

**Дорофеев В.С., Ковров А.В., Ковтуненко А.В.**

**РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ  
ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ РАМНЫХ КОНСТРУКЦИЙ  
С УЧЕТОМ ТРЕЩИНООБРАЗОВАНИЯ**

**Одесса  
Эвен  
2013**

УДК 624.012.45

ББК 38.53

Д 69

**Дорофеев В.С., Ковров А.В., Ковтуненко А.В.**

Д 69 Расчет статически неопределимых железобетонных рамных конструкций с учетом трещинообразования: Монография. – Одесса: Эвен, 2013. – 146 с.

**ISBN**

Монография посвящена разработке методик определения напряженно-деформированного состояния и несущей способности статически неопределимых железобетонных рамных конструкций с учетом трещинообразования, основанных на подходах деформационной теории.

Предназначена для студентов и аспирантов высших технических учебных заведений, научных и инженерно технических работников проектных и строительных организаций.

Рецензенты: Заместитель директора по научной работе Государственного предприятия «КрымНИИпроект», доктор технических наук, старший научный сотрудник  
**В.С.Кукунаев**  
Профессор кафедры автомобильного транспорта Одесского государственного политехнического университета, доктор технических наук, профессор  
**В.Ф.Оробей**

*Рекомендовано к изданию Ученым Советом Одесской государственной академии строительства и архитектуры. Протокол № 6 от 28 февраля 2013 г.*

© Дорофеев В.С.,  
Ковров А.В.,  
Ковтуненко А.В., 2012

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
1 СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЙ.....	7
1.1 Основные методы расчета статически неопределимых рамных конструкций.....	8
1.2 Методы определения напряженно-деформированного состояния изгибаемых железобетонных элементов с учетом нелинейной работы материалов.....	14
1.3 Методы расчета статически неопределимых железобетонных рамных конструкций с учетом трещинообразования.....	23
1.4 Теоретические основы численно-аналитического метода граничных элементов для решения задач о напряженно-деформированном состоянии статически неопределимых рамных конструкций.....	27
2 ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ РАМНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ПОМОЩИ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.....	32
2.1 Правила формирования расчетной схемы статически неопределимых рамных конструкций.....	32
2.2 Определение внутренних усилий и перемещений.....	34
2.2.1 Формирование уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние.....	34
2.2.2 Алгоритм нахождения внутренних усилий и перемещений..	36
2.2.3 Автоматизация формирования матриц граничной задачи при определении внутренних усилий и перемещений.....	40
2.3 Сопоставление результатов расчетов.....	52
3 МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ СЕЧЕНИЙ ИЗГИБАЕМЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.....	56

3.1	Модель деформирования изгибаемых железобетонных элементов.....	56
3.2	Построение диаграмм «изгибающий момент – кривизна» с использованием шагово-итерационного метода.....	65
3.3	Анализ влияния процента армирования и прочности бетона на работу изгибаемых железобетонных элементов.....	76
4	ПОСТРОЕНИЕ ЛИНЕАРИЗИРОВАННЫХ ДИАГРАММ «ИЗГИБАЮЩИЙ МОМЕНТ – КРИВИЗНА».....	79
4.1	Определение ключевых точек линеаризированных диаграмм «изгибающий момент – кривизна».....	79
4.2	Алгоритм построения линеаризированных диаграмм «изгибающий момент – кривизна».....	101
5	РАСЧЕТ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ РАМНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ ТРЕЩИНООБРАЗОВАНИЯ.....	108
5.1	Учет трещинообразования в элементах рамных железобетонных конструкций.....	108
5.2	Пример расчета П-образной железобетонной рамной конструкции с учетом трещинообразования.....	112
5.3	Анализ напряженно-деформированного состояния и несущей способности многоэтажной многопролетной рамной конструкции.....	118
	ЛИТЕРАТУРА.....	131

## ВВЕДЕНИЕ

В современном строительстве промышленных и гражданских зданий широко применяются железобетонные конструкции. При этом все большее количество жилых и общественных зданий имеют каркасную систему и возводятся с применением монолитного железобетона.

Особенностью работы конструкций, выполненных из железобетона, является образование трещин, которые существенно влияют на формирование их напряженно-деформированное состояние.

Созданию и развитию методов расчета каркасов железобетонных зданий посвящены работы Е.М.Бабича, А.Н.Бамбуры, В.Н.Байкова, В.Я.Бачинского, В.М.Бондаренко, В.С.Верещагина, А.А.Гвоздева, А.Б.Гольшева, А.А.Дыховичного, А.С.Залесова, А.А.Кальницкого, Н.И.Карпенко, Л.Р.Маиляна, В.И.Мурашева, Я.М.Немировского, И.Е.Прокоповича, Й.Ракосника, М.Тихого и многих других.

В действующих нормативных документах расчет железобетонных конструкций рекомендуется производить с использованием деформационного метода. В связи с этим необходимо развитие и совершенствование методик расчета железобетонных статически неопределимых конструкций, позволяющих учитывать влияние образования нормальных трещин на формирование напряженно-деформированного состояния конструкции в целом.

На сегодняшний день существуют различные методы расчета стержневых статически неопределимых конструкций. Одним из них является численно-аналитический метод граничных элементов, позволяющий учитывать в процессе расчета изменение жесткостей отдельных железобетонных элементов.

Вышеизложенное свидетельствует о том, что разработка методик определения напряженно-деформированного состояния железобетонных рамных конструкций, основанных на численно-аналитическом методе

граничных элементов, позволяющих исследовать работу систем вплоть до предельного состояния и соответствующих физическому характеру их работы, является задачей актуальной и необходимой для последующего развития теории расчета статически неопределимых железобетонных конструкций.

В диссертационной работе ставится цель создания методики оценки напряженно-деформированного состояния и несущей способности железобетонных рамных конструкций при кратковременном действии нагрузок с учетом реальной работы материалов.

## 1 СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЙ

Для расчета стержневых статически неопределимых конструкций в практике проектирования в основном применяются методы строительной механики упругих систем. Считается, что жесткости отдельных элементов таких систем не зависят от величины усилий и продолжительности воздействий. В действительности, в элементах железобетонных конструкций с обычной и даже предварительно напряженной арматурой при усилиях, соответствующих эксплуатационной стадии работы, возникают трещины. Естественно, что как появление трещин, так и их развитие связаны с величиной и характером распределения внутренних усилий. Поэтому сразу же после приложения нагрузки железобетонная стержневая система оказывается как бы состоящей из неоднородных стержней. Эта неоднородность связана с тем, что имеются участки без трещин и с трещинами, при чем на последних степень трещинообразования по длине различна. Поскольку развитие трещинообразования зависит от уровней внутренних усилий, то жесткости поперечных сечений стержней оказываются связанными с величинами этих усилий. Накопленный экспериментальный и теоретический материал отчетливо показывает, что эта связь является нелинейной.

Из всего сказанного ясно, что уже в условиях кратковременного действия нагрузки железобетонные стержневые конструкции должны рассматриваться как системы, состоящие из стержней, обладающих переменными жесткостями; величины этих жесткостей нелинейно связаны с величинами действующих внутренних усилий. Очевидно, что в железобетонной статически неопределимой стержневой системе процесс формирования усилий неразрывно связан с процессом образования и раскрытия трещин. В условиях длительных воздействий все это осложняется

наличием ползучести бетона, приводящей к различным изменениям жесткостей отдельных стержней и их участков.

Таким образом, для создания методики расчета железобетонных стержневых статически неопределимых систем необходимо:

- наличие теоретически обоснованного и экспериментально проверенного метода определения усилий и перемещений в стержнях;
- разработка методики расчета системы, состоящей из стержней с жесткостями переменными по длине и нелинейно зависящими от внутренних усилий.

### **1.1 Основные методы расчета статически неопределимых рамных конструкций**

Железобетонные статически неопределимые рамные конструкции, обычно, в проектной практике рассчитывают как упругие системы, принимая, что бетон и арматура под нагрузкой работают как абсолютно упругие материалы, а в элементах конструкции в растянутых зонах трещины не образуются.

Расчет рамных конструкций, как правило, выполняют методом сил либо перемещений [38, 101].

Основной системой метода сил является неизменяемая и статически определимая (хотя это и не обязательно) система, полученная из заданной путем устранения всех «лишних» связей. Степень статической неопределимости рамной конструкции определяется разностью между числом неизвестных усилий в сооружении и числом независимых уравнений статики, которые можно составить при расчете этого сооружения.

Наиболее оптимальным является выбор основной системы с разрезанными ригелями в каждом пролете на всех этажах (рис.1.1).



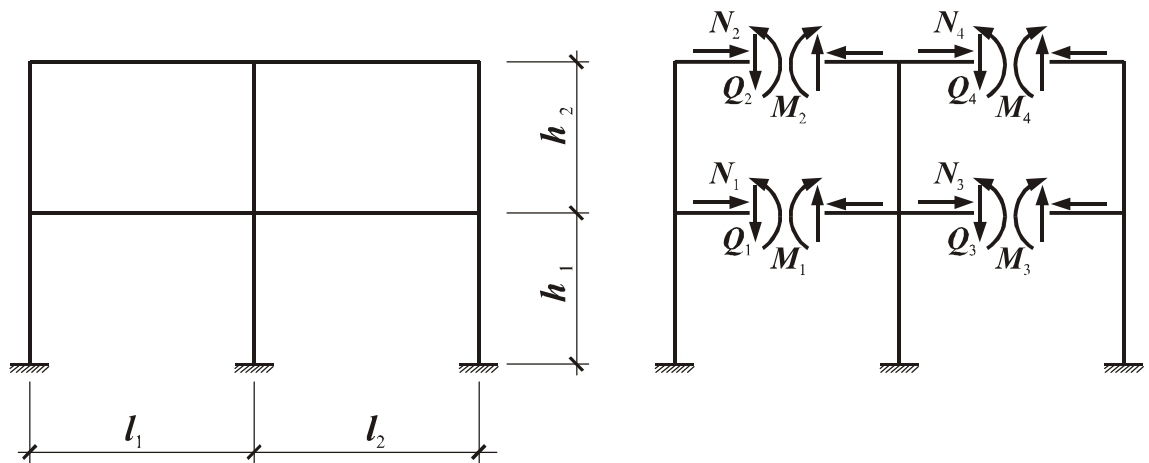


Рис.1.1 Основная система метода сил

«Лишними» неизвестными в этом случае служат продольные  $N_i$  и поперечные  $Q_i$  силы и изгибающие моменты  $M_i$  в сечениях ригелей ( $i=1,2,\dots,n$ ).

Неизвестные усилия определяются из условия равенства нулю перемещения по направлению любой из  $n$  отброшенных связей на основании закона независимости действия сил, которое может быть представлено в следующем виде:

$$\Delta_i = \Delta_{i1} + \Delta_{i2} + \dots + \Delta_{i,n-1} + \Delta_{in} + \Delta_{ip} = 0, \quad (1.1)$$

где первые индексы означают направление перемещения, а вторые – указывают на причины, вызвавшие перемещения.

Если обозначить реакцию связи  $k$  через  $X_k$  и выразить перемещения  $\Delta_{ik}$  через единичные перемещения с помощью равенства  $\Delta_{ik} = X_k \delta_{ik}$ , то условие (1.1) запишется в следующем виде:

$$\Delta_i = X_1 \delta_{i1} + X_2 \delta_{i2} + \dots + X_{n-1} \delta_{i,n-1} + X_n \delta_{in} + \Delta_{ip} = 0. \quad (1.2)$$

Таким образом, определение неизвестных усилий метода сил сводится к решению системы  $n$  линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned}
 X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \dots + X_{n-1} \delta_{1,n-1} + X_n \delta_{1n} + \Delta_{1p} &= 0; \\
 X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \dots + X_{n-1} \delta_{2,n-1} + X_n \delta_{2n} + \Delta_{2p} &= 0; \\
 \dots & \\
 X_1 \delta_{n-1,1} + X_2 \delta_{n-1,2} + \dots + X_{n-1} \delta_{n-1,n-1} + X_n \delta_{n-1,n} + \Delta_{n-1,p} &= 0; \\
 X_1 \delta_{n,1} + X_2 \delta_{n,2} + \dots + X_{n-1} \delta_{n,n-1} + X_n \delta_{n,n} + \Delta_{n,p} &= 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Полученная система канонических уравнений дает возможность определить все неизвестные.

Характерным признаком метода сил является значительная трудоемкость, связанная как с построением единичных и грузовой эпюр (определение опорных реакций и ординат эпюр в характерных сечениях), так и с вычислением коэффициентов канонических уравнений путем перемножения эпюр. Эти недостатки в значительной степени отсутствуют в методе перемещений, особенно при расчетах рамных систем.

Неизвестными в методе перемещений являются углы поворота жестких узлов и независимые линейные перемещения всех узлов системы. В методе перемещений также используется основная система, которая создается наложением связей на исходную систему (рис.1.2).

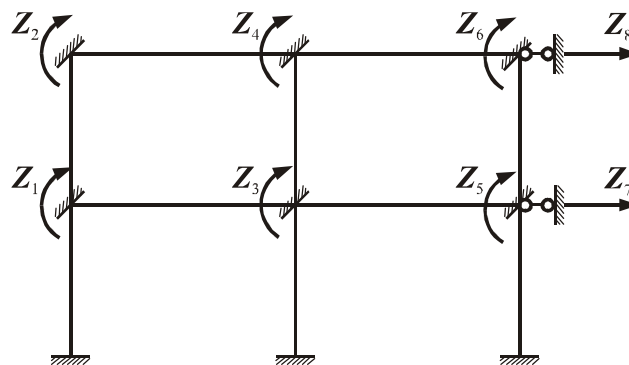


Рис.1.2. Основная система метода перемещений

При этом неизвестные перемещения находят из условия равенства нулю в основной системе реакций наложенных связей, которое записывается

аналогично условию равенства нулю перемещений в направлении отброшенных связей метода сил следующим образом:

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_{i_1} + \mathbf{R}_{i_2} + \dots + \mathbf{R}_{i_{n-1}} + \mathbf{R}_{i_n} + \mathbf{R}_{i_p} = 0. \quad (1.4)$$

Если обозначить перемещение связи  $k$  через  $\mathbf{Z}_k$  и выразить реакции  $\mathbf{R}_{ik}$  через единичные с помощью равенства  $\mathbf{R}_{ik} = \mathbf{Z}_k \mathbf{r}_{ik}$ , то условие (1.4) запишется в следующем виде:

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{Z}_1 \mathbf{r}_{i1} + \mathbf{Z}_2 \mathbf{r}_{i2} + \dots + \mathbf{Z}_{n-1} \mathbf{r}_{i,n-1} + \mathbf{Z}_n \mathbf{r}_{in} + \mathbf{R}_{ip} = 0. \quad (1.5)$$

Определение неизвестных перемещений сводится к решению системы  $n$  линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Z}_1 \mathbf{r}_{11} + \mathbf{Z}_2 \mathbf{r}_{12} + \dots + \mathbf{Z}_{n-1} \mathbf{r}_{1,n-1} + \mathbf{Z}_n \mathbf{r}_{1n} + \mathbf{R}_{1p} &= 0; \\ \mathbf{Z}_1 \mathbf{r}_{21} + \mathbf{Z}_2 \mathbf{r}_{22} + \dots + \mathbf{Z}_{n-1} \mathbf{r}_{2,n-1} + \mathbf{Z}_n \mathbf{r}_{2n} + \mathbf{R}_{2p} &= 0; \\ \dots & \\ \mathbf{Z}_1 \mathbf{r}_{n-1,1} + \mathbf{Z}_2 \mathbf{r}_{n-1,2} + \dots + \mathbf{Z}_{n-1} \mathbf{r}_{n-1,n-1} + \mathbf{Z}_n \mathbf{r}_{n-1,n} + \mathbf{R}_{n-1,p} &= 0; \\ \mathbf{Z}_1 \mathbf{r}_{n,1} + \mathbf{Z}_2 \mathbf{r}_{n,2} + \dots + \mathbf{Z}_{n-1} \mathbf{r}_{n,n-1} + \mathbf{Z}_n \mathbf{r}_{n,n} + \mathbf{R}_{n,p} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

В методе перемещений приняты такие предположения:

- расстояние между конечными точками стержня после нагрузки принимается, равным длине стержня до нагрузки;
- система является линейно-упругой;
- имеет место принцип независимости как силовых, так и кинематических действий.

Методы сил и перемещений эффективны для расчетов разных видов систем: чем меньше связей имеет система, тем более эффективным есть применение для ее расчетов метода сил и наоборот, чем больше связей имеет система, тем более эффективным является расчет ее методом перемещений.

В то же время применение методов сил и перемещений ограничивает глубину усложнения учитываемых свойств конструкций.

Современные численные методы позволяют использовать уточненные расчетные схемы, более полно учитывающие процессы, протекающие при деформировании. Математические модели таких расчетных схем, как правило, сводятся к решению задачи Коши: решению линейного неоднородного дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям. Решение задачи Коши может быть найдено при помощи обобщенного метода начальных параметров, метода Рунге, метода Бунднова-Галеркина, метода сеток, метода коллокаций, метода конечных элементов и других [66, 109].

Наибольшее распространение в инженерной практике имеет метод конечных элементов [52, 53, 66, 91, 109], который основывается на дискретизации исходной системы на отдельные фрагменты конечных размеров. После выбора дискретной расчетной схемы ее можно рассчитывать на основе любого из методов строительной механики. На данный момент чаще всего используется метод конечных элементов на основе метода перемещений.

В приложении к расчету стержневых систем метод конечных элементов полностью соответствует матричной форме метода перемещений.

Основными неизвестными метода конечных элементов являются узловые перемещения, т.е. линейные перемещения и углы поворотов узловых точек.

После деления конструкции на элементы составляются исходные матрицы метода перемещений. После составления исходных матриц расчет сводится к последовательному выполнению матричных операций по формуле:

$$S_F = S_F^0 - ka(a^* ka)^{-1} R_0, \quad (1.7)$$

где:  $k$  – квазидиагональная матрица жесткости не объединенных между собой элементов;

$a$  – матрица углов поворота сечений на концах стержней от единичных перемещений по направлению дополнительных связей;

$R_0$  – матрица свободных членов, которые представляют собой реакции в дополнительных связях, зависящие от внешних воздействий на заданную систему;

$S_F^0$  – матрица усилий в расчетных сечениях основной системы от внешней нагрузки

Распределенная нагрузка для каждого элемента заменяется эквивалентной узловой из условий равенства возможных работ узловых сил и заданной распределенной нагрузки на принятых перемещениях и составляются

Для практической реализации метода конечных элементов создано достаточно распространенное программное обеспечение в виде программных комплексов «ЛИРА», «SCAD», «ANSYS» и др.

Основным недостатком метода конечных элементов является численная аппроксимация дифференциальных зависимостей, описывающих напряженно-деформированное состояние конструкции. В ряде случаев целесообразно использовать методы граничных элементов [3, 67, 87, 110], понижая мерность исходной краевой задачи, перейдя к рассмотрению системы обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных путем интегрирования основного уравнения. При этом возникает возможность отнести систему полученных уравнений к границам рассматриваемой области, которая рассматривается как один сложный элемент.

Также к недостаткам отнести большой объем подготовительных операций, связанных с преобразованием матриц при переходе от локальных систем координат отдельного элемента к системе координат для узла или всей конструкции в целом, что усложняет процесс алгоритмизации.

## 1.2 Методы определения напряженно-деформированного состояния изгибаемых железобетонных элементов с учетом нелинейной работы материалов

Изучению напряженно-деформированного состояния и деформативности железобетонных стержней посвящены работы В.Н.Байкова [4, 6], В.М.Бондаренко [15, 17, 18, 20], А.А.Гвоздева [28, 30], А.Б.Гольшева [34], С.Гощинского [144], В.И.Мурашева [82], Я.М.Немировского [83], И.Е.Прокоповича [92, 93, 95 ... 97, 99], И.И.Темнова [111], И.И.Улицкого [120, 121], В.И.Шатохина [128, 129], В.Г.Щелкунова [132], А.Ф.Яременко [133, 134, 136, 138] Р.Ясинского [145] и многих других.

Основы современной теории изгиба железобетонных стержней, работающих с трещинами в растянутой зоне, сформулированы В.И.Мурашевым [82]. В этой теории особенности деформаций железобетонного стержня, имеющего трещины в растянутой зоне, учитываются с помощью коэффициентов  $\psi_s$ ,  $\psi_b$ ,  $\nu$ .

Коэффициент  $\psi_s$ , равный отношению средних деформаций растянутой арматуры к деформациям в сечении с трещиной, учитывает влияние растянутого бетона на средние деформации арматуры;  $\psi_b$ , равный отношению средних деформаций бетона сжатой зоны к деформациям бетона над трещиной, учитывает неравномерность деформаций сжатой зоны. Коэффициент упругости бетона  $\nu$ , равный отношению упругих деформаций к полным деформациями сжатой зоны, учитывает пластические деформации бетона и отклонение фактической формы эпюры напряжений бетона сжатой зоны от принятой прямоугольной.

В СНиП [105] принята методика определения кривизн, разработанная под руководством А.А.Гвоздева на основе теории В.И.Мурашева.

Есть предложения рассматривать вопросы расчета железобетонных статически неопределимых систем с учетом неупругих деформаций на основе непрерывной на всех стадиях зависимости «момент - кривизна».

Для определения кривизны на участках с трещинами применяются способы, которые можно подразделить на две группы.

К первой группе относятся способы, в которых для определения кривизны используются значения различных параметров, величины которых определяются по таблицам.

И.К.Никитиным [86] предложена зависимость:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{pbh_0^3 E_b}, \quad (1.8)$$

где  $p = f[z, \mu n, j(j')]$ .

В этой зависимости коэффициент  $p$  определяется путем интерполяции по параметрам  $\mu n, j(j')$  и  $z$ .

В.И.Кузнецов в работе [72] предложил формулу:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M^* t}{100bh^3}, \quad (1.9)$$

где  $t = f(\mu, R, R_s, z = M \ln / M_{ser}^*)$ , по которой можно определять кривизну изгибаемых элементов прямоугольного или таврового (при  $x < h'_f$ ) сечений. Значение коэффициента  $t$  определяется по графикам, что ограничивает его применение.

Ко второй группе относятся способы определения кривизны на основе зависимостей «изгибающий момент - кривизна», получаемый интерполяцией характерных точек этой кривой. К ним относятся методики С.Ю.Цейтлина, И.К.Белоброва, Л.Л.Лемьша и И.К.Никитина.

С.Ю.Цейтлин [123] предложил формулу для определения кривизны при кратковременном действии нагрузки

$$\frac{1}{\rho_{sh}} = \frac{1}{\rho_u} - \sqrt{\frac{M_u - M}{M_u - M_{ser}}} \left( \frac{1}{\rho_u} - \frac{1}{\rho_{crc}} \right), \quad (1.10)$$

где  $1/\rho_{crc}$  и  $1/\rho_u$  – кривизна в моменты появления первой трещины и разрушения балки;

$M_{crc}$  и  $M_u$  – соответственно изгибающие моменты трещинообразования и разрушения;

$\theta$  – коэффициент, значения которого приводятся в табличной форме.

В работе [127] Г.С.Чобаном предложена зависимость «изгибающий момент - жесткость» в форме:

$$B = B_{crc} (M_{crc} / M)^m, \quad (1.11)$$

где  $M$  – изгибающий момент от внешней нагрузки с учетом кратковременного или длительного характера ее действия;

$B$  – жесткость сечения, соответствующая этому изгибающему моменту и времени выдержки элемента под нагрузкой;

$m$  – показатель степени, постоянный для каждого отдельного элемента при фиксированных характеристиках начала и длительности действия нагрузки.

Преимуществом функции (1.11) является то, что она в интегральной форме связывает внешнюю нагрузку с жесткостью сечений при помощи одного параметра  $m$ , численные значения которого зависят от прочностных и деформативных свойств исходных материалов, содержания рабочей арматуры, а также длительности действия нагрузки.

Исследования, приведенные в работах И.В.Грищенко, А.А.Дыховичного, Я.Д.Лифшица [36, 37, 44, 76] показали, что кривую  $1/\rho = f(M, N)$  достаточно хорошо можно аппроксимировать полиномом вида:



$$\frac{1}{\rho} = \alpha M + \beta M^2 \operatorname{sgn} M, \quad (1.12)$$

где  $\alpha = [E_{np}]^{-1}$  – упругая гибкость сечения;

$\beta$  – параметр, определяемый путем аппроксимации функции  $1/\rho = f(M, N)$  параболой второго порядка при  $M=(0,5 \dots 0,7)M_p$  и учитывающий влияние продольных сил;

$\operatorname{sgn} M$  – функция, учитывающая изменение знака кривизны при изменении направления изгибающих моментов.

Возможность практического применения этой зависимости при расчете статически неопределимых систем подтверждается сопоставлениями с экспериментальными данными. Однако в настоящее время этот способ недоработан до практического применения, поскольку отсутствуют рекомендации по определению соответствующих коэффициентов.

Определению изгибной и сдвиговой жесткостей железобетонных конструкций с трещинами при расчете зданий на статические и сейсмические воздействия посвящены исследования под руководством А.Я.Барашикова [10, 11].

Основой современных норм проектирования является деформационная модель работы элементов, развитию которой посвящены работы А.С.Залесова [48 ... 51], Л.Л.Паньшина, М.В.Крашенинникова [89], С.И.Рогового [102], И.А.Узуна [118, 119], В.С.Шмуклера, И.Я.Лучковского [131]. Эта модель основана на синтезе следующих сторон:

- статическая – равновесие внешних и внутренних усилий;
- геометрическая – условие деформирования в виде гипотезы плоских сечений;
- физическая – полные диаграммы, связывающие между собой деформации и напряжения в бетоне и арматуре вплоть до разрушения.

Изучением диаграмм деформирования бетона занимались многие исследователи: В.Н.Байков [5], А.Н.Бамбура [7, 8], В.Ю.Барданов [43], В.Я.Бачинский [80], В.М.Бондаренко [16], В.С.Дорофеев, А.А.Гвоздев [24, 26, 27], А.С.Залесов [46, 47], Н.И.Карпенко, Т.А.Мухамедиев [57, 58], Л.Р.Маилян [77], К.В.Михайлов [81], Б.С.Расторгуев [100], И.А.Узун [114 ... 119], В.П.Чайка [124, 125] и другие.

Однако, как отмечал А.Н.Бамбура в работе [8], большинство функций хорошо описывают деформирование бетона только на восходящем участке, другие аппроксимируются по частям, при этом первые производные в точке пересечения двух кривых разные.

В.Я.Бачинским и А.Н.Бамбурой [7, 8, 80] диаграмму деформирования бетона предлагается описывать при помощи полинома пятой степени, имеющего вид:

$$\sigma_b = R_b \sum_{k=1}^5 a_k \left( \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_{bR}} \right)^k, \quad (1.13)$$

где  $\sigma_b$  – напряжения в бетоне;

$R_b$  – прочность бетона при осевом сжатии;

$\varepsilon_b$  – деформации бетона, соответствующие напряжению  $\sigma_b$ ;

$\varepsilon_{bR}$  – максимальная деформация, соответствующая  $R_b$ ;

$a_k$  – коэффициенты полиномиальной зависимости, определяемые по формулам:

$$a_1 = 1,1 \frac{E_b \varepsilon_{bR}}{R_b}; \quad (1.14)$$

$$a_2 = 1 - a_1 - a_3 - a_4 - a_5; \quad (1.15)$$

$$a_3 = a_1 - 2a_4 - 3a_5 - 2; \quad (1.16)$$

$$a_4 = \frac{F_1 - 2a_5(10\gamma^3 - 9\gamma + 2)}{2(6\gamma^2 - 6\gamma + 1)}; \quad (1.17)$$

$$a_5 = \frac{F_1 (\gamma - 1)^2 \gamma^2 - F_2}{2\gamma^2 F_3}; \quad (1.18)$$

здесь  $F_1 = k - 2a_1(3\gamma - 2) + 12\gamma - 6$ ;

$$F_2 = 2[\beta + a_1\gamma(2\gamma - \gamma^2 - 1) + \gamma^2(2\gamma - 3)](6\gamma^2 - 6\gamma + 1);$$

$$F_3 = (10\gamma^3 - 9\gamma + 2)(\gamma - 1)^2 - (\gamma^3 - 3\gamma + 2)(6\gamma^2 - 6\gamma + 1);$$

$$\gamma = \frac{\varepsilon_{bu}}{\varepsilon_{bR}}; \quad k = 2,7 \frac{\varepsilon_{bu}}{\varepsilon_{bR}} - 6,1 - \frac{0,005}{\left(\frac{\varepsilon_{bu}}{\varepsilon_{bR}} - 1\right)^2}.$$

В работах [7, 8, 80] приведены параметры диаграмм деформирования арматуры, имеющей и не имеющей площадку текучести.

