n,k}(x) = l^{n-1} \left(\frac{l^2}{E_0 I_0} \right)^k \alpha_{n,k}(x) \quad (n=1,2) \quad (k=0,1,2,\dots), \quad (30)$$

где $\alpha_{n,0}(x)$, $\alpha_{n,k}(x)$ ($n=1,2$) ($k=1,2,3,\dots$) – новые начальные и образующие функции, которые определяются следующей совокупностью формул:

$$\alpha_{n,0}(x) = \left(\frac{x}{l} \right)^{n-1}, \quad \alpha_{n,k}(x) = \frac{1}{l^2} \int_0^x \int_0^x \frac{1}{A(x)} \alpha_{n,k-1}(x) dx dx \quad (k=1,2,3,\dots); \quad (31)$$

$$\alpha_{n,k}(x) = \frac{1}{l^{2k}} \int_0^x \int_0^x \frac{1}{A(x)} \dots \int_0^x \int_0^x \frac{1}{A(x)} \int_0^x \int_0^x \frac{1}{A(x)} \alpha_{n,0}(x) dx dx dx dx \dots dx dx. \quad (32)$$

Функции $\alpha_{n,0}(x)$, $\alpha_{n,k}(x)$ ($n=1,2$) ($k=1,2,3,\dots$) являются безразмерными. Относительно $\alpha_{n,0}(x)$ это очевидно. Что касается функций $\alpha_{n,k}(x)$, то их безразмерная

природа вытекает из леммы 1 в силу того, что представление (32) есть частный случай формулы (27).

Перейдем теперь в формуле (4) к безразмерным функциям. Учитывая (30), будем иметь

$$U_n(x) = l^{n-1} X_n(x) \quad (n = 1, 2), \quad (33)$$

где

$$X_n(x) = \alpha_{n,0}(x) - K\alpha_{n,1}(x) + K^2\alpha_{n,2}(x) - K^3\alpha_{n,3}(x) + \dots, \quad (34)$$

$$K = N \frac{l^2}{E_0 I_0}. \quad (35)$$

Новый неизвестный параметр K является безразмерным, в чем легко убедиться, подставив в формулу (35) размерности величин, которые там фигурируют. Следовательно, переход в формуле (4) к безразмерным функциям привел к ряду (34) по степеням безразмерного параметра K . В итоге функции $X_n(x)$ ($n = 1, 2$), определяемые этим рядом, являются безразмерными.

Так как формула (23) содержит производные от фундаментальных функций, в них также выделим безразмерный множитель, дифференцируя (33). Результат представим в виде

$$U'_n(x) = l^{n-2} \tilde{X}_n(x) \quad (n = 1, 2), \quad (36)$$

где

$$\tilde{X}_n(x) = l X'_n(x) \quad (n = 1, 2). \quad (37)$$

Из формул (37), (34) для вновь введенных функций $\tilde{X}_n(x)$ ($n = 1, 2$) будем иметь

$$\tilde{X}_n(x) = \tilde{\alpha}_{n,0}(x) - K\tilde{\alpha}_{n,1}(x) + K^2\tilde{\alpha}_{n,2}(x) - K^3\tilde{\alpha}_{n,3}(x) + \dots, \quad (38)$$

где

$$\tilde{\alpha}_{n,0}(x) = l\alpha'_{n,0}(x); \quad \tilde{\alpha}_{n,k}(x) = l\alpha'_{n,k}(x) \quad (n = 1, 2) \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (39)$$

Сопоставляя вторую из формул (39) с формулой (28), на основании следствия из леммы 1 заключаем, что функции $\tilde{\alpha}_{n,k}(x)$ будут безразмерными. Что касается первой из формул (39), то выполняя дифференцирование, находим $\tilde{\alpha}_{n,0}(x) = n - 1$. Тем самым доказано, что функции $\tilde{X}_n(x)$ ($n = 1, 2$) безразмерные.

Заметим, что ряды (34), (38) по степеням параметра K абсолютно и равномерно сходятся, что гарантировано такой же сходимостью исходных рядов (4), (5).

