УДК 624.041

Ю.С. Крутій, М.Г. Сур'янінов
Одеська державна академія будівництва та архітектури

ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ АНАЛІТИЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ПРО ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ПРЯМОКУТНОЇ ПЛАСТИНИ, ЩО ЛЕЖИТЬ НА ЗМІННІЙ ПРУЖНІЙ ОСНОВІ

Розглядається задача про вільні коливання прямокутної пластини, що лежить на змінній пружній основі, реакція якої описується моделлю Вінклера. Коефіцієнт постелі вважається довільною неперервною функцією однієї з координат. Отримано квадратури для чисельної реалізації раніше знайденого аналітичного розв'язку відповідного диференціального рівняння коливань пластини. Наведено чисельну реалізацію методу при граничних умовах Нав'є для випадку, коли коефіцієнт постелі змінюється за лінійним законом. Знайдено спектр частот та побудовано графіки відповідних їм законів головних форм коливань пластини.

Ключові слова: *прямокутна пластина, вільні коливання, модель Вінклера, аналітичний розв'язок, частотне рівняння, чисельна реалізація, головні форми коливань.*

Ю.С. Крутий, Н.Г. Сурьянинов

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ, ЛЕЖАЩЕЙ НА ПЕРЕМЕННОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Рассматривается задача о свободных колебаниях прямоугольной пластины, лежащей на переменном упругом основании, реакция которого описывается моделью Винклера. Коэффициент постели считается произвольной непрерывной функцией одной из координат. Получены квадратуры для численной реализации ранее найденного аналитического решения соответствующего дифференциального уравнения колебаний пластины. Приведена численная реализация метода при граничных условиях Навье для случая, когда коэффициент постели изменяется по линейному закону. Найден спектр частот и построены графики соответствующих законов главных форм колебаний пластины.

Ключевые слова: *прямоугольная пластина, свободные колебания, модель Винклера, аналитическое решение, частотное уравнение, численная реализация, главные формы колебаний.*

Yu. Krutiy, N. Suryaninov

NUMERICAL IMPLEMENTATION OF ANALYTICAL SOLUTION OF FREE OSCILLATIONS OF A RECTANGULAR PLATE, LYING ON A VARIABLE ELASTIC FOUNDATION

The problem of free oscillations of a rectangular plate lying on an elastic foundation, the reaction is described by the Winkler model. Bed ratio is considered to be an arbitrary continuous function of one of the coordinates. Obtained quadrature for numerical implementation of previously found analytical solutions of the corresponding differential equation of oscillations of a plate. Numerical implementation of the method for the boundary conditions for the Navie case where the bed ratio changes linearly. The spectrum of frequencies and graphs of the main forms of the relevant laws of the plate vibrations.

Keywords**:** *rectangular plate, free oscillations, Winkler model, analytical solution, frequency equation, numerical implementation, the main waveforms.*

Постановка проблеми. Ця стаття є логічним продовженням матеріалів, опублікованих авторами в попередньому номері збірнику "Наукові нотатки" [3]. У процесі викладення матеріалу тут ми будемо опиратися на результати, представлені в зазначеній роботі. Не маючи можливості приводити всі формули заново, умовимося позначати формули з [3] у вигляді (П.№), де № – порядковий номер формули в нашій попередній статті.

Для можливості чисельної реалізації знайдених в [3] аналітичних розв'язків потрібно вивести квадратури для обчислення функцій (П.44), (П.48). Як випливає з (П.44), дана проблема буде вирішена, якщо вказати спосіб обчислення функцій $\beta_{n,k,l}(x)(n=1,2,3,4)(k=1,2,3,...)$ $(l=0,1,2,...,k)$.

Метою даної роботи є розробка методу чисельної реалізації для раніше знайденого аналітичного розв'язку задачі про вільні коливання пластини, що лежить на змінній пружній основі, реакція якої враховується моделлю Вінклера.

