

Дослідження вільних коливань стрижневих елементів зі змінними параметрами методом прямого інтегрування

В. І. Шваб'юк^а, Ю. С. Крутій^б, М. Г. Сур'янінов^б

^а Луцький національний технічний університет, Луцьк, Україна

^б Одеська державна академія будівництва і архітектури, Одеса, Україна

Запропоновано розрахунок на коливання стрижневих систем із неперервними змінними параметрами методом прямого інтегрування. Метод побудовано на аналітичних розв'язках відповідних диференціальних рівнянь. Із використанням цього методу розв'язано задачу про вільні згинні коливання прямого стрижня з довільними неперервно змінними поперечною жорсткістю та погонною масою. В аналітичному вигляді отримано формули для динамічних параметрів стрижневих конструкцій та наведено методику їх числової реалізації. Досліджено вільні коливання зрізаного конуса та димової труби зі змінною товщиною стінки.

Ключові слова: метод прямого інтегрування, аналітичні розв'язки, поперечні коливання стрижня, коефіцієнти коливань, частоти коливань, коливання димової труби.

Вступ. Стрижні зі змінним перерізом використовуються як конструктивні елементи або як просторові структури. До таких структур можна віднести багатоцільові сталеві опори, які використовуються в лініях електропередач, опори вітрових генераторів, антени різних конструкцій, робочі лопатки турбомашин та ін. У багатьох випадках їх стрижневі елементи вздовж довжини мають змінні жорсткість, погонну масу, навантаження та інші параметри.

До систем зі змінними параметрами можна віднести пластини або оболонки змінної товщини, які розташовуються на пружній основі. У будівництві до об'єктів зі змінною жорсткістю можна віднести промислові висотні споруди у вигляді димових труб, водонапірних башт або градирень баштового типу.

Розрахунок такого типу споруд на міцність, стійкість та коливання вимагає розв'язку диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Наближені розв'язки таких задач для стрижнів сталого та деяких випадків змінного перерізів методом Релея–Рітца одержано ще С. П. Тимошенком [1]. Розв'язки задач визначення частот згинних коливань стрижнів зі змінними за степеневим законом перерізами отримано в роботі [2]. В [3] отримано результати дослідження власних частот і форм поздовжніх та згинних коливань стрижнів (їхня жорсткість та погонна маса змінюються за біномними законами), визначення яких зводиться до аналітичного розв'язку через функції Бесселя. Як приклади розглянуто коливання консольної балки у вигляді зрізаних клина, піраміди та конуса. Одержано також вирази для власних частот та форм згинних коливань балок без урахування впливу зовнішніх і внутрішніх сил опору. Для балок Тимошенка зі сталими та змінними жорсткістю і перерізом у роботах [4–8] досліджено вплив поздовжніх сил і поперечного зсуву на частоту вільних згинних коливань балки з урахуванням фактора розсіяння енергії. Результати розрахунково-експериментальних досліджень впливу параметрів локального поверхневого пошкодження на власні частоти коливань стрижневої моделі лопатки наведено в [9]. У роботах [10, 11] розглянуто ускладнені задачі коливань тонкостінних елементів конструкцій та конструкцій (балки і плити) на пружній основі у просторовій та уточнених постановках.

Разом із тим на сьогодні відсутній універсальний метод побудови аналітичних розв'язків таких задач для стрижнів із довільними змінними перерізами, тому у

багатьох випадках використовуються наближені числові методи. На основі отриманих раніше [12, 13] результатів у даній роботі розвивається метод прямого інтегрування диференціальних рівнянь, який використовується в розрахунках на стійкість та коливання стрижнів зі змінними перерізами і розподіленою масою з урахуванням сил опору. Розв'язується задача про вільні згинні коливання прямого стрижня з довільними неперервно змінними поперечною жорсткістю та погонною масою.

Постановка задачі. Розрахункові рівняння. Диференціальне рівняння вільних згинних коливань стрижня (рис. 1) з урахуванням сил опору записується у вигляді [7, 9]

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[E(x)I(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] + m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + p(x, t) + r(x, t) = 0, \quad (1)$$

де $E(x)I(x)$ – поперечна жорсткість стрижня в точці x ; $E(x)$ – модуль пружності матеріалу стрижня; $I(x)$ – момент інерції поперечного перерізу стрижня; $m(x)$ – інтенсивність розподіленої маси (погонна маса) у точці x ; $p(x, t)$ – інтенсивність сили зовнішнього опору руху; $r(x, t)$ – інтенсивність сили внутрішнього опору руху; $y(x, t)$ – поперечне переміщення точки осі стрижня з координатою x у момент часу t (динамічний прогин) – рис. 1.