Равенства (22) - (24) с учетом (33), (36) теперь предстанут в виде:

$$y(x) = y(0) + \varphi(0)lX_2(x) - M(0)\frac{1}{N}(1 - X_1(x)) - Q(0)\frac{l}{N}\left(\frac{x}{l} - X_2(x)\right); \quad (40)$$

$$\varphi(x) = \varphi(0)\tilde{X}_2(x) + M(0)\frac{1}{Nl}\tilde{X}_1(x) - Q(0)\frac{1}{N}(1 - \tilde{X}_2(x)); \quad (41)$$

$$M(x) = \varphi(0)NX_2(x) + M(0)X_1(x) + Q(0)lX_2(x). \quad (42)$$

Равенство для поперечной силы (25) осталось неизменным.

Формула (26), применимая в случае шарнирно опертых концов стержня, запишется так

$$y(x) = y(0)X_1(x) + \varphi(0)lX_2(x). \quad (43)$$

Тождество (15) также перепишем в безразмерном формате

$$X_1(x)\tilde{X}_2(x) - \tilde{X}_1(x)X_2(x) = 1. \quad (44)$$

С точки зрения теории дифференциальных уравнений, равенством (40) дается общее решение уравнения (1), выраженное через безразмерные фундаментальные решения. Другие параметры состояния также выражены через безразмерные функции. Важно заметить, что размерности постоянных коэффициентов при безразмерных функциях в правых частях формул (25), (40) - (43) совпадают с размерностями соответствующих левых частей.

Аналитическое представление для критической силы. Исходя из формулы (35), в общем случае непрерывной переменной поперечной жесткости приходим к следующему аналитическому представлению для продольной силы

$$N = K \frac{E_0 I_0}{l^2}. \quad (45)$$

Следуя [8], безразмерный параметр K в дальнейшем будем называть *коэффициентом устойчивости*. Фактически, благодаря формуле (45), задача отыскания критической силы для стержня с непрерывной жесткостью сводится к отысканию соответствующего коэффициента устойчивости. Поскольку формулы для параметров состояния зависят именно от коэффициента устойчивости, то для его отыскания будут служить характеристические уравнения, к которым придем после реализации заданных граничных условий.

Полученная формула (45) полностью согласуется с общеизвестными классическими результатами для критических сил однородных стержней постоянного сечения. Как известно [8], параметр K в таком случае безразмерный и зависит только от способа закрепления концов стержня. Другими словами, для однородного стержня постоянного сечения критическая сила всегда прямо пропорциональна постоянной жесткости и обратно пропорциональна квадрату длины стержня.

В научной литературе редко встречаются случаи однородных стержней с непрерывным переменным законом изменения момента инерции, для которых в аналитическом виде удастся получить формулу для критической силы [7, 8]. Все такие формулы также имеют вид (45), причем безразмерный коэффициент K в таких случаях зависит не только от способа закрепления концов, но еще и от закона изменения момента инерции вдоль длины стержня.

Теперь, когда формула (45) получена для случая произвольной непрерывной поперечной жесткости, можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема. *Для прямого упругого стержня с произвольной непрерывной переменной жесткостью, сжатого постоянной продольной силой, критические силы прямо пропорциональны заданной в какой-либо точке стержня постоянной жесткости и обратно пропорциональны квадрату его длины.*

Характеристические уравнения и смежные искривленные формы равновесия стержня. Будем считать для определенности, что концы стержня шарнирно оперты (рис.1). Такому случаю соответствуют следующие граничные условия:

$y(0) = 0; M(0) = 0; y(l) = 0; M(l) = 0$. Сформируем характеристическое уравнение и выпишем формулу для искривленных форм равновесия стержня.

Будем исходить здесь из уравнения (2), то есть используем формулу (43). Известно [2], что в данном случае для изгибающего момента справедливо равенство $M(x) = -E_0 I_0 A(x) y''(x) = N y(x)$. Отсюда легко заключаем, что из равенства нулю перемещений на концах стержня вытекает равенство нулю изгибающих моментов на этих концах и наоборот. Поэтому для удовлетворения всех заданных граничных условий достаточно потребовать равенства нулю на концах стержня, либо для перемещений, либо для изгибающих моментов.