Результати досліджень. У науковій літературі при розгляді змінної пружної основи коефіцієнт постелі задають у вигляді многочлену, причому найчастіше не вище третього степеня [2, 5-7]. У зв'язку із цим будемо вважати, що

$$A(x)=A_0+A_1\left(\frac{x}{a}\right)+A_2\left(\frac{x}{a}\right)^2+...+A_s\left(\frac{x}{a}\right)^s, \qquad (1)$$

де $A_0, A_1, A_2, ..., A_s$ – безрозмірні коефіцієнти, s – степінь многочлену. Якщо припустити, що на практиці коефіцієнт постелі задано неперервною функцією, відмінною від многочлену, то її завжди можна апроксимувати многочленом (1).

Задача полягає в тому, щоб з урахуванням (1) одержати формули для функцій (П.40), (П.41), придатні для їхньої чисельної реалізації. При цьому зауважимо, що в даних формулах $k - l \geq 1$.

Виходячи з виду початкового значення $\beta_{n,0,0}(x)$, заключаємо, що результатом послідовного інтегрування, яке задано формулою (П.40) для значень $k = 1, 2, 3, ...$, щоразу буде многочлен. При цьому всі константи інтегрування на підставі граничних умов (П.36) зобов'язані дорівнювати нулю. Враховуючи ці обставини, при уважному розгляді формули (П.40) можна встановити, що найменша степінь многочлену $\beta_{n,k,0}(x)$ буде дорівнювати $n + 2k - 1$, а найбільша $ks + n + 4k - 1$. Аналіз формули (П.41) також приводить до висновку, що кожна з функцій $\beta_{n,k,l}(x)$ є многочлен. Найменша степінь цього многочлена буде дорівнювати $n + 2(k + l) - 1$, а найбільша $(k - l)s + n + 4k - 1$.

Отже, для обох формул (П.40), (П.41) можна записати

$$\beta_{n,k,l}(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^{n+2(k+l)-1} \sum_{j=0}^{(k-l)(s+2)} c_{n,k,l,j} \left(\frac{x}{a}\right)^j, \tag{2}$$

де $c_{n,k,l,j}$ – невідомі коефіцієнти. Тоді

$$\beta_{n,k-1,l}(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^{n+2(k+l)-3} \sum_{j=0}^{(k-l-1)(s+2)} c_{n,k-1,l,j} \left(\frac{x}{a}\right)^j, \tag{3}$$

$$\beta_{n,\,k-1,\,l-1}(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^{n+2(k+l)-5} \sum_{j=0}^{(k-l)(s+2)} c_{n,\,k-1,\,l-1,j} \left(\frac{x}{a}\right)^j, \tag{4}$$

причому, остання формула буде затребувана тільки для формули (П41).

Перемножуючи згідно формулам (П.40), (П.41) многочлени $A(x)$ й $\beta_{n,k-1,l}(x)$, одержимо

$$A(x)\beta_{n,k-1,l}(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^{n+2(k+l)-3} \sum_{j=0}^{(k-l)(s+2)-2} d_{n,k-1,\,l,\,j} \left(\frac{x}{a}\right)^j, \tag{5}$$

де

$$d_{n,k-1,\,l,\,j} = \sum_{r=0}^{j} A_{j-r}\, c_{n,k-1,l,\,r},$$

причому $A_{j-r} = 0$, якщо $j - r > s$ та $c_{n,k-1,l,\,r} = 0$, якщо $r > (k - l - 1)(s + 2)$.

Підставимо у формулу (П.40) значення $\beta_{n,k,0}(x),\ \beta_{n,k-1,0}(x),\ A(x)\beta_{n,k-1,0}(x)$, а у формулу (П.41) значення $\beta_{n,k,l}(x),\ \beta_{n,k-1,l}(x),\ \beta_{n,k-1,l-1}(x),\ A(x)\beta_{n,k-1,l}(x)$, які задані рівняннями (2) – (5). Після цього в кожному випадку виконаємо інтегрування й скоротимо обидві частини на загальний множник, який відповідно буде дорівнювати $\left(\frac{x}{a}\right)^{n+2k-1}$ і $\left(\frac{x}{a}\right)^{n+2(k+l)-1}$.