Загальна схема коливань стрижня показана на рис. 1, схема зусиль, що діють на його елемент при коливаннях, – на рис. 2.

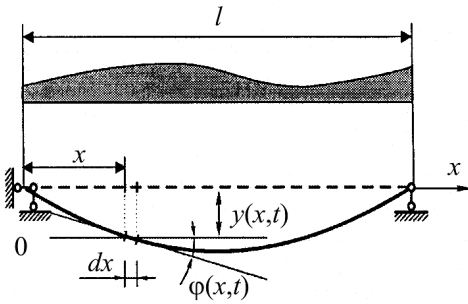


Рис. 1

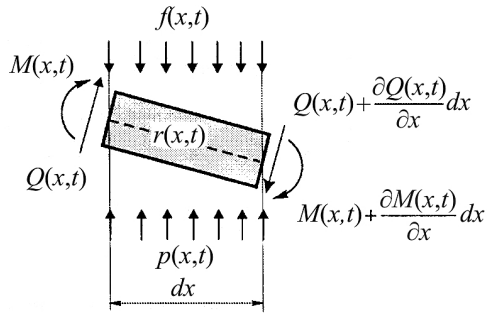


Рис. 2

Рис. 1. Вільні згинні коливання стрижня: $\varphi(x, t)$ – динамічний кут повороту.

Рис. 2. Схема зусиль, що діють на елемент стрижня: $M(x, t)$ – динамічний згинальний момент; $Q(x, t)$ – динамічна поперечна сила; $f(x, t) = -m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ – інтенсивність сил інерції, що виникають у процесі коливань (сила д'Аламбера).

Рівняння (1) справедливе для моделі, в якій прийнято нехтувати поздовжніми переміщеннями перерізів, їх поворотами і зсувами.

Для врахування сил опору існує багато гіпотез. Силу зовнішнього опору руху вважаємо пропорційною масі стрижня і швидкості [1, 8]. Внутрішнє тертя будемо враховувати за гіпотезою Кельвіна–Фойхта [7, 8], згідно з якою сила внутрішнього опору пропорційна швидкості деформації. У такому випадку рівняння (1) приймає наступний вигляд:

$$m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \alpha m(x) \frac{\partial y}{\partial t} + \left(1 + \beta \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[E(x)I(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] = 0, \quad (2)$$

де α, β – коефіцієнти зовнішнього і внутрішнього тертя відповідно.

Користуючись методом розділення змінних Фур'є, для динамічних параметрів задачі (параметри стану стрижня) застосуємо наступні розкладання:

$$y(x, t) = v(x)T(t); \quad \varphi(x, t) = \varphi(x)T(t);$$

$$M(x, t) = M(x)T(t); \quad Q(x, t) = Q(x)T(t),$$

де $T(t)$ – невідома функція часу; $v(x)$, $\varphi(x)$, $M(x)$, $Q(x)$ – невідомі амплітудні функції, що зв'язані між собою залежностями: $\varphi(x) = v'(x)$; $M(x) = -E(x)I(x)\varphi'(x)$; $Q(x) = M'(x)$.

У результаті з (2) отримаємо два самостійних рівняння:

$$\ddot{T}(t) + 2h\dot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0, \tag{3}$$

$$(E(x)I(x)v''(x))'' - \omega^2 m(x)v(x) = 0, \tag{4}$$

де $2h = \alpha + \beta\omega^2$; ω^2 – стала методу розділення змінних.

Розв'язок рівняння (3) має відомий вигляд [1, 8]:

$$T(t) = Ae^{-ht} \sin(\tilde{\omega}t + \delta), \quad \tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 - h^2}, \tag{5}$$

де $A = \sqrt{T^2(0) + (\dot{T}(0) + hT(0))^2 / \tilde{\omega}^2}$; $\delta = \arctg T(0)\tilde{\omega} / (\dot{T}(0) + hT(0))$; $T(0)$, $\dot{T}(0)$ – початкові параметри.

Аналіз розв'язку (5) показує, що вільні згинні коливання стрижня з урахуванням сил опору відбуваються в часі за затухаючим гармонічним законом із частотою $\tilde{\omega}$, а стала величина ω є частотою вільних коливань без урахування сил опору (випадок $\alpha = \beta = 0$).