Пусть $y(0) = 0, y(l) = 0$. Тогда с учетом первого условия формула (43) примет вид $y(x) = l\varphi(0)X_2(x)$. Второе условие дает равенство $l\varphi(0)X_2(l) = 0$. Если $\varphi(0) = 0$, то перемещения будут тождественно равны нулю. Такое решение, очевидно, соответствует первоначальному равновесному состоянию стержня, которое нас не интересует. Следовательно, приходим к характеристическому уравнению $X_2(l) = 0$, или

$$\gamma_0 - \gamma_1 K + \gamma_2 K^2 - \gamma_3 K^3 + \dots = 0, \quad (46)$$

где $\gamma_k = \alpha_{2,k}(l) > 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) – безразмерные коэффициенты. При этом важно заметить, что левая часть уравнения представляет собою знакопеременный абсолютно сходящийся ряд, что вытекает из равномерной и абсолютной сходимости ряда (34).

Пусть $K_1, K_2, K_3, \dots$ – корни уравнения (46). Очевидно, если коэффициенты уравнения безразмерные, то и его корни будут безразмерными. После того как эти корни будут найдены и записаны в порядке возрастания, на основании (45) будем иметь значения продольной силы, при которых возможны смежные искривленные формы равновесия стержня

$$N_j = K_j \frac{E_0 I_0}{l^2} \quad (j = 1, 2, 3, \dots). \quad (47)$$

Поскольку $y(x) = l\varphi(0)X_2(x, K)$, то искривленные формы равновесия стержня, соответствующие спектру критических сил N_j , можно представить формулой

$$y_j(x) = C_j Y_j\left(\frac{x}{l}\right) \quad (j = 1, 2, 3, \dots) \quad (48)$$

где $C_j = \varphi_j(0)l$ – размерные постоянные, а $Y_j\left(\frac{x}{l}\right) = X_2(x, K_j) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k K_j^k \alpha_{2,k}(x)$ – безразмерные функции, определяющие законы искривленных форм равновесия.

Следует заметить, что такие же результаты можно получить, если исходить из уравнения (1), то есть вместо формулы (43) использовать формулы (40), (42). Действительно, на основании этих формул, реализуя заданные граничные условия, будем иметь систему

$$\begin{cases} X_2(l)\varphi(0) - \frac{1 - X_2(l)}{N} Q(0) = 0; \\ NX_2(l)\varphi(0) + X_2(l)Q(0) = 0. \end{cases}$$

Приравнивая к нулю определитель системы, получаем частотное уравнение $X_2(l) = 0$. Если это уравнение выполнено, то из первого уравнения системы вытекает, что $Q(0) = 0$. Тогда из равенства (40) получаем такую же формулу для перемещений, что была получена из формулы (43).

При других граничных условиях сам вид формул (46), (48) остается прежним. Изменяются только формулы для вычисления коэффициентов характеристического уравнения $\gamma_k (k = 0, 1, 2, \dots)$ и формулы для определения C_j и $Y_j\left(\frac{x}{l}\right)$. Заметим также, что при некоторых граничных условиях, для упрощения характеристических уравнений полезно учитывать тождество (44).

Возможные способы реализации точных решений. Имея в аналитическом виде все необходимые формулы для исследования стержней на устойчивость, естественно поставить вопрос о возможных способах их реализации.

Самая простая ситуация возникает тогда, когда фундаментальные функции $X_n(x) (n = 1, 2)$ оказываются элементарными. Также сравнительно просто приходим к решению в тех случаях, когда $X_n(x) (n = 1, 2)$ предстают в виде специальных функций, свойства и таблицы значений которых известны. Характеристические уравнения при этом будут, вообще говоря, трансцендентными. Иногда получаются элементарные уравнения, и тогда коэффициенты устойчивости удастся определить точно. Для решения трансцендентных уравнений приходится прибегать к численным методам. Впрочем, отыскать корни таких уравнений не составляет труда, поскольку для этого существует целое множество стандартных программных возможностей.