Результат вказаних перетворень можна подати єдиною формулою

$$\sum_{j=0}^{(k-l)(s+2)} c_{n,k,l,j} \left(\frac{x}{a}\right)^j = 2\left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2 \sum_{j=0}^{(k-l-1)(s+2)} \frac{c_{n,k-1,l,j}}{e_{n,k,l,j}} \left(\frac{x}{a}\right)^j + \left(\frac{m\pi a}{b}\right)^4 \sum_{j=0}^{(k-l)(s+2)} \frac{c_{n,k-1,l-1,j}}{f_{n,k,l,j}} \left(\frac{x}{a}\right)^j - \\ - \frac{a^4 k_0}{D} \sum_{j=2}^{(k-l)(s+2)} \frac{d_{n,k-1,l,j-2}}{f_{n,k,l,j}} \left(\frac{x}{a}\right)^j, \tag{6}$$

де $e_{n,k,l,j}$, $f_{n,k,l,j}$ – відомі числа,

$$e_{n,k,l,j} = (2(k + l) + j + n - 2)(2(k + l) + j + n - 1);$$

$$f_{n,k,l,j} = (2(k + l) + j + n - 4)(2(k + l) + j + n - 3)(2(k + l) + j + n - 2)(2(k + l) + j + n - 1).$$

При цьому важливо зауважити, що $c_{n,k-1,l-1,j} = 0$, якщо $l = 0$.

Прирівнюючи в рівнянні (6) коефіцієнти многочленів при однакових степенях, отримаємо:

$$c_{n,k,l,j} = 2\left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2 \frac{c_{n,k-1,l,j}}{e_{n,k,l,j}} + \left(\frac{m\pi a}{b}\right)^4 \frac{c_{n,k-1,l-1,j}}{f_{n,k,l,j}} - \frac{a^4 k_0}{D}\frac{d_{n,k-1,l,j-2}}{f_{n,k,l,j}} , \tag{7}$$

де $k = 1,2,3,...$; $l = 0,1,2,..., k-1;$ $j = 0,1,..., (k-l)(s+2)$, причому $c_{n,k-1,l,j} = 0$, якщо $j > (k-l-1)(s+2)$ та $d_{n,k-1,l,j-2} = 0$, якщо $j < 2$.

Очевидно, формула (7) є рекурентною за індексом k. Для повної визначеності така формула вимагає початкових значень. Вважаючи $k = 1$ у формулі (3) й порівнюючи результат з рівністю (П.39), знаходимо

$$c_{n,0,0,0} = \frac{1}{(n-1)!} . \tag{8}$$

Крім того, вважаючи $l = k$ у формулі (2) й порівнюючи результат з формулою (П.42), будемо мати

$$c_{n,k,k,0} = \frac{1}{(n+4k-1)!}\left(\frac{m\pi a}{b}\right)^{4k} (k = 1,2,3,....) . \tag{9}$$

Отримані формули (7) – (9) дозволяють обчислювати коефіцієнти многочленів (2) при заданих відношеннях $\frac{m\pi a}{b}, \frac{a^4 k_0}{D}$, які є безрозмірними. Як наслідок, коефіцієнти $c_{n,k,l,j}$ також будуть безрозмірними.

У результаті для функцій $\delta_{n,i}(x),\ \tilde{\delta}_{n,i}(x),\ \widehat{\delta}_{n,i}(x),\ \hat{\delta}_{n,i}(x)\ (n = 1,2,3,4)\ (i = 0,1,2,...)$ з урахуванням формул (П.44), (П.48), (2) будемо мати:

$$\delta_{n,i}(x) = \sum_{p=i}^{\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^{n+2(p+i)-1} \sum_{j=0}^{(p-i)(s+2)} c_{n,p,i,j}\left(\frac{x}{a}\right)^j ;$$