Виразимо амплітудні функції $v(x)$, $\varphi(x)$, $M(x)$, $Q(x)$ через безрозмірні фундаментальні розв'язки. Для цього змінні погонну масу та поперечну жорсткість запишемо так:

$$m(x) = m_0 B(x), \quad E(x)I(x) = E_0 I_0 C(x),$$

де $E_0 I_0$, m_0 – сталі жорсткість і маса у певній характерній точці стрижня; $C(x)$, $B(x)$ – безрозмірні функції, що визначають відповідно закони зміни жорсткості і маси вздовж довжини стрижня.

Такий підхід дозволяє отримати аналітичне представлення для частот коливань, і при розрахунках оперувати тільки безрозмірними величинами.

Визначення амплітудних функцій та головних форм коливань. Головна форма коливань визначається як розв'язок рівняння (4). Загальний інтеграл цього рівняння та інші амплітудні функції, виражені через початкові параметри, мають такий вигляд [13]:

$$v(x) = v(0)X_1(x) + \varphi(0)IX_2(x) - M(0)\frac{l^2}{E_0 I_0} X_3(x) - Q(0)\frac{l^3}{E_0 I_0} X_4(x); \tag{6}$$

$$\varphi(x) = v(0)\frac{1}{l}\tilde{X}_1(x) + \varphi(0)\tilde{X}_2(x) - M(0)\frac{l}{E_0 I_0}\tilde{X}_3(x) - Q(0)\frac{l^2}{E_0 I_0}\tilde{X}_4(x); \tag{7}$$

$$M(x) = -\nu(0) \frac{E_0 I_0}{l^2} \widehat{X}_1(x) - \varphi(0) \frac{E_0 I_0}{l} \widehat{X}_2(x) + M(0) \widehat{X}_3(x) + Q(0) l \widehat{X}_4(x); \quad (8)$$

$$Q(x) = -\nu(0) \frac{E_0 I_0}{l^3} \widehat{X}_1(x) - \varphi(0) \frac{E_0 I_0}{l^2} \widehat{X}_2(x) + M(0) \frac{1}{l} \widehat{X}_3(x) + Q(0) \widehat{X}_4(x), \quad (9)$$

де $X_n(x)$, $n = 1, 2, 3, 4$ – фундаментальні функції рівняння (4), що визначаються рядами, які рівномірно збігаються,

$$X_n(x) = \beta_{n,0}(x) + K^2 \beta_{n,1}(x) + K^4 \beta_{n,2}(x) + K^6 \beta_{n,3}(x) + \dots, \quad K = \omega l^2 \sqrt{\frac{m_0}{E_0 I_0}}. \quad (10)$$

У роботі [12] функції $\beta_{n,0}(x)$, $n = 1, 2, 3, 4$ названі початковими, а функції $\beta_{n,k}(x)$, $n = 1, 2, 3, 4$, $k = 1, 2, 3, \dots$ – твірними. Вони визначаються так:

$$\beta_{n,0}(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{n-1}, \quad n = 1, 2; \quad \beta_{n,0}(x) = \frac{1}{l^2} \int_0^x \int_0^x \frac{1}{C(x)} \left(\frac{x}{l}\right)^{n-3} dx dx, \quad n = 3, 4; \quad (11)$$

$$\beta_{n,k}(x) = \frac{1}{l^4} \int_0^x \int_0^x \frac{1}{C(x)} \int_0^x \int_0^x B(x) \beta_{n,k-1}(x) dx dx dx dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots; \quad (12)$$

$$\beta_{n,k}(x) = \frac{1}{l^4} \int_0^x \int_0^x \frac{1}{C(x)} \int_0^x \int_0^x B(x) \dots \int_0^x \int_0^x \frac{1}{A(x)} \int_0^x \int_0^x B(x) \beta_{n,0}(x) dx dx dx dx \dots dx dx dx dx. \quad (13)$$

Для наочності тут наведено дві формули для твірних функцій – рекурентна та розгорнута. Кратність інтегралів в останній формулі без урахування інтегралів, які можуть містити початкові функції, дорівнює $4k$.