Понятно, что идентификация фундаментальных функций как элементарных или специальных в каждом конкретном случае основывается на анализе ряда (34), которым они определены. Очевидно, такая процедура становится возможной только в тех случаях, когда соответствующие образующие функции $\alpha_{n,k}(x) (n = 1, 2) (k = 1, 2, 3, \dots)$ удастся вычислить в явном виде.

Чаще всего фундаментальные функции $X_n(x) (n = 1, 2)$ по своей природе не являются элементарными, либо известными специальными функциями. В таких случаях, возникает вопрос о способе эффективной численной реализации формул, которыми они определены.

Численная реализация точных решений. С точки зрения общности результатов исследования важно указать эффективный способ численной реализации для найденных точных формул, который был бы пригодным для любой непрерывной жесткости. Наличие такого способа придаст практическую ценность найденным решениям и позволит сформулировать алгоритм нового метода расчета стержней на устойчивость.

Фактически вопрос сводится к тому, чтобы получить квадратуры для вычисления образующих функций $\alpha_{n,k}(x) (n = 1, 2) (k = 1, 2, 3, \dots)$.

Как известно, один из классических методов численного интегрирования основан на замене подынтегральной функции ее аппроксимирующим многочленом. Такая идея оказывается плодотворной в нашем случае в первую очередь потому, что позволяет избежать многократного численного интегрирования, предписанного формулой (32). Это особенно важно с точки зрения программной реализации метода.

Итак, аппроксимируем безразмерную функцию $\frac{1}{A(x)}$ многочленом

$$\frac{1}{A(x)} = A_0 + A_1 \left(\frac{x}{l} \right) + A_2 \left(\frac{x}{l} \right)^2 + \dots + A_s \left(\frac{x}{l} \right)^s, \quad (49)$$

где $A_0, A_1, \dots, A_s$ – безразмерные коэффициенты. Тогда на основании (32) заключаем, что $\alpha_{n,k}(x)$ ($n=1, 2$) ($k=1, 2, 3, \dots$) также многочлен. Поскольку формула (32) содержит всего $2k$ интегралов, то наибольшая степень этого многочлена будет равна $ks + 2k + n - 1$, а наименьшая $2k + n - 1$. Но тогда $\alpha_{n,k}(x)$ можно представить в виде

$$\alpha_{n,k}(x) = \left(\frac{x}{l} \right)^{2k+n-1} \sum_{j=0}^{ks} d_{k,j}^{(n)} \left(\frac{x}{l} \right)^j, \quad (50)$$

где $d_{k,j}^{(n)}$ – коэффициенты, подлежащие определению.

Из формул (31), (39) вытекают представления:

$$\tilde{\alpha}_{n,k}(x) = \frac{1}{l} \int_0^x \frac{1}{A(x)} \alpha_{n,k-1}(x) dx; \quad \alpha_{n,k}(x) = \frac{1}{l} \int_0^x \tilde{\alpha}_{n,k}(x) dx. \quad (51)$$

В соответствии с первой из формул (51), найдем произведение многочленов $\frac{1}{A(x)}$ и $\alpha_{n,k-1}(x)$, после чего результат проинтегрируем. Для произведения будем иметь

$$\frac{1}{A(x)} \alpha_{n,k-1}(x) = \left(\frac{x}{l} \right)^{2k+n-3} \sum_{j=0}^{ks} e_{k-1,j}^{(n)} \left(\frac{x}{l} \right)^j,$$

где $e_{k-1,j}^{(n)} = \sum_{i=0}^j A_{j-i} d_{k-1,i}^{(n)}$, причем $A_{j-i} = 0$, если $j-i > s$ и $d_{k-1,i}^{(n)} = 0$, если $i > (k-1)s$. Тогда

$$\tilde{\alpha}_{n,k}(x) = \left(\frac{x}{l} \right)^{2k+n-2} \sum_{j=0}^{ks} \frac{e_{k-1,j}^{(n)}}{2k+j+n-2} \left(\frac{x}{l} \right)^j. \quad (52)$$

