# УЗАГАЛЬНЕНЕ ВІДОКРЕМЛЕННЯ ЗМІННИХ У ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯННЯХ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ

**Ю. С. Крутій**

*Одеська державна академія будівництва та архітектури, Одеса, Україна*

yuriy.krutiy@mail.ru

Розглянуто диференціальні рівняння в частинних похідних для вимушених поздовжніх та поперечних гармонічних коливань стрижнів з урахуванням сил опору. На прикладі цих рівнянь розкрито суть запропонованого методу узагальненого розподілу змінних. Показано, що в тих випадках, коли відокремлення змінних за допомогою стандартного методу Фур'є неможливий, даний метод дозволяє перейти від рівнянь у частинних похідних до звичайних диференціальних рівнянь відносно нової невідомої комплексної функції.

**Ключові слова:** стрижень, довільні неперервні змінні параметри, вимушені гармонічні коливання, сили опору, диференціальні рівняння коливань, узагальнене відокремлення змінних.

Як відомо, проблема дослідження вимушених поздовжніх та поперечних гармонічних коливань стрижнів з урахуванням сил опору зводиться до розв'язання відповідних диференціальних рівнянь у частинних похідних. Вигляд цих рівнянь може бути різним, залежно від способу врахування внутрішнього та зовнішнього опорів. Однак для цілей даної статті вказана обставина не має принципового значення.

Заради визначеності для обох опорів припускаємо частотно-незалежне тертя. При цьому для врахування внутрішнього непружного опору матеріалу застосуємо скоректовану гіпотезу Кельвіна — Фойгта, а для врахування зовнішнього тертя скористаємось гіпотезою, згідно з якою сила опору пропорційна масі стрижня і швидкості. У такому випадку рівняння для поздовжніх та поперечних коливань стрижня, з довільною неперервною змінною жорсткістю й довільною неперервно розподіленою змінною погонною масою, відповідно матимуть вигляд (Василенко & Алексейчук, 2004):

$$m(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\nu\theta m(x)\frac{\partial u}{\partial t}-\left(1+\frac{\gamma}{\theta}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(E(x)F(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)=q(x)\sin\theta t; \qquad (1)$$

$$m(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\nu\theta m(x)\frac{\partial y}{\partial t}+\left(1+\frac{\gamma}{\theta}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(E(x)I(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)=q(x)\sin\theta t, \qquad (2)$$

де $u=u(x,t)$, $y=y(x,t)$ — поздовжнє та поперечне переміщення точки осі стрижня з координатою $x$ у момент часу $t$;

$m(x)$ — інтенсивність розподіленої маси (погонна маса) стрижня;

$E(x)$ — модуль пружності матеріалу;

$F(x)$ — площа поперечного перерізу стрижня;

$I(x)$ — момент інерції поперечного перерізу стрижня;

$q(x)$ — неперервна амплітудна функція навантаження;

$\theta$ — частота змушувальної сили;

$\gamma$ — безрозмірний коефіцієнт непружного опору матеріалу стрижня;

$\nu$ — безрозмірний коефіцієнт непружного опору середовища.

Для усталених вимушених гармонічних коливань без урахування опору, тобто коли $\gamma = \nu = 0$, фаза коливань збігається з фазою змушувального навантаження. У такому випадку кожне з рівнянь (1), (2) допускає відокремлення змінних за стандартною процедурою методу Фур'є, що приводить до двох звичайних диференціальних рівнянь відносно функції часу та амплітудної функції переміщення. При урахуванні сил опору фаза коливань уже не буде збігатися з фазою навантаження, що унеможливлює розподіл відокремлення в рівняннях (1), (2) за допомогою методу Фур'є.

Пропонується розв'язок рівнянь (1), (2) шукати з узагальненим розподілом змінних наступного виду:

$$u(x,t) = u_1(x)\sin\theta t + u_2(x)\cos\theta t; \tag{3}$$

$$y(x,t) = y_1(x)\sin\theta t + y_2(x)\cos\theta t, \tag{4}$$

де $u_j(x),\ y_j(x)\ (j = 1,2)$ — невідомі функції, які залежать тільки від змінної $x$. Тоді, підставляючи в рівняння (1), (2) замість невідомих функцій $u(x,t),\ y(x,t)$ їх значення (3), (4) і зібравши подібні при $\sin\theta t$ та $\cos\theta t$, будемо мати:

$$\Big[(E(x)F(x)\,u_1'(x))' + \theta^2 m(x)(u_1(x) + \nu\, u_2(x)) - \gamma(E(x)F(x)\,u_2'(x))' + q(x)\Big]\sin\theta t +$$

$$+\Big[(E(x)F(x)\,u_2'(x))' + \theta^2 m(x)(u_2(x) - \nu\, u_1(x)) + \gamma(E(x)F(x)\,u_1'(x))'\Big]\cos\theta t = 0;$$

$$\Big[(E(x)I(x)y_1''(x))'' - \theta^2 m(x)(y_1(x) + \nu y_2(x)) - \gamma(E(x)I(x)y_2''(x))'' - q(x)\Big]\sin\theta t +$$

$$+\Big[(E(x)I(x)y_2''(x))'' - \theta^2 m(x)(y_2(x) - \nu y_1(x)) + \gamma(E(x)I(x)y_1''(x))''\Big]\cos\theta t = 0.$$