Фундаментальні функції у формулах (7)–(9) визначаються рядами:

$$\widetilde{X}_n(x) = \widetilde{\beta}_{n,0}(x) + K^2 \widetilde{\beta}_{n,1}(x) + K^4 \widetilde{\beta}_{n,2}(x) + K^6 \widetilde{\beta}_{n,3}(x) + \dots; \quad (14)$$

$$\widehat{X}_n(x) = \widehat{\beta}_{n,0}(x) + K^2 \widehat{\beta}_{n,1}(x) + K^4 \widehat{\beta}_{n,2}(x) + K^6 \widehat{\beta}_{n,3}(x) + \dots; \quad (15)$$

$$\widehat{X}_n(x) = \widehat{\beta}_{n,0}(x) + K^2 \widehat{\beta}_{n,1}(x) + K^4 \widehat{\beta}_{n,2}(x) + K^6 \widehat{\beta}_{n,3}(x) + \dots, \quad (16)$$

де

$$\widetilde{\beta}_{n,k}(x) = l \beta'_{n,k}(x); \quad \widehat{\beta}_{n,k}(x) = l A(x) \widetilde{\beta}'_{n,k}(x); \quad \widehat{\beta}_{n,k}(x) = l \widehat{\beta}'_{n,k}(x), \quad (17)$$

$$n = 1, 2, 3, 4, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Важливо відзначити, що невідомий параметр K та функції в (11), (13), (16) є безрозмірними [12, 13]. Отже, всі фундаментальні функції в (10), (14)–(16) є також безрозмірними. Як наслідок, розмірності сталих коефіцієнтів при безрозмірних функціях у правих частинах формул (6)–(9) збігаються з розмірностями у відповідних лівих частинах.

Безпосередньо з (10) отримуємо формулу для частоти вільних коливань без урахування опору:

$$\omega = \frac{K}{l^2} \sqrt{\frac{E_0 I_0}{m_0}}, \tag{18}$$

де K – невідомий безрозмірний коефіцієнт коливань.

Із формули (18) видно, що знаходження частоти зводиться до визначення коефіцієнта коливань. Оскільки у формулах для амплітудних параметрів стану стрижня фігурує коефіцієнт коливань, для його знаходження можна використати частотні рівняння, які отримують після реалізації заданих граничних умов.

Існують випадки, коли початкові та твірні функції знаходяться у явному вигляді. При цьому, як наслідок, фундаментальні розв'язки записуються через елементарні або спеціальні функції. Але такі випадки зустрічаються дуже рідко. Тому, з точки зору загальності результатів, важливо знайти ефективний спосіб числової реалізації приведених вище формул для початкових і твірних функцій, який можна було б використати для довільних неперервно змінних жорсткості та погонної маси.

Як відомо, один із методів числового інтегрування побудовано на заміні підінтегральної функції при апроксимації її багаточленом. Це дозволяє уникнути багаторазового числового інтегрування за формулами (11)–(13), що важливо для спрощення програмної реалізації методу.

Нехай

$$\begin{aligned} \frac{1}{C(x)} &= C_0 + C_1 \left(\frac{x}{l}\right) + C_2 \left(\frac{x}{l}\right)^2 + \dots + C_s \left(\frac{x}{l}\right)^s; \\ B(x) &= B_0 + B_1 \left(\frac{x}{l}\right) + B_2 \left(\frac{x}{l}\right)^2 + \dots + B_p \left(\frac{x}{l}\right)^p. \end{aligned} \tag{19}$$

Тоді за допомогою формул (11)–(13) легко одержати представлення початкових функцій через багаточлени (табл. 1).

Т а б л и ц я 1

Представлення початкових функцій через багаточлени

$\beta_{1,0}(x) = 0$	$\beta_{2,0}(x) = \frac{x}{l}$	$\beta_{3,0}(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^2 \sum_{j=0}^s \frac{A_j}{(j+1)(j+2)} \left(\frac{x}{l}\right)^j$	$\beta_{4,0}(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^3 \sum_{j=0}^s \frac{A_j}{(j+2)(j+3)} \left(\frac{x}{l}\right)^j$
$\tilde{\beta}_{1,0}(x) = 0$	$\tilde{\beta}_{2,0}(x) = 1$	$\tilde{\beta}_{3,0}(x) = \left(\frac{x}{l}\right) \sum_{j=0}^s \frac{A_j}{j+1} \left(\frac{x}{l}\right)^j$	$\tilde{\beta}_{4,0}(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^2 \sum_{j=0}^s \frac{A_j}{j+2} \left(\frac{x}{l}\right)^j$
$\hat{\beta}_{1,0}(x) = 0$	$\hat{\beta}_{2,0}(x) = 0$	$\hat{\beta}_{3,0}(x) = 1$	$\hat{\beta}_{4,0}(x) = \frac{x}{l}$
$\hat{\beta}_{1,0}(x) = 0$	$\hat{\beta}_{2,0}(x) = 0$	$\hat{\beta}_{3,0}(x) = 0$	$\hat{\beta}_{4,0}(x) = 1$