Далее, на основании второй из формул (51), находим

$$\alpha_{n,k}(x) = \left(\frac{x}{l} \right)^{2k+n-1} \sum_{j=0}^{ks} \frac{e_{k-1,j}^{(n)}}{(2k+j+n-2)(2k+j+n-1)} \left(\frac{x}{l} \right)^j.$$

Сопоставляя последнюю формулу с представлением (50), получаем

$$d_{k,j}^{(n)} = \frac{e_{k-1,j}^{(n)}}{(2k+j+n-2)(2k+j+n-1)} \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad (j=0, 1, \dots, ks). \quad (53)$$

Исключая здесь параметр $e_{k-1,j}^{(n)}$, окончательно приходим к формуле

$$d_{k,j}^{(n)} = \frac{\sum_{i=0}^j A_{j-i} d_{k-1,i}^{(n)}}{(2k+j+n-2)(2k+j+n-1)} \quad (k=1,2,3,\dots) \quad (j=0,1,\dots,ks). \quad (54)$$

Полученная формула является рекуррентной, то есть каждое следующее значение $d_{k,j}^{(n)}$ здесь вычисляется через предыдущее. Поэтому для полной определенности следует указать начальное значение $d_{0,0}^{(n)}$.

Если распространить представление (50) на случай $k=0$, то получим $\alpha_{n,0}(x) = d_{0,0}^{(n)} \left(\frac{x}{l}\right)^{n-1}$. Сравнивая это выражение с первой из формул (31), находим $d_{0,0}^{(n)} = 1$.

После этого формула (54) становится вполне определенной, и все коэффициенты $d_{k,j}^{(n)}$ можно считать известными. Особо подчеркнем, что эти коэффициенты безразмерные, поскольку вычисляются они через безразмерные величины $A_0, A_1, \dots, A_s$.

Представление (52) с учетом (53) перепишем в виде

$$\tilde{\alpha}_{n,k}(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{2k+n-2} \sum_{j=0}^{ks} \tilde{d}_{k,j}^{(n)} \left(\frac{x}{l}\right)^j, \quad (55)$$

где

$$\tilde{d}_{k,j}^{(n)} = (2k+j+n-1) d_{k,j}^{(n)} \quad (56)$$

Равенство (55) можно распространить и на случай $k=0$, поскольку при этом получим верную формулу $\tilde{\alpha}_{n,0}(x) = \tilde{d}_{0,0}^{(n)} \left(\frac{x}{l}\right)^{n-2} = (n-1) d_{0,0}^{(n)} \left(\frac{x}{l}\right)^{n-2} = n-1$.

Таким образом, для функций $\alpha_{n,k}(x)$, $\tilde{\alpha}_{n,k}(x)$ ($n=1,2$) ($k=1,2,3,\dots$) получены их представления через многочлены (50) и (55) соответственно. При этом для вычисления коэффициентов характеристического многочлена важно будет знать значения этих многочленов в точке $x=l$:

$$\alpha_{n,k}(l) = \sum_{j=0}^{ks} d_{k,j}^{(n)}; \quad \tilde{\alpha}_{n,k}(l) = \sum_{j=0}^{ks} \tilde{d}_{k,j}^{(n)} \quad (n=1,2) \quad (k=1,2,3,\dots). \quad (57)$$

Для рассмотренного ранее случая шарнирно опертых концов стержня будем иметь:

$$\gamma_k = \alpha_{2,k}(l) = \sum_{j=0}^{ks} d_{k,j}^{(2)} \quad (k=0,1,2,\dots);$$

$$Y_j \left(\frac{x}{l}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k K_j^k \left(\frac{x}{l}\right)^{2k+1} \sum_{j=0}^{ks} d_{k,j}^{(2)} \left(\frac{x}{l}\right)^j \quad (j=1,2,3,\dots).$$

Теперь, когда коэффициенты характеристического уравнения определены, задача свелась к отысканию его корней $K_1, K_2, K_3, \dots$.