В европейских нормативных документах [140] зависимость напряжений от деформаций бетона при кратковременном сжатии рекомендуется описывать при помощи следующей формулы:

$$\frac{\sigma_b}{R_b} = \frac{k \varepsilon_b / \varepsilon_{bR} - (\varepsilon_b / \varepsilon_{bR})^2}{1 + (k - 2) \varepsilon_b / \varepsilon_{bR}}, \quad (1.19)$$

где  $\sigma_b$  – напряжения в бетоне;

$R_b$  – прочность бетона при осевом сжатии;

$\varepsilon_b$  – деформации бетона, соответствующие напряжению  $\sigma_b$ ;

$\varepsilon_{bR}$  – максимальная деформация, соответствующая  $R_b$ ;

$k$  – коэффициент, характеризующий упругопластические свойства бетона и определяемый по формуле:

$$k = 1,1 \frac{E_b \varepsilon_{bR}}{R_b}. \quad (1.20)$$

Действующими нормативными документами Украины [13] для описания диаграммы деформирования бетона рекомендуется использовать формулы

(1.13) и (1.19). При этом допускается использование и других научно обоснованных зависимостей.

Развитию методов определения напряженно-деформированного состояния стержневых железобетонных элементов на основе деформационной модели посвящены работы, выполняемые под руководством Е.М.Бабича, Г.Х.Масюка, Л.Р.Маиляна [1, 2, 55, 78, 79] и других ученых.

В работах [78, 79] разработана методика построения диаграмм «изгибающий момент – кривизна» для изгибаемых элементов и элементов, изгибаемых со сжатием, основанная на деформационной модели с использованием зависимости напряжений от деформаций бетона в виде (1.19). Анализируется влияние различных факторов на диаграмму «изгибающий момент – кривизна».

В работах [1, 55] разработаны: методика определения напряженно-деформированного состояния нормальных поперечных сечений с учетом полных диаграмм деформирования материалов при действии временных одноразовых и повторных нагрузок; методика определения предельных моментов, которые могут воспринимать сечения на основе расчетной деформационной модели в зависимости от характера наступления предельного состояния при действии временных одноразовых и повторных нагрузок. На основе расчетной деформационной модели сечений установлены предельные условия перераспределения усилий в неразрезных железобетонных балках, а также разработана методика определения предельной нагрузки на неразрезные железобетонные балки статическим методом, основанном на деформационной модели сечений.

Однако в предложенных методиках не учитывается работа растянутого бетона над трещиной.

В работе [2] для определения усилий в сжатом бетоне и арматуре, входящих в уравнения равновесия предложены следующие формулы:

$$N_{b1} = R_b b z_1 \sum_{k=1}^5 \frac{a_k}{k+1} \left( \frac{\varepsilon_{b1}}{\varepsilon_{bR}} \right)^k; \quad (1.21)$$

$$N_{s1} = A_s E_s \frac{\varepsilon_{b1}}{z_1} (h_0 - z_1); \quad (1.22)$$

$$N_{sc1} = A'_s E_s \frac{\varepsilon_{b1}}{z_1} (z_1 - a'); \quad (1.23)$$

$$M_{b1} = R_b b z_1^2 \sum_{k=1}^5 \frac{a_k}{k+2} \left( \frac{\varepsilon_{b1}}{\varepsilon_{bR}} \right)^k; \quad (1.24)$$

$$M_{s1} = A_s E_s \frac{\varepsilon_{b1}}{z_1} (h_0 - z_1)^2 + A'_s E_s \frac{\varepsilon_{b1}}{z_1} (z_1 - a')^2, \quad (1.25)$$

где  $z_1$  – высота сжатой зоны бетона.

Действующими нормативными документами предлагается алгоритм построения диаграммы «изгибающий момент – кривизна» для железобетонных элементов при внецентренном сжатии с использованием шагово-итерационной методики.

Исходными данными для предложенного алгоритма являются размеры поперечного сечения, параметры диаграммы деформирования бетона, параметры армирования и начальный эксцентриситет приложения нагрузки. На каждом шаге расчета задаются значения деформации наиболее сжатого волокна бетона и высоты сжатой зоны бетона (на первом шаге  $x_b = h$ ). Затем из уравнения равновесия суммы проекций на продольную ось стержня определяется значение продольной силы, воспринимаемой сечением. После чего проверяется выполнение уравнения равновесия суммы моментов при заданном значении начального эксцентриситета и полученном значении продольной силы.

Алгоритм, предлагаемый действующими нормативными документами, обладает следующими недостатками:

– предложенный алгоритм применим только для случая внецентренного сжатия;

– вследствие того, что на каждом шаге задаются деформации крайнего сжатого волокна бетона, невозможно точное определение момента трещинообразования;

– предложенный алгоритм не позволяет исследовать изменение напряженно-деформированного состояния сечения при постоянной продольной силе и увеличении значений изгибающего момента.

И.Е.Прокоповичем в работе [94] сформулирована задача о влиянии длительного действия нагрузки на прочность изгибаемого железобетонных стержней.

Наиболее полно вопрос о расчете железобетонных балок с трещинами в растянутой зоне на основе наследственной теории старения разработан в работах И.Е.Прокоповича и И.И.Темнова [98, 112].

В работах [98, 112] рассмотрена задача об изгибе балки с обычной арматурой при длительном действии нагрузки. Решение основано на наследственной теории и при  $t = r_1$  приводит к зависимостям и формулам теории И.В.Мурашева – Я.М.Немировского [84, 85].

Жесткость балки при чистом изгибе рекомендуется определять по формуле:

$$B^*(t) = \frac{E_a}{\psi(t)} F_a z^*(t) [h_0 - x^*(t)], \quad (1.26)$$

где  $z^*(t)$  – плечо внутренней пары.

Изложенная методика в дальнейшем была обобщена В.И.Шатохиным [129] на случай двойного армирования.

Под руководством И.Е.Прокоповича В.А.Зедгенидзе разработана методика учета перераспределения внутренних усилий в железобетонных статически неопределимых конструкциях при длительном действии нагрузки [92], а А.Ф.Яременко – методика расчета железобетонных плит с учетом трещинообразования и ползучести [95].

В работе [99] И.Е.Прокоповичем представлено приближенное выражение для жесткости железобетонных балок с учетом трещинообразования

$$B^*(\infty) = E_b A_b h_0^2 \sqrt{\mu n_1} K^*(\infty), \quad (1.27)$$

где  $K^*(\infty)$  – коэффициент, учитывающий влияние длительности действия нагрузки на изменение жесткости во времени.

В работе приведены формулы и рекомендации для определения коэффициента  $K^*(\infty)$ .

В работах [106 ... 108, 120] В.И.Соломиным и С.Б.Шматковым представлены методы расчета балок и плит. Приведены нелинейные уравнения, описывающие деформирование железобетонных конструкций. Авторами предложено для практических расчетов использовать упрощенную диаграмму «кривизна – изгибающий момент».

А.Ф.Яременко, А.В.Ковровым в работах [135, 137] предложено использовать в расчетах статически неопределимых железобетонных систем при кратковременном действии нагрузки диаграмму «изгибающий момент – кривизна» аналогичную предложенной В.И.Соломиным и С.Б.Шматковым с определением жесткости при наличии трещин по предложениям И.Е.Прокоповича (1.27).

### **1.3 Методы расчета статически неопределимых железобетонных рамных конструкций с учетом трещинообразования**

Расчету статически неопределимых железобетонных конструкций с учетом пластических свойств материалов были посвящены исследования, выполняемые В.С.Верещагиным [21, 22], В.Г.Гланвиллем [143],

А.И.Голодновым [23], Б.Г.Демчиной [39], А.А.Дыховичным [45], А.А.Кальницким [56], О.А.Коковиным [65], В.С.Кукунаевым [73 ... 75], Л.Л.Лемышем [122], Л.Р.Маиляном [78, 79], М.Тихим, Й.Ракосником [113], Л.И.Яриным [139] Г.Г.Эрнстом [141].

Одной из первых работ, посвященных изучению влияния трещин и неупругих свойств бетона на перераспределение усилий в сложных статически неопределимых системах, является работа А.А.Гвоздева [31]. Метод предельного равновесия, предложенный в работе [31], основывается на следующих предпосылках:

- деформации конструкции до исчерпания ее несущей способности малы;
- материал конструкции считается жестко-пластичным, т.е. в опасных сечениях элементов при исчерпании несущей способности образуются пластические шарниры, а деформации остальных участков во внимание не принимаются.

Результаты дальнейших экспериментально-теоретических исследований, проведенных в НИИЖБ под руководством А.А.Гвоздева, а затем и С.Н.Крылова, приведены в большом количестве работ [29, 68 ... 71]. По результатам исследований созданы комплексные методики расчета, закрепленные в Инструкции [54], затем в Руководстве [104].

В Пособии [90] для расчета бескаркасных многоэтажных зданий рекомендуется использовать расчетную схему в виде системы вертикальных диафрагм жесткости, объединенных между собой в уровне перекрытий. При этом расчет на вертикальную нагрузку производится отдельно для каждой диафрагмы, считая, что горизонтальные перемещения системы отсутствуют, а горизонтальные нагрузки распределяются между вертикальными диафрагмами пропорционально их приведенной изгибной жесткости.

Численные методы расчета железобетонных конструкций с учетом неупругих свойств материалов и их применение при автоматизированном проектировании в сложных статически неопределимых системах в НИИЖБ разрабатывались А.И.Козачевским [62 ... 64].



А.А.Дыховичным в работе [45] рассмотрены следующие основные методы расчета статически неопределимых железобетонных конструкций:

*Метод последовательного уточнения жесткостей.* При расчете методом последовательного уточнения жесткостей конструкция рассчитывается на заданную нагрузку по упругой схеме. Затем по найденным усилиям анализируется уровень трещинообразования в элементах конструкции, и определяются значения жесткостей отдельных участков элементов конструкций. Далее повторяется расчет системы, состоящей из элементов с переменной жесткостью, в упругой стадии и снова уточняются значения жесткостей. Расчет повторяется до достижения сходимости.

*Метод последовательных нагружений.* При расчете методом последовательных нагружений нагрузка разбивается на конечное количество частей и производится расчет на каждую нагрузку по упругой схеме с уточнением жесткостей. В работе [45] отмечается, что метод последовательных нагружений сводится к многократному повторению метода уточнения жесткостей на каждом этапе нагружения.

*Метод начальных напряжений* применим в тех случаях, когда усилия или напряжения могут быть представлены в виде суммы линейной и нелинейной функции перемещений или деформаций.

В методе начальных напряжений общая матрица жесткости, составленная на первом этапе расчета, остается неизменной в процессе итераций. Изменения, связанные с учетом неупругих деформаций, вносятся лишь в свободные члены уравнений.

*Метод начальных деформаций* близок к методу начальных напряжений и применяется в тех случаях, когда деформации элементов системы могут быть представлены в виде суммы линейных и нелинейных функций напряжений.

Метод предельного равновесия играет большую роль в развитии теории расчета железобетонных конструкций. Однако в рамках метода невозможно оценить устойчивость конструкции и отдельных ее элементов. В связи с этим в

работах [33, 35] предлагается метод расчета железобетонных конструкций как единых физически и геометрически нелинейных систем.

Под физической нелинейностью понимают, что деформации в сечении нелинейно связаны с действующими в нем усилиями:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{B_M}; \quad (1.28)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{N}{B_N}; \quad (1.29)$$

$$B_M = f_M(M, N); \quad (1.30)$$

$$B_N = f_N(M, N), \quad (1.31)$$

где  $1/\rho$  – кривизна изогнутой оси в сечении;

$\varepsilon_0$  – осевая деформация в сечении;

$M$  и  $N$  – изгибающий момент и продольная сила в сечении;

$B_M$  и  $B_N$  – изгибная и осевая жесткости сечения, зависящие от действующих в сечении усилий.

Под геометрической нелинейностью понимают учет влияния перемещений на усилия в элементах системы.

В качестве форм исчерпания несущей способности при расчете железобетонных рамных конструкций как физически и геометрически неизменяемых систем рассматривают:

- потерю устойчивости группы элементов системы;
- потерю устойчивости системы в целом;
- исчерпание прочности хотя бы одного элемента системы в любом его расчетном сечении.

Расчет железобетонных рам как единых геометрически и физически нелинейных систем сводится к определению внутренних усилий в системе при последовательном увеличении нагрузки вплоть до выполнения одного из

указанных критериев исчерпания несущей способности. При этом внешняя нагрузка изменяется пропорционально одному параметру.

Функции жесткости (1.30) и (1.31), принимаемые для расчета рамных конструкций должны удовлетворять следующим требованиям:

- функции должны описывать изменение жесткости на всех этапах нагружения вплоть до исчерпания несущей способности;
- функции должны быть неразрывными на всем интервале их определения.

При выполнении расчетов авторы [19] столкнулись с проблемой сходимости итерационного процесса вычислений.

В более поздних исследованиях [103] указывается, что назначение жесткостей по усилиям, полученным из «упругого» расчета, вызывает сильное возмущение жесткостей. В [103] рекомендован способ определения жесткостей по кривизнам, приводящий к сходящемуся процессу вычислений.

#### **1.4 Теоретические основы численно-аналитического метода граничных элементов для решения задач о напряженно-деформированном состоянии статически неопределимых рамных конструкций**

В работах А.В.Баженова, А.Ф.Дащенко, В.Ф.Оробея [3, 87, 110] рассмотрены вопросы расчета стержневых систем при помощи численно-аналитического метода граничных элементов (ЧА МГЭ).

Стержень в общем случае испытывает четыре вида деформирования: растяжение-сжатие, сдвиг, кручение и изгиб. Для реальных стержневых конструкций можно пренебрегать некоторыми видами деформирования. При этом следует иметь в виду, что неучет каких-то перемещений и видов сопротивлений приводит к завышенным значениям искомых параметров [].

Используя принцип независимости действия сил, справедливый при малых перемещениях и упругих деформациях, при расчете плоских рамных

конструкций рассматриваются совместно деформации изгиба и растяжения-сжатия.

Дифференциальное уравнение изгиба стержня постоянного сечения имеет вид:

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = q_y(x), \quad (1.32)$$

где:  $EI$  – изгибная жесткость поперечного сечения;

$v$  – функция прогибов стержня;

$q_y(x)$  – поперечная нагрузка.

На рис. 1.3 представлены принятые положительные направления внешней нагрузки при изгибе и обозначения численно-аналитического метода граничных элементов.

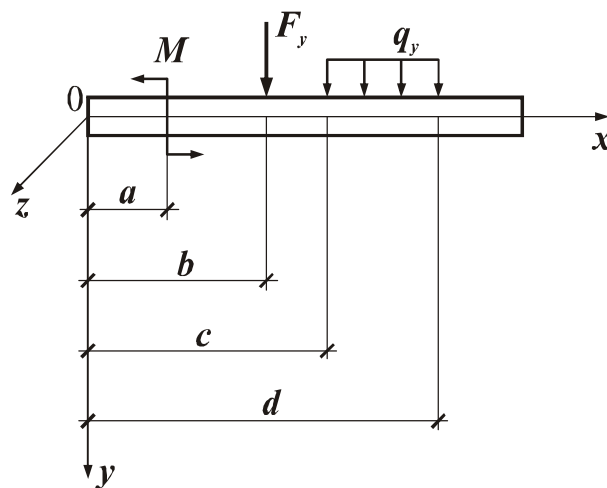


Рис. 1.3 Принятые обозначения для нагрузки при изгибе

Дифференциальное уравнение растяжения-сжатия стержня постоянного сечения имеет вид:

$$EA \frac{d^2 u}{dx^2} = q_x(x), \quad (1.33)$$

где:  $EA$  – продольная жесткость поперечного сечения;

$u$  – функция перемещений направленных вдоль оси стержня;

$q_x(x)$  – продольная нагрузка.

На рис. 1.4 представлены принятые положительные направления внешней нагрузки при растяжении-сжатии и обозначения численно-аналитического метода граничных элементов.

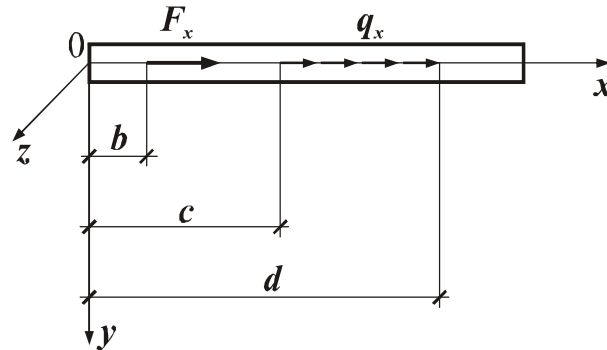


Рис. 1.4 Принятые обозначения для нагрузки при растяжении-сжатии

Интегрирование дифференциального уравнения изогнутой оси стержня (1.32) приводит к системе уравнений:

$$\begin{aligned}
 EIv(x) &= EIv(0) + EI\varphi(0)x - \frac{M(0)}{2}x^2 - \frac{Q(0)}{6}x^3 - \int_0^x \int_0^x \int_0^x q_y(x) dx dx dx; \\
 EI\varphi(x) &= EI\varphi(0) - M(0)x - \frac{Q(0)}{2}x^2 - \int_0^x \int_0^x q_y(x) dx dx; \\
 M(x) &= M(0) + Q(0)x + \int_0^x q_y(x) dx; \\
 Q(x) &= Q(0) + \int_0^x q_y(x) dx,
 \end{aligned} \tag{1.34}$$

где  $v(x)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $M(x)$ ,  $Q(x)$  – соответственно прогиб, угол поворота, изгибающий момент и поперечная сила в сечении на расстоянии  $x$  от начала координат;

$v(0)$ ,  $\varphi(0)$ ,  $M(0)$ ,  $Q(0)$  – соответственно прогиб, угол поворота, изгибающий момент и поперечная сила в начале координат ( $x = 0$ ).

Систему уравнений (1.34) можно представить в матричном виде следующим образом:

$$Y(x) = A(x)X(0) + B(x), \tag{1.35}$$

где  $Y(x)$  – матрица усилий и перемещений в произвольном сечении;

$X(0)$  – матрица усилий и перемещений в начале координат;

$A(x)$  – матрица коэффициентов системы уравнений изгиба;

$B(x)$  – матрица внешней нагрузки.

Перечисленные матрицы имеют следующий вид:

$$Y(x) = \begin{Bmatrix} EI\nu(x) \\ EI\varphi(x) \\ M(x) \\ Q(x) \end{Bmatrix}; \quad A(x) = \begin{Bmatrix} 1 & x & -x^2/2 & -x^3/6 \\ 0 & 1 & -x & -x^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}; \quad (1.36)$$

$$X(0) = \begin{Bmatrix} EI\nu(0) \\ EI\varphi(0) \\ M(0) \\ Q(0) \end{Bmatrix}; \quad B(x) = \begin{Bmatrix} B_{11}(x) \\ B_{21}(x) \\ -B_{31}(x) \\ -B_{41}(x) \end{Bmatrix}. \quad (1.37)$$

Элементы матрицы внешней нагрузки формируются при помощи метода начальных параметров. Правила знаков при этом принимаются в соответствии с рис. 1.5.

$$\begin{aligned} B_{11} &= \left\|_{x>a} \frac{M(x-a)^2}{2} + \left\|_{x>b} \frac{F_y(x-b)^3}{6} + \left\|_{x>c} \frac{q_y(x-c)^4}{24} - \left\|_{x>d} \frac{q_y(x-d)^4}{24}; \\ B_{21} &= \left\|_{x>a} M(x-a) + \left\|_{x>b} \frac{F_y(x-b)^2}{2} + \left\|_{x>c} \frac{q_y(x-c)^3}{6} - \left\|_{x>d} \frac{q_y(x-d)^3}{6}; \\ B_{31} &= \left\|_{x>a} M + \left\|_{x>b} F_y(x-b) + \left\|_{x>c} \frac{q_y(x-c)^2}{2} - \left\|_{x>d} \frac{q_y(x-d)^2}{2}; \\ B_{41} &= \left\|_{x>b} F_y + \left\|_{x>c} q_y(x-c) - \left\|_{x>d} q_y(x-d). \end{aligned} \quad (1.38)$$

Интегрирование дифференциального уравнения (1.33) приводит к системе уравнений:

$$\begin{aligned} EAU(x) &= EAU(0) + N(0)x - \int_0^x \int_0^x q_x(x) dx dx; \\ N(x) &= N(0) - \int_0^x q_x(x) dx, \end{aligned} \quad (1.39)$$

где  $u(x), N(x)$  – соответственно перемещение и продольная сила в сечении на расстоянии  $x$  от начала координат;  
 $u(0), N(0)$  – соответственно перемещение и продольная сила в начале координат ( $x = 0$ ).

Систему уравнений (1.39) можно представить в матричном виде (1.35). Входящие в него матрицы имеют следующий вид:

$$Y(x) = \begin{Bmatrix} EAu(x) \\ N(x) \end{Bmatrix}; \quad A = \begin{Bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}; \quad (1.40)$$

$$X(0) = \begin{Bmatrix} EAu(0) \\ N(0) \end{Bmatrix}; \quad B(x) = \begin{Bmatrix} B_{11}(x) \\ B_{21}(x) \end{Bmatrix}. \quad (1.41)$$

Элементы матрицы внешней нагрузки также формируются при помощи метода начальных параметров. Правила знаков при этом принимаются в соответствии с рис. 1.4.

$$B_{11} = \begin{Bmatrix} F_x(x-b) + \frac{q_x(x-c)^2}{2} - \frac{q_x(x-d)^2}{2} \\ q_x(x-c) - q_x(x-d) \end{Bmatrix}; \quad (1.42)$$

$$B_{21} = \begin{Bmatrix} F_x + q_x(x-c) - q_x(x-d) \end{Bmatrix}.$$

Для системы, состоящей из нескольких стержней, можно составить матричное уравнение типа:

$$Y(l_i) = A(l_i)X(0) + B(l_i), \quad (1.43)$$

где  $Y(l_i)$  – матрица усилий и перемещений в конце элементов;  
 $X(0)$  – матрица усилий и перемещений в начале координат;  
 $A(l_i)$  – матрица коэффициентов системы уравнений напряженно-деформированного состояния элемента;  
 $B(l_i)$  – матрица внешней нагрузки.

## 2 ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ РАМНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ПОМОЩИ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

### 2.1 Правила формирования расчетной схемы статически неопределимых рамных конструкций

При определении напряженно-деформированного состояния рамных конструкций с использованием численно-аналитического метода граничных элементов производится их разбиение на отдельные стержни:

- стойки на этаж;
- ригели на пролет.

Правила нумерации узлов и элементов связаны с принимаемыми направлениями локальных осей координат:

Нумерация узлов начинается с левой крайней стойки снизу вверх, затем нумерация продолжается на справа следующей стойке снизу вверх.

Пример нумерации узлов приведен на рис. 2.1.

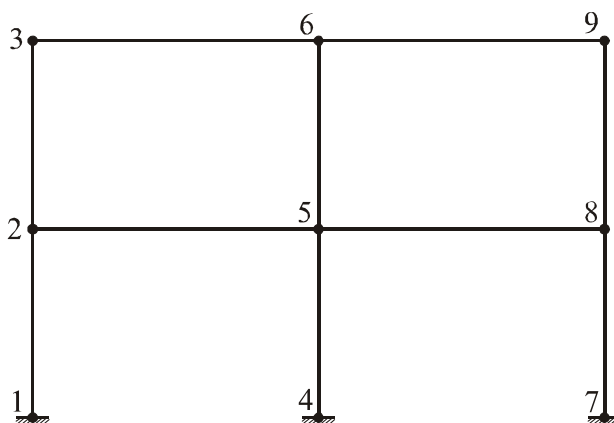


Рис. 2.1 Правило нумерации узлов



Нумерация элементов начинается с нумерации стоек. Нумерация элементов стоек начинается с левой крайней стойки снизу вверх, затем нумерация продолжается на справа следующей стойке снизу вверх. После того как все элементы стоек будут пронумерованы, производится нумерация элементов ригелей. Нумерация элементов ригелей начинается с левого крайнего пролета снизу вверх, затем нумерация продолжается на справа следующем пролете снизу вверх.

Пример нумерации элементов приведен на рис. 2.2.

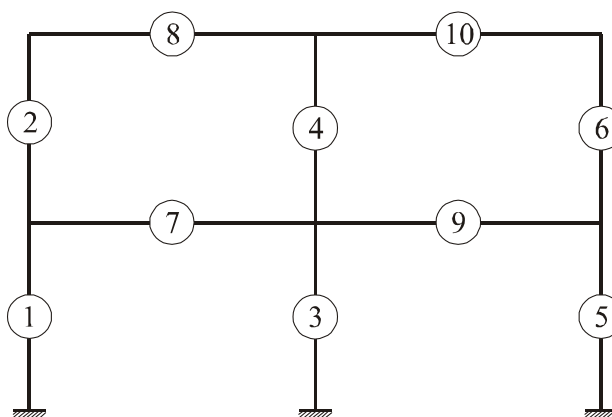


Рис. 2.2 Правило нумерации элементов

Для каждого элемента принимается левовинтовая система координат. Направления координатных осей для элементов стоек и ригелей представлены на рис. 2.3, 2.4.

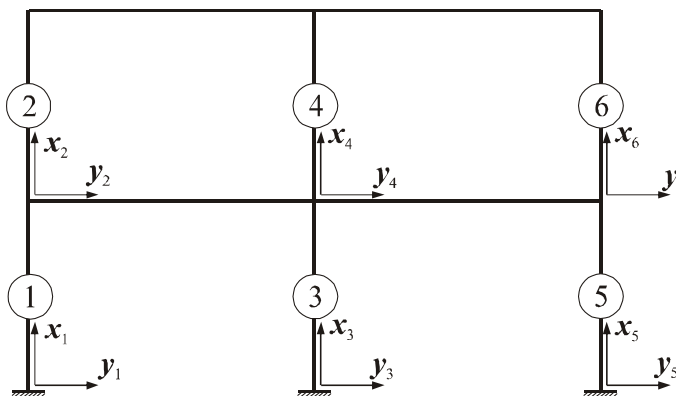


Рис. 2.3 Направление координатных осей локальных систем координат для элементов стоек

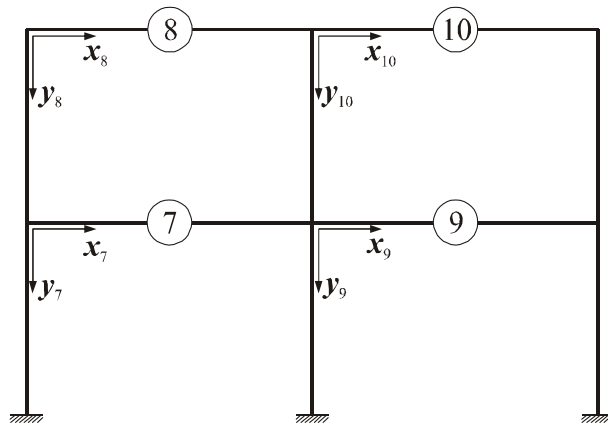


Рис. 2.4 Направление координатных осей локальных систем координат для элементов ригелей

## 2.2 Определение внутренних усилий и перемещений

### 2.2.1 Формирование уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние

Система уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние элементов плоской рамной конструкции, в матричной форме имеет вид:

$$Y(l_i) = A(l_i) X(0) + B(l_i). \quad (2.1)$$

Входящие в нее матрицы имеют следующий вид:

$$Y(l_i) = \begin{pmatrix} EIv(l_i) \\ EI\varphi(l_i) \\ M(l_i) \\ Q(l_i) \\ EAu(l_i) \\ N(l_i) \end{pmatrix}; \quad A(l_i) = \begin{pmatrix} 1 & l_i & -l_i^2/2 & -l_i^3/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -l_i & -l_i^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (2.2)$$

$$X(0) = \begin{Bmatrix} EIv(0) \\ EI\varphi(0) \\ M(0) \\ Q(0) \\ EAu(0) \\ N(0) \end{Bmatrix}; \quad B(l_i) = \begin{Bmatrix} B_{11}(l_i) \\ B_{21}(l_i) \\ -B_{31}(l_i) \\ -B_{41}(l_i) \\ B_{51}(l_i) \\ B_{61}(l_i) \end{Bmatrix}. \quad (2.3)$$

Элементы матрицы внешней нагрузки могут быть сформированы при помощи метода начальных параметров в соответствии с уравнениями (1.38) и (1.42).

Для плоской рамной конструкции, состоящей из  $m$  элементов, формируется система из  $6m$  уравнений. При этом матрицы системы уравнений будут иметь вид:

$$Y(l_i) = \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_i \\ \dots \\ Y_m \end{Bmatrix}; \quad A(l_i) = \begin{Bmatrix} A_1 & & & & & \\ & A_2 & & & & \\ & & \dots & & & \\ & & & A_i & & \\ & & & & \dots & \\ & & & & & A_m \end{Bmatrix}; \quad (2.4)$$

$$X(0) = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_i \\ \dots \\ X_m \end{Bmatrix}; \quad B(l_i) = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \dots \\ B_i \\ \dots \\ B_m \end{Bmatrix}. \quad (2.5)$$

Матрицы (2.4) и (2.5) состоят из блоков, которые формируются в соответствии с выражениями (2.2) и (2.3) для каждого элемента, входящего в рамную конструкцию.

## 2.2.2 Алгоритм определения внутренних усилий и перемещений

Неизвестные граничные параметры определяются из разрешающего уравнения численно-аналитического варианта метода граничных элементов:

$$A^* X^* = -B. \quad (2.6)$$

Матрицы  $A^*$  и  $X^*$ , входящие в уравнение (2.6), получены в результате характерной цепочки преобразований.