Із формули (13) зрозуміло, що за умов (19) твірні функції також можна представити через багаточлени. Відповідні формули мають вигляд [13]:

$$\beta_{n,k}(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{4k+n-1} \sum_{j=0}^{k(p+s)+\lambda_n-n+1} c_{k,j}^{(n)} \left(\frac{x}{l}\right)^j; \tag{20}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{\beta}_{n,k}(x) &= \left(\frac{x}{l}\right)^{4k+n-2} \sum_{j=0}^{k(p+s)+\lambda_n-n+1} \frac{e_{k-1,j}^{(n)}}{4k+j+n-2} \left(\frac{x}{l}\right)^j; \\ \hat{\beta}_{n,k}(x) &= \left(\frac{x}{l}\right)^{4k+n-3} \sum_{j=0}^{k(p+s)+\lambda_n-s-n+1} \frac{d_{k-1,j}^{(n)}}{(4k+j+n-4)(4k+j+n-3)} \left(\frac{x}{l}\right)^j; \\ \hat{\beta}_{n,k}(x) &= \left(\frac{x}{l}\right)^{4k+n-4} \sum_{j=0}^{k(p+s)+\lambda_n-s-n+1} \frac{d_{k-1,j}^{(n)}}{4k+j+n-4} \left(\frac{x}{l}\right)^j, \end{aligned} \right. \quad (21)$$

де $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = s+2$; $\lambda_4 = s+3$.

Коефіцієнти наведених багаточленів визначаються за формулами:

$$c_{k,j}^{(n)} = \frac{e_{k-1,j}^{(n)}}{(4k+j+n-2)(4k+j+n-1)}, \quad (22)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad k(p+s)+\lambda_n-n+1;$$

$$e_{k-1,j}^{(n)} = \sum_{h=0}^j \frac{C_{j-h} d_{k-1,h}^{(n)}}{(4k+h+n-4)(4k+h+n-3)}, \quad d_{k-1,j}^{(n)} = \sum_{r=0}^j B_{j-r} c_{k-1,r}^{(n)},$$

де $C_{j-h} = 0$, якщо $j-h > s$, і $d_{k-1,h}^{(n)} = 0$, якщо $h > k(p+s)+\lambda_n-s-n+1$, $B_{j-r} = 0$, якщо $j-r > p$, і $c_{k-1,r}^{(n)} = 0$, якщо $r > (k-1)(p+s)+\lambda_n-n+1$; $e_{k-1,j}^{(n)}$ виражаються через значення $d_{k-1,h}^{(n)}$, які, у свою чергу, обчислюються через $c_{k-1,r}^{(n)}$.

Отже, формула (22) є рекурентним співвідношенням, за яким кожне наступне значення $c_{k,j}^{(n)}$ розраховується через попередні значення. При цьому початкові значення задаються формулами:

$$c_{0,0}^{(1)} = 1; \quad c_{0,0}^{(2)} = 1; \quad c_{0,j}^{(3)} = \frac{C_j}{(j+1)(j+2)}; \quad c_{0,j}^{(4)} = \frac{C_j}{(j+2)(j+3)}, \quad j = 0, 1, \dots, s. \quad (23)$$

Наведені в аналітичному вигляді формули для динамічних параметрів, із поясненням способу їх числової реалізації, дозволяють визначати переміщення і кути повороту $y(x, t)$, $\varphi(x, t)$ вільних динамічних коливань, а також динамічні внутрішні зусилля $M(x, t)$, $Q(x, t)$ для стрижня з довільними неперервно змінними поперечною жорсткістю і погонною масою за довільних граничних умов.

Вільні коливання стрижнів у вигляді зрізаного конуса із суцільним та порожнистим перерізом. Матеріал стрижнів будемо вважати однорідним: $E(x) = E = E_0$. Розглянемо множину консольних стрижнів із наступними законами зміни жорсткості і погонної маси вздовж їх довжини (рис. 3, 4):

$$E(x)I(x) = EI_0 \left(\alpha + (1-\alpha) \frac{x}{l} \right)^4; \quad m(x) = m_0 \left(\alpha + (1-\alpha) \frac{x}{l} \right)^2, \quad (24)$$

де α – числовий параметр, який приймає своє значення для кожного конкретного виду стрижня ($0 \leq \alpha \leq 1$).