О разрешимости и методе отыскания корней характеристического уравнения.

Очевидно, в случае отрицательного значения параметра K , левая часть уравнения (46) является суммой положительных чисел, а значит, никогда не равна нулю. Поэтому уравнение (46) не может иметь отрицательных корней. Очевидно, что и число ноль также

не может быть корнем. Таким образом, корнями могут быть либо вещественные строго положительные числа, либо комплексные числа.

Из сходимости ряда в левой части уравнения следует, что какой сколь угодно малой ни была бы задана точность ε для вычисления корня, ее всегда можно достичь, удерживая некоторое конечное число $m+1$ первых членов ряда и пренебрегая остальными, которые в силу своей малости, практически не будут влиять на значение корня. В результате такой процедуры, для неизвестного K получим приближенное характеристическое уравнение, которое будет представлять собой алгебраическое уравнение степени m с вещественными коэффициентами

$$f_m(K) = 1 - \gamma_1 K + \gamma_2 K^2 - \gamma_3 K^3 + \dots + (-1)^m \gamma_m K^m = 0. \quad (58)$$

Согласно теореме Декарта [20], число положительных корней многочлена, засчитываемых каждый столько раз, какова его кратность, равно числу перемен знаков в системе коэффициентов этого многочлена или меньше этого числа на четное число. Число перемен знаков многочлена $f_m(K)$, очевидно, равно m . Следовательно, выбирая значение m нечетным, мы гарантируем тем самым наличие как минимум одного положительного корня уравнения (58).

Уравнения типа (46) часто встречаются в строительной механике. В подобных ситуациях оценка погрешности решения проводится путем сравнения результатов расчета с различным числом удерживаемых членов ряда [21]. Остановимся на этой процедуре подробнее применительно к нашему случаю.

Пусть $K_1^{(m)}, K_1^{(m+2)}$ – наименьшие положительные корни многочленов $f_m(K), f_{m+2}(K)$ соответственно. Если для некоторого текущего значения $m=1,3,5,\dots$ будет выполнено условие $|K_1^{(m+2)} - K_1^{(m)}| < \varepsilon$, то полагаем, что первый корень уравнения (46) найден, а именно $K_1 = K_1^{(m)}$. Точность вычисления этого корня равна ε .

Поступая аналогично, можно определить требуемое количество следующих по возрастанию корней $K_1, K_2, K_3, \dots$ уравнения (46) с заданной точностью. Здесь полагаем $K_j = K_j^{(m)}$ ($j=1,2,3,\dots$) при условии $|K_j^{(m+2)} - K_j^{(m)}| < \varepsilon$. Следует заметить, что заданная точность при вычислении разных корней будет достигаться, вообще говоря, при разных значениях m .

Описанная процедура сводит отыскание коэффициентов устойчивости к последовательному вычислению вещественных корней характеристических многочленов $f_m(K), f_{m+2}(K)$. Такая математическая задача хорошо изучена и не может вызывать принципиальных затруднений. Для вычисления корней многочленов существует целое множество численных методов и программных возможностей.

Важно заметить следующее. Хотя теорема Декарта гарантирует наличие положительного корня только у многочлена нечетной степени, практика вычислений при решении данного класса задач показывает, что и при четном значении m многочлен $f_m(K)$ почти всегда обладает положительным корнем. Случаи отсутствия положительного корня составляют редкое исключение. Автору такие случаи иногда встречались только при значении $m=2$. Поэтому на практике возможно применение описанной процедуры отыскания корня путем сравнения корней многочленов $f_m(K)$ и $f_{m+1}(K)$ для значений $m=1,2,3,\dots$. А если при каком-то четном значении m нужного корня все же не существует, то такой случай можно просто исключить из рассмотрения и перейти к следующему m .