Два останні рівняння мають задовольнятись для будь-яких значень часу. Зважаючи на лінійну незалежність тригонометричних функцій, цього можна досягти тільки прирівнявши до нуля множники при $\sin\theta t$ та $\cos\theta t$. У підсумку матимемо такі дві системи диференціальних рівнянь:

$$-\begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (E(x)F(x)u_1'(x))' \\ (E(x)F(x)u_2'(x))' \end{pmatrix} = \theta^2 m(x)\begin{pmatrix} 1 & \nu \\ -\nu & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q(x) \\ 0 \end{pmatrix}; \tag{5}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (E(x)I(x)y_1''(x))'' \\ (E(x)I(x)y_2''(x))'' \end{pmatrix} = \theta^2 m(x)\begin{pmatrix} 1 & \nu \\ -\nu & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q(x) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Матриці, що фігурують у запису систем, одним і тим же перетворенням подібності зводяться до діагонального виду:

$$S^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}S = \begin{pmatrix} 1 + i\gamma & 0 \\ 0 & 1 - i\gamma \end{pmatrix};$$

$$S^{-1}\begin{pmatrix} 1 & \nu \\ -\nu & 1 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 1 - i\nu & 0 \\ 0 & 1 + i\nu \end{pmatrix},$$

де

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix},$$

$i$ — уявна одиниця. Унаслідок цього після підстановок

$$\begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} U(x) \\ \overline{U(x)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} Y(x) \\ \overline{Y(x)} \end{pmatrix}$$

кожна із систем (5), (6) зводиться до двох самостійних рівнянь відносно нових невідомих комплексних функцій

$$U(x) = \frac{u_1(x) + iu_2(x)}{2}, \ \overline{U(x)} = \frac{u_1(x) - iu_2(x)}{2}, \tag{7}$$

$$Y(x) = \frac{y_1(x) + iy_2(x)}{2}, \ \overline{Y(x)} = \frac{y_1(x) - iy_2(x)}{2}, \tag{8}$$

де риска означає комплексне спряження.

Перші рівняння запишуться так:

$$(E(x)F(x)U'(x))' + \lambda^2 m(x)U(x) = -\frac{q(x)}{2(1+i\gamma)}; \tag{9}$$

$$(E(x)I(x)Y''(x))'' - \lambda^2 m(x)Y(x) = \frac{q(x)}{2(1+i\gamma)}, \tag{10}$$

де

$$\lambda^2 = \theta^2 \frac{1 - i\nu}{1 + i\gamma}.$$

При цьому другі рівняння будуть комплексним спряженням перших і тому розглядати їх окремо немає сенсу. При наявності розв’язків перших рівнянь $U(x)$ та $Y(x)$, розв’язками других будуть $\overline{U(x)}$ та $\overline{Y(x)}$.

Після розв’язання рівнянь (9), (10), згідно з формулами (7), (8) матимемо:

$$u_1(x) = 2\,\mathrm{Re}\,U(x), \ u_2(x) = 2\,\mathrm{Im}\,U(x);$$

$$y_1(x) = 2\,\mathrm{Re}\,Y(x), \ y_2(x) = 2\,\mathrm{Im}\,Y(x).$$

Тоді розв’язки вихідних рівнянь знаходимо за формулами (3), (4):

$$u(x,t) = 2(\mathrm{Re}\,U(x)\,\sin\theta t + \mathrm{Im}\,U(x)\,\cos\theta t);$$

$$y(x,t) = 2(\mathrm{Re}\,Y(x)\,\sin\theta t + \mathrm{Im}\,Y(x)\,\cos\theta t).$$

Наприкінці зауважмо, що в роботі Крутій (2016) побудовано точні розв’язки рівнянь (9), (10) при довільних неперервних змінних коефіцієнтах.

## Список літератури

Василенко, М. В., & Алексейчук, О.М. (2004). *Теорія коливань і стійкості руху*. Київ: Вища школа.

Крутій, Ю. С. (2016) *Розробка методу розв'язання задач стійкості і коливань деформівних систем зі змінними неперервними параметрами.* (Дис. докт. техн. наук). Луцький національний технічний університет, Луцьк.