$$\tilde{\delta}_{n,i}(x) = \sum_{p=i}^{\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^{n+2(p+i)-2} \sum_{j=0}^{(p-i)(s+2)} \tilde{c}_{n,p,i,j}\left(\frac{x}{a}\right)^j ;$$

$$\widehat{\delta}_{n,i}(x) = \sum_{p=i}^{\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^{n+2(p+i)-3} \sum_{j=0}^{(p-i)(s+2)} \widehat{c}_{n,p,i,j}\left(\frac{x}{a}\right)^j ;$$

$$\hat{\delta}_{n,i}(x) = \sum_{p=i}^{\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^{n+2(p+i)-4} \sum_{j=0}^{(p-i)(s+2)} \hat{c}_{n,p,i,j}\left(\frac{x}{a}\right)^j ,$$

де

$$\tilde{c}_{n,p,i,j} = (2(p+i)+j+n-1)c_{n,p,i,j},$$
$$\widehat{c}_{n,p,i,j} = (2(p+i)+j+n-2)\tilde{c}_{n,p,i,j},.$$
$$\hat{c}_{n,p,i,j} = (2(p+i)+j+n-3)\widehat{c}_{n,p,i,j}$$

Приклад. Пластина, шарнірно оперта по контуру. Реалізуючи за допомогою формул (П.7), (П.9) умови рівності нулю прогину w й згинального моменту M_x на краях $x = 0,\ x = a$, будемо мати: $X(0) = X''(0) = 0;\ X(a) = X''(a) = 0$. Отже, початкові параметри $X(0), X''(0)$ визначені. Для двох інших параметрів $X'(0), X'''(0)$ за допомогою (П.29), (П.32) отримаємо систему рівнянь

$$aX'(0)\left(X_2(a) - 2\left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2 X_4(a)\right) + a^3 X'''(0)X_4(a) = 0;$$

$$\frac{1}{a}X'(0)\left(\widehat{X}_2(a) - 2\left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2 \widehat{X}_4(a)\right) + aX'''(0)\widehat{X}_4(a) = 0.$$

З умови рівності нулю визначника системи маємо частотне рівняння

$$X_2(a)\widehat{X}_4(a) - \widehat{X}_2(a)X_4(a) = 0 . \tag{10}$$

Враховуючи, що $X_2(a),\ X_4(a),\ \widehat{X}_2(a),\ \widehat{X}_4(a)$ являють собою суми абсолютно збіжних числових рядів, а також ґрунтуючись на відомих теоремах математичного аналізу, приходимо до висновку, що ліва частина частотного рівняння є збіжний числовий ряд. Користуючись (П.43), (П.46) та застосовуючи правило для добутку рядів, рівняння (10) запишемо у вигляді (П.49), де

$$\eta_k = \sum_{i=0}^{k} \left(\delta_{2,i}(a)\hat{\delta}_{4,k-i}(a) - \hat{\delta}_{2,i}(a)\delta_{4,k-i}(a)\right) \ (k = 0,1,2,...),$$

$$\delta_{n,i}(a) = \sum_{p=i}^{\infty} \sum_{j=0}^{(p-i)(s+2)} c_{n,p,i,j}, \ \ \hat{\delta}_{n,i}(a) = \sum_{p=i}^{\infty} \sum_{j=0}^{(p-i)(s+2)} \hat{c}_{n,p,i,j} .$$

Безрозмірний закон головних форм коливань у цьому випадку має вигляд

$$W^*_{q,m}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) = \left(X_2(x,\lambda_{q,m}) - \frac{X_2(a,\lambda_{q,m})}{X_4(a,\lambda_{q,m})} X_4(x,\lambda_{q,m})\right) \sin\frac{m\pi y}{b} \ \ (m = 1,2,3,...)(q = 1,2,3,...).$$

Розглянемо квадратну пластину з одиничною довжиною сторін ($a = b = 1$). Для розрахунків приймаємо $E = 2 \cdot 10^8$ кПа, $\rho = 7800$ кг/м^3, $h = 0{,}05$ м, $\mu = 0{,}3$.

