

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ В ЦЕНТРАЛЬНО СЖАТОМ СТЕРЖНЕ НЕПРЕРЫВНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ

Крутий Ю.С.

Пусть задан прямой упругий стержень непрерывной переменной жесткости, сжатый осевой постоянной продольной силой N . Совместим ось x с линией центров тяжести поперечных сечений стержня.

Как известно [1], при решении задачи устойчивости равновесия стержня ключевую роль играет дифференциальное уравнение продольного изгиба

$$(E(x)I(x)y''(x))'' + Ny''(x) = 0,$$

где $E(x)I(x)$ – изгибная жесткость, $y(x)$ – прогиб сечения стержня в точке x .

Применяя метод прямого интегрирования, суть которого изложена в публикации [2], можно построить точное решение данного уравнения. Наличие точного решения позволяет получить в аналитическом виде представления для параметров состояния стержня, характеризующих его напряженно-деформированное состояние. К таким параметрам относят перемещение $y(x)$, угол поворота $\varphi(x) = y'(x)$, изгибающий момент $M(x) = -E(x)I(x)\varphi'(x)$ и поперечную силу $Q(x) = M'(x) - N\varphi(x)$. Окончательные формулы, выраженные через начальные параметры, будут иметь вид:

$$y(x) = y(0) + \varphi(0)U_2(x) - \frac{M(0)}{N}(1 - U_1(x)) - \frac{Q(0)}{N}(x - U_2(x));$$

$$\varphi(x) = \varphi(0)U_2'(x) + \frac{M(0)}{N}U_1'(x) - \frac{Q(0)}{N}(1 - U_2'(x));$$

$$M(x) = \varphi(0)NU_2(x) + M(0)U_1(x) + Q(0)U_2(x);$$

$$Q(x) = Q(0),$$

где $U_1(x), U_2(x)$ – фундаментальные решения исходного дифференциального уравнения, определяемые равномерно и абсолютно сходящимися рядами

$$U_n(x) = a_{n,0}(x) - Na_{n,1}(x) + N^2a_{n,2}(x) - N^3a_{n,3}(x) + \dots \quad (n=1, 2),$$

$$a_{n,0}(x) = x^{n-1}, \quad a_{n,i}(x) = \int_0^x \int_0^x \frac{1}{E(x)I(x)} a_{n,i-1}(x) dx dx \quad (i=1, 2, 3, \dots).$$

Последнюю формулу можно представить также в развернутом виде

$$a_{n,i}(x) = \int_0^x \int_0^x \frac{1}{E(x)I(x)} \dots \int_0^x \int_0^x \frac{1}{E(x)I(x)} \int_0^x \int_0^x \frac{1}{E(x)I(x)} a_{n,0}(x) dx dx dx dx \dots dx dx,$$

причем количество интегралов здесь равно $2i$.

1. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Издательство «Наука», 1967. - 984 с.
2. Крутий Ю.С. Точное решение дифференциального уравнения свободных поперечных колебаний неоднородного прямого стержня переменной сечения с непрерывно распределенной переменной массой // Строительная механика и расчет сооружений. №5, 2011. - с. 47-53.