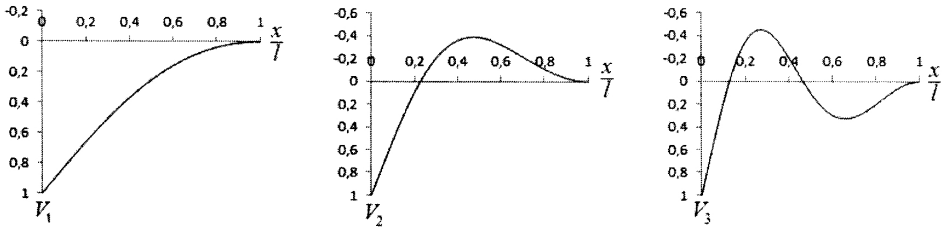


Рис. 3. Графіки законів головних форм коливань.

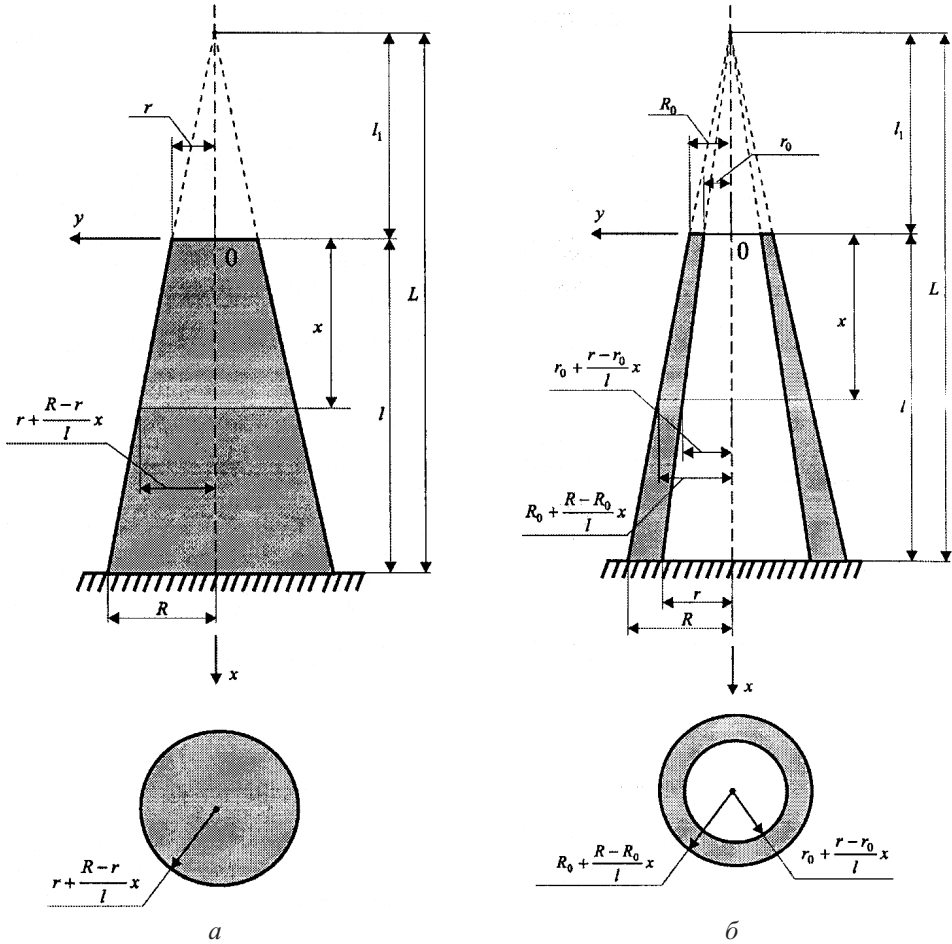


Рис. 4. Стрижень у вигляді суцільного (а) і порожнистого (б) зрізаного конуса.

У даному випадку маємо

$$C(x) = \left(\alpha + (1 - \alpha) \frac{x}{l} \right)^4, \quad B(x) = \left(\alpha + (1 - \alpha) \frac{x}{l} \right)^2. \quad (25)$$

Динамічні граничні умови на кряях стрижнів є наступними: $M(0, t) = 0$, $Q(0, t) = 0$, $y(l, t) = 0$, $\varphi(l, t) = 0$. Значення амплітудних функцій записуються анало-

гічно: $M(0)=0$, $Q(0)=0$, $v(l)=0$, $\varphi(l)=0$. Їх реалізація за допомогою формул (6), (7) дає частотне рівняння у вигляді $X_1(l)\tilde{X}_2(l)-\tilde{X}_1(l)X_2(l)=0$, або

$$\eta_0 + \eta_1 K^2 + \eta_2 K^4 + \eta_3 K^6 + \dots = 0, \tag{26}$$

де $\eta_0 = 1$; $\eta_k = \sum_{j=0}^k (\beta_{1,j}(l)\tilde{\beta}_{2,k-j}(l) - \tilde{\beta}_{1,j}(l)\beta_{2,k-j}(l))$.