При выполнении преобразований в первую очередь рассматриваются граничные условия элементов конструкции. В случае жесткого защемления стоек в сечении элемента, смежном с закреплением, возникают изгибающие моменты, поперечные и продольные силы, перемещения в сечении отсутствуют (рис. 2.5).

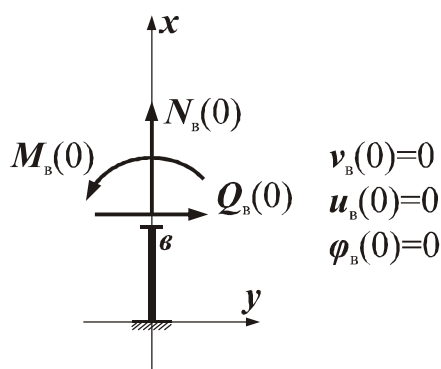


Рис. 2.5 Граничные условия для сечения смежного с жестким защемлением

В соответствии с граничными условиями в матрице начальных параметров  $X(0)$  обнуляются граничные параметры перемещений, а в матрице коэффициентов  $A(l_i)$  обнуляются столбцы, номера которых соответствуют номерам обнуляемых параметров.

$$X(0) = \begin{pmatrix} EIv(0)=0 \\ EI\varphi(0)=0 \\ M(0) \\ Q(0) \\ EAu(0)=0 \\ N(0) \end{pmatrix}; \quad A(l_i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -l_i^2/2 & -l_i^3/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -l_i & -l_i^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

При деформировании стержневой системы узлы получают определенные линейные и угловые перемещения, при этом кинематические граничные параметры будут связаны в этих узлах уравнениями совместности перемещений.

Для установления связи между кинематическими параметрами необходимо изобразить качественную картину деформированного состояния упругой системы.

Для жесткого узла, в котором сходятся четыре стержня, качественная картина деформирования представлена на рис. 2.6.

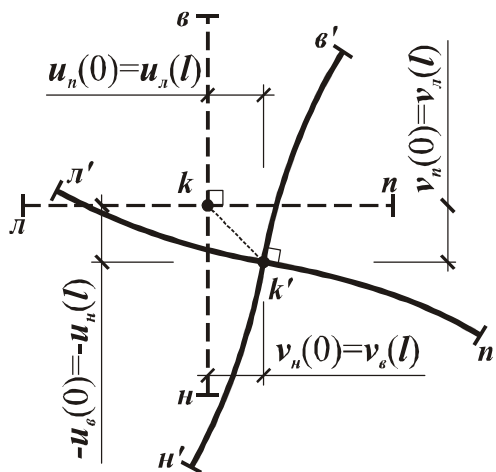


Рис. 2.6 Картина деформирования жесткого узла, в котором сходятся четыре стержня

В соответствии с картиной деформирования между перемещениями стержней сходящихся в узле устанавливаются следующие зависимости:

$$\begin{aligned}
-u_{\text{н}}(l_{\text{н}}) &= -u_{\text{в}}(0) = v_{\text{л}}(l_{\text{л}}) = v_{\text{п}}(0); \\
v_{\text{н}}(l_{\text{н}}) &= v_{\text{в}}(0) = u_{\text{л}}(l_{\text{л}}) = u_{\text{п}}(0); \\
\varphi_{\text{н}}(l_{\text{н}}) &= \varphi_{\text{в}}(0) = \varphi_{\text{л}}(l_{\text{л}}) = \varphi_{\text{п}}(0).
\end{aligned}
\tag{2.8}$$

Если в узле сходятся несколько начальных точек элементов, то в качестве основных выбираются начальные параметры элемента с меньшим порядковым номером, а начальные параметры остальных элементов связываются с основными при помощи уравнений совместности перемещений. При этом в матрице начальных параметров  $X(0)$  освобождаются ячейки соответствующие начальным параметрам, зависящим от основных, а в матрицу коэффициентов  $A(l_i)$  вводятся компенсирующие элементы.

Конечные параметры элементов, сходящихся в узле, связываются с основными начальными параметрами при помощи уравнений совместности перемещений. При этом в матрицу коэффициентов  $A(l_i)$  вводятся компенсирующие элементы

Так как уравнения деформирования стержней записываются в масштабах изгибных жесткостей  $EI$  и продольных жесткостей  $EA$ , то для составления уравнений совместности перемещений введем следующие коэффициенты:

$$\begin{aligned}
N_{ij} &= \frac{E_i I_i}{E_j I_j}; & K_{ij} &= \frac{E_i A_i}{E_j A_j}; \\
C_{ij} &= \frac{E_i A_i}{E_j I_j}; & D_{ij} &= \frac{E_i I_i}{E_j A_j}.
\end{aligned}
\tag{2.9}$$

где:  $i$  – номер элемента, для граничных параметров которого составляются уравнения совместности перемещений;

$j$  – номер элемента, с граничными параметрами которого связываются граничные параметры текущего элемента.

При равновесии всей системы элементов, объединенных в линейную систему, будут находиться в равновесии и отдельные узлы. При этом статические граничные параметры будут удовлетворять уравнениям равновесия узлов.

Соотношения между статическими граничными параметрами для жесткого узла из четырех стержней, изображенного на рис. 2.7, представлены в уравнениях равновесия в глобальной системе координат:

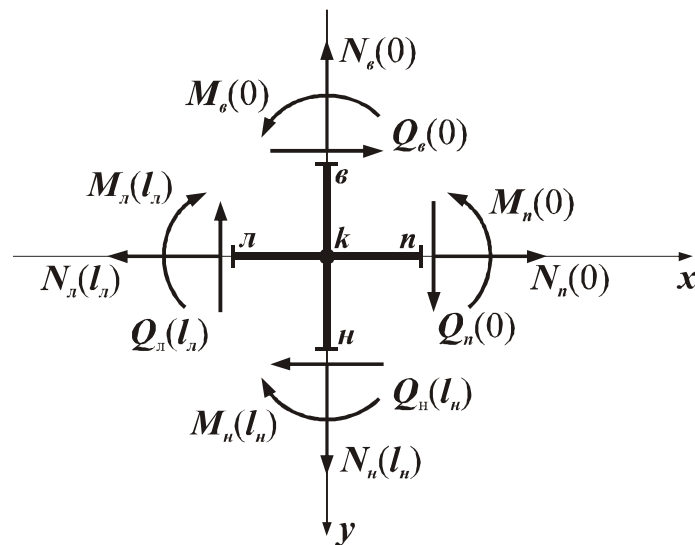


Рис. 2.7 Усилия, возникающие в сечениях элементов, примыкающих к узлу

$$\begin{aligned}
 \sum x = 0, \quad & -Q_н(l_н) + Q_в(0) - N_л(l_л) + N_п(0) = 0; \\
 & Q_н(l_н) = Q_в(0) - N_л(l_л) + N_п(0); \\
 \sum y = 0, \quad & N_н(l_н) - N_в(0) - Q_л(l_л) + Q_п(0) = 0; \\
 & N_н(l_н) = N_в(0) + Q_л(l_л) - Q_п(0); \\
 \sum m_k = 0, \quad & -M_н(l_н) + M_в(0) - M_л(l_л) + M_п(0) = 0; \\
 & M_н(l_н) = M_в(0) - M_л(l_л) + M_п(0).
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Независимые конечные параметры внутренних усилий переносятся в ячейки матрицы начальных параметров  $X(0)$ , освободившиеся при рассмотрении граничных условий и уравнений совместности перемещений

начальных точек элементов. При этом в матрицу коэффициентов  $A(l_i)$  вводятся компенсирующие элементы.

Для зависимых конечных параметров внутренних усилий в матрицу коэффициентов  $A(l_i)$  в соответствии с выражениями (2.10) вводятся компенсирующие элементы.

В результате решения системы уравнений (2.6) определяются граничные параметры, входящие в матрицу  $X^*$ , являющиеся неизвестными внутренними усилиями и перемещениями элементов рамной конструкции.

### **2.2.3 Автоматизация формирования матриц граничной задачи при определении внутренних усилий и перемещений**

В результате произведенных исследований для рамных конструкций, имеющих один этаж и один пролет, два этажа и различное количество пролетов, один пролет и различное количество этажей, не были выявлены общие закономерности формирования матриц неизвестных граничных параметров  $X^*$  и коэффициентов  $A^*$ .

Матрицы неизвестных параметров и коэффициентов для каждого вышеприведенного случая составляются индивидуально.

Для рамных конструкций, имеющих один этаж и более одного пролета, более двух этажей и более одного пролета, выявлены общие закономерности формирования матриц неизвестных граничных параметров  $X^*$  и коэффициентов  $A^*$ .

В качестве примера рассмотрим вид матрицы неизвестных  $X^*$  и матрицы коэффициентов  $A^*$ , составленных для рамной конструкции имеющей четыре этажа и четыре пролета.



$$X^* = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & X_1^{(1)} \\ \hline 2 & X_0^{(2)} \\ \hline 3 & X_0^{(3)} \\ \hline 4 & X_0^{(4)} \\ \hline 5 & X_1^{(5)} \\ \hline 6 & X_0^{(6)} \\ \hline 7 & X_0^{(7)} \\ \hline 8 & X_0^{(8)} \\ \hline 9 & X_1^{(9)} \\ \hline 10 & X_0^{(10)} \\ \hline 11 & X_0^{(11)} \\ \hline 12 & X_0^{(12)} \\ \hline 13 & X_1^{(13)} \\ \hline 14 & X_0^{(14)} \\ \hline 15 & X_0^{(15)} \\ \hline 16 & X_0^{(16)} \\ \hline 17 & X_1^{(17)} \\ \hline 18 & X_0^{(18)} \\ \hline 19 & X_0^{(19)} \\ \hline 20 & X_0^{(20)} \\ \hline 21 & X_1^{(21)} \\ \hline 22 & X_1^{(22)} \\ \hline 23 & X_1^{(23)} \\ \hline 24 & X_0^{(24)} \\ \hline 25 & X_1^{(25)} \\ \hline 26 & X_1^{(26)} \\ \hline 27 & X_1^{(27)} \\ \hline 28 & X_0^{(28)} \\ \hline 29 & X_1^{(29)} \\ \hline 30 & X_1^{(30)} \\ \hline 31 & X_1^{(31)} \\ \hline 32 & X_0^{(32)} \\ \hline 33 & X_1^{(33)} \\ \hline 34 & X_2^{(34)} \\ \hline 35 & X_3^{(35)} \\ \hline 36 & X_0^{(36)} \\ \hline \end{array} \quad (2.11)$$

В результате исследования топологии матрицы неизвестных граничных параметров (2.11) разрешающего уравнения численно-аналитического варианта метода граничных элементов, для рамных конструкций, имеющих  $S$  этажей ( $S \neq 2$ ) и  $T$  пролетов ( $T > 1$ ) и состоящих из  $m$  элементов, выявлены нижеописанные закономерности расположения неизвестных.

Блоки  $X_0^{(i)}$  относятся к элементам, все начальные параметры которых являются неизвестными и не связаны с граничными параметрами других элементов, и формируются в соответствии с выражением:

$$X_0^{(i)} = \begin{pmatrix} E_i I_i v_i(0) \\ E_i I_i \phi_i(0) \\ M_i(0) \\ Q_i(0) \\ E_i A_i u_i(0) \\ N_i(0) \end{pmatrix}; \quad (2.12)$$

Блоки  $X_0^{(i)}$  совмещаются с элементами, номера строк которых определяются по формулам:

$$\begin{aligned} i &= (t_1 - 1)S + s_1; \\ i &= (T + 1)S + t_2 S, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где  $t_1$  – изменяется от 1 до  $T + 1$ ;

$t_2$  – изменяется от 1 до  $T - 1$ ;

$s_1$  – изменяется от 1 до  $S - 3$ .

Блоки  $X_1^{(i)}$ ,  $X_2^{(m-2)}$  и  $X_3^{(m-1)}$  относятся к элементам, которые имеют обнуленные начальные параметры, учитывающие граничные условия конструкции.

Блок  $X_1^{(i)}$  состоит из начальных неизвестных параметров для  $i$ -го элемента и независимых конечных параметров  $k$ -го элемента и формируется в соответствии с выражением:

$$X_1^{(i)} = \begin{pmatrix} M_k(l_k) \\ Q_k(l_k) \\ M_i(0) \\ Q_i(0) \\ N_k(l_k) \\ N_i(0) \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Номера элементов, конечные параметры которых являются независимыми, изменяются от  $(T + 1)S + 1$  до  $m - 1$ .

Блоки  $X_1^{(i)}$  совмещаются с элементами, номера строк которых определяются по формулам:

$$\begin{aligned} i &= (t_1 - 1)S + 1; \\ i &= (T + 1)S + (t_2 - 1)S + s_2; \\ i &= m - S + s_1, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где  $s_2$  – изменяется от 1 до  $S - 1$ .

Блоки  $X_2^{(m-2)}$  и  $X_3^{(m-1)}$  состоят из начальных неизвестных параметров для  $i$ -го элемента и независимых конечных параметров элемента, имеющего номер  $m$ , и формируются в соответствии со следующими выражениями:

$$X_2^{(m-2)} = \begin{pmatrix} E_m I_m v_m(l_m) \\ E_m I_m \varphi_m(l_m) \\ M_{m-2}(0) \\ Q_{m-2}(0) \\ M_m(l_m) \\ N_{m-2}(0) \end{pmatrix}; \quad (2.16)$$

$$X_3^{(m-1)} = \begin{pmatrix} Q_m(l_m) \\ E_m A_m u_m(l_m) \\ M_{m-1}(0) \\ Q_{m-1}(0) \\ N_m(l_m) \\ N_{m-1}(0) \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Блок  $X_2^{(m-2)}$  совмещается с элементом, номер строки которого определяется по формуле:

$$i = m - 2. \quad (2.18)$$

Блок  $X_3^{(m-1)}$  совмещается с элементом, номер строки которого определяется по формуле:

$$i = m - 1. \quad (2.19)$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36		
1	$A_1^{(1)}$																																					
2	$A_2^{(2)}$																																					
3	$A_0^{(3)}$	$A_2^{(3)}$																																				
4	$A_0^{(4)}$	$A_0^{(4)}$																																				
5	$A_8^{(5)}$	$A_2^{(5)}$																																				
6	$A_8^{(6)}$	$A_0^{(6)}$	$A_2^{(6)}$																																			
7	$A_0^{(7)}$	$A_2^{(7)}$	$A_8^{(7)}$																																			
8	$A_0^{(8)}$	$A_0^{(8)}$																																				
9	$A_2^{(9)}$	$A_2^{(9)}$																																				
10	$A_0^{(10)}$	$A_2^{(10)}$																																				
11	$A_0^{(11)}$	$A_2^{(11)}$	$A_0^{(11)}$																																			
12	$A_0^{(12)}$	$A_0^{(12)}$																																				
13	$A_2^{(13)}$	$A_2^{(13)}$																																				
14	$A_0^{(14)}$	$A_2^{(14)}$	$A_0^{(14)}$																																			
15	$A_0^{(15)}$	$A_2^{(15)}$	$A_0^{(15)}$																																			
16	$A_0^{(16)}$	$A_2^{(16)}$	$A_0^{(16)}$																																			
17	$A_2^{(17)}$	$A_2^{(17)}$																																				
18	$A_0^{(18)}$	$A_2^{(18)}$	$A_0^{(18)}$																																			
19	$A_0^{(19)}$	$A_2^{(19)}$	$A_0^{(19)}$																																			
20	$A_0^{(20)}$	$A_2^{(20)}$	$A_0^{(20)}$																																			
21	$A_1^{(21)}$	$A_1^{(21)}$																																				
22	$A_6^{(22)}$	$A_1^{(22)}$	$A_7^{(22)}$																																			
23	$A_6^{(23)}$	$A_6^{(23)}$	$A_1^{(23)}$																																			
24	$A_6^{(24)}$	$A_6^{(24)}$	$A_1^{(24)}$																																			
25	$A_6^{(25)}$	$A_6^{(25)}$	$A_7^{(25)}$																																			
26	$A_6^{(26)}$	$A_6^{(26)}$	$A_7^{(26)}$																																			
27	$A_6^{(27)}$	$A_6^{(27)}$	$A_7^{(27)}$																																			
28	$A_6^{(28)}$	$A_6^{(28)}$	$A_7^{(28)}$																																			
29	$A_6^{(29)}$	$A_6^{(29)}$	$A_7^{(29)}$																																			
30	$A_6^{(30)}$	$A_6^{(30)}$	$A_7^{(30)}$																																			
31	$A_6^{(31)}$	$A_6^{(31)}$	$A_7^{(31)}$																																			
32	$A_6^{(32)}$	$A_6^{(32)}$	$A_7^{(32)}$																																			
33	$A_6^{(33)}$	$A_6^{(33)}$	$A_7^{(33)}$																																			
34	$A_6^{(34)}$	$A_6^{(34)}$	$A_7^{(34)}$																																			
35	$A_6^{(35)}$	$A_6^{(35)}$	$A_7^{(35)}$																																			
36	$A_6^{(36)}$	$A_6^{(36)}$	$A_7^{(36)}$																																			

В результате исследования топологии матрицы коэффициентов (2.20) разрешающего уравнения численно-аналитического варианта метода граничных элементов, для рамных конструкций, имеющих  $S$  этажей ( $S \neq 2$ ) и  $T$  пролетов ( $T > 1$ ) и состоящих из  $m$  элементов, предлагается нижеописанная методика ее формирования.

Блоки  $A_0^{(i)}$  относятся к элементам, все начальные параметры которых являются неизвестными и не связаны с граничными параметрами других элементов, и формируется в соответствии с выражением:

$$A_0^{(i)} = \begin{vmatrix} 1 & l_i & -l_i^2/2 & -l_i^3/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -l_i & -l_i^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (2.21)$$

Блоки  $A_0^{(i)}$  совмещаются с элементами, номера строк ( $i$ ) и столбцов ( $j$ ) которых определяются по формулам:

$$\begin{aligned} i = j &= (t_1 - 1)S + s_3; \\ i = j &= (T + 1)S + t_3S, \end{aligned} \quad (2.22)$$

где  $s_3$  – изменяется от 2 до  $S$ ;

$t_3$  – изменяется от 1 до  $T$ .

Блоки  $A_1^{(i)}$  относятся к элементам, которые имеют обнуленные начальные параметры, учитывающие граничные условия конструкции, и формируются в соответствии с выражением:

$$A_1^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -l_i^2/2 & -l_i^3/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -l_i & -l_i^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Блоки  $A_1^{(i)}$  совмещаются с элементами, номера строк и столбцов которых определяются по формулам:

$$\begin{aligned} i &= j = (t_1 - 1)S + 1; \\ i &= j = (T + 1)S + (t_3 - 1)S + s_1. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Блоки  $A_2^{(i)}$  состоят из компенсирующих элементов, которые вводятся исходя из уравнений равновесия и совместности перемещений для элементов стоек сходящихся в одном узле, и формируются в соответствии с выражением:

$$A_2^{(i)} = \begin{pmatrix} -N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Блоки  $A_2^{(i)}$  совмещаются с элементами, номера строк и столбцов которых определяется по формулам:

$$\begin{aligned} i &= (t_1 - 1)S + s_1; \\ j &= i + 1. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Блоки  $A_3^{(i)}$  состоят из компенсирующих элементов, которые вводятся исходя из уравнений совместности перемещений для элементов верхних ригелей, сходящихся в одном узле, и формируются в соответствии с выражением:

$$A_3^{(i)} = \begin{vmatrix} -N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (2.27)$$

Блоки  $A_3^{(i)}$  совмещаются с элементами, номера строк и столбцов которых определяется по формулам:

$$\begin{aligned} i &= (T + 1)S + (t_2 - 1)S + S; \\ j &= i + S. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Блоки  $A_4^{(i)}$  состоят из компенсирующих элементов, которые вводятся исходя из уравнений равновесия для конечных параметров элементов стоек и начальных параметров элементов ригелей, сходящихся в одном узле, и формируются в соответствии с выражением:

$$A_4^{(i)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (2.29)$$

Блоки  $A_4^{(i)}$  совмещаются с элементами, номера строк и столбцов которых определяется по формулам:

$$\begin{aligned} i &= (t_3 - 1)S + s_1; \\ j &= i + (T + 1)S. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Блоки  $A_5^{(i)}$  состоят из компенсирующих элементов, которые вводятся исходя из уравнений равновесия и совместности перемещений для конечных параметров элементов верхних стоек и начальных параметров элементов верхних ригелей, сходящихся в одном узле, и формируются в соответствии с выражением:

$$A_5^{(i)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -D_{ij} & 0 \\ 0 & -N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ C_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (2.31)$$

Блоки  $A_5^{(i)}$  совмещаются с элементами, номера строк и столбцов которых определяется по формулам:

$$\begin{aligned} i &= (t_2 - 1)S + S; \\ j &= i + (T + 1)S. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Блоки  $A_6^{(i)}$  состоят из компенсирующих элементов, которые вводятся исходя из уравнений равновесия и совместности перемещений для начальных параметров элементов стоек и начальных параметров ригелей, сходящихся в одном узле, и формируются в соответствии с выражением:

$$A_6^{(i)} = \begin{vmatrix} 0 & l_i N_{ij} & 0 & 0 & -D_{ij} & 0 \\ 0 & N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (2.33)$$



Блоки  $A_6^{(i)}$  совмещаются с элементами, номера строк и столбцов которых определяется по формулам:

$$\begin{aligned} i &= (T + 1)S + (t_3 - 1)S + s_1; \\ j &= i - (T + 1)S + 1. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Блоки  $A_7^{(i)}$  состоят из компенсирующих элементов, которые вводятся исходя из уравнений равновесия и совместности перемещений для начальных параметров элементов стоек и конечных параметров элементов ригелей, сходящихся в одном узле, и формируются в соответствии с выражением:

$$A_7^{(i)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & D_{ij} & 0 \\ 0 & -N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (2.35)$$

Блоки  $A_7^{(i)}$  совмещаются с элементами, номера строк и столбцов которых определяется по формулам:

$$\begin{aligned} i &= (T + 1)S + (t_2 - 1)S + s_1; \\ j &= i - TS + 1. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Блоки  $A_8^{(i)}$ ,  $A_9^{(i)}$  и  $A_{10}^{(i)}$  состоят из компенсирующих элементов, которые вводятся в связи с участием независимых конечных параметров в уравнениях равновесия и совместности деформаций, и формируются в соответствии с выражениями:

$$A_8^{(i)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad (2.37)$$

$$A_9^{(i)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -N_{im} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{im} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad (2.38)$$

$$A_{10}^{(i)} = \begin{vmatrix} 0 & -D_{im} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (2.39)$$

Блоки  $A_8^{(i)}$  совмещаются с элементами, номера строк и столбцов которых определяются по формулам:

$$\begin{aligned} i &= S + t_1; \\ j &= (t_1 - 1)S + 1; \\ i &= S + T + 1 + (t_3 - 1)(S - 1) + s_1; \\ j &= (T + 1)S + (t_3 - 1)S + s_1; \\ i &= (T + 1)S - s_3; \\ j &= m - s_3 - 2. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Блок  $A_9^{(i)}$  совмещается с элементом, номер строки и столбца которого определяются по формулам:

$$\begin{aligned} i &= (T + 1)S; \\ j &= m - 2. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Блок  $A_{10}^{(i)}$  совмещается с элементом, номер строки и столбца которого определяются по формулам:

$$\begin{aligned} i &= (T + 1)S; \\ j &= m - 1. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Блоки  $A_{11}^{(i)}$ ,  $A_{12}^{(m)}$  и  $A_{13}^{(m)}$  состоят из компенсирующих элементов, которые вводятся в связи с переносом независимых конечных параметров в матрицу начальных параметров, и формируются в соответствии с выражениями:

$$A_{11}^{(i)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}; \tag{2.43}$$

$$A_{12}^{(m)} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \tag{2.44}$$

$$A_{13}^{(m)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}. \tag{2.45}$$

Блоки  $A_{11}^{(i)}$  совмещаются с элементами, номера строк и столбцов которых определяется по формулам:

$$\begin{aligned}
 i &= (T + 1)S + t_1; \\
 j &= (t_1 - 1)S + 1; \\
 i &= (T + 1)(S + 1) + (t_3 - 1)(S - 1) + s_1; \\
 j &= (T + 1)S + (t_3 - 1)S + s_1; \\
 i &= m - s_3; \\
 j &= m - s_3 - 2.
 \end{aligned}
 \tag{2.46}$$

Блок  $A_{12}^{(m)}$  совмещается с элементом, номер строки и столбца которого определяются по формулам:

$$\begin{aligned}
 i &= m; \\
 j &= m - 2.
 \end{aligned}
 \tag{2.47}$$

Блок  $A_{13}^{(m)}$  совмещается с элементом, номер строки и столбца которого определяются по формулам:

$$\begin{aligned}
 i &= m; \\
 j &= m - 1.
 \end{aligned}
 \tag{2.48}$$

### 2.3 Сопоставление результатов расчетов

В соответствии с предложенной методикой формирования матриц разрешающего уравнения численно-аналитического варианта метода граничных элементов составлена программа в системе компьютерной математики MATLAB, позволяющая определять внутренние усилия и перемещения в рамных конструкциях с неограниченным числом этажей и пролетов.

При помощи составленной программы рассчитана рама, имеющая четыре этажа и четыре пролета, на действие сосредоточенных сил, приложенных в середине каждого ригеля.

Изгибная жесткость элементов ригелей при расчете принималась в два раза большей изгибной жесткости элементов стоек.

Расчетная схема рамной конструкции представлена на рис. 2.8.

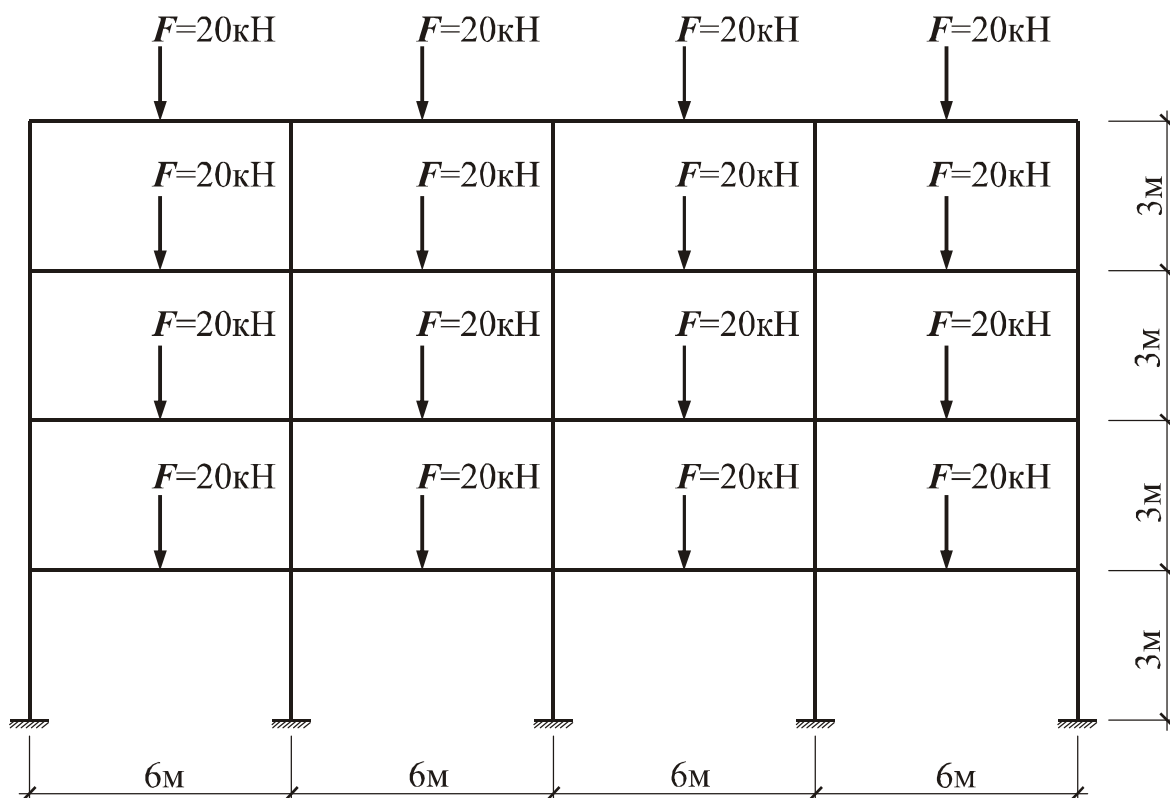


Рис. 2.8 Расчетная схема рамной конструкции, имеющей четыре этажа и четыре пролета

Расчет выполнялся в двух вариантах:

- без учета продольных деформаций ( $EA = \infty$ );
- с учетом продольных деформаций ( $EA = 12EI$ ).

Произведен расчет при помощи предлагаемой методики, метода перемещений и метода конечных элементов, реализованного в проектно-вычислительном комплексе SCAD. Сравнение результатов представлено в табл. 2.1 – 2.4.