Коли коефіцієнт постелі сталий $k = k_0$, для частот шарнірно опертої по контуру пластини відома точна формула [1], яка з використанням позначень, що прийняті в даній роботі, запишеться так

$$\omega_{q,m} = \sqrt{\frac{1}{\rho h}\left(\left(\left(\frac{q\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\right)^2 D + k_0\right)} \ \ (q = 1,2,3,...)(m = 1,2,3,...). \qquad (11)$$

Для порівняння, в табл. 1 надано перші чотири частоти, обчислені авторським методом та за допомогою формули (11) для значення $k_0 = 5 \cdot 10^3$ кН/м^3. Як видно, частоти практично співпадають. Незначна розбіжність пояснюється похибкою обчислень при програмній реалізації метода.

Таблиця 1

Порівняльний аналіз частот при сталому коефіцієнті постелі

	Частоти $\omega_{q,m}$				Відносна похибка, %	
	Авторський метод		Точна формула			
	$m = 1$	$m = 2$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 1$	$m = 2$
$q = 1$	1516,5958	3782,6031	1516,5959	3780,9082	0,00001	0,04483
$q = 2$	3782,6026	6050,5120	3780,9082	6049,4531	0,04481	0,01750

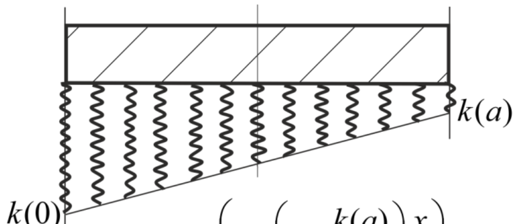
В табл. 2 представлено результати розрахунків для випадку, коли коефіцієнт постелі змінюється за лінійним законом. Там вказані результати обчислення коренів частотного рівняння $\lambda_{q,m}$ $(m = 1,2)$ $(q = 1,2)$, відповідні цим кореням частоти та графіки безрозмірних законів головних форм коливань, побудовані у MATLAB [4].

Результати обчислень зі змінною пружною основою, на жаль, порівняти ні з чим.

Висновки. Розроблено метод чисельної реалізації для раніше знайденого аналітичного розв'язку диференціального рівняння коливань прямокутної пластини, що лежить на змінній пружній основі. Виконані чисельні розрахунки для шарнірно опертої по контуру пластини у випадку, коли коефіцієнт постелі змінюється за лінійним законом. Обчислені перші чотири частоти й побудовані відповідні їм графіки безрозмірних законів головних форм коливань. Показано, що у випадку постійного коефіцієнта постелі обчислені за авторським методом частоти практично збігаються із частотами, обчисленими за відомою точною формулою.

Загалом можна констатувати наявність нового методу дослідження вільних коливань пластини з крайовими умовами Леві, що лежить на змінній пружній основі, реакція якої описується моделлю Вінклера.

Таблиця 2



$$k(x)=k(0)\left(1-\left(1-\frac{k(a)}{k(0)}\right)\frac{x}{a}\right)$$

Вхідні дані

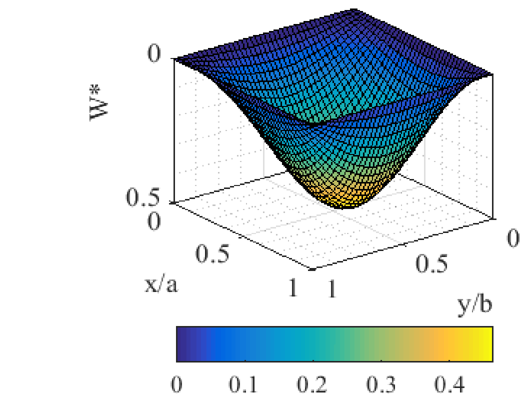
$k(0)=4\cdot 10^6$ кН/ м^3, $k(a)=5\cdot 10^3$ кН/ м^3,