Алгоритм метода прямого интегрирования. В конечном итоге имеем новый метод определения критических нагрузок для стержней с произвольной непрерывной переменной жесткостью. Фактически он определяется следующим алгоритмом:

1. Исходя из равенств (25), (40) - (43) и реализуя заданные граничные условия, выписываем формулу для коэффициентов характеристического уравнения $\gamma_k (k = 0, 1, 2, \dots)$. В зависимости от вида граничных условий, эта формула будет выражаться через значения тех или иных из образующих функций $\alpha_{n,k}(x)$, $\tilde{\alpha}_{n,k}(x) (n = 1, 2) (k = 1, 2, 3, \dots)$ или их комбинаций в точке $x = l$;

2. Аппроксимируем заданную функцию $\frac{1}{A(x)}$ многочленом (49). Степень аппроксимирующего многочлена s выбираем в каждом конкретном случае из условия адекватного приближения;

3. С помощью формул (54), (56), (57) вычисляем требуемое количество коэффициентов характеристического уравнения $\gamma_k (k = 0, 1, 2, \dots)$;

4. Решая характеристическое уравнение (46) методом сравнения, находим требуемое количество коэффициентов устойчивости $K_1, K_2, K_3, \dots$;

5. Спектр критических сил $N_j (j = 1, 2, 3, \dots)$ получаем по формуле (47);

При необходимости с помощью формул (25), (40) - (43), (50), (55) определяем законы искривленных форм равновесия и любые другие параметры состояния стержня в произвольном сечении x .

Для реализации данного алгоритма составлен программный код.

Пример. Случай, когда поперечная жесткость изменяется по закону четвертой степени. Рассмотрим шарнирно опертый однородный стержень, момент инерции которого изменяется по закону [7]

$$I(x) = I_0 \left(1 - (1 - \alpha) \frac{x}{l} \right)^4,$$

где I_0 – момент инерции поперечного сечения стержня в точке $x = 0$; α – константа, удовлетворяющая условию $0 < \alpha \leq 1$.

Как будет показано далее, при заданном законе изменения жесткости фундаментальные функции выражаются через элементарные и, как следствие, критические силы можно определить точно. Поэтому данный пример может служить тестовым для апробации сформулированного выше алгоритма, поскольку позволяет сравнить результаты вычислений в программном режиме с найденными точными значениями.

Обозначим для краткости $u = 1 - (1 - \alpha) \frac{x}{l}$. Тогда здесь следует положить: $\phi(x) \equiv 1$; $E = E_0$; $A(x) = \psi(x) = u^4$. Согласно формуле (31) теперь будем иметь

$$\alpha_{n,k}(x) = \frac{1}{l^2} \int_0^x \int_0^x \frac{1}{u^4} \alpha_{n,k-1}(x) dx dx \quad (n = 1, 2). \quad (59)$$

Однако здесь, согласно полученному ранее характеристическому уравнению $X_2(l) = 0$, понадобятся только образующие функции $\alpha_{2,k}(x) (k = 1, 2, 3, \dots)$.

Воспользовавшись специально выведенной формулой

$$\int_0^x \int_0^x \frac{1}{u^3} \left(\frac{x}{u} \right)^i dx dx = \frac{1}{(i+1)(i+2)} u \left(\frac{x}{u} \right)^{i+2} \quad (i=1, 2, 3, \dots),$$

в справедливости которой можно убедиться дифференцированием, образующие функции (59) вычисляем в явном виде

$$\alpha_{2,k}(x) = \frac{1}{l^2} \int_0^x \int_0^x \frac{1}{u^4} \alpha_{2,k-1}(x) dx dx = \frac{1}{(2k+1)!} u \left(\frac{x}{lu} \right)^{2k+1} \quad (k=1, 2, 3, \dots).$$

После этого по формуле (34) получаем

$$X_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k K^k \alpha_{2,k}(x) = u \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} K^k \left(\frac{x}{lu} \right)^{2k+1} = \frac{u}{\sqrt{K}} \sin \sqrt{K} \frac{x}{lu}.$$

Следовательно, $X_2(l) = \frac{\alpha}{\sqrt{K}} \sin \frac{\sqrt{K}}{\alpha} = 0$. Отсюда $K_j = (\alpha \pi j)^2$ и на основании (47)

имеем спектр критических сил $N_j = (\alpha \pi j)^2 \frac{EI_0}{l^2} \quad (j=1, 2, 3, \dots)$.