Ліва частина рівняння (26) є збіжним рядом, що забезпечується рівномірною збіжністю рядів, за якими визначаються фундаментальні функції. Розв'язок такого рівняння знаходиться з лобою наперед заданою точністю методом порівняння коренів, що відповідають певній кількості утриманих членів ряду. При заданому параметрі α коефіцієнти η_k обчислювались у програмному режимі з використанням формул (19)–(23). При цьому степінь апроксимуючого багаточлена для функції $\frac{1}{C(x)}$ вибирали за умови, що коефіцієнт детермінації не повинен бути меншим за 0,999. Функція $B(x)$ у даному прикладі уже з самого початку є багаточленом.

Т а б л и ц я 2

Коефіцієнти коливань

α	K_1	K_2	K_3
0	8,7193	21,1457	38,4538
0,2	6,9982	20,5724	40,8846
0,3	5,4424	18,3927	41,9203
0,4	5,0237	19,1305	45,9274
0,5	4,6193	19,5112	48,5684
0,6	4,3181	20,0452	51,3351
0,7	4,0675	20,5582	54,0155
0,8	3,8546	21,0586	56,6286
0,9	3,6740	21,5484	59,1838
1,0	3,5160	22,0345	61,6972

Перші три коефіцієнти коливань K_j ($j = 1, 2, 3$) для деяких значень α наведено у табл. 2. Цим коефіцієнтам згідно з формулою (18) будуть відповідати наступні частоти без урахування опору:

$$\omega_j = \frac{K_j}{l^2} \sqrt{\frac{EI_0}{m_0}}, \quad j = 1, 2, 3. \tag{27}$$

Тоді для частот коливань з урахуванням опору отримаємо

$$\tilde{\omega}_j = \sqrt{\omega_j^2 - h_j^2}, \quad j = 1, 2, 3,$$

де $h_j = \frac{\alpha + \beta\omega_j^2}{2}$.

Для головних форм коливань за формулою (6) одержимо

$$v_j(x) = v_j(0) V_j\left(\frac{x}{l}\right), \quad j = 1, 2, 3,$$

де $V_j\left(\frac{x}{l}\right) = X_1(x, K_j) - \frac{X_1(l, K_j)}{X_2(l, K_j)} X_2(x, K_j)$ – безрозмірні функції, що визначають форми коливань.

На рис. 3 представлено графіки цих законів для випадку $\alpha = 0,4$.

Існує велика кількість стрижневих елементів конструкцій, для яких їх жорсткість та погонна маса описуються формулами (24). Наведемо два з них.

Перший стрижень – суцільний зрізаний конус (рис. 4,а). У цьому випадку маємо

$$\alpha = \frac{r}{R} = \frac{l_1}{L}, \quad E_0 I_0 = \frac{E \pi R^4}{4}, \quad m_0 = \rho \pi R^2,$$

де ρ – щільність матеріалу стрижня. Для нього формула (27) приймає такий вигляд:

$$\omega_j = \frac{K_j}{2l^2} R \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (28)$$

Другий стрижень – порожнистий зрізаний конус (рис. 4,б) зі змінною товщиною стінки (димова труба). У даному випадку маємо

$$\alpha = \frac{R_0}{R} = \frac{r_0}{r} = \frac{l_1}{L}, \quad E_0 I_0 = \frac{E \pi}{4} (R^4 - r^4), \quad m_0 = \rho \pi (R^2 - r^2),$$

а формулу (27) запишемо так:

$$\omega_j = \frac{K_j}{2l^2} \sqrt{(R^2 + r^2) \frac{E}{\rho}}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (29)$$

Параметр $0 \leq \alpha \leq 1$ характеризує конусність стрижнів. Для $\alpha = 0$ будемо мати гострокінцевий конус, для $\alpha = 1$ – конус вироджується у циліндр. При заданих граничних умовах коефіцієнти коливань і закони головних форм коливань залежать тільки від безрозмірних законів $C(x)$ і $B(x)$. Тому даним стрижням та іншим згідно з законами (25) будуть відповідати одні й ті ж коефіцієнти коливань K_j ($j = 1, 2, 3$), наведені в табл. 2.