Таблица 2.1

Сравнение значений изгибающих моментов в колоннах первой стойки

№ элемента	№ сечения	Метод перемещений	EA=∞		EA=∞		EA=12EI		Δ, %
			ЧАВ МГЭ	Δ, %	МКЭ (SCAD)	Δ, %	ЧАВ МГЭ	МКЭ (SCAD)	
1	1	2,23	2,23	0	2,23	0	3,20	3,20	0
	2	-1,11	-1,11	0	-1,11	0	-1,28	-1,28	0
	3	-4,45	-4,45	0	-4,45	0	-5,76	-5,76	0
2	1	6,34	6,34	0	6,34	0	7,29	7,29	0
	2	0,17	0,17	0	0,17	0	0,01	0,01	0
	3	-6,01	-6,01	0	-6,01	0	-7,28	-7,28	0
3	1	5,40	5,40	0	5,40	0	7,83	7,83	0
	2	0,13	0,13	0	0,13	0	-0,04	-0,04	0
	3	-5,13	-5,13	0	-5,13	0	-7,91	-7,91	0
4	1	6,73	6,73	0	6,73	0	8,30	8,30	0
	2	-0,93	-0,93	0	-0,93	0	-1,48	-1,48	0
	3	-8,59	-8,59	0	-8,59	0	-11,26	-11,26	0

Таблица 2.2

Сравнение значений изгибающих моментов в колоннах второй стойки

№ элемента	№ сечения	Метод перемещений	EA=∞		EA=∞		EA=12EI		Δ, %
			ЧАВ МГЭ	Δ, %	МКЭ (SCAD)	Δ, %	ЧАВ МГЭ	МКЭ (SCAD)	
5	1	-0,25	-0,25	0	-0,25	0	0,35	0,35	0
	2	0,13	0,13	0	0,13	0	-0,02	-0,02	0
	3	0,51	0,51	0	0,51	0	-0,38	-0,38	0
6	1	-0,70	-0,70	0	-0,70	0	0,28	0,28	0
	2	-0,03	-0,03	0	-0,03	0	-0,16	-0,16	0
	3	0,63	0,63	0	0,63	0	-0,60	-0,60	0
7	1	-0,49	-0,49	0	-0,49	0	1,31	1,31	0
	2	-0,04	-0,04	0	-0,04	0	-0,16	-0,16	0
	3	0,41	0,41	0	0,41	0	-1,62	-1,62	0
8	1	-0,78	-0,78	0	-0,78	0	0,64	0,64	0
	2	0,23	0,23	0	0,23	0	0,04	0,04	0
	3	1,23	1,23	0	1,23	0	-0,55	-0,55	0

Таблица 2.3

Сравнение значений изгибающих моментов в ригелях первого пролета

№ элемента	№ сечения	Метод перемещений	EA=∞			EA≠∞			
			ЧАВ МГЭ	Δ, %	МКЭ (SCAD)	Δ, %	ЧАВ МГЭ	МКЭ (SCAD)	Δ, %
21	1	-10,80	-10,80	0	-10,80	0	-13,06	-13,06	0
	2	16,24	16,24	0	16,24	0	16,27	16,27	0
	3	-16,72	-16,72	0	-16,72	0	-14,41	-14,41	0
22	1	-11,41	-11,41	0	-11,41	0	-15,11	-15,11	0
	2	16,04	16,04	0	16,04	0	16,10	16,10	0
	3	-16,51	-16,51	0	-16,51	0	-12,69	-12,69	0
23	1	-11,86	-11,86	0	-11,86	0	-16,21	-16,21	0
	2	15,87	15,87	0	15,87	0	15,98	15,98	0
	3	-16,41	-16,41	0	-16,41	0	-11,82	-11,82	0
24	1	-8,59	-8,59	0	-8,59	0	-11,26	-11,26	0
	2	17,02	17,02	0	17,02	0	17,51	17,51	0
	3	-17,36	-17,36	0	-17,36	0	-13,72	-13,72	0

Таблица 2.4

Сравнение значений изгибающих моментов в ригелях второго пролета

№ элемента	№ сечения	Метод перемещений	EA=∞			EA=12EI			
			ЧА МГЭ	Δ, %	МКЭ (SCAD)	Δ, %	ЧА МГЭ	МКЭ (SCAD)	Δ, %
25	1	-15,51	-15,51	0	-15,51	0	-15,07	-15,07	0
	2	14,87	14,87	0	14,87	0	15,02	15,02	0
	3	-14,75	-14,75	0	-14,75	0	-14,89	-14,89	0
26	1	-15,38	-15,38	0	-15,38	0	-14,60	-14,60	0
	2	14,90	14,90	0	14,90	0	15,18	15,18	0
	3	-14,81	-14,81	0	-14,81	0	-15,05	-15,05	0
27	1	-15,22	-15,22	0	-15,22	0	-14,08	-14,08	0
	2	14,95	14,95	0	14,95	0	15,33	15,33	0
	3	-14,89	-14,89	0	-14,89	0	-15,25	-15,25	0
28	1	-16,13	-16,13	0	-16,13	0	-14,27	-14,27	0
	2	14,72	14,72	0	14,72	0	15,29	15,29	0
	3	-14,44	-14,44	0	-14,44	0	-15,16	-15,16	0

### 3 МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ СЕЧЕНИЙ ИЗГИБАЕМЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

#### 3.1 Модель деформирования изгибаемых железобетонных элементов

Принято выделять три стадии работы изгибаемых железобетонных элементов. В разделе 1 рассмотрены результаты исследований напряженно-деформированного состояния изгибаемых железобетонных элементов, проведенных А.Н. Бамбурой [8], В.Е. Бабичем [2] и Л.Р. Маилянм [78, 79].

Для исследования напряженно-деформированного состояния изгибаемых железобетонных элементов в работе принимаются следующие предпосылки:

1. Считается справедливой гипотеза Бернулли (гипотеза плоских сечений) – деформации по высоте сечения изменяются по линейному закону.

2. Между арматурой и окружающим ее бетоном существует сцепление, такое, что деформации в арматуре и бетоне равны между собой.

3. Связь между напряжениями и деформациями бетона и арматуры принимаются в виде диаграмм, приведенных на рис. 3.1.

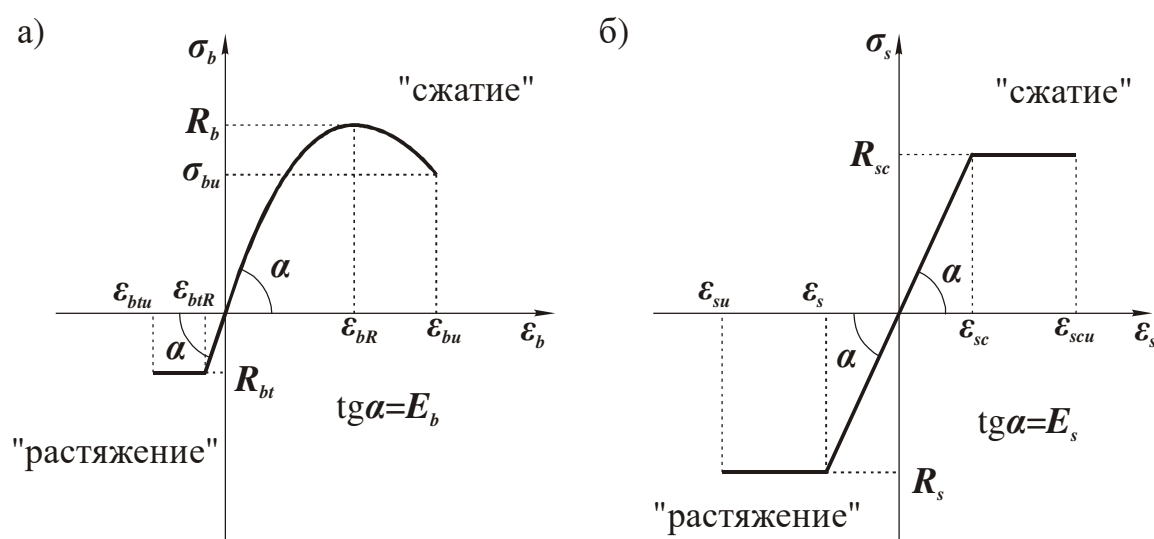


Рис. 3.1 Диаграммы деформирования материалов:

а) бетона; б) арматуры



Зависимость «напряжение-деформация» при сжатии бетона (рис. 3.1.а) описывается, в соответствии с предложениями А.Н.Бамбуры [7, 8], при помощи полинома пятой степени (1.13).

Связь между напряжениями и деформациями при растяжении бетона (рис. 3.1.а) описывается при помощи линейной функции:

$$\sigma_{bt} = \begin{cases} E_b \varepsilon_{bt}, & \text{при } 0 < \varepsilon_{bt} < \varepsilon_{btR}; \\ R_{bt}, & \text{при } \varepsilon_{btR} \leq \varepsilon_{bt} < \varepsilon_{btu}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Зависимость «напряжение-деформация» при растяжении и сжатии арматуры (рис. 3.1.б) описывается при помощи линейной функции, имеющей вид:

$$\sigma_s = \begin{cases} E_s \varepsilon_s, & \text{при } 0 < \varepsilon_s < \varepsilon_{sR}; \\ R_s, & \text{при } \varepsilon_{sR} \leq \varepsilon_s < \varepsilon_{su}. \end{cases} \quad (3.2)$$

4.Соппротивление расчетного сечения считается исчерпанным при достижении деформациями крайнего сжатого волокна бетона или растянутой арматуры предельных значений, соответственно  $\varepsilon_{bu}$  и  $\varepsilon_{su}$ .

Ниже проведен подробный анализ изменения напряженно-деформированного состояния сечений при увеличении значений изгибающих моментов вплоть до предельного состояния.

*Стадия I* (рис. 3.2). При невысоких нагрузках деформации бетона и арматуры в сечении носят упругий характер.

Действующими нормативными документами [13] работа растянутого бетона в поперечном сечении изгибаемого железобетонного элемента не учитывается. В данной работе, в соответствии с предложениями Л.Р.Маиляна [78, 79] и А.Н.Бамбуры [8], предлагается учитывать работу растянутого бетона на всех стадиях.

На протяжении стадии I поперечное сечение изгибаемого железобетонного элемента работает без трещин. Таким образом, высота растянутой зоны бетона  $x_{bt}$  может быть определена, как разница между высотой поперечного сечения  $h$  и высотой сжатой зоны бетона  $x_b$  (рис. 3.2.а).

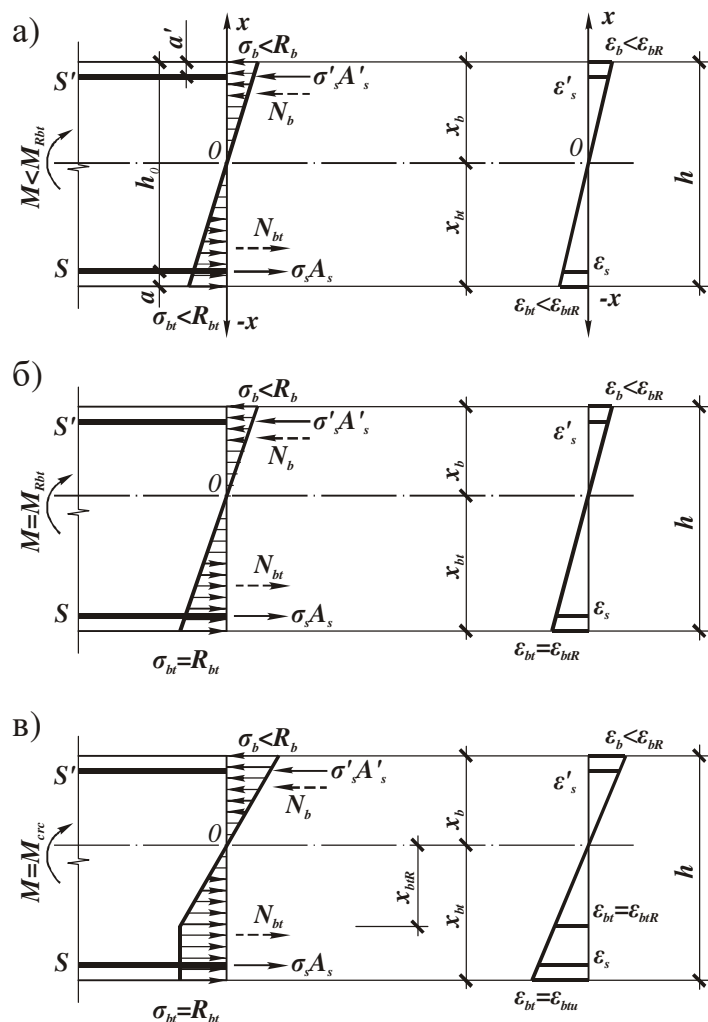


Рис. 3.2 Напряженно-деформированное состояние железобетонного сечения на стадии I

С увеличением нагрузки деформации в крайнем растянутом волокне бетона достигают значения  $\epsilon_{btR}$ , соответствующего напряжениям  $\sigma_{bt} = R_{bt}$ . Будем считать, что бетон растянутой зоны в данной стадии работает как упругий материал – зависимость между напряжениями и деформациями также линейная (рис. 3.2.б).

При дальнейшем увеличении нагрузки развивается пластическое деформирование растянутого бетона – деформации крайнего растянутого волокна бетона превышают значение  $\varepsilon_{btR}$ . На данной стадии, в отличие от предложений Л.Р.Маиляна, описывающего работу как сжатого, так и растянутого бетона при помощи зависимости (1.19), предлагается принимать, что на участке сечения высотой  $x_{btR} = \varepsilon_{btR} x_b / \varepsilon_b$ , где деформации не превышают значения  $\varepsilon_{btR}$ , нормальные напряжения связаны с деформациями линейной зависимостью. На участке поперечного сечения высотой  $(x_{bt} - x_{btR})$ , где деформации превышают значение  $\varepsilon_{btR}$ , нормальные напряжения принимаются постоянными ( $\sigma_{bt} = R_{bt}$ ). Граница первой стадии работы железобетонного сечения характеризуется достижением деформациями крайнего растянутого волокна бетона предельного значения  $\varepsilon_{btu}$  (рис. 3.2.в) и образованием трещины.

*Стадия II* (рис.3.3). На стадии работы изгибаемого железобетонного элемента с трещинами А.Н.Бамбура [8] предлагает принимать в качестве расчетного, сечение на участке между трещинами с усредненными деформациями бетона и соответствующими им напряжениями по всей высоте сечения.

В данной работе, в соответствии с предложениями Л.Р.Маиляна, предлагается в качестве расчетного принимать сечение с трещиной. При этом внутренние растягивающие усилия воспринимаются арматурой и растянутым бетоном над трещиной, а деформация крайнего растянутого волокна бетона над трещиной принимается постоянной и равной  $\varepsilon_{btu}$ . Эпюра напряжений в растянутой зоне бетона принимается аналогично эпюре в первой стадии работы поперечного сечения изгибаемого железобетонного элемента. При этом высота растянутой зоны бетона определяется из подобия треугольников на эпюре деформаций сечения (рис. 3.3.а) по формуле:

$$x_{bt} = \frac{\varepsilon_{btu} x_b}{\varepsilon_b} \quad (3.3)$$

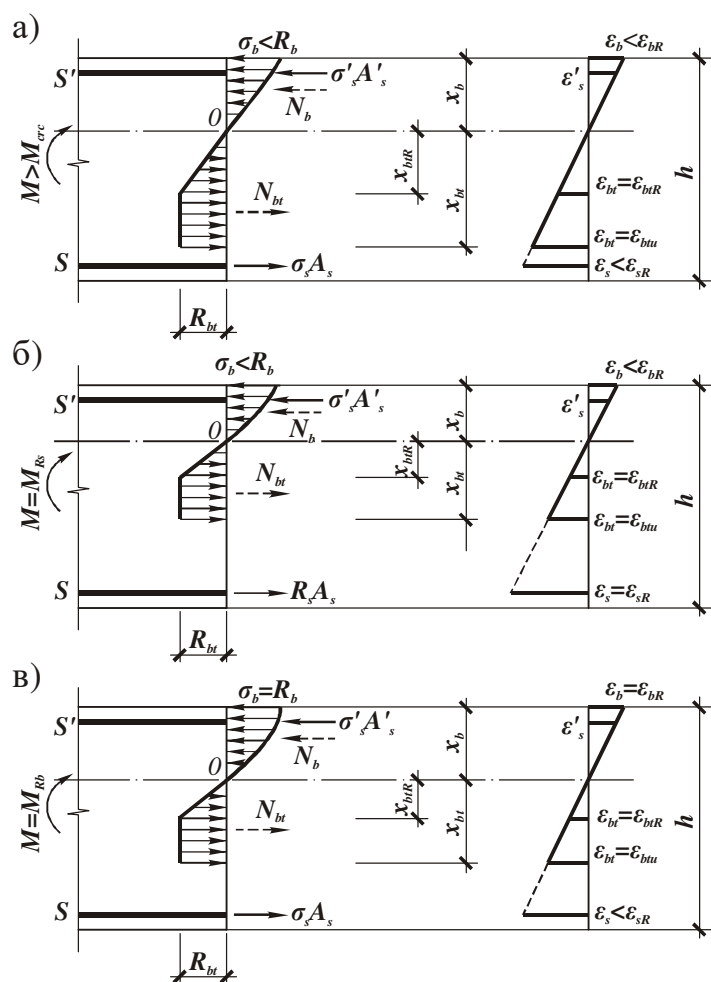


Рис. 3.3 Напряженно-деформированное состояние железобетонного сечения на стадии II

При увеличении нагрузки развиваются неупругие деформации в сжатом бетоне, трещина разрыва в растянутом бетоне продолжает развиваться по высоте сечения. Эпюра нормальных напряжений в сжатом бетоне имеет вид криволинейной трапеции.

Границей второй стадии для слабо армированных сечений изгибаемых железобетонных элементов является достижение деформациями растянутой арматуры значений, соответствующих пределу упругости  $\epsilon_s = \epsilon_{sR}$  (рис. 3.3.б).

Для нормально и сильно армированных сечений изгибаемых железобетонных элементов граница второй стадии характеризуется

достижением деформациями крайнего сжатого волокна значений  $\epsilon_b = \epsilon_{bR}$ , соответствующих напряжениям  $\sigma_b = R_b$  (рис. 3.3.в).

*Стадия III* (рис. 3.4). При увеличении нагрузки в слабо армированных сечениях изгибаемых железобетонных элементов увеличиваются деформации, при постоянном изгибающем моменте, воспринимаемым сечением. Разрушение происходит при достижении предельных деформаций растянутой арматуры  $\epsilon_s = \epsilon_{su}$  (рис. 3.4.а).

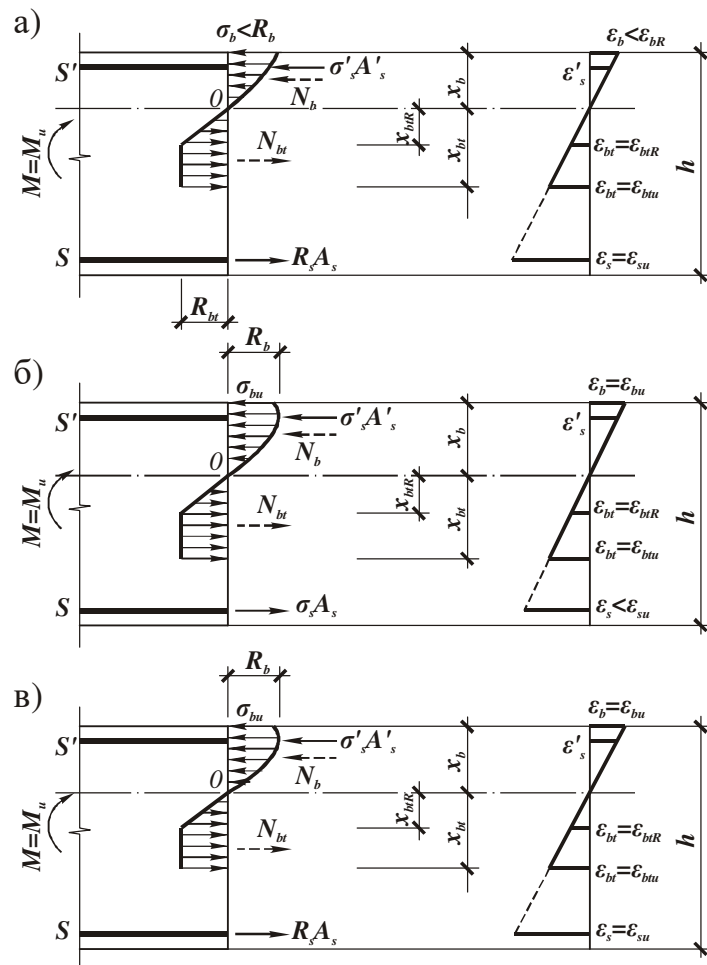


Рис. 3.4 Напряженно-деформированное состояние железобетонного сечения на стадии III

При увеличении нагрузки деформации крайнего сжатого волокна в нормально и сильно армированных сечениях изгибаемых железобетонных

элементов превышают предельное значение  $\epsilon_{bR}$ , но не достигают значения  $\epsilon_{bu}$ . Максимальное значение на эпюре нормальных напряжений сжатого бетона смещается от крайнего сжатого волокна к нейтральной оси сечения. Изгибающий момент, воспринимаемый сечением, достигает своего максимального значения.

Дальнейшее увеличение нагрузки ведет к разрушению изгибаемого железобетонного элемента. При этом возможны следующие случаи:

1. В сильно армированных сечениях изгибаемых железобетонных элементов увеличиваются деформации, напряжения в сжатом бетоне падают, что влечет к снижению изгибающего момента, воспринимаемого сечением. Разрушение происходит при достижении предельных деформаций крайнего сжатого волокна бетона  $\epsilon_b = \epsilon_{bu}$  (рис. 3.4.б).

2. В нормально армированных сечениях изгибаемых железобетонных элементов, также как и в слабо армированных, увеличиваются деформации при постоянном изгибающем моменте, воспринимаемом сечением. Разрушение при этом происходит при одновременном достижении предельных деформаций растянутой арматуры  $\epsilon_s = \epsilon_{su}$  и крайнего сжатого волокна бетона  $\epsilon_b = \epsilon_{bu}$  (рис. 3.4.в).

На всех стадиях работы сечения железобетонного изгибаемого элемента могут быть записаны уравнения равновесия, имеющие вид:

$$\sum X = 0; \quad N_b + N_{sc} - N_{bt} - N_s = N; \quad (3.4)$$

$$\sum m_o = 0; \quad M_b + M_{sc} + M_{bt} + M_s = M. \quad (3.5)$$

где  $N$ ,  $N_b$ ,  $N_{bt}$ ,  $N_{sc}$ ,  $N_s$  – продольные силы соответственно от внешней нагрузки, внутренних усилий в сжатом и растянутом бетоне, сжатой и растянутой арматуре;

$M$ ,  $M_b$ ,  $M_{bt}$ ,  $M_{sc}$ ,  $M_s$  – изгибающие моменты соответственно от внешней нагрузки, внутренних усилий в сжатом и растянутом бетоне, сжатой и растянутой арматуре.

Внутренние усилия в сжатом бетоне, сжатой и растянутой арматуре, входящие в уравнениях (3.4) и (3.5), могут быть определены по формулам, предложенными В.Е.Бабичем в работе [2] в результате интегрирования полинома, предложенного А.Н.Бамбурой [7, 8]:

$$N_b = R_b b x_b \sum_{k=1}^5 \frac{a_k}{k+1} \left( \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_{bR}} \right)^k; \quad (3.6)$$

$$N_{sc} = A'_s E_s \frac{\varepsilon_b}{x_b} (x_b - a'); \quad (3.7)$$

$$N_s = A_s E_s \frac{\varepsilon_b}{x_b} (h_0 - x_b) \quad (3.8)$$

$$M_b = R_b b x_b^2 \sum_{k=1}^5 \frac{a_k}{k+2} \left( \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_{bR}} \right)^k; \quad (3.9)$$

$$M_{sc} = A'_s E_s \frac{\varepsilon_b}{x_b} (x_b - a')^2; \quad (3.10)$$

$$M_s = A_s E_s \frac{\varepsilon_b}{x_b} (h_0 - x_b)^2, \quad (3.11)$$

где  $x_b$  – высота сжатой зоны бетона;

$b$  – ширина сечения;

$\varepsilon_b$  – деформация крайнего сжатого волокна бетона;

$A_s$  и  $A'_s$  – площадь поперечного сечения соответственно растянутой и сжатой арматуры;

$E_s$  – модуль упругости арматуры.

Внутренние усилия в растянутом бетоне, предлагается определять исходя из принимаемых эпюр нормальных напряжений на различных стадиях работы поперечного сечения железобетонного элемента:

– при треугольной эпюре по формулам:

$$N_{bt} = \frac{\sigma_{bt} x_{bt}}{2} b; \quad (3.12)$$

$$M_{bt} = N_{bt} \frac{2x_{bt}}{3}, \quad (3.13)$$

где  $\sigma_{bt} = E_b \varepsilon_{bt}$  – напряжения в крайнем растянутом волокне бетона;

$x_{bt} = h - x_b$  – высота растянутой зоны бетона;

$b$  – ширина сечения.

Подставляя выражения для напряжений в крайнем растянутом волокне бетона и высоты растянутой зоны в формулы (3.12) и (3.13), и учитывая, что  $\varepsilon_{bt} = \varepsilon_b (h - x_b) / x_b$ , получим:

$$N_{bt} = \frac{E_b \varepsilon_b b}{2x_b} (h - x_b)^2; \quad (3.14)$$

$$M_{bt} = \frac{E_b \varepsilon_b b}{3x_b} (h - x_b)^3; \quad (3.15)$$

– при трапецеидальной эпюре по формулам:

$$N_{bt} = R_{bt} b \left( x_{bt} - \frac{x_{btR}}{2} \right); \quad (3.16)$$

$$M_{bt} = R_{bt} b \left( \frac{x_{bt}^2}{2} - \frac{x_{btR}^2}{6} \right), \quad (3.17)$$

где  $x_{bt}$  – высота растянутой зоны бетона, которая равна  $x_{bt} = h_0 - x_b$ , при отсутствии трещин, и  $x_{bt} = \varepsilon_{btR} x_b / \varepsilon_b$ , при наличии трещин;

$x_{btR} = \varepsilon_{btR} x_b / \varepsilon_b$  – высота растянутой зоны бетона, на которой деформации не превышают значения  $\varepsilon_{btR}$ .

Подставляя выражение для высоты растянутой зоны бетона, где деформации не превышают значения  $\varepsilon_{btR}$  в формулы (3.16) и (3.17), после преобразований получим:



$$N_{bt} = R_{bt} b \left( x_{bt} - \frac{\varepsilon_{btR} x_b}{\varepsilon_b} \right) \quad (3.18)$$

$$M_{bt} = \frac{R_{bt} b}{6} \left[ 3x_{bt}^2 - \left( \frac{\varepsilon_{btR} x_b}{\varepsilon_b} \right)^2 \right] \quad (3.19)$$

Формулы (3.6) ... (3.19) позволяют определить значения внутренних усилий в поперечном сечении железобетонного элемента в зависимости от значений деформаций крайнего сжатого волокна бетона. При этом необходимо знать высоту сжатой зоны бетона, соответствующую заданным деформациям крайнего сжатого волокна бетона.

Задачу определения внутренних усилий в поперечном сечении изгибаемого железобетонного элемента на всех стадиях предлагается решать при помощи шагово-итерационного метода.

### **3.2 Построение диаграмм «изгибающий момент – кривизна» с использованием шагово-итерационного метода**

Как отмечалось в разделе 1, действующими нормативными документами [14] предлагается алгоритм построения диаграммы деформирования поперечных сечений внецентренно сжатых железобетонных элементов при постоянном эксцентриситете. Однако, в рамных конструкциях эксцентриситет изменяется по длине отдельных элементов при постоянной (без учета собственного веса) продольной силе.

На основании вышеизложенного, предлагается следующий алгоритм, позволяющий исследовать напряженно-деформированное состояние поперечных сечений изгибаемых и внецентренно сжатых железобетонных элементов при заданном значении продольной силы:

1. Исходными данными при построении диаграммы «момент-кривизна» для прямоугольного сечения железобетонных изгибаемых элементов являются:

- расчетная прочность бетона на сжатие  $R_b$  и растяжение  $R_{bt}$ ;
- начальный модуль упругости бетона  $E_b$ ;
- предельные деформации сжатого и растянутого бетона  $\epsilon_{bR}$ ,  $\epsilon_{bu}$ ,  $\epsilon_{btR}$ ,  $\epsilon_{btu}$ ;
- расчетная прочность арматурной стали  $R_s$ ;
- модуль упругости арматурной стали  $E_s$ ;
- предельные деформации арматурной стали  $\epsilon_{sR}$ ,  $\epsilon_{su}$ ;
- размеры сечения  $h$  и  $b$ ;
- площади растянутой и сжатой арматуры  $A_s$  и  $A_s'$ ;
- величины защитного слоя для растянутой и сжатой арматуры  $a$  и  $a'$ ;
- величина продольной силы  $N$ , возникающей в сечении.