Для оценки точности предлагаемого метода в программном режиме вычислялся коэффициент устойчивости для ряда значений параметра α . Сравнение вычисленных и точных значений коэффициента устойчивости указывают на высокую точность метода. При этом практика вычислений показывает, что можно добиться сколь угодно малой погрешности между точным и вычисляемым значениями, выбирая надлежащим образом параметры s и ε .

Для примера, точное значение коэффициента устойчивости, когда $\alpha = 0,5$, будет равно $K = (\alpha \pi)^2 = 2,46740110$. Этот же коэффициент устойчивости, вычисленный в программном режиме при значениях $s = 4$ и $\varepsilon = 0,001$, равен $K = K_1^{(s)} = 2,46977846$. Относительная погрешность в этом случае не превосходит 0,1%.

5. Выводы и перспективы дальнейших исследований

Проинтегрировано дифференциальное уравнение продольного изгиба стержня для случая произвольной непрерывной поперечной жесткости. Основываясь на полученном точном решении и указанном способе его численной реализации, сформулирован качественно новый метод определения критических нагрузок для стержней с произвольной непрерывной переменной жесткостью.

Представляются перспективными дальнейшие исследования в таких направлениях:

- исследования на устойчивость реальных объектов новым методом;
- применение метода прямого интегрирования к решению других актуальных задач механики деформируемого твердого тела.

Список литературы:

1. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Издательство «Наука», 1967. – 984 с.
2. Киселев В.А. Строительная механика. – М.: Стройиздат, 1980. – 616 с.
3. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник под редакцией Биргера И.А., Пановко Я.Г. т.3. – М.: «Машиностроение», 1968. – 576 с.

4. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. – М.: «Машиностроение», 1978. – 312 с.
5. Ржаницын А.Р. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1991. – 439 с.
6. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. Т. 1. – М.: Издательство СКАД СОФТ, 2007. – 670 с.
7. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лашеников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений. – М.: Стройиздат, 1984. – 416 с.
8. Динник А.Н. Продольный изгиб. Кручение. – М.: Издательство академии наук СССР, 1955. – 392 с.
9. Динник А.Н. О продольном изгибе стержней переменного сечения // Изв. Донск. Полит. ин-та. №1, 1913, с. 390-404.
10. Динник А.Н. О расчете сжатых стоек переменного сечения // Вестн. инж. №1, 2, 1929.
11. Bazant, Z. P. and Cedolin, L. Stability of Structures - New York: Oxford University Press, 1991.
12. Brush, D. O. and Almroth, B. O. Buckling of Bars, Plates and Shells - New York: McGraw-Hill, 1975.
13. Timoshenko, S. P. and Gere, J. M. Theory of Elastic Stability - New York: McGraw-Hill, 1961.
14. Seide, P. Axisymmetrical buckling of circular cones under axial compression // Journal of Applied Mechanics, **23**, 1956, p. 625-628.
15. Приходько В.Е. Исследование продольно-сжатых стержней переменной жесткости // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 2(66). – Х., 2011, с. 35 – 41.
16. Wang C.M., Wang C.Y., Reddy J.N. Exact solutions for buckling of structural members. – Boca Raton, Florida, USA: CRC Press LLC (CRC series in computational mechanics and applied analysis), 2005. – 286 p.
17. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
18. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1985. – 448 с.
19. Блейх Ф. Устойчивость металлических конструкций. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. – 544 с.
20. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Издательство «Наука», 1968. – 431 с.
21. Ильин В.П., Карпов В.В., Масленников А.М. Численные методы решения задач строительной механики. – Мн.: Высшая школа, 1990. – 349 с.