$s=1,\ A_0=1,\ A_1=-0{,}99875$

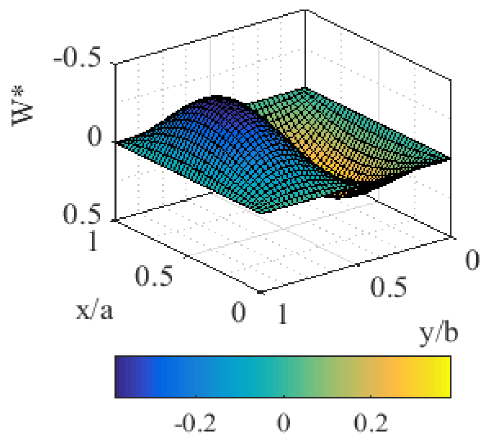
Частоти $\omega_{q,m}$

	$m=1$	$m=2$
$q=1$	2672,6346	4390,6504
$q=2$	4428,9886	6466,5503

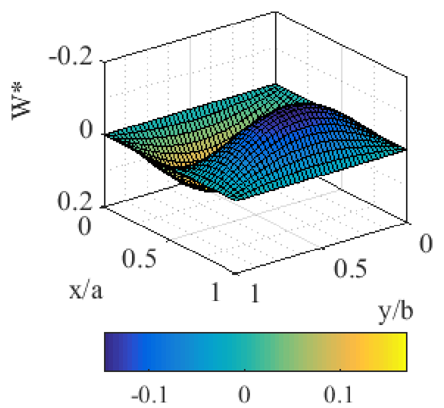
$\lambda_{1,1}=11{,}4919$



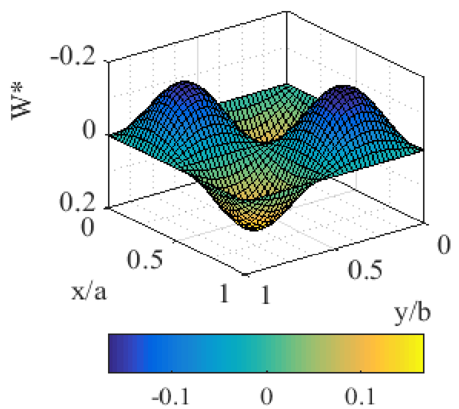
$\lambda_{1,2}=1{,}1071$



$\lambda_{2,1}=33{,}3050$



$\lambda_{2,2}=3{,}5706$



Список використаної літератури.

1. Власов В. З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В.З. Власов, М. М. Леонтьев. – М.: Госфизматлит, 1960. – 492 с.
2. Доронин А.М. Собственные колебания круглой пластинки, лежащей на переменном упругом основании типа Винклера / Доронин А.М., Соболева В.А // Вестник Нижегородского университета им. Лобачевского. – 2014. - №4 (1). - С. 254-258.
3. Крутій Ю.С. Аналітичний розв'язок задачі про вільні коливання прямокутної пластини, що лежить на змінній пружній основі / Ю.С. Крутій, М.Г. Сур'янінов // Міжнародний збірник «Наукові нотатки», м. Луцьк. – 2016. – № 53– С.
4. Поршнев С.В. MATLAB 7. Основы работы и программирования. Учебник / С.В. Поршнев. — Изд-во "Бином. Лаборатория знаний", 2006. – 320 с.
5. Симвулиди И.А. Расчет инженерных конструкций на упругом основании. – М.: Высшая школа, 1987. – 575 с.
6. Mofid M. A plate on Vinkler foundation with variable coefficient / Mofid M., Noroozi M. // Transaction A: Civil Engineering. - 2009. - V.16. - № 3. - P. 249-255.
7. Witt M. Roz wiaszanie ptyty spoczywajacej na podtozu spezystym o zmiennym wspotczynniku podatnosci metoda elementow skonczonych / Witt M // Pr. nauk. Inst. inz. Lad. Pwr. - 1974. - № 13. - P. 143-149.

Стаття надійшла до редакції 24.03.2016.