2. На первой стадии работы поперечного сечения изгибаемого железобетонного элемента, в соответствии с предложениями Л.Р.Маиляна [78, 79], задается деформация крайнего растянутого волокна  $\epsilon_{bt} = \Delta\epsilon_{bt}$  и высота сжатой зоны бетона  $x_b$ . При этом в соответствии с рекомендациями А.Н.Бамбуры [8], принимается  $\Delta\epsilon_{bt} = 0,05\epsilon_{btu}$ , а высоту сжатой зоны для изгибаемых элементов предлагается принимать  $x_b = 0,5h$ .

3. По принятым значениям деформаций крайнего растянутого волокна и высоты сжатой зоны бетона исходя из подобия треугольников на эпюре деформаций поперечного сечения, определяются деформации крайнего сжатого волокна  $\epsilon_b$ , деформации сжатой  $\epsilon_{sc}$  и растянутой арматуры  $\epsilon_s$ .

4. По формулам (3.6) ... (3.8) и (3.14), (3.18) вычисляются усилия  $N_b$ ,  $N_{bt}$ ,  $N_{sc}$ ,  $N_s$  и подставляются в уравнение равновесия (3.4).

5. Если уравнение равновесия (3.4) не выполняется, то необходимо уточнить высоту сжатой зоны бетона и повторить расчет по пп. 3 ... 5 до достижения заданной точности. При этом в соответствии с предложениями В.Е.Бабича [2], если левая часть уравнения (3.4) больше, то высота сжатой

зоны на последующей итерации принимается  $x_b^{(i)} = 0,98x_b^{(i)}$ . Если левая часть уравнения меньше, то высота сжатой зоны на последующей итерации принимается  $x_b^{(i)} = 1,02x_b^{(i)}$ .

6. По формулам (3.9) ... (3.11) и (3.15), (3.19) вычисляются значения изгибающих моментов от внутренних усилий в сжатом  $M_b$  и растянутом  $M_{bt}$  бетоне, в сжатой  $M_{sc}$  и растянутой  $M_{sc}$  арматуре.

7. Полученные значения изгибающих моментов подставляются в уравнение равновесия (3.5), и определяется изгибающий момент воспринимаемый сечением при заданной деформации крайнего растянутого волокна бетона. Вычисляется кривизна по формуле:

$$\chi^{(i)} = \frac{\epsilon_b^{(i)} - \epsilon_{bt}^{(i)}}{h} \quad (3.20)$$

8. На следующем шаге увеличиваются деформации крайнего растянутого волокна бетона по формуле:

$$\epsilon_{bt}^{(i)} = \epsilon_{bt}^{(i-1)} + \Delta\epsilon_{bt} = \epsilon_{bt}^{(i-1)} + 0,05\epsilon_{btu} \quad (3.21)$$

Расчет по пп. 2 ... 8 повторяют до тех пор, пока деформация крайнего растянутого волокна бетона не достигнет предельного значения.

9. После того как деформации крайнего растянутого волокна бетона достигнут предельного значения, в сечении образуется трещина. Для дальнейшего построения диаграммы, в соответствии с предложениями Л.Р.Маиляна [79, 78], увеличиваем деформации крайнего сжатого волокна по формуле:

$$\epsilon_b^{(i)} = \epsilon_b^{(i-1)} + 0,01(\epsilon_{bu} - \epsilon_b^{(i-1)}) \quad (3.22)$$

10. По принятым значениям деформаций крайнего сжатого волокна и высоты сжатой зоны бетона исходя из подобия треугольников на эпюре

деформаций поперечного сечения, определяются деформации сжатой  $\varepsilon_{sc}$  и растянутой арматуры  $\varepsilon_s$ .

11. По формулам (3.6) ... (3.8) и (3.18) вычисляются усилия  $N_b$ ,  $N_{bt}$ ,  $N_{sc}$ ,  $N_s$  и подставляются в уравнение равновесия (3.4).

12. Если уравнение равновесия (3.4) не выполняется, то необходимо уточнить высоту сжатой зоны бетона и повторить расчет по пп. 10 ... 12 до достижения заданной точности. При этом в соответствии с предложениями В.Е.Бабича [2], если левая часть уравнения (3.4) больше, то высота сжатой зоны на последующей итерации принимается  $x_b^{(i)} = 0,98x_b^{(i)}$ . Если левая часть уравнения (3.4) меньше, то высота сжатой зоны на последующей итерации принимается  $x_b^{(i)} = 1,02x_b^{(i)}$ .

13. По формулам (3.9) ... (3.11) и (3.19) вычисляются значения изгибающих моментов от внутренних усилий в сжатом  $M_b$  и растянутом  $M_{bt}$  бетоне, в сжатой  $M_{sc}$  и растянутой  $M_{sc}$  арматуре.

14. Полученные значения изгибающих моментов от внутренних усилий подставляются в уравнение равновесия (3.5), и вычисляется изгибающий момент воспринимаемый сечением при заданной деформации крайнего растянутого волокна бетона. Вычисляется кривизна по формуле:

$$\chi^{(i)} = \frac{\varepsilon_b^{(i)} - \varepsilon_s^{(i)}}{h_0} \quad (3.23)$$

15. Расчет по пп. 9 ... 14 повторяют до тех пор, пока деформации крайнего сжатого волокна бетона или растянутой арматуры не достигнут предельных значений.

Для уменьшения времени расчета начальная высота сжатой зоны бетона на каждом последующем шаге принимается по предыдущему шагу.

На рис. 3.5, 3.6 приведена блок-схема описанного выше алгоритма исследования напряженно-деформированного состояния поперечных сечений изгибаемых и внецентренно сжатых железобетонных элементов.

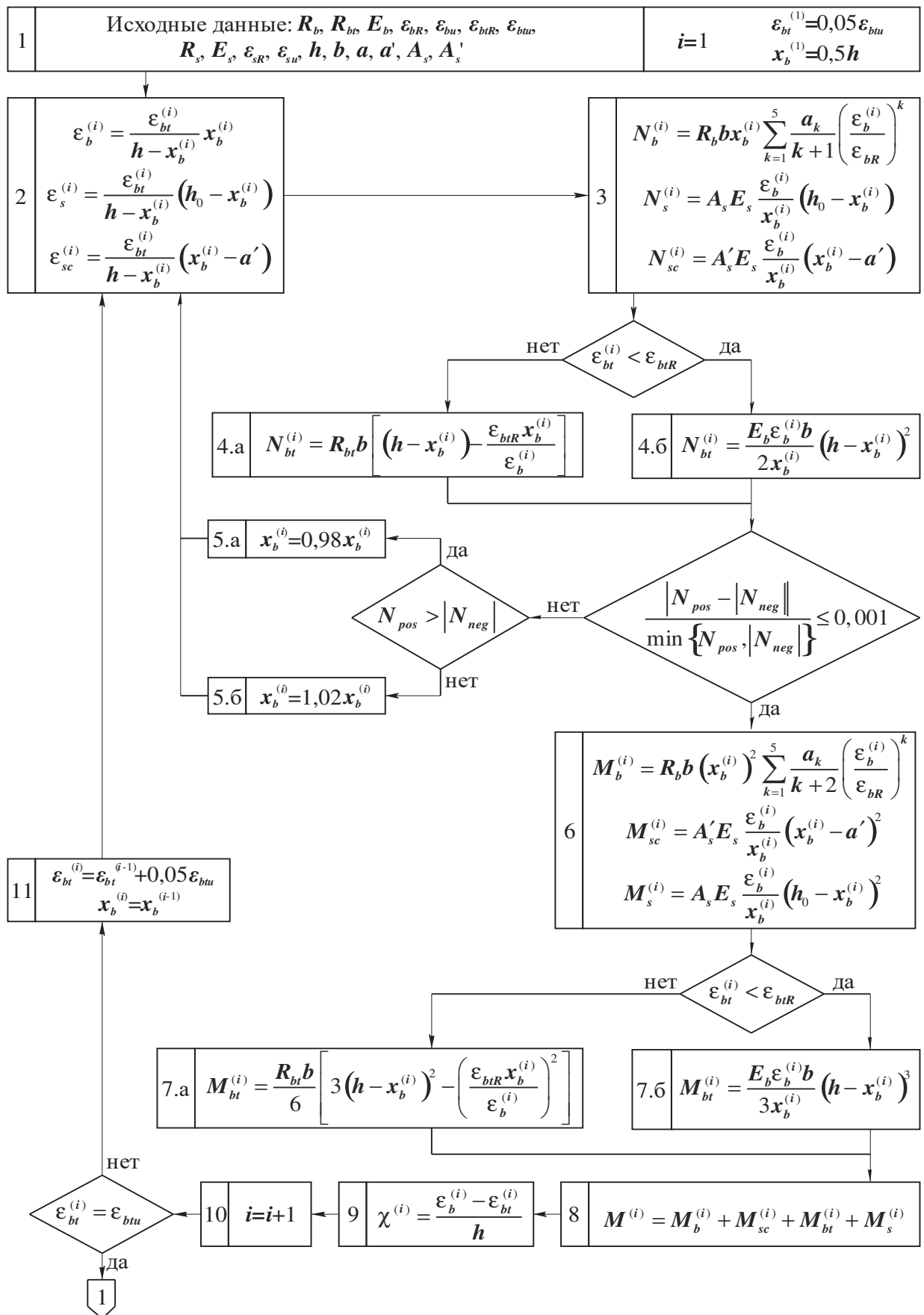


Рис. 3.5 Блок-схема построения диаграммы «момент – кривизна»

(начало)

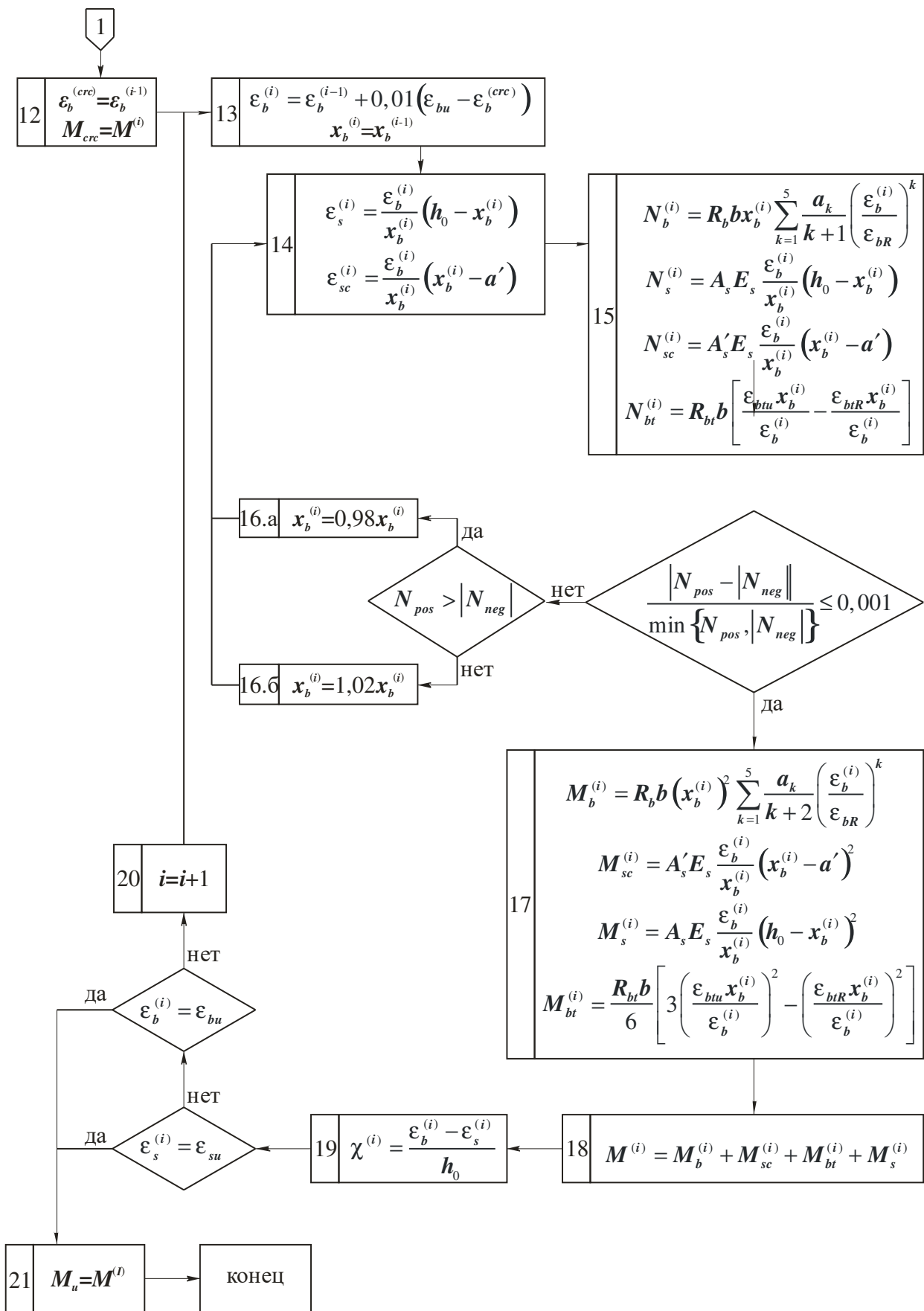


Рис. 3.6 Блок-схема построения диаграммы «момент – кривизна»

(окончание)

В соответствии с приведенной блок-схемой, в системе компьютерной математики MATLAB разработана программа для построения диаграмм «изгибающий момент – кривизна» для прямоугольных сечений железобетонных изгибаемых элементов.

Сравним диаграммы «изгибающий момент – кривизна» для сильно армированного сечения, построенные по экспериментальным данным, формулам СНиП 2.03.01-84\* «Бетонные и железобетонные конструкции», по практическому методу, основанному на предложениях И.Е. Прокоповича, и по предлагаемой методике. В экспериментах Р.Х. Асаада [1] проводились исследования балки, имеющей следующие характеристики: размеры поперечного сечения  $b \times h = 12 \times 20$  см, прочность бетона  $R_b = 18,5$  МПа, армирование растянутой зоны  $2\text{Ø}28$  класса А-III площадью  $A_s = 9,852$  см<sup>2</sup>, армирование сжатой зоны  $1\text{Ø}6$  класса А-III площадью  $A_s' = 0,338$  см<sup>2</sup>, коэффициент армирования  $\mu = 4,83$  %. Диаграммы «изгибающий момент – кривизна» для сильно армированного сечения приведены на рис. 3.7.

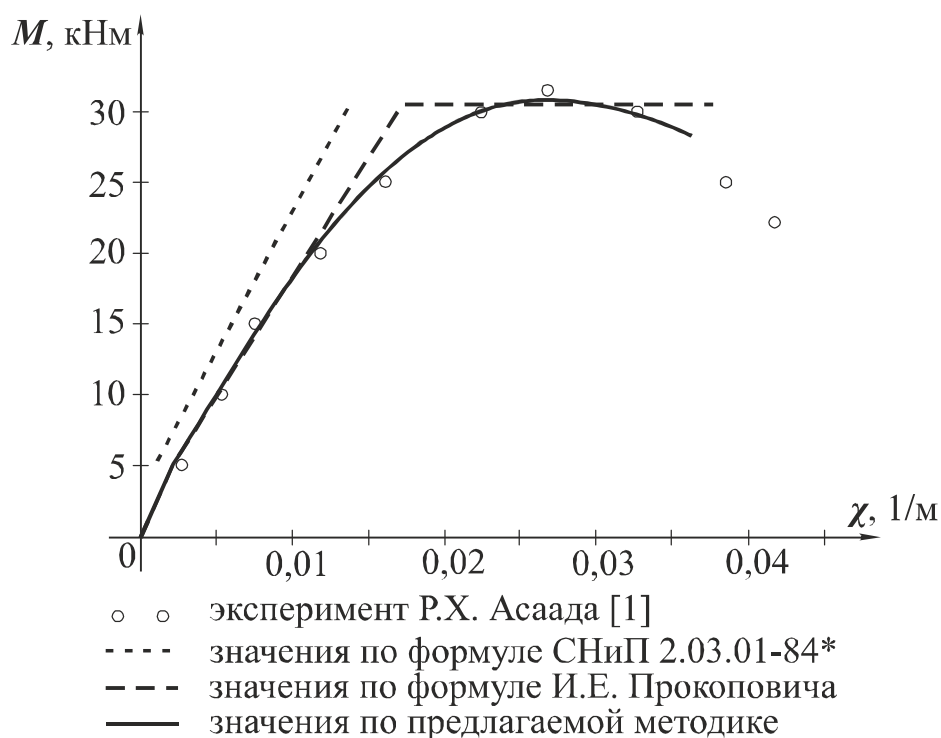


Рис. 3.7 Диаграммы «изгибающий момент – кривизна» для сильно армированного сечения

Сравним диаграммы «кривизна – изгибающий момент» для нормально армированного сечения, построенные по экспериментальным данным, формулам СНиП 2.03.01-84\* «Бетонные и железобетонные конструкции», по практическому методу, основанному на предложениях И.Е. Прокоповича, и по предлагаемой методике. В экспериментах Чинь Ким Дама [126] проводились исследования балки, имеющей следующие характеристики: размеры поперечного сечения  $b \times h = 10 \times 16$  см, кубиковая прочность бетона  $R_b = 21,2$  МПа, армирование растянутой зоны  $2\emptyset 12$  класса А-III с модулем упругости  $E_s = 2,05 \cdot 10^5$  МПа и расчетным сопротивлением  $R_s = 490$  МПа, площадью  $A_s = 2,26$  см<sup>2</sup>, коэффициент армирования  $\mu = 1,67\%$ . Диаграммы «изгибающий момент – кривизна» для нормально армированного сечения приведены на рис. 3.8.

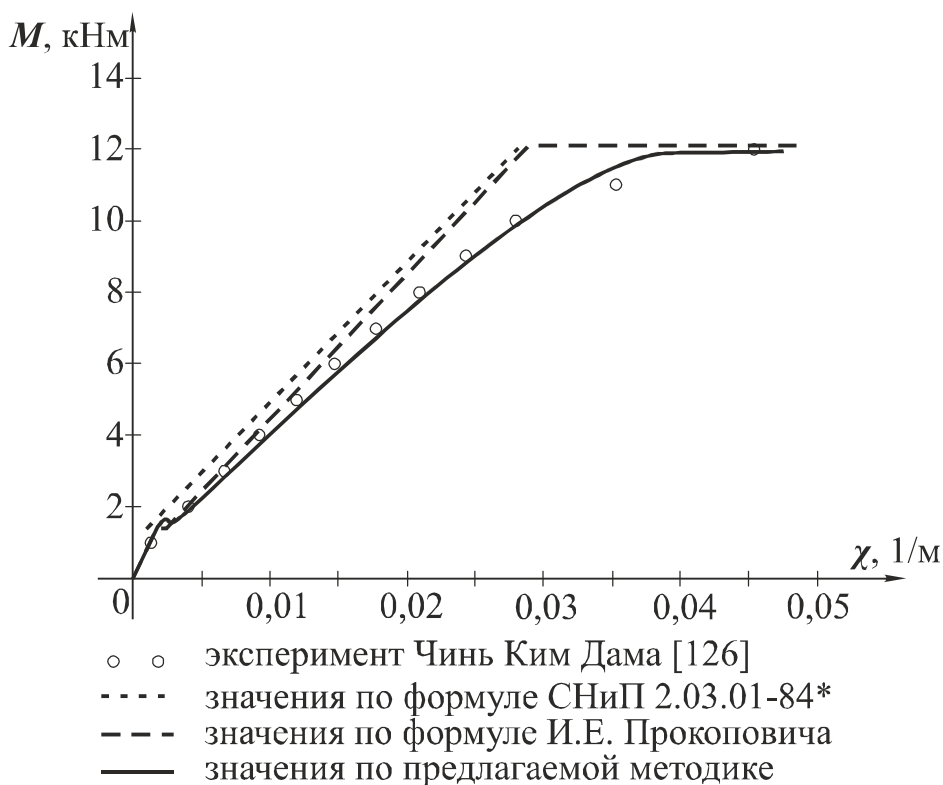


Рис. 3.8 Диаграммы «изгибающий момент – кривизна»  
 для нормально армированного сечения

Сравним диаграммы «изгибающий момент – кривизна» для слабо армированного сечения, построенные по формулам СНиП 2.03.01-84\*



«Бетонные и железобетонные конструкции», по практическому методу, основанному на предложениях И.Е. Прокоповича, и по предлагаемой методике. Рассмотрим сечение балки, имеющей следующие характеристики: размеры поперечного сечения  $b \times h = 10 \times 16$  см, кубиковая прочность бетона  $R_b = 21,2$  МПа, армирование растянутой зоны  $2\emptyset 10$  класса А-III с модулем упругости  $E_s = 2,05 \cdot 10^5$  МПа и расчетным сопротивлением  $R_s = 490$  МПа, площадью  $A_s = 1,57$  см<sup>2</sup>, коэффициент армирования  $\mu = 1,16\%$ . Диаграммы «изгибающий момент – кривизна» для слабо армированного сечения приведены на рис. 3.9.

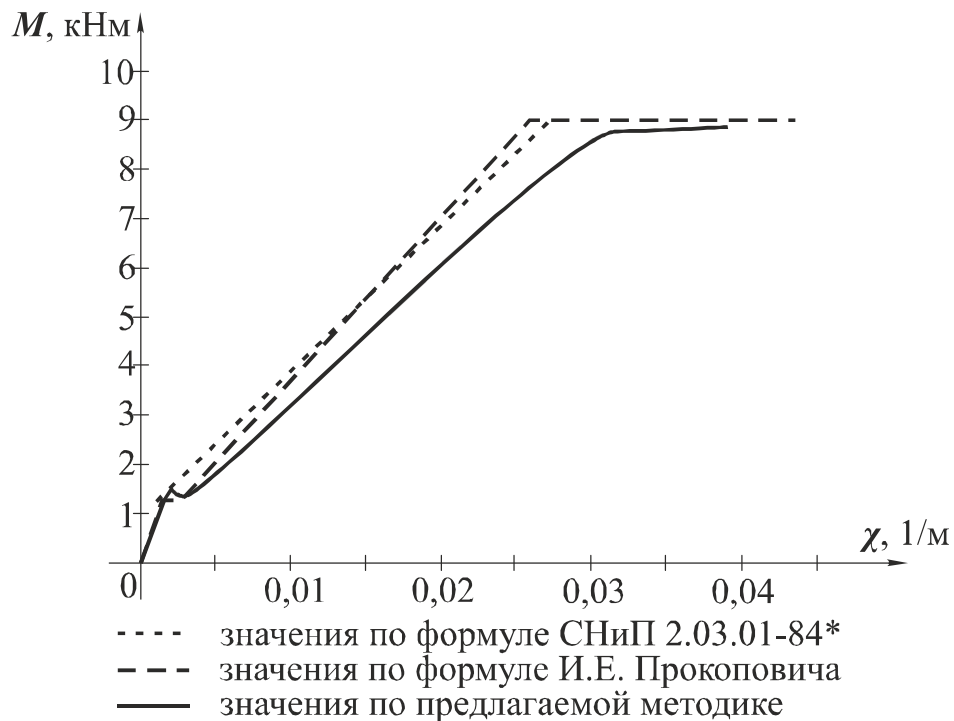


Рис. 3.9 Диаграммы «изгибающий момент – кривизна»  
для слабо армированного сечения

В таблицах 3.1, 3.2 приведено сравнение теоретических значений полученных по предлагаемой методике, по методике, основанной на формулах СНиП 2.03.01-84\*, по практическому методу, основанному на предложениях И.Е.Прокоповича и статистическая оценка распределения отношения теоретических и экспериментальных кривизн  $k_{теор} / k_{exp}$ .

Таблица 3.1

Сравнение экспериментальных данных Чинь Ким Дама [] с теоретическими значениями, полученными по предлагаемой методике, по формулам СНиП 2.03.01-84\* и по практическому методу, основанному на предложениях И.Е. Прокоповича

Экспериментальные значения	Теоретические значения													
	По предлагаемой методике				По формулам СНиП 2.03.01-84*				По практическому методу, основанному на предложениях И.Е. Прокоповича					
	$M, кНм$	$k_{теор}, 1/м$	разница, %	$k_{теор}/k_{exp}$	$M, кНм$	$k_{теор}, 1/м$	разница, %	$k_{теор}/k_{exp}$	$M, кНм$	$k_{теор}, 1/м$	разница, %	$k_{теор}/k_{exp}$		
1	0.0013	0.0011	-15.38	0.85	1				1	0.0013	0.00	1.00		
2	0.004	0.0044	10.00	1.10	2	0.0026	-35.00	0.65	2	0.0039	-2.50	0.98		
3	0.0066	0.0072	9.09	1.09	3	0.0052	-21.21	0.789	3	0.0065	-1.52	0.98		
4	0.0092	0.0099	7.61	1.08	4	0.0078	-15.22	0.85	4	0.0091	-1.09	0.99		
5	0.0119	0.0125	5.04	1.05	5	0.0103	-13.45	0.87	5	0.0116	-2.52	0.98		
6	0.0147	0.0154	4.76	1.05	6	0.0129	-12.24	0.88	6	0.0141	-4.08	0.96		
7	0.0177	0.0183	3.39	1.03	7	0.0154	-12.99	0.87	7	0.0165	-6.78	0.93		
8	0.0209	0.0214	2.39	1.02	8	0.0179	-14.35	0.86	8	0.019	-9.09	0.91		
9	0.0243	0.0247	1.65	1.02	9	0.0205	-15.64	0.84	9	0.0214	-11.93	0.88		
10	0.0279	0.0284	1.79	1.02	10	0.023	-17.56	0.82	10	0.0238	-14.70	0.85		
11	0.0352	0.0325	-7.67	0.92	11	0.0255	-27.56	0.72	11	0.0262	-25.57	0.74		
12	0.0454	0.0424	-6.61	0.93	12	0.0281	-38.11	0.62	12	0.0287	-36.78	0.63		
Выборочное среднее. $M_r$				1.01					0.80					
Выборочная дисперсия. $S_r$				0.08					0.09					
Выборочный коэффициент вариации, $C_v$				0.07					0.12					
Доверительный интервал (при $P = 0.95$ )				нижний предел	0.97					0.74				
				верхний предел	1.06					0.85				
												0.84		
												0.97		

Таблица 3.2

Сравнение экспериментальных данных Р.Х. Асаада [] с теоретическими значениями, полученными по предлагаемой методике, по формулам СНиП 2.03.01-84\* и по практическому методу, основанному на предложениях И.Е. Прокоповича

Экспериментальные значения		Теоретические значения											
		По предлагаемой методике				По формулам СНиП 2.03.01-84*				По практическому методу, основанному на предложениях И.Е. Прокоповича			
$M$ , кНМ	$K_{exp}$ , 1/М	$M$ , кНМ	$K_{теор}$ , 1/М	разница, %	$K_{теор}/K_{exp}$	$M$ , кНМ	$K_{теор}$ , 1/М	разница, %	$K_{теор}/K_{exp}$	$M$ , кНМ	$K_{теор}$ , 1/М	разница, %	$K_{теор}/K_{exp}$
5	0.0027	5	0.0020	-24.31	0.76	5	0.0010	-62.67	0.37	5	0.0019	-29.08	0.71
10	0.0054	10	0.0049	-8.11	0.92	10	0.0036	-32.80	0.67	10	0.0051	-4.80	0.95
15	0.0075	15	0.0079	5.55	1.06	15	0.0061	-18.67	0.81	15	0.0081	8.00	1.08
20	0.0118	20	0.0112	-4.95	0.95	20	0.0086	-27.03	0.73	20	0.0111	-5.82	0.94
25	0.0161	25	0.0153	-4.51	0.96	25	0.0110	-31.55	0.68	25	0.0140	-12.89	0.87
30	0.0225	30	0.0226	0.25	1.00	30	0.0135	-40.00	0.60	30	0.0169	-24.89	0.75
31.4	0.0268	30.752	0.0270	0.80	1.01	30.458	0.0138	-48.48	0.52	30.46	0.0172	-35.79	0.64
30	0.0327	30	0.0318	-2.68	0.97								
25	0.0386												
22.14	0.0418												
Выборочное среднее, $M_r$										0.63			
Выборочная дисперсия, $S_r$										0.15			
Выборочный коэффициент вариации, $C_v$										0.23			
Доверительный интервал (при $P = 0,95$ )		нижний предел				0,89				0,52			
		верхний предел				1,01				0,74			
										0,73			
										0,96			

### 3.3 Анализ влияния процента армирования и прочности бетона на работу изгибаемых железобетонных элементов

С целью изучения характера деформирования сечений изгибаемых железобетонных элементов проведены численные исследования с помощью программ, составленных в системе компьютерной математики MATLAB.

Изучен вид диаграмм при различных размерах поперечных сечений, прочности бетона и армировании железобетонных элементов.

На рис. 3.10 приведено семейство диаграмм «изгибающий момент – кривизна» для прямоугольного сечения размерами 200 × 400 мм из бетона с прочностью  $R_b = 15$  МПа, армированного арматурой класса А400 с нормативным сопротивлением  $R_s = 390$  МПа и модулем упругости  $E_s = 200000$  МПа при изменении процента армирования в пределах от 0,315% до 2,58%.