У роботі [8] представлено точні значення певних числових параметрів, за якими обчислюються перші частоти вільних коливань циліндра і гострого конуса. Вони відповідно дорівнюють 3,52 і 8,71. Ці числові параметри є аналогами перших коефіцієнтів коливань для випадків $\alpha = 1$ і 0. Для порівняння в даній роботі згідно з табл. 2 отримано $K_1 = 3,5160$ і 8,7193. Таким чином, ці значення практично збігаються з приведеними в [8], які автори вважають точними.

Зауважимо, що формули (28), (29) одержано для довільних параметрів R, r . Підставимо у ці формули задані значення R, r та відповідні коефіцієнти коливань і отримаємо числові значення частот. Наприклад, для типової димової цегляної труби з вихідними даними $l = 75$ м, $R = 1,5$ м, $r = 0,7$ м, $R_0 = 0,75$ м, $r_0 = 0,35$ м, $E = 0,03 \cdot 10^{11}$ Па, $\rho = 1850$ кг/м³ будемо мати: $\alpha = 0,5$; $\omega_1 = 2,7370$ с⁻¹; $\omega_2 = 11,5606$ с⁻¹; $\omega_3 = 28,7774$ с⁻¹.

Висновки

1. Розвинуто метод прямого інтегрування, запропонований для розрахунку стрижневих систем із неперервними змінними параметрами. В аналітичному вигляді виведено необхідні формули для дослідження вільних згинних коливань прямого стрижня з довільними неперервно змінними поперечною жорсткістю та погонною масою.

2. Наведено методику числової реалізації одержаних розв'язків за довільних граничних умов на краях розглядуваних стрижнів.

3. Досліджено вільні коливання суцільного зрізаного конуса та димової труби зі змінною товщиною стінки. Наведено числові порівняння з результатами відомих розв'язків.

Резюме

Предложен расчет на колебания стержневых систем с непрерывными переменными параметрами методом прямого интегрирования. Метод базируется на аналитических решениях соответствующих дифференциальных уравнений. С использованием этого метода решается задача о свободных изгибных колебаниях прямого стержня с произвольными непрерывно переменной поперечной жесткостью и погонной массой. В аналитическом виде получены формулы для динамических параметров стержневых конструкций и приведено методику их числовой реализации. Исследованы свободные колебания усеченного конуса и дымовой трубы с переменной толщиной стенки.

1. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле / Пер. с англ. под ред. Л. Г. Корнейчука. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
2. Оно А. Vibrations of turbine blades // J. Res. Mech. Eng., Tokyo. – 1924. – 27. – P. 467–479.
3. Nicholson J. W. The lateral vibration of bars of variable section // Proc. Roy. Soc. London. – 1917. – 93A. – No. A654. – P. 506–519.
4. Писаренко Г. С., Панчин В. В. Общий случай поперечных колебаний стержня переменного сечения с учетом рассеивания энергии в материале // Рассеивание энергии при колебании упругих систем. – Киев: Наук. думка, 1966. – С. 19–31.
5. Прочность материалов и конструкций / Под ред. В. Т. Трощенко и др. – Киев: Академперіодика, 2005. – 1088 с.
6. Матвеев В. В. Демпфирование колебаний деформируемых тел. – Киев: Наук. думка, 1985. – 263 с.
7. Бабаков И. М. Теория колебаний. – М.: Дрофа, 2004. – 591 с.
8. Василенко М. В., Алексейчук О. М. Теорія коливань і стійкості руху. – Київ: Вища шк., 2004. – 525 с.
9. Зиньковский А. П., Токарь И. Г., Круц В. А. Влияние параметров локального поверхностного повреждения на собственные частоты колебаний конструктивных элементов // Пробл. прочности. – 2015. – № 2. – С. 5–11.
10. Власов В. З., Леонтьев М. М. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – М.: Госфизматлит, 1960. – 492 с.
11. Шваб'юк В. І., Ротко С. В., Гуда О. В. Коливання трансформної пластини на пружній основі під тиском рідини // Сучасні проблеми механіки і математики. В 3 т. / Під заг. ред. Р. М. Кушніра, Б. Й. Пташника. – Львів: ПІММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2013. – С. 182–184.

12. *Крутий Ю. С.* Новый метод исследования поперечных колебаний стержня с переменными непрерывно распределенными параметрами // *Строит. механика и расчет сооружений.* – 2013. – № 2. – С. 48–55.
13. *Крутий Ю. С.* Точное решение дифференциального уравнения свободных поперечных колебаний неоднородного прямого стержня переменного сечения с непрерывно распределенной переменной массой // *Там же.* – 2011. – № 5. – С. 47–53.

Поступила 15. 02. 2016