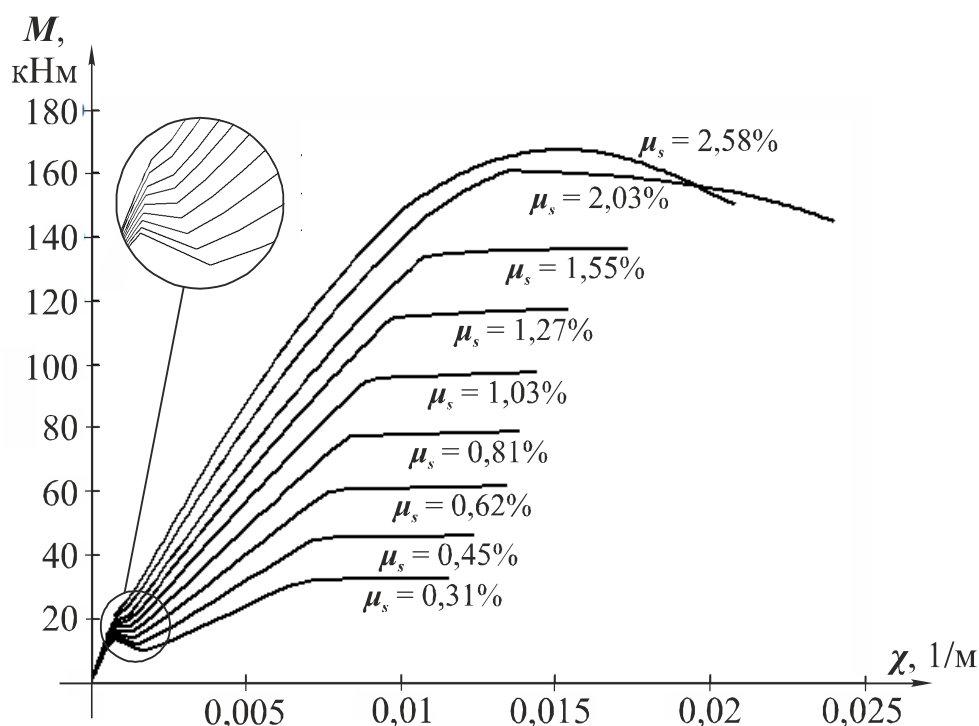


Рис. 3.10 Диаграммы «изгибающий момент – кривизна» для прямоугольного сечения из бетона прочностью  $R_b = 15$  МПа при изменении процента армирования

На рис. 3.11 представлено семейство диаграмм «изгибающий момент – кривизна» для прямоугольного сечения размерами 200 × 400 мм из бетона с прочностью  $R_b = 20$  МПа, построенные при помощи программы, составленной в системе компьютерной математики MATLAB, представлены на рис. 3.11.

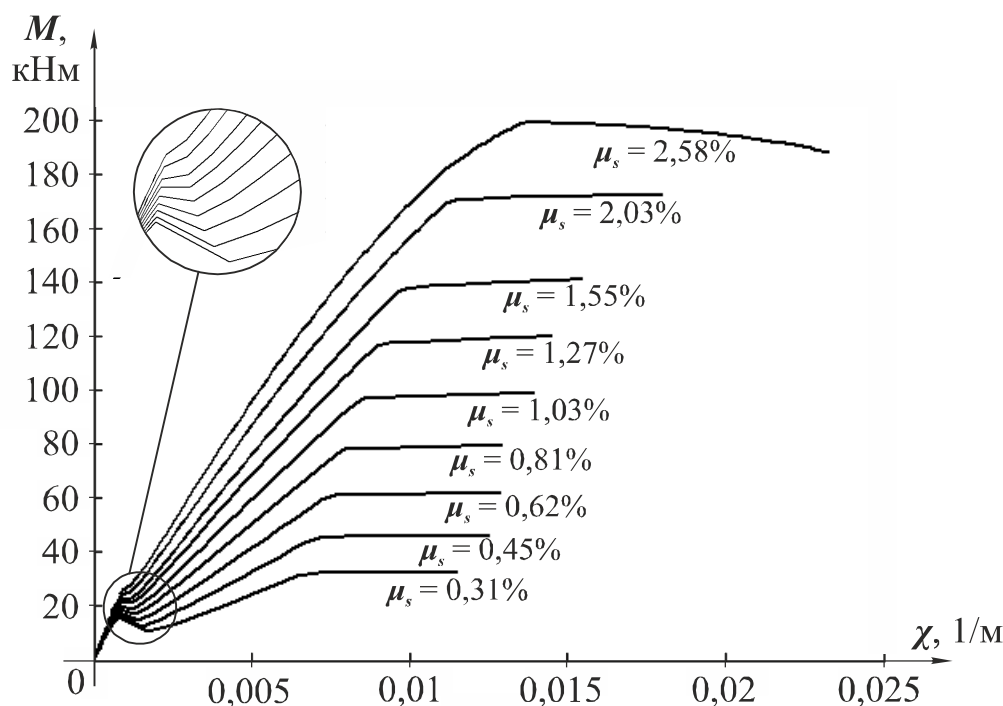


Рис. 3.11 Диаграммы «изгибающий момент – кривизна» для прямоугольного сечения из бетона прочностью  $R_b = 20$  МПа при изменении процента армирования

Сравнивая семейства диаграмм «изгибающий момент – кривизна», представленные на рис. 3.10, 3.11, построенные при различном армировании, можно выделить следующие три типа диаграмм:

1. Для слабо армированных сечений;
2. Для нормально армированных сечений;
3. Для сильно армированных сечений.

Л.Р.Маилян в работах [78, 79] указывал, что в момент трещинообразования работа элемента характеризуется резким приростом

кривизны с одновременным снижением воспринимаемого изгибающего момента. Размеры, получаемого при этом седловидного углубления на диаграмме «изгибающий момент – кривизна», зависят от вида арматуры (напрягаемая или ненапрягаемая) и коэффициента армирования элемента.

Из анализа диаграмм, представленных на рис. 3.10, 3.11, видно, что седловидное углубление наблюдается только в слабо армированных сечениях с низким армированием. Для нормально и сильно армированных элементов, на диаграмме «изгибающий момент – кривизна», отсутствует горизонтальный участок соответствующий моменту трещинообразования.

В работе [8] А.Н.Бамбуры утверждается, что горизонтальный участок, соответствующий моменту трещинообразования на теоретических диаграммах «изгибающий момент – кривизна» не наблюдается при экспериментальных исследованиях. Это объясняется тем, что на поверхности железобетонных элементов еще до приложения нагрузки имеются микротрещины, связанные с технологической поврежденностью и усадкой бетона в процессе твердения.

## 4 ПОСТРОЕНИЕ ЛИНЕАРИЗИРОВАННЫХ ДИАГРАММ «ИЗГИБАЮЩИЙ МОМЕНТ – КРИВИЗНА»

### 4.1 Определение ключевых точек линеаризованных диаграмм «изгибающий момент – кривизна»

При построении линеаризованной диаграммы «изгибающий момент – кривизна» для изгибаемых железобетонных элементов необходимо определить значения изгибающих моментов и соответствующих им кривизн в ключевых точках диаграммы из уравнений равновесия (3.4) и (3.5).

Для сечений слабо армированных железобетонных изгибаемых элементов диаграмма «изгибающий момент – кривизна» может быть изображена в виде, представленном на рис. 4.1.

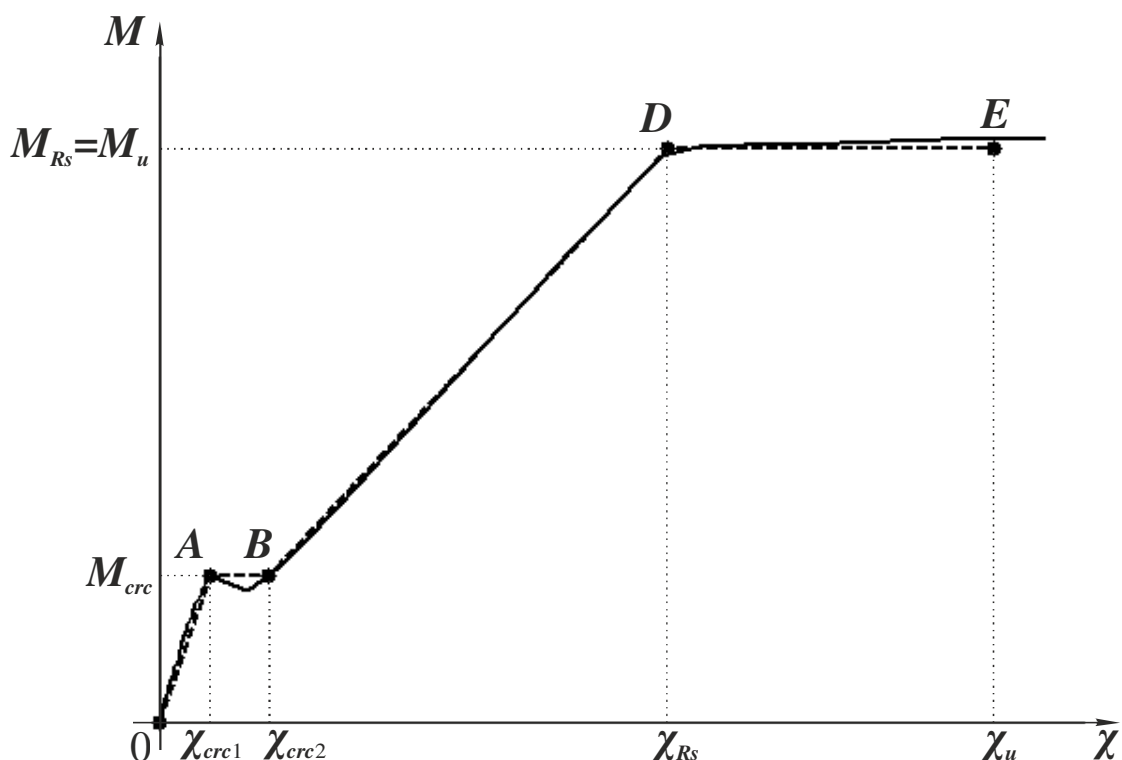


Рис. 4.1 Диаграмма «изгибающий момент – кривизна» работы сечений слабо армированных железобетонных изгибаемых элементов

Длина горизонтального участка  $AB$  на диаграмме «изгибающий момент – кривизна» для слабо армированного сечения зависит от содержания арматуры в сечении и при значениях процента армирования близких к значениям, соответствующим нормально армированному сечению, точка  $B$  совпадает с точкой  $A$ .

Для определения значений изгибающего момента и кривизны, соответствующих точке  $A$ , на первом этапе определяем высоту сжатой зоны бетона, задаваясь деформацией крайнего растянутого волокна бетона  $\varepsilon_{bt} = \varepsilon_{btu}$ , предшествующей образованию трещины. Деформации крайнего сжатого волокна бетона, растянутой и сжатой арматуры, выраженные через деформацию крайнего растянутого волокна бетона, подставляем в уравнения (3.6) ... (3.8) и (3.16). После подстановки, полученных выражений для равнодействующих внутренних усилий в бетоне и арматуре в уравнение равновесия (3.4), получим:

$$\begin{aligned}
 & R_b b x_b \frac{a_1}{2} \frac{\varepsilon_{btu} x_b}{\varepsilon_{bR} (h - x_b)} + R_b b x_b \frac{a_2}{3} \frac{\varepsilon_{btu}^2 x_b^2}{\varepsilon_{bR}^2 (h - x_b)^2} + R_b b x_b \frac{a_3}{4} \frac{\varepsilon_{btu}^3 x_b^3}{\varepsilon_{bR}^3 (h - x_b)^3} + \\
 & + R_b b x_b \frac{a_4}{5} \frac{\varepsilon_{btu}^4 x_b^4}{\varepsilon_{bR}^4 (h - x_b)^4} + R_b b x_b \frac{a_5}{6} \frac{\varepsilon_{btu}^5 x_b^5}{\varepsilon_{bR}^5 (h - x_b)^5} + A'_s E_s \frac{\varepsilon_{btu} (x_b - a')}{h - x_b} - \\
 & - R_{bt} b \left( h - x_b - \frac{\varepsilon_{btR} (h - x_b)}{2\varepsilon_{btu}} \right) - A_s E_s \frac{\varepsilon_{btu} (h_0 - x_b)}{h - x_b} = 0.
 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Приводя левую часть уравнения (4.1) к общему знаменателю, получим:



$$\left[ \begin{aligned} &30R_b b a_1 \varepsilon_{bR}^4 \varepsilon_{btu}^2 x_b^2 (h - x_b)^4 + 20R_b b a_2 \varepsilon_{bR}^3 \varepsilon_{btu}^3 x_b^3 (h - x_b)^3 + \\ &+ 15R_b b a_3 \varepsilon_{bR}^2 \varepsilon_{btu}^4 x_b^4 (h - x_b)^2 + 12R_b b a_4 \varepsilon_{bR} \varepsilon_{btu}^5 x_b^5 (h - x_b) + \\ &+ 10R_b b a_5 \varepsilon_{btu}^6 x_b^6 + 60A'_s E_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btu}^2 (x_b - a')(h - x_b)^4 - \\ &- 60R_{bt} b \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btu} (h - x_b)^6 + 30R_{bt} b \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btR} (h - x_b)^6 - \\ &- 60A_s E_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btu}^2 (h_0 - x_b)(h - x_b)^4 \end{aligned} \right] = 0. \quad (4.2)$$

$$60\varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btu} (h - x_b)^5$$

Уравнение (4.2) имеет смысл при значении высоты сжатой зоны бетона  $x_b \neq h$ . Используя бином Ньютона, запишем числитель уравнения (4.2) в следующем виде:

$$\begin{aligned} &30R_b b a_1 \varepsilon_{bR}^4 \varepsilon_{btu}^2 x_b^2 (h^4 - 4h^3 x_b + 6h^2 x_b^2 - 4hx_b^3 + x_b^4) + 20R_b b a_2 \varepsilon_{bR}^3 \varepsilon_{btu}^3 x_b^3 \times \\ &\quad \times (h^3 - 3h^2 x_b + 3hx_b^2 - x_b^3) + 15R_b b a_3 \varepsilon_{bR}^2 \varepsilon_{btu}^4 x_b^4 (h^2 - 2hx_b + x_b^2) + \\ &+ 12R_b b a_4 \varepsilon_{bR} \varepsilon_{btu}^5 x_b^5 (h - x_b) + 10R_b b a_5 \varepsilon_{btu}^6 x_b^6 + 60A'_s E_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btu}^2 x_b (h^4 - \\ &- 4h^3 x_b + 6h^2 x_b^2 - 4hx_b^3 + x_b^4) - 60A'_s E_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btu}^2 a' (h^4 - 4h^3 x_b + 6h^2 x_b^2 - \\ &- 4hx_b^3 + x_b^4) - 60R_{bt} b \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btu} (h^6 - 6h^5 x_b + 15h^4 x_b^2 - 20h^3 x_b^3 + 15h^2 x_b^4 - \\ &- 6hx_b^5 + x_b^6) + 30R_{bt} b \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btR} (h^6 - 6h^5 x_b + 15h^4 x_b^2 - 20h^3 x_b^3 + 15h^2 x_b^4 - \\ &- 6hx_b^5 + x_b^6) - 60A_s E_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btu}^2 h_0 (h^4 - 4h^3 x_b + 6h^2 x_b^2 - 4hx_b^3 + x_b^4) + \\ &+ 60A_s E_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btu}^2 x_b (h^4 - 4h^3 x_b + 6h^2 x_b^2 - 4hx_b^3 + x_b^4) = 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

После раскрытия скобок уравнение (4.3) примет вид:

$$\begin{aligned}
& 30R_bba_1\varepsilon_{bR}^4\varepsilon_{btu}^2h^4x_b^2 - 120R_bba_1\varepsilon_{bR}^4\varepsilon_{btu}^2h^3x_b^3 + 180R_bba_1\varepsilon_{bR}^4\varepsilon_{btu}^2h^2x_b^4 - 120 \times \\
& \times R_bba_1\varepsilon_{bR}^4\varepsilon_{btu}^2hx_b^5 + 30R_bba_1\varepsilon_{bR}^4\varepsilon_{btu}^2x_b^6 + 20R_bba_2\varepsilon_{bR}^3\varepsilon_{btu}^3h^3x_b^3 - 60R_bba_2 \times \\
& \times \varepsilon_{bR}^3\varepsilon_{btu}^3h^2x_b^4 + 60R_bba_2\varepsilon_{bR}^3\varepsilon_{btu}^3hx_b^5 - 20R_bba_2\varepsilon_{bR}^3\varepsilon_{btu}^3x_b^6 + 15R_bba_3\varepsilon_{bR}^2\varepsilon_{btu}^4 \times \\
& \times h^2x_b^4 - 30R_bba_3\varepsilon_{bR}^2\varepsilon_{btu}^4hx_b^5 + 15R_bba_3\varepsilon_{bR}^2\varepsilon_{btu}^4x_b^6 + 12R_bba_4\varepsilon_{bR}\varepsilon_{btu}^5hx_b^5 - \\
& - 12R_bba_4\varepsilon_{bR}\varepsilon_{btu}^5x_b^6 + 10R_bba_5\varepsilon_{btu}^6x_b^6 + +60A'_sE_s\varepsilon_{bR}^5\varepsilon_{btu}^2h^4x_b - 240A'_sE_s \times \\
& \times \varepsilon_{bR}^5\varepsilon_{btu}^2h^3x_b^2 + 360A'_sE_s\varepsilon_{bR}^5\varepsilon_{btu}^2h^2x_b^3 - 240A'_sE_s\varepsilon_{bR}^5\varepsilon_{btu}^2hx_b^4 + 60A'_sE_s \times \\
& \times \varepsilon_{bR}^5\varepsilon_{btu}^2x_b^5 - 60A'_sE_s\varepsilon_{bR}^5\varepsilon_{btu}^2a'h^4 + +240A'_sE_s\varepsilon_{bR}^5\varepsilon_{btu}^2a'h^3x_b - 360A'_sE_s\varepsilon_{bR}^5 \times \\
& \times \varepsilon_{btu}^2a'h^2x_b^2 + 240A'_sE_s\varepsilon_{bR}^5\varepsilon_{btu}^2a'hx_b^3 - 60A'_sE_s\varepsilon_{bR}^5\varepsilon_{btu}^2a'x_b^4 - 60R_{bt}b\varepsilon_{bR}^5\varepsilon_{btu} \times \\
& \times h^6 + 360R_{bt}b\varepsilon_{bR}^5\varepsilon_{btu}h^5x_b - 900R_{bt}b\varepsilon_{bR}^5\varepsilon_{btu}h^4x_b^2 + 1200R_{bt}b\varepsilon_{bR}^5\varepsilon_{btu}h^3x_b^3 - \\
& - 900R_{bt}b\varepsilon_{bR}^5\varepsilon_{btu}h^2x_b^4 + 360R_{bt}b\varepsilon_{bR}^5\varepsilon_{btu}hx_b^5 - 60R_{bt}b\varepsilon_{bR}^5\varepsilon_{btu}x_b^6 + 30R_{bt}b\varepsilon_{bR}^5 \times \\
& \times \varepsilon_{btR}h^6 - 180R_{bt}b\varepsilon_{bR}^5\varepsilon_{btR}h^5x_b + 450R_{bt}b\varepsilon_{bR}^5\varepsilon_{btR}h^4x_b^2 - 600R_{bt}b\varepsilon_{bR}^5\varepsilon_{btR}h^3 \times \\
& \times x_b^3 + 450R_{bt}b\varepsilon_{bR}^5\varepsilon_{btR}h^2x_b^4 - 180R_{bt}b\varepsilon_{bR}^5\varepsilon_{btR}hx_b^5 + 30R_{bt}b\varepsilon_{bR}^5\varepsilon_{btR}x_b^6 - 60A_s \times \\
& \times E_s\varepsilon_{bR}^5\varepsilon_{btu}^2h_0h^4 + 240A_sE_s\varepsilon_{bR}^5\varepsilon_{btu}^2h_0h^3x_b - 360A_sE_s\varepsilon_{bR}^5\varepsilon_{btu}^2h_0h^2x_b^2 + 240A_s \times \\
& \times E_s\varepsilon_{bR}^5\varepsilon_{btu}^2h_0hx_b^3 - 60A_sE_s\varepsilon_{bR}^5\varepsilon_{btu}^2h_0x_b^4 + 60A_sE_s\varepsilon_{bR}^5\varepsilon_{btu}^2x_bh^4 - 240A_sE_s\varepsilon_{bR}^5 \times \\
& \times \varepsilon_{btu}^2h^3x_b^2 + 360A_sE_s\varepsilon_{bR}^5\varepsilon_{btu}^2h^2x_b^3 - 240A_sE_s\varepsilon_{bR}^5\varepsilon_{btu}^2hx_b^4 + 60A_sE_s\varepsilon_{bR}^5\varepsilon_{btu}^2x_b^5 = 0.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

После приведения подобных слагаемых уравнение (4.4) можно записать

в виде:

$$A_1x_b^6 + A_2x_b^5 + A_3x_b^4 + A_4x_b^3 + A_5x_b^2 + A_6x_b + A_7 = 0, \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}
\text{где } A_1 = & 30R_bba_1\varepsilon_{bR}^4\varepsilon_{btu}^2 - 20R_bba_2\varepsilon_{bR}^3\varepsilon_{btu}^3 + 15R_bba_3\varepsilon_{bR}^2\varepsilon_{btu}^4 - 12R_bba_4\varepsilon_{bR}\varepsilon_{btu}^5 + \\
& + 10R_bba_5\varepsilon_{btu}^6 - 60R_{bt}b\varepsilon_{bR}^5\varepsilon_{btu} + 30R_{bt}b\varepsilon_{bR}^5\varepsilon_{btR} = R_b b \varepsilon_{btu}^2 \left( 30a_1\varepsilon_{bR}^4 - 20a_2 \times \right. \\
& \times \varepsilon_{bR}^3\varepsilon_{btu} + 15a_3\varepsilon_{bR}^2\varepsilon_{btu}^2 - 12a_4\varepsilon_{bR}\varepsilon_{btu}^3 + 10a_5\varepsilon_{btu}^4 \left. \right) - 30R_{bt}b\varepsilon_{bR}^5(2\varepsilon_{btu} - \varepsilon_{btR});
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 = & -120R_bba_1\varepsilon_{bR}^4\varepsilon_{btu}^2h + 60R_bba_2\varepsilon_{bR}^3\varepsilon_{btu}^3h - 30R_bba_3\varepsilon_{bR}^2\varepsilon_{btu}^4h + 12R_bba_4\varepsilon_{bR} \times \\
& \times \varepsilon_{btu}^5h + 60A'_sE_s\varepsilon_{bR}^5\varepsilon_{btu}^2 + 360R_{bt}b\varepsilon_{bR}^5\varepsilon_{btu}h - 180R_{bt}b\varepsilon_{bR}^5\varepsilon_{btR}h + 60A_sE_s\varepsilon_{bR}^5 \times \\
& \times \varepsilon_{btu}^2 = -6R_b b \varepsilon_{bR}^2 \varepsilon_{btu} h \left( 20a_1\varepsilon_{bR}^3 - 10a_2\varepsilon_{bR}^2\varepsilon_{btu} + 5a_3\varepsilon_{bR}\varepsilon_{btu}^2 - 2a_4\varepsilon_{btu}^3 \right) + 60E_s \times \\
& \times \varepsilon_{bR}^5\varepsilon_{btu}^2(A'_s + A_s) + 180R_{bt}b\varepsilon_{bR}^5h(2\varepsilon_{btu} - \varepsilon_{btR});
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3 = & 180R_bba_1\varepsilon_{bR}^4\varepsilon_{btu}^2h^2 - 60R_bba_2\varepsilon_{bR}^3\varepsilon_{btu}^3h^2 + 15R_bba_3\varepsilon_{bR}^2\varepsilon_{btu}^4h^2 - 240A'_sE_s\varepsilon_{bR}^5 \times \\
& \times \varepsilon_{btu}^2h - 60A'_sE_s\varepsilon_{bR}^5\varepsilon_{btu}^2a' - 900R_{bt}b\varepsilon_{bR}^5\varepsilon_{btu}h^2 + 450R_{bt}b\varepsilon_{bR}^5\varepsilon_{btR}h^2 - 60A_sE_s \times \\
& \times \varepsilon_{bR}^5\varepsilon_{btu}^2h_0 - 240A_sE_s\varepsilon_{bR}^5\varepsilon_{btu}^2h = 15R_b b \varepsilon_{bR}^2 \varepsilon_{btu}^2 h^2 \left( 12a_1\varepsilon_{bR}^2 - 4a_2\varepsilon_{bR}\varepsilon_{btu} + a_3\varepsilon_{btu}^2 \right) - \\
& - 60E_s\varepsilon_{bR}^5\varepsilon_{btu}^2 \left[ 4h(A'_s + A_s) + A'_sa' + A_sh_0 \right] - 450R_{bt}b\varepsilon_{bR}^5h^2(2\varepsilon_{btu} - \varepsilon_{btR});
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_4 = & -120R_b b a_1 \varepsilon_{bR}^4 \varepsilon_{btu}^2 h^3 + 20R_b b a_2 \varepsilon_{bR}^3 \varepsilon_{btu}^3 h^3 + 360A'_s E_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btu}^2 h^2 + \\
& + 240A'_s E_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btu}^2 h a' + 1200R_{bt} b \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btu} h^3 - 600R_{bt} b \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btR} h^3 + \\
& + 240A_s E_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btu}^2 h h_0 + 360A_s E_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btu}^2 h^2 = -20R_b b \varepsilon_{bR}^3 \varepsilon_{btu}^2 h^3 \times \\
& \times (6a_1 \varepsilon_{bR} - a_2 \varepsilon_{btu}) + 120E_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btu}^2 h [3h(A'_s + A_s) + 2(A_s h_0 + A'_s a')] + \\
& + 600R_{bt} b \varepsilon_{bR}^5 h^3 (2\varepsilon_{btu} - \varepsilon_{btR});
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_5 = & 30R_b b a_1 \varepsilon_{bR}^4 \varepsilon_{btu}^2 h^4 - 240A'_s E_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btu}^2 h^3 - 360A'_s E_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btu}^2 h^2 a' - \\
& - 900R_{bt} b \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btu} h^4 + 450R_{bt} b \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btR} h^4 - 360A_s E_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btu}^2 h^2 h_0 - \\
& - 240A_s E_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btu}^2 h^3 = 30R_b b a_1 \varepsilon_{bR}^4 \varepsilon_{btu}^2 h^4 - 120E_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btu}^2 h^2 \times \\
& \times [2h(A'_s + A_s) + 3(A'_s a' + A_s h_0)] - 450R_{bt} b \varepsilon_{bR}^5 h^4 (2\varepsilon_{btu} - \varepsilon_{btR});
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_6 = & 60A'_s E_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btu}^2 h^4 + 240A'_s E_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btu}^2 h^3 a' + 360R_{bt} b \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btu} h^5 - \\
& - 180R_{bt} b \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btR} h^5 + 240A_s E_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btu}^2 h^3 h_0 + 60A_s E_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btu}^2 h^4 = \\
& = 60E_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btu}^2 h^3 [h(A'_s + A_s) + 4(A'_s a' + A_s h_0)] + \\
& + 180R_{bt} b \varepsilon_{bR}^5 h^5 (2\varepsilon_{btu} - \varepsilon_{btR});
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_7 = & -60A'_s E_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btu}^2 h^4 a' - 60R_{bt} b \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btu} h^6 + 30R_{bt} b \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btR} h^6 - \\
& - 60A_s E_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btu}^2 h^4 h_0 = -60E_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btu}^2 h^4 (A'_s a' + A_s h_0) - \\
& - 30R_{bt} b \varepsilon_{bR}^5 h^6 (2\varepsilon_{btu} - \varepsilon_{btR}).
\end{aligned}$$

Для решения уравнения (4.5), используется система компьютерной математики MATLAB. Из шести корней удовлетворяющих уравнению (4.5) выбирается корень, удовлетворяющий следующим условиям:

- корень не является комплексным числом;
- корень удовлетворяет неравенство  $0 < x_b < h$ .

Высота сжатой зоны бетона, найденная из уравнения (4.5), используется для определения деформаций крайнего сжатого волокна бетона, сжатой и растянутой арматуры, а также высоты растянутой зоны бетона. Для определения значений изгибающих моментов, воспринимаемых бетоном и арматурой, полученные значения деформаций и высот сжатой и растянутой зон бетона подставляются в уравнения (3.9) ... (3.11) и (3.19).

Значение изгибающего момента, воспринимаемого сечением, определяется из уравнения равновесия (3.5). Значение кривизны, соответствующей точке  $A$  определяется по формуле (3.20).

Значения изгибающих моментов, соответствующие точкам  $A$  и  $B$ , равны между собой. Для определения значения кривизны, соответствующего точке  $B$ , необходимо решить систему из уравнений равновесия относительно неизвестных деформаций крайнего сжатого волокна бетона и высоты сжатой зоны бетона. Значения деформаций растянутой и сжатой арматуры и высоты растянутой зоны бетона, выраженные через деформации крайнего сжатого волокна бетона  $\varepsilon_b$  и высоту сжатой зоны бетона  $x_b$ , подставляем в уравнения (3.6) ... (3.11), (3.18) и (3.19). После подстановки, полученных выражений для равнодействующих внутренних усилий в бетоне и арматуре в уравнения равновесия (3.4) и (3.5), получим следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_b b x_b \frac{a_1}{2} \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_{bR}} + R_b b x_b \frac{a_2}{3} \frac{\varepsilon_b^2}{\varepsilon_{bR}^2} + R_b b x_b \frac{a_3}{4} \frac{\varepsilon_b^3}{\varepsilon_{bR}^3} + R_b b x_b \frac{a_4}{5} \frac{\varepsilon_b^4}{\varepsilon_{bR}^4} + \\ + R_b b x_b \frac{a_5}{6} \frac{\varepsilon_b^5}{\varepsilon_{bR}^5} + A'_s E_s \frac{\varepsilon_b (x_b - a')}{x_b} - R_{bt} b \left( \frac{\varepsilon_{btu} x_b}{\varepsilon_b} - \frac{\varepsilon_{btR} x_b}{2\varepsilon_b} \right) - \\ - A_s E_s \frac{\varepsilon_b (h_0 - x_b)}{x_b} = 0; \\ R_b b x_b^2 \frac{a_1}{3} \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_{bR}} + R_b b x_b^2 \frac{a_2}{4} \frac{\varepsilon_b^2}{\varepsilon_{bR}^2} + R_b b x_b^2 \frac{a_3}{5} \frac{\varepsilon_b^3}{\varepsilon_{bR}^3} + R_b b x_b^2 \frac{a_4}{6} \frac{\varepsilon_b^4}{\varepsilon_{bR}^4} + \\ + R_b b x_b^2 \frac{a_5}{7} \frac{\varepsilon_b^5}{\varepsilon_{bR}^5} + A'_s E_s \frac{\varepsilon_b}{x_b} (x_b - a')^2 + R_{bt} b \frac{\varepsilon_{btu}^2 x_b^2}{2\varepsilon_b^2} - R_{bt} b \frac{\varepsilon_{btR}^2 x_b^2}{6\varepsilon_b^2} + \\ + A_s E_s \frac{\varepsilon_b}{x_b} (h_0 - x_b)^2 - M_{crc} = 0. \end{array} \right. \quad (4.6)$$

Приводя левые части уравнений системы (4.6) к общему знаменателю, получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} 30R_b ba_1 \varepsilon_{bR}^4 \varepsilon_b^2 x_b^2 + 20R_b ba_2 \varepsilon_{bR}^3 \varepsilon_b^3 x_b^2 + 15R_b ba_3 \varepsilon_{bR}^2 \varepsilon_b^4 x_b^2 + 12R_b ba_4 \times \\ \times \varepsilon_{bR} \varepsilon_b^5 x_b^2 + 10R_b ba_5 \varepsilon_b^6 x_b^2 + 60A'_s E_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_b^2 (x_b - a') - 60R_{bt} b \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btu} x_b^2 + \\ + 30R_{bt} b \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{bIR} x_b^2 - 60A_s E_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_b^2 (h_0 - x_b) \end{array} \right] = 0; \\ \frac{60\varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_b x_b}{420\varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_b^2 x_b} \\ \left[ \begin{array}{l} 140R_b ba_1 \varepsilon_{bR}^4 \varepsilon_b^3 x_b^3 + 105R_b ba_2 \varepsilon_{bR}^3 \varepsilon_b^4 x_b^3 + 84R_b ba_3 \varepsilon_{bR}^2 \varepsilon_b^5 x_b^3 + 70R_b b \times \\ \times a_4 \varepsilon_{bR} \varepsilon_b^6 x_b^3 + 60R_b ba_5 \varepsilon_b^7 x_b^3 + 420A'_s E_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_b^3 (x_b^2 - 2x_b a' + a'^2) + 210 \times \\ \times R_{bt} b \varepsilon_{btu}^2 \varepsilon_{bR}^5 x_b^3 - 70R_{bt} b \varepsilon_{bIR}^2 \varepsilon_{bR}^5 x_b^3 + 420A_s E_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_b^3 (h_0^2 - 2h_0 x_b + x_b^2) - \\ - 420M_{crc} \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_b^2 x_b \end{array} \right] = 0. \end{array} \right. \quad (4.7)$$

Уравнения, входящие в систему (4.7), имеют смысл при значениях сжатой высоты бетона  $x_b \neq 0$  и деформации крайнего сжатого волокна бетона  $\varepsilon_b \neq 0$ . Раскрывая скобки в числителях, запишем систему уравнений (4.7) в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} 30R_b ba_1 \varepsilon_{bR}^4 \varepsilon_b^2 x_b^2 + 20R_b ba_2 \varepsilon_{bR}^3 \varepsilon_b^3 x_b^2 + 15R_b ba_3 \varepsilon_{bR}^2 \varepsilon_b^4 x_b^2 + 12R_b ba_4 \varepsilon_{bR} \varepsilon_b^5 x_b^2 + \\ + 10R_b ba_5 \varepsilon_b^6 x_b^2 + 60A'_s E_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_b^2 x_b - 60A'_s E_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_b^2 a' - 60R_{bt} b \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btu} x_b^2 + \\ + 30R_{bt} b \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{bIR} x_b^2 - 60A_s E_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_b^2 h_0 + 60A_s E_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_b^2 x_b = 0; \end{array} \right. \\ \left[ \begin{array}{l} 140R_b ba_1 \varepsilon_{bR}^4 \varepsilon_b^3 x_b^3 + 105R_b ba_2 \varepsilon_{bR}^3 \varepsilon_b^4 x_b^3 + 84R_b ba_3 \varepsilon_{bR}^2 \varepsilon_b^5 x_b^3 + 70R_b ba_4 \varepsilon_{bR} \varepsilon_b^6 x_b^3 + \\ + 60R_b ba_5 \varepsilon_b^7 x_b^3 + 420A'_s E_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_b^3 x_b^2 - 840A'_s E_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_b^3 a' x_b + 420A'_s E_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_b^3 a'^2 + \\ + 210R_{bt} b \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btu}^2 x_b^3 - 70R_{bt} b \varepsilon_{bIR}^2 \varepsilon_{bR}^5 x_b^3 + 420A_s E_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_b^3 h_0^2 - 840A_s E_s \varepsilon_{bR}^5 \times \\ \times h_0 \varepsilon_b^3 x_b + 420A_s E_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_b^3 x_b^2 - 420M \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_b^2 x_b = 0. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.8)$$

После приведения подобных слагаемых систему уравнений (4.8) можно записать в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{1,1} \varepsilon_b^6 x_b^2 + B_{1,2} \varepsilon_b^5 x_b^2 + B_{1,3} \varepsilon_b^4 x_b^2 + B_{1,4} \varepsilon_b^3 x_b^2 + B_{1,5} \varepsilon_b^2 x_b^2 + B_{1,6} \varepsilon_b^2 x_b + \\ + B_{1,7} \varepsilon_b^2 + B_{1,8} x_b^2 = 0; \\ B_{2,1} \varepsilon_b^7 x_b^3 + B_{2,2} \varepsilon_b^6 x_b^3 + B_{2,3} \varepsilon_b^5 x_b^3 + B_{2,4} \varepsilon_b^4 x_b^3 + B_{2,5} \varepsilon_b^3 x_b^3 + B_{2,6} \varepsilon_b^3 x_b^2 + \\ + B_{2,7} \varepsilon_b^3 x_b + B_{2,8} \varepsilon_b^3 + B_{2,9} \varepsilon_b^2 x_b + B_{2,10} x_b^3 = 0, \end{array} \right. \quad (4.9)$$

где  $B_{1,1} = 10R_b ba_5$ ;

$$B_{1,2} = 12R_b ba_4 \varepsilon_{bR};$$

$$B_{1,3} = 15R_b ba_3 \varepsilon_{bR}^2;$$

$$B_{1,4} = 20R_b ba_2 \varepsilon_{bR}^3;$$

$$B_{1,5} = 30R_b ba_1 \varepsilon_{bR}^4;$$

$$B_{1,6} = 60A'_s E_s \varepsilon_{bR}^5 + 60A_s E_s \varepsilon_{bR}^5 = 60E_s \varepsilon_{bR}^5 (A'_s + A_s);$$

$$B_{1,7} = -60A'_s E_s \varepsilon_{bR}^5 a' - 60A_s E_s \varepsilon_{bR}^5 h_0 = -60E_s \varepsilon_{bR}^5 (A'_s a' + A_s h_0);$$

$$B_{1,8} = 30R_{bt} b \varepsilon_{btR} \varepsilon_{bR}^5 - 60R_{bt} b \varepsilon_{btu} \varepsilon_{bR}^5 = 30R_{bt} b \varepsilon_{bR}^5 (\varepsilon_{btR} - 2\varepsilon_{btu});$$

$$B_{2,1} = 60R_b ba_5;$$

$$B_{2,2} = 70R_b ba_4 \varepsilon_{bR};$$

$$B_{2,3} = 84R_b ba_3 \varepsilon_{bR}^2;$$

$$B_{2,4} = 105R_b ba_2 \varepsilon_{bR}^3;$$

$$B_{2,5} = 140R_b ba_1 \varepsilon_{bR}^4;$$

$$B_{2,6} = 420A'_s E_s \varepsilon_{bR}^5 + 420A_s E_s \varepsilon_{bR}^5 = 420E_s \varepsilon_{bR}^5 (A'_s + A_s);$$

$$B_{2,7} = -840A'_s E_s \varepsilon_{bR}^5 a' - 840A_s E_s \varepsilon_{bR}^5 h_0 = -840E_s \varepsilon_{bR}^5 (A'_s a' + A_s h_0);$$

$$B_{2,8} = 420A'_s E_s \varepsilon_{bR}^5 a'^2 + 420A_s E_s \varepsilon_{bR}^5 h_0^2 = 420E_s \varepsilon_{bR}^5 (A'_s a'^2 + A_s h_0^2);$$

$$B_{2,9} = -420M_{crc} \varepsilon_{bR}^5;$$

$$B_{2,10} = 210R_{bt} b \varepsilon_{btu}^2 \varepsilon_{bR}^5 - 70R_{bt} b \varepsilon_{btR}^2 \varepsilon_{bR}^5 = 70R_{bt} b \varepsilon_{bR}^5 (3\varepsilon_{btu}^2 - \varepsilon_{btR}^2).$$

Для решения системы уравнений (4.9), используется система компьютерной математики MATLAB. Из девятнадцати пар корней удовлетворяющих уравнению (4.9) выбираются корни, удовлетворяющие следующим условиям:

- корни не являются комплексными числами;
- корни удовлетворяют неравенства  $0 < x_b \leq h$ ;  $\varepsilon_b \geq \varepsilon_{b,crc1}$ .

Значение кривизны, соответствующее точке  $\mathbf{B}$ , определяется по формуле (3.23).

Значения изгибающих моментов и кривизн, соответствующих точкам  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ , для сечений нормально и сильно армированных железобетонных изгибаемых элементов определяются аналогично.

Для определения значений изгибающего момента и кривизны, соответствующих точке  $\mathbf{D}$ , на первом этапе определяем высоту сжатой зоны бетона, задаваясь деформацией растянутой арматуры  $\varepsilon_s = \varepsilon_{sR}$ . Деформации крайнего сжатого волокна бетона и сжатой арматуры, выраженные через деформацию растянутой арматуры, подставляем в уравнения (3.6) ... (3.8). После подстановки, полученных выражений для равнодействующих внутренних усилий в бетоне и арматуре в уравнение равновесия (3.4), получим:

$$\begin{aligned}
 & R_b b x_b \frac{a_1}{2} \frac{\varepsilon_{sR} x_b}{\varepsilon_{bR} (h_0 - x_b)} + R_b b x_b \frac{a_2}{3} \frac{\varepsilon_{sR}^2 x_b^2}{\varepsilon_{sR}^2 (h_0 - x_b)^2} + R_b b x_b \frac{a_3}{4} \frac{\varepsilon_{sR}^3 x_b^3}{\varepsilon_{sR}^3 (h_0 - x_b)^3} + \\
 & + R_b b x_b \frac{a_4}{5} \frac{\varepsilon_{sR}^4 x_b^4}{\varepsilon_{sR}^4 (h_0 - x_b)^4} + R_b b x_b \frac{a_5}{6} \frac{\varepsilon_{sR}^5 x_b^5}{\varepsilon_{sR}^5 (h_0 - x_b)^5} + A'_s E_s \frac{\varepsilon_{sR} (x_b - a')}{h_0 - x_b} - \\
 & - R_{bt} b \left( \frac{\varepsilon_{btu} (h_0 - x_b)}{\varepsilon_{sR}} - \frac{\varepsilon_{btR} x_b (h_0 - x_b)}{2 \varepsilon_{sR} x_b} \right) - A_s R_s = 0.
 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Приводя левую часть уравнения (4.10) к общему знаменателю, получим:

$$\left[ \begin{aligned}
 & 30 R_b b a_1 \varepsilon_{sR}^2 \varepsilon_{bR}^4 (h_0 - x_b)^4 x_b^2 + 20 R_b b a_2 \varepsilon_{sR}^3 \varepsilon_{bR}^3 (h_0 - x_b)^3 x_b^3 + \\
 & + 15 R_b b a_3 \varepsilon_{sR}^4 \varepsilon_{bR}^2 (h_0 - x_b)^2 x_b^4 + 12 R_b b a_4 \varepsilon_{sR}^5 \varepsilon_{bR} (h_0 - x_b) x_b^5 + \\
 & + 10 R_b b a_5 \varepsilon_{sR}^6 x_b^6 + 60 A'_s E_s \varepsilon_{sR}^2 \varepsilon_{bR}^5 (x_b - a') (h_0 - x_b)^4 - 60 R_{bt} b \varepsilon_{btu} \varepsilon_{bR}^5 \times \\
 & \times (h_0 - x_b)^6 + 30 R_{bt} b \varepsilon_{btR} \varepsilon_{bR}^5 (h_0 - x_b)^6 - 60 A_s R_s \varepsilon_{sR} \varepsilon_{bR}^5 (h_0 - x_b)^5
 \end{aligned} \right] = 0. \quad (4.11)$$

Уравнение (4.11) имеет смысл при значении высоты сжатой зоны бетона  $x_b \neq h_0$ . Используя бином Ньютона, запишем числитель уравнения (4.11) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& 30R_b b a_1 \varepsilon_{sR}^2 \varepsilon_{bR}^4 x_b^2 (h_0^4 - 4h_0^3 x_b + 6h_0^2 x_b^2 - 4h_0 x_b^3 + x_b^4) + \\
& + 20R_b b a_2 \varepsilon_{sR}^3 \varepsilon_{bR}^3 x_b^3 (h_0^3 - 3h_0^2 x_b + 3h_0 x_b^2 - x_b^3) + 15R_b b a_3 \varepsilon_{sR}^4 \varepsilon_{bR}^2 x_b^4 \times \\
& \times (h_0^2 - 2h_0 x_b + x_b^2) + 12R_b b a_4 \varepsilon_{sR}^5 \varepsilon_{bR} x_b^5 (h_0 - x_b) + 10R_b b a_5 \varepsilon_{sR}^6 x_b^6 + \\
& + 60A'_s E_s \varepsilon_{sR}^2 \varepsilon_{bR}^5 x_b (h_0^4 - 4h_0^3 x_b + 6h_0^2 x_b^2 - 4h_0 x_b^3 + x_b^4) - \\
& - 60A'_s E_s \varepsilon_{sR}^2 \varepsilon_{bR}^5 a' (h_0^4 - 4h_0^3 x_b + 6h_0^2 x_b^2 - 4h_0 x_b^3 + x_b^4) - \\
& - 60R_{bt} b \varepsilon_{btu} \varepsilon_{bR}^5 (h_0^6 - 6h_0^5 x_b + 15h_0^4 x_b^2 - 20h_0^3 x_b^3 + 15h_0^2 x_b^4 - 6h_0 x_b^5 + x_b^6) + \\
& + 30R_{bt} b \varepsilon_{btR} \varepsilon_{bR}^5 (h_0^6 - 6h_0^5 x_b + 15h_0^4 x_b^2 - 20h_0^3 x_b^3 + 15h_0^2 x_b^4 - 6h_0 x_b^5 + x_b^6) - \\
& - 60A_s R_s \varepsilon_{sR} \varepsilon_{bR}^5 (h_0^5 - 5h_0^4 x_b + 10h_0^3 x_b^2 - 10h_0^2 x_b^3 + 5h_0 x_b^4 - x_b^5) = 0.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

После раскрытия скобок уравнение (4.12) примет вид:

$$\begin{aligned}
& 30R_b b a_1 \varepsilon_{sR}^2 \varepsilon_{bR}^4 h_0^4 x_b^2 - 120R_b b a_1 \varepsilon_{sR}^2 \varepsilon_{bR}^4 h_0^3 x_b^3 + 180R_b b a_1 \varepsilon_{sR}^2 \varepsilon_{bR}^4 h_0^2 x_b^4 - 120R_b \times \\
& \times b a_1 \varepsilon_{sR}^2 \varepsilon_{bR}^4 h_0 x_b^5 + 30R_b b a_1 \varepsilon_{sR}^2 \varepsilon_{bR}^4 x_b^6 + 20R_b b a_2 \varepsilon_{sR}^3 \varepsilon_{bR}^3 h_0^3 x_b^3 - 60R_b b a_2 \varepsilon_{sR}^3 \varepsilon_{bR}^3 \times \\
& \times h_0^2 x_b^4 + 60R_b b a_2 \varepsilon_{sR}^3 \varepsilon_{bR}^3 h_0 x_b^5 - 20R_b b a_2 \varepsilon_{sR}^3 \varepsilon_{bR}^3 x_b^6 + 15R_b b a_3 \varepsilon_{sR}^4 \varepsilon_{bR}^2 h_0^2 x_b^4 - 30 \times \\
& \times R_b b a_3 \varepsilon_{sR}^4 \varepsilon_{bR}^2 h_0 x_b^5 + 15R_b b a_3 \varepsilon_{sR}^4 \varepsilon_{bR}^2 x_b^6 + 12R_b b a_4 \varepsilon_{sR}^5 \varepsilon_{bR} h_0 x_b^5 - 12R_b b a_4 \varepsilon_{sR}^5 \varepsilon_{bR} \times \\
& \times x_b^6 + 10R_b b a_5 \varepsilon_{sR}^6 x_b^6 + 60A'_s E_s \varepsilon_{sR}^2 \varepsilon_{bR}^5 h_0^4 x_b - 240A'_s E_s \varepsilon_{sR}^2 \varepsilon_{bR}^5 h_0^3 x_b^2 + 360A'_s E_s \times \\
& \times \varepsilon_{sR}^2 \varepsilon_{bR}^5 h_0^2 x_b^3 - 240A'_s E_s \varepsilon_{sR}^2 \varepsilon_{bR}^5 h_0 x_b^4 + 60A'_s E_s \varepsilon_{sR}^2 \varepsilon_{bR}^5 x_b^5 - 60A'_s E_s \varepsilon_{sR}^2 \varepsilon_{bR}^5 a' h_0^4 + \\
& + 240A'_s E_s \varepsilon_{sR}^2 \varepsilon_{bR}^5 a' h_0^3 x_b - 360A'_s E_s \varepsilon_{sR}^2 \varepsilon_{bR}^5 a' h_0^2 x_b^2 + 240A'_s E_s \varepsilon_{sR}^2 \varepsilon_{bR}^5 a' h_0 x_b^3 - 60 \times \\
& \times A'_s E_s \varepsilon_{sR}^2 \varepsilon_{bR}^5 a' x_b^4 - 60R_{bt} b \varepsilon_{btu} \varepsilon_{bR}^5 h_0^6 + 360R_{bt} b \varepsilon_{btu} \varepsilon_{bR}^5 h_0^5 x_b - 900R_{bt} b \varepsilon_{btu} \varepsilon_{bR}^5 h_0^4 \times \\
& \times x_b^2 + 1200R_{bt} b \varepsilon_{btu} \varepsilon_{bR}^5 h_0^3 x_b^3 - 900R_{bt} b \varepsilon_{btu} \varepsilon_{bR}^5 h_0^2 x_b^4 + 360R_{bt} b \varepsilon_{btu} \varepsilon_{bR}^5 h_0 x_b^5 - 60 \times \\
& \times R_{bt} b \varepsilon_{btu} \varepsilon_{bR}^5 x_b^6 + 30R_{bt} b \varepsilon_{btR} \varepsilon_{bR}^5 h_0^6 - 180R_{bt} b \varepsilon_{btR} \varepsilon_{bR}^5 h_0^5 x_b + 450R_{bt} b \varepsilon_{btR} \varepsilon_{bR}^5 \times \\
& \times h_0^4 x_b^2 - 600R_{bt} b \varepsilon_{btR} \varepsilon_{bR}^5 h_0^3 x_b^3 + 450R_{bt} b \varepsilon_{btR} \varepsilon_{bR}^5 h_0^2 x_b^4 - 180R_{bt} b \varepsilon_{btR} \varepsilon_{bR}^5 h_0 x_b^5 + \\
& + 30R_{bt} b \varepsilon_{btR} \varepsilon_{bR}^5 x_b^6 - 60A_s R_s \varepsilon_{sR} \varepsilon_{bR}^5 h_0^5 + 300A_s R_s \varepsilon_{sR} \varepsilon_{bR}^5 h_0^4 x_b - 600A_s R_s \varepsilon_{sR} \varepsilon_{bR}^5 \times \\
& \times h_0^3 x_b^2 + 600A_s R_s \varepsilon_{sR} \varepsilon_{bR}^5 h_0^2 x_b^3 - 300A_s R_s \varepsilon_{sR} \varepsilon_{bR}^5 h_0 x_b^4 + 60A_s R_s \varepsilon_{sR} \varepsilon_{bR}^5 x_b^5 = 0.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

После приведения подобных слагаемых уравнение (4.13) можно записать в виде:

$$D_1 x_b^6 + D_2 x_b^5 + D_3 x_b^4 + D_4 x_b^3 + D_5 x_b^2 + D_6 x_b + D_7 = 0, \tag{4.14}$$



$$\begin{aligned}
\text{где } D_1 &= 30R_b b a_1 \varepsilon_{sR}^2 \varepsilon_{bR}^4 - 20R_b b a_2 \varepsilon_{sR}^3 \varepsilon_{bR}^3 + 15R_b b a_3 \varepsilon_{sR}^4 \varepsilon_{bR}^2 - 12R_b b a_4 \varepsilon_{sR}^5 \varepsilon_{bR} + \\
&+ 10R_b b a_5 \varepsilon_{sR}^6 - 60R_{bt} b \varepsilon_{btu} \varepsilon_{bR}^5 + 30R_{bt} b \varepsilon_{btr} \varepsilon_{bR}^5 = R_b b \varepsilon_{sR}^2 \left( 30a_1 \varepsilon_{bR}^4 - \right. \\
&\left. - 20a_2 \varepsilon_{sR}^3 \varepsilon_{bR}^3 + 15a_3 \varepsilon_{sR}^2 \varepsilon_{bR}^2 - 12a_4 \varepsilon_{sR}^3 \varepsilon_{bR} + 10a_5 \varepsilon_{sR}^4 \right) - 30R_{bt} b \varepsilon_{sR}^5 (2\varepsilon_{btu} - \varepsilon_{btr}); \\
D_2 &= -120R_b b a_1 \varepsilon_{sR}^2 \varepsilon_{bR}^4 h_0 + 60R_b b a_2 \varepsilon_{sR}^3 \varepsilon_{bR}^3 h_0 - 30R_b b a_3 \varepsilon_{sR}^4 \varepsilon_{bR}^2 h_0 + 12R_b b a_4 \varepsilon_{sR}^5 \varepsilon_{bR}^1 \times \\
&\times \varepsilon_{bR} h_0 + 60A'_s E_s \varepsilon_{sR}^2 \varepsilon_{bR}^5 + 360R_{bt} b \varepsilon_{btu} \varepsilon_{bR}^5 h_0 - 180R_{bt} b \varepsilon_{btr} \varepsilon_{bR}^5 h_0 + 60A_s R_s \varepsilon_{sR} \varepsilon_{bR}^5 = \\
&= -6R_b b \varepsilon_{sR}^2 \varepsilon_{bR} h_0 \left( 20\varepsilon_{bR}^3 a_1 - 10a_2 \varepsilon_{sR} \varepsilon_{bR}^2 + 15a_3 \varepsilon_{sR}^2 \varepsilon_{bR} - 2a_4 \varepsilon_{sR}^3 \right) + 180R_{bt} b \varepsilon_{btr}^5 h_0 \times \\
&\times (2\varepsilon_{btu} - \varepsilon_{btr}) + 60\varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{sR} (A'_s E_s \varepsilon_{sR} + A_s R_s); \\
D_3 &= 180R_b b a_1 \varepsilon_{sR}^2 \varepsilon_{bR}^4 h_0^2 - 60R_b b a_2 \varepsilon_{sR}^3 \varepsilon_{bR}^3 h_0^2 + 15R_b b a_3 \varepsilon_{sR}^4 \varepsilon_{bR}^2 h_0^2 - 240A'_s E_s \varepsilon_{sR}^2 \times \\
&\times \varepsilon_{bR}^5 h_0 - 60A'_s E_s \varepsilon_{sR}^2 \varepsilon_{bR}^5 a' - 900R_{bt} b \varepsilon_{btu} \varepsilon_{bR}^5 h_0^2 + 450R_{bt} b \varepsilon_{btr} \varepsilon_{bR}^5 h_0^2 - 300A_s \times \\
&\times R_s \varepsilon_{sR} \varepsilon_{bR}^5 h_0 = 15R_b b \varepsilon_{sR}^2 \varepsilon_{bR} h_0^2 \left( 12a_1 \varepsilon_{bR}^2 - 4a_2 \varepsilon_{sR} \varepsilon_{bR} + a_3 \varepsilon_{sR}^2 \right) - 450R_{bt} b \varepsilon_{btr}^5 h_0^2 \times \\
&\times (2\varepsilon_{btu} - \varepsilon_{btr}) - 60\varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{sR} \left[ h_0 (A'_s E_s \varepsilon_{sR} + 5A_s R_s) + A'_s E_s a' \varepsilon_{sR} \right]; \\
D_4 &= -120R_b b a_1 \varepsilon_{sR}^2 \varepsilon_{bR}^4 h_0^3 + 20R_b b a_2 \varepsilon_{sR}^3 \varepsilon_{bR}^3 h_0^3 + 360A'_s E_s \varepsilon_{sR}^2 \varepsilon_{bR}^5 h_0^2 + 240A'_s E_s \times \\
&\times \varepsilon_{sR}^2 \varepsilon_{bR}^5 a' h_0 + 240A'_s E_s \varepsilon_{sR}^2 \varepsilon_{bR}^5 a' h_0 + 1200R_{bt} b \varepsilon_{btu} \varepsilon_{bR}^5 h_0^3 - 600R_{bt} b \varepsilon_{btr} \varepsilon_{bR}^5 h_0^3 + \\
&+ 600A_s R_s \varepsilon_{sR} \varepsilon_{bR}^5 h_0^2 = -20R_b b \varepsilon_{sR}^2 \varepsilon_{bR} h_0^3 \left( 6a_1 \varepsilon_{bR} - a_2 \varepsilon_{sR} \right) + 600R_{bt} b \varepsilon_{btr}^5 h_0^3 \times \\
&\times (2\varepsilon_{btu} - \varepsilon_{btr}) + 120\varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{sR} h_0 \left[ h_0 (3A'_s E_s \varepsilon_{sR} + 5A_s R_s) + 2A'_s E_s a' \varepsilon_{sR} \right]; \\
D_5 &= 30R_b b a_1 \varepsilon_{sR}^2 \varepsilon_{bR}^4 h_0^4 - 240A'_s E_s \varepsilon_{sR}^2 \varepsilon_{bR}^5 h_0^3 - 360A'_s E_s \varepsilon_{sR}^2 \varepsilon_{bR}^5 a' h_0^2 - 900R_{bt} b \times \\
&\times \varepsilon_{btu} \varepsilon_{bR}^5 h_0^4 - 900R_{bt} b \varepsilon_{btu} \varepsilon_{bR}^5 h_0^4 + 450R_{bt} b \varepsilon_{btr} \varepsilon_{bR}^5 h_0^4 - 600A_s R_s \varepsilon_{sR} \varepsilon_{bR}^5 h_0^3 = \\
&= 30R_b b a_1 \varepsilon_{sR}^2 \varepsilon_{bR} h_0^4 - 450R_{bt} b \varepsilon_{btr}^5 h_0^4 (2\varepsilon_{btu} - \varepsilon_{btr}) - 120\varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{sR} h_0^2 \times \\
&\times \left[ h_0 (2A'_s E_s \varepsilon_{sR} + 5A_s R_s) + 3A'_s E_s a' \varepsilon_{sR} \right]; \\
D_6 &= 60A'_s E_s \varepsilon_{sR}^2 \varepsilon_{bR}^5 h_0^4 + 240A'_s E_s \varepsilon_{sR}^2 \varepsilon_{bR}^5 a' h_0^3 + 360R_{bt} b \varepsilon_{btu} \varepsilon_{bR}^5 h_0^5 - 180R_{bt} b \times \\
&\times \varepsilon_{btr} \varepsilon_{bR}^5 h_0^5 + 300A_s R_s \varepsilon_{sR} \varepsilon_{bR}^5 h_0^4 = 180R_{bt} b \varepsilon_{btr}^5 h_0^5 (2\varepsilon_{btu} - \varepsilon_{btr}) + 60\varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{sR} h_0^3 \times \\
&\times \left[ h_0 (A'_s E_s \varepsilon_{sR} + 5A_s R_s) + 4A'_s E_s a' \varepsilon_{sR} \right]; \\
D_7 &= -60A'_s E_s \varepsilon_{sR}^2 \varepsilon_{bR}^5 a' h_0^4 - 60R_{bt} b \varepsilon_{btu} \varepsilon_{bR}^5 h_0^6 + 30R_{bt} b \varepsilon_{btr} \varepsilon_{bR}^5 h_0^6 - 60A_s R_s \varepsilon_{sR} \varepsilon_{bR}^5 h_0^5 = \\
&= -30R_{bt} b \varepsilon_{btr}^5 h_0^6 (2\varepsilon_{btu} - \varepsilon_{btr}) - 60\varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{sR} h_0^4 (A'_s E_s \varepsilon_{sR} a' + A_s R_s h_0).
\end{aligned}$$

Для решения уравнения (4.14), используется система компьютерной математики MATLAB. Из шести корней удовлетворяющих уравнению (4.14) выбирается корень, удовлетворяющий следующим условиям:

- корень не является комплексным числом;
- корень удовлетворяет неравенство  $0 < x_b < h$ .

Высота сжатой зоны бетона, найденная из уравнения (4.14), используется для определения деформаций крайнего сжатого волокна бетона, сжатой арматуры, а также высоты растянутой зоны бетона. Для определения значений изгибающих моментов, воспринимаемых бетоном и арматурой, полученные значения деформаций и высот сжатой и растянутой зон бетона подставляются в уравнения (3.9) ... (3.11) и (3.19).

Значение изгибающего момента, воспринимаемого сечением, определяется из уравнения равновесия (3.5). Значение кривизны, соответствующее точке  $D$ , определяется по формуле (3.23).

Значения изгибающих моментов, соответствующие точкам  $D$  и  $E$ , равны между собой. Для определения значения кривизны, соответствующего точке  $E$ , на первом этапе определяем высоту сжатой зоны бетона, задаваясь деформацией растянутой арматуры  $\varepsilon_s = \varepsilon_{su}$ . Деформации крайнего сжатого волокна бетона и сжатой арматуры, выраженные через деформацию растянутой арматуры, подставляем в уравнения (3.6) ... (3.8). После подстановки, полученных выражений для равнодействующих внутренних усилий в бетоне и арматуре в уравнение равновесия (3.4), получим:

$$\begin{aligned}
 & R_b b x_b \frac{a_1}{2} \frac{\varepsilon_{su} x_b}{\varepsilon_{bR} (h_0 - x_b)} + R_b b x_b \frac{a_2}{3} \frac{\varepsilon_{su}^2 x_b^2}{\varepsilon_{bR}^2 (h_0 - x_b)^2} + R_b b x_b \frac{a_3}{4} \frac{\varepsilon_{su}^3 x_b^3}{\varepsilon_{bR}^3 (h_0 - x_b)^3} + \\
 & + R_b b x_b \frac{a_4}{5} \frac{\varepsilon_{su}^4 x_b^4}{\varepsilon_{bR}^4 (h_0 - x_b)^4} + R_b b x_b \frac{a_5}{6} \frac{\varepsilon_{su}^5 x_b^5}{\varepsilon_{bR}^5 (h_0 - x_b)^5} + A'_s E_s \frac{\varepsilon_{su} (x_b - a')}{h_0 - x_b} - \\
 & - R_{bt} b \left( \frac{\varepsilon_{btu} (h_0 - x_b)}{\varepsilon_{su}} - \frac{\varepsilon_{btR} (h_0 - x_b)}{2\varepsilon_{su}} \right) - A_s R_s = 0.
 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Приводя левую часть уравнения (4.15) к общему знаменателю, получим:

$$\frac{\left[ 30R_b ba_1 \epsilon_{bR}^4 \epsilon_{su}^2 (h_0 - x_b)^4 x_b^2 + 20R_b ba_2 \epsilon_{bR}^3 \epsilon_{su}^3 (h_0 - x_b)^3 x_b^3 + 15R_b \times \right.}{60\epsilon_{bR}^5 \epsilon_{su} (h_0 - x_b)^5} = 0. \quad (4.16)$$

$$\left. \begin{aligned} &\times ba_3 \epsilon_{bR}^2 \epsilon_{su}^4 (h_0 - x_b)^2 x_b^4 + 12R_b ba_4 \epsilon_{su}^5 \epsilon_{bR} (h_0 - x_b) x_b^5 + 10R_b ba_5 \times \\ &\times \epsilon_{su}^6 x_b^6 + 60A_s' E_s \epsilon_{su}^2 \epsilon_{bR}^5 (x_b - a')(h_0 - x_b)^4 - 60R_{bt} b \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{btu} \times \\ &\times (h_0 - x_b)^6 + 30R_{bt} b \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{bR} (h_0 - x_b)^6 - 60A_s R_s \epsilon_{su} \epsilon_{bR}^5 (h_0 - x_b)^5 \end{aligned} \right]$$

Уравнение (4.16) имеет смысл при значении высоты сжатой зоны бетона  $x_b \neq h_0$ . Используя бином Ньютона, запишем числитель уравнения (4.16) в следующем виде:

$$\begin{aligned} &30R_b ba_1 \epsilon_{bR}^4 \epsilon_{su}^2 x_b^2 (h_0^4 - 4h_0^3 x_b + 6h_0^2 x_b^2 - 4h_0 x_b^3 + x_b^4) + 20R_b ba_2 \epsilon_{bR}^3 \epsilon_{su}^3 \times \\ &\times x_b^3 (h_0^3 - 3h_0^2 x_b + 3h_0 x_b^2 - x_b^3) + 15R_b ba_3 \epsilon_{bR}^2 \epsilon_{su}^4 x_b^4 (h_0^2 - 2h_0 x_b + x_b^2) + \\ &+ 12R_b ba_4 \epsilon_{bR} \epsilon_{su}^5 x_b^5 (h_0 - x_b) + 10R_b ba_5 \epsilon_{su}^6 x_b^6 + 60A_s' E_s \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{su}^2 x_b (h_0^4 - \\ &- 4h_0^3 x_b + 6h_0^2 x_b^2 - 4h_0 x_b^3 + x_b^4) - 60A_s' E_s \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{su}^2 a' (h_0^4 - 4h_0^3 x_b + 6h_0^2 x_b^2 - \\ &- 4h_0 x_b^3 + x_b^4) - 60R_{bt} b \epsilon_{btu} \epsilon_{bR}^5 (h_0^6 - 6h_0^5 x_b + 15h_0^4 x_b^2 - 20h_0^3 x_b^3 + \\ &+ 15h_0^2 x_b^4 - 6h_0 x_b^5 + x_b^6) + 30R_{bt} b \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{bR} (h_0^6 - 6h_0^5 x_b + 15h_0^4 x_b^2 - \\ &- 20h_0^3 x_b^3 + 15h_0^2 x_b^4 - 6h_0 x_b^5 + x_b^6) - 60A_s R_s \epsilon_{su} \epsilon_{bR}^5 \times \\ &\times (h_0^5 - 5h_0^4 x_b + 10h_0^3 x_b^2 - 10h_0^2 x_b^3 + 5h_0 x_b^4 - x_b^5) = 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

После раскрытия скобок уравнение (4.17) примет вид:

$$\begin{aligned}
& 30R_b ba_1 \epsilon_{bR}^4 \epsilon_{su}^2 x_b^2 h_0^4 - 120R_b ba_1 \epsilon_{bR}^4 \epsilon_{su}^2 x_b^2 h_0^3 + 180R_b ba_1 \epsilon_{bR}^4 \epsilon_{su}^2 x_b^4 h_0^2 - 120 \times \\
& \times R_b ba_1 \epsilon_{bR}^4 \epsilon_{su}^2 h_0 x_b^5 + 30R_b ba_1 \epsilon_{bR}^4 \epsilon_{su}^2 x_b^6 + 20R_b ba_2 \epsilon_{bR}^3 \epsilon_{su}^3 x_b^3 h_0^3 - 60R_b ba_2 \times \\
& \times \epsilon_{bR}^3 \epsilon_{su}^3 h_0^2 x_b^4 + 60R_b ba_2 \epsilon_{bR}^3 \epsilon_{su}^3 h_0 x_b^5 - 20R_b ba_2 \epsilon_{bR}^3 \epsilon_{su}^3 x_b^6 + 15R_b ba_3 \epsilon_{bR}^2 \epsilon_{su}^4 \times \\
& \times h_0^2 x_b^4 - 30R_b ba_3 \epsilon_{bR}^2 \epsilon_{su}^4 h_0 x_b^5 + 15R_b ba_3 \epsilon_{bR}^2 \epsilon_{su}^4 x_b^6 + 12R_b ba_4 \epsilon_{bR} \epsilon_{su}^5 h_0 x_b^5 - \\
& - 12R_b ba_4 \epsilon_{bR} \epsilon_{su}^5 x_b^6 + 10R_b ba_5 \epsilon_{su}^6 x_b^6 + 60A'_s E_s \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{su}^2 x_b h_0^4 - 240A'_s E_s \epsilon_{bR}^5 \times \\
& \times \epsilon_{su}^2 h_0^3 x_b^2 + 360A'_s E_s \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{su}^2 h_0^2 x_b^3 - 240A'_s E_s \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{su}^2 h_0 x_b^4 + 60A'_s E_s \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{su}^2 \times \\
& \times x_b^5 - 60A'_s E_s \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{su}^2 a' h_0^4 + 240A'_s E_s \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{su}^2 a' h_0^3 x_b - 360A'_s E_s \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{su}^2 a' h_0^2 \times \\
& \times x_b^2 + 240A'_s E_s \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{su}^2 a' h_0 x_b^3 - 60A'_s E_s \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{su}^2 a' x_b^4 - 60R_{bt} b \epsilon_{btu} \epsilon_{bR}^5 h_0^6 + \\
& + 360R_{bt} b \epsilon_{btu} \epsilon_{bR}^5 h_0^5 x_b - 900R_{bt} b \epsilon_{btu} \epsilon_{bR}^5 h_0^4 x_b^2 + 1200R_{bt} b \epsilon_{btu} \epsilon_{bR}^5 h_0^3 x_b^3 - \\
& - 900R_{bt} b \epsilon_{btu} \epsilon_{bR}^5 h_0^2 x_b^4 + 360R_{bt} b \epsilon_{btu} \epsilon_{bR}^5 h_0 x_b^5 - 60R_{bt} b \epsilon_{btu} \epsilon_{bR}^5 x_b^6 + 30R_{bt} b \times \\
& \times \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{btR} h_0^6 - 180R_{bt} b \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{btR} h_0^5 x_b + 450R_{bt} b \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{btR} h_0^4 x_b^2 - 600R_{bt} b \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{btR} \times \\
& \times h_0^3 x_b^3 + 450R_{bt} b \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{btR} h_0^2 x_b^4 - 180R_{bt} b \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{btR} h_0 x_b^5 + 30R_{bt} b \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{btR} x_b^6 - \\
& - 60A_s R_s \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{su} h_0^5 + 300A_s R_s \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{su} h_0^4 x_b - 600A_s R_s \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{su} h_0^3 x_b^2 + 600A_s R_s \times \\
& \times \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{su} h_0^2 x_b^3 - 300A_s R_s \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{su} h_0 x_b^4 + 60A_s R_s \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{su} x_b^5 = 0. \tag{4.18}
\end{aligned}$$

После приведения подобных слагаемых уравнение (4.18) можно записать в виде:

$$E_1 x_b^6 + E_2 x_b^5 + E_3 x_b^4 + E_4 x_b^3 + E_5 x_b^2 + E_6 x_b + E_7 = 0, \tag{4.19}$$

где  $E_1 = 30R_b ba_1 \epsilon_{bR}^4 \epsilon_{su}^2 - 20R_b ba_2 \epsilon_{bR}^3 \epsilon_{su}^3 + 15R_b ba_3 \epsilon_{bR}^2 \epsilon_{su}^4 - 12R_b ba_4 \epsilon_{bR} \epsilon_{su}^5 + 10R_b ba_5 \epsilon_{su}^6 - 60R_{bt} b \epsilon_{btu} \epsilon_{bR}^5 + 30R_{bt} b \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{btR} = R_b b \epsilon_{su}^2 (30a_1 \epsilon_{bR}^4 - 20a_2 \epsilon_{bR}^3 \epsilon_{bu} + 15a_3 \epsilon_{bR}^2 \epsilon_{bu}^2 - 12a_4 \epsilon_{bR} \epsilon_{bu}^3 + 10a_5 \epsilon_{bu}^4) - 30R_{bt} b \epsilon_{bR}^5 (2\epsilon_{btu} - \epsilon_{btR})$ ;

$E_2 = -120R_b ba_1 \epsilon_{bR}^4 \epsilon_{su}^2 h_0 + 60R_b ba_2 \epsilon_{bR}^3 \epsilon_{su}^3 h_0 - 30R_b ba_3 \epsilon_{bR}^2 \epsilon_{su}^4 h_0 + 12R_b ba_4 \times \epsilon_{bR} \epsilon_{su}^5 h_0 + 60A'_s E_s \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{su}^2 + 360R_{bt} b \epsilon_{btu} \epsilon_{bR}^5 h_0 - 180R_{bt} b \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{btR} h_0 + 60 \times A_s R_s \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{su} = -6R_b b \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{su}^2 h_0 (20a_1 \epsilon_{bR}^3 - 10a_2 \epsilon_{bR}^2 \epsilon_{su} + 5a_3 \epsilon_{bR} \epsilon_{su}^2 - 2a_4 \epsilon_{su}^3) + 180R_{bt} b \epsilon_{bR}^5 h_0 (2\epsilon_{btu} - \epsilon_{btR}) + 60\epsilon_{bR}^5 \epsilon_{su} (A'_s E_s \epsilon_{su} + A_s R_s)$ ;

$E_3 = 180R_b ba_1 \epsilon_{bR}^4 \epsilon_{su}^2 x_b^4 h_0^2 - 60R_b ba_2 \epsilon_{bR}^3 \epsilon_{su}^3 h_0^2 + 15R_b ba_3 \epsilon_{bR}^2 \epsilon_{su}^4 h_0^2 - 240A'_s E_s \times \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{su}^2 h_0 - 60A'_s E_s \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{su}^2 a' - 900R_{bt} b \epsilon_{btu} \epsilon_{bR}^5 h_0^2 + 450R_{bt} b \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{btR} h_0^2 - 300 \times A_s R_s \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{su} h_0 = 15R_b b \epsilon_{su}^2 \epsilon_{bR}^5 h_0^2 (12a_1 \epsilon_{bR}^2 - 4a_2 \epsilon_{bR} \epsilon_{su} + a_3 \epsilon_{su}^2) - 450R_{bt} b \times \epsilon_{bR}^5 h_0^2 (2\epsilon_{btu} - \epsilon_{btR}) - 60\epsilon_{su} \epsilon_{bR}^5 [A'_s E_s \epsilon_{su} (4h_0 + a') + 5A_s R_s h_0]$ ;

$$\begin{aligned}
E_4 = & -120R_b b a_1 \epsilon_{bR}^4 \epsilon_{su}^2 h_0^3 + 20R_b b a_2 \epsilon_{bR}^3 \epsilon_{su}^3 h_0^3 + 360A'_s E_s \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{su}^2 h_0^2 + 240A'_s E_s \times \\
& \times \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{su}^2 a' h_0 + 1200R_{bt} b \epsilon_{btu} \epsilon_{bR}^5 h_0^3 - 600R_{bt} b \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{btR} h_0^3 + 600A_s R_s \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{su} h_0^2 = \\
& = -20R_b b \epsilon_{su}^2 \epsilon_{bR}^4 h_0^3 (6a_1 \epsilon_{bR} - a_2 \epsilon_{su}) + 600R_{bt} b \epsilon_{bR}^5 h_0^3 (2\epsilon_{btu} - \epsilon_{btR}) + 120\epsilon_{su} \times \\
& \times \epsilon_{bR}^5 h_0 [A'_s E_s \epsilon_{su} (3h_0 + 2a') + 5A_s R_s h_0];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_5 = & 30R_b b a_1 \epsilon_{bR}^4 \epsilon_{su}^2 h_0^4 - 240A'_s E_s \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{su}^2 h_0^3 - 360A'_s E_s \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{su}^2 a' h_0^2 - 900R_{bt} b \epsilon_{btu} \times \\
& \times \epsilon_{bR}^5 h_0^2 + 450R_{bt} b \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{btR} h_0^4 - 600A_s R_s \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{su} h_0^3 = 30R_b b a_1 \epsilon_{bR}^4 \epsilon_{su}^2 h_0^4 - 450 \times \\
& \times R_{bt} b \epsilon_{bR}^5 h_0^4 (2\epsilon_{btu} - \epsilon_{btR}) - 120\epsilon_{su} \epsilon_{bR}^5 h_0^2 [A'_s E_s \epsilon_{su} (2h_0 + 3a') + 5A_s R_s h_0];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_6 = & 60A'_s E_s \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{su}^2 h_0^4 + 240A'_s E_s \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{su}^2 a' h_0^3 + 360R_{bt} b \epsilon_{btu} \epsilon_{bR}^5 h_0^5 - 180R_{bt} b \epsilon_{bR}^5 \times \\
& \times \epsilon_{btR} h_0^5 + 300A_s R_s \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{su} h_0^4 = 180R_{bt} b \epsilon_{bR}^5 h_0^5 (2\epsilon_{btu} - \epsilon_{btR}) + 60\epsilon_{su} \epsilon_{bR}^5 h_0^3 \times \\
& \times [A'_s E_s \epsilon_{su} (h_0 + 4a') + 5A_s R_s h_0];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_7 = & -60A'_s E_s \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{su}^2 a' h_0^4 - 60R_{bt} b \epsilon_{btu} \epsilon_{bR}^5 h_0^6 + 30R_{bt} b \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{btR} h_0^6 - 60A_s R_s \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{su} \times \\
& \times h_0^5 = -30R_{bt} b \epsilon_{bR}^5 h_0^6 (2\epsilon_{btu} - \epsilon_{btR}) - 60\epsilon_{su} \epsilon_{bR}^5 h_0^4 (A'_s E_s \epsilon_{su} a' + A_s R_s h_0).
\end{aligned}$$

Для решения уравнения (4.19), используется система компьютерной математики MATLAB. Из шести корней удовлетворяющих уравнению (4.19) выбирается корень, удовлетворяющий следующим условиям:

- корень не является комплексным числом;
- корень удовлетворяет неравенство  $0 < x_b < h$ .

Высота сжатой зоны бетона, найденная из уравнения (4.19), используется для определения деформаций крайнего сжатого волокна бетона.

Значение кривизны, соответствующей точке  $E$  определяется по формуле (3.23).

Значения изгибающих моментов и кривизн, соответствующих точкам  $D$  и  $E$ , для сечений нормально армированных железобетонных изгибаемых элементов определяются аналогично.

Для сечений нормально армированных железобетонных изгибаемых элементов диаграмма «кривизна – изгибающий момент» имеет вид, представленный на рис. 4.2.

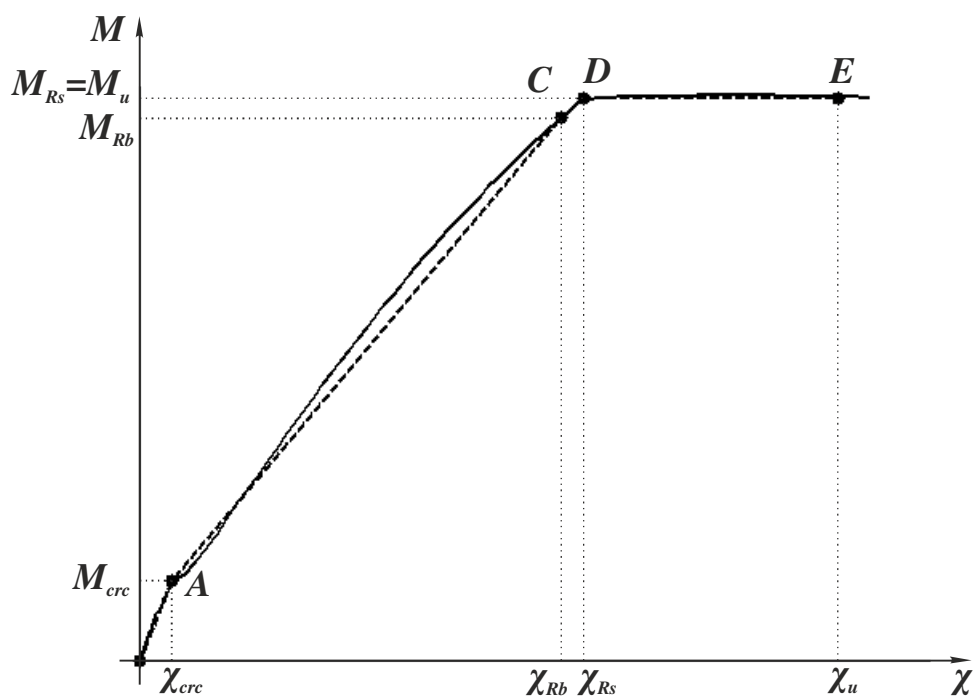


Рис. 4.2 Диаграмма «кривизна – изгибающий момент» работы сечений нормально армированных железобетонных изгибаемых элементов

Для определения значений изгибающего момента и кривизны, соответствующих точке  $C$ , на первом этапе определяем высоту сжатой зоны бетона, задаваясь деформацией крайнего сжатого волокна бетона  $\varepsilon_b = \varepsilon_{bR}$ . Деформации растянутой и сжатой арматуры, выраженные через деформацию крайнего сжатого волокна бетона, подставляем в уравнения (3.6) ... (3.8). После подстановки, полученных выражений для равнодействующих внутренних усилий в бетоне и арматуре в уравнение равновесия (3.4), получим:

$$\begin{aligned}
 & R_b b x_b \frac{a_1 \varepsilon_{bR}}{2 \varepsilon_{bR}} + R_b b x_b \frac{a_2 \varepsilon_{bR}^2}{3 \varepsilon_{bR}^2} + R_b b x_b \frac{a_3 \varepsilon_{bR}^3}{4 \varepsilon_{bR}^3} + R_b b x_b \frac{a_4 \varepsilon_{bR}^4}{5 \varepsilon_{bR}^4} + R_b b x_b \frac{a_5 \varepsilon_{bR}^5}{6 \varepsilon_{bR}^5} + \\
 & + A_s' E_s \frac{\varepsilon_{bR}}{x_b} (x_b - a') - R_{bt} b \left( \frac{\varepsilon_{btu} x_b}{\varepsilon_{bR}} - \frac{\varepsilon_{btR} x_b}{2 \varepsilon_{bR}} \right) - A_s E_s \frac{\varepsilon_{bR}}{x_b} (h_0 - x_b) = 0.
 \end{aligned} \quad (4.20)$$

После приведения левой части уравнения (4.20) к общему знаменателю, получим:

$$\frac{\left[ 30R_bba_1\epsilon_{bR}x_b^2 + 20R_bba_2\epsilon_{bR}x_b^2 + 15R_bba_3\epsilon_{bR}x_b^2 + 12R_bba_4\epsilon_{bR}x_b^2 + \right.}{60\epsilon_{bR}x_b} \left. + 10R_bba_5\epsilon_{bR}x_b^2 + 60A'_sE_s\epsilon_{bR}^2x_b - 60A'_sE_s a' \epsilon_{bR}^2 - 60R_{bt}b\epsilon_{btu}x_b^2 + \right. \\ \left. + 30R_{bt}b\epsilon_{btR}x_b^2 - 60A_sE_s h_0 \epsilon_{bR}^2 + 60A_sE_s \epsilon_{bR}^2 x_b \right] = 0. \quad (4.21)$$

Уравнение (4.21) имеет смысл при значении высоты сжатой зоны бетона  $x_b \neq 0$ . Тогда уравнение (4.21) можно записать в виде:

$$30R_bba_1\epsilon_{bR}x_b^2 + 20R_bba_2\epsilon_{bR}x_b^2 + 15R_bba_3\epsilon_{bR}x_b^2 + 12R_bba_4\epsilon_{bR}x_b^2 + \\ + 10R_bba_5\epsilon_{bR}x_b^2 + 60A'_sE_s\epsilon_{bR}^2x_b - 60A'_sE_s a' \epsilon_{bR}^2 - 60R_{bt}b\epsilon_{btu}x_b^2 + \quad (4.22) \\ + 30R_{bt}b\epsilon_{btR}x_b^2 - 60A_sE_s h_0 \epsilon_{bR}^2 + 60A_sE_s \epsilon_{bR}^2 x_b = 0.$$

После приведения подобных слагаемых уравнение (4.22) можно записать в виде:

$$C_1x_b^2 + C_2x_b + C_3 = 0, \quad (4.23)$$

$$\text{где } C_1 = 30R_bba_1\epsilon_{bR} + 20R_bba_2\epsilon_{bR} + 15R_bba_3\epsilon_{bR} + 12R_bba_4\epsilon_{bR} + 10R_bba_5\epsilon_{bR} - \\ - 60R_{bt}b\epsilon_{btu} + 30R_{bt}b\epsilon_{btR} = R_b b \epsilon_{bR} (30a_1 + 20a_2 + 15a_3 + 12a_4 + 10a_5) - \\ - 30R_{bt}b(2\epsilon_{btu} - \epsilon_{btR}); \\ C_2 = 60A'_sE_s\epsilon_{bR}^2 + 60A_sE_s\epsilon_{bR}^2 = 60E_s\epsilon_{bR}^2 (A'_s + A_s); \\ C_3 = -60A'_sE_s a' \epsilon_{bR}^2 - 60A_sE_s h_0 \epsilon_{bR}^2 = -60E_s\epsilon_{bR}^2 (A'_s a' + A_s h_0).$$

Для решения уравнения (4.23), используется система компьютерной математики MATLAB. Из двух корней удовлетворяющих уравнению (4.23) выбирается корень, удовлетворяющий условие  $0 < x_b < h$ .

Высота сжатой зоны бетона, найденная из уравнения (4.23), используется для определения деформаций крайнего сжатого волокна бетона, сжатой арматуры, а также высоты растянутой зоны бетона. Для определения значений изгибающих моментов, воспринимаемых бетоном и арматурой, полученные значения деформаций и высот сжатой и растянутой зон бетона подставляются в уравнения (3.9) ... (3.11) и (3.19).

Значение изгибающего момента, воспринимаемого сечением, определяется из уравнения равновесия (3.5). Значение кривизны, соответствующей точке  $C$  определяется по формуле (3.23).

Значения изгибающего моментов и кривизны, соответствующих точке  $C$ , для сечений сильно армированных железобетонных изгибаемых элементов определяются аналогично.

Для сечений сильно армированных железобетонных изгибаемых элементов линейризованную диаграмму «изгибающий момент – кривизна» предлагается принять в виде, представленном на рис.4.3.

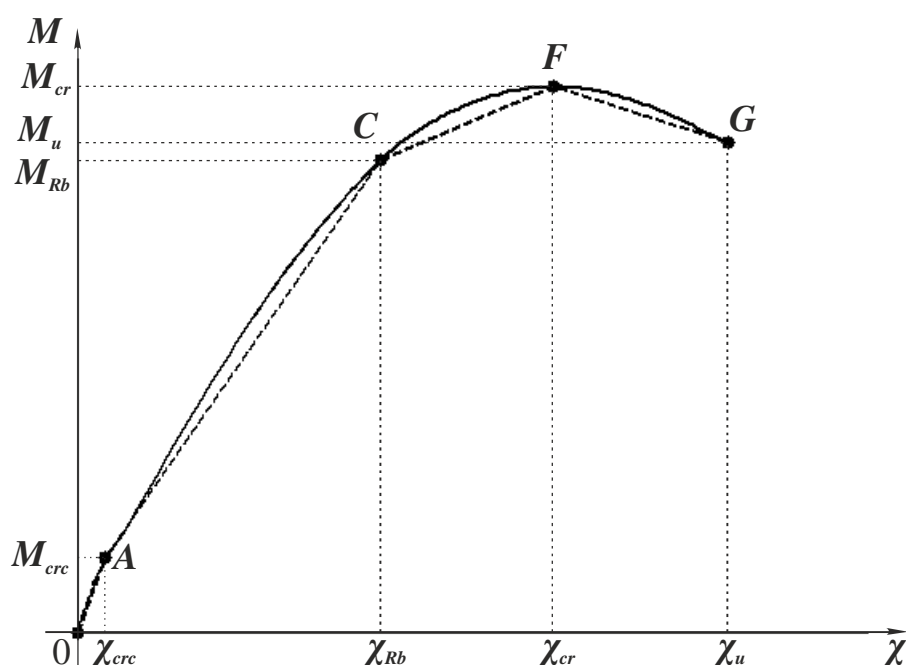


Рис. 4.3 Диаграмма «кривизна – изгибающий момент» работы сечений сильно армированных железобетонных изгибаемых элементов

При определении значений изгибающего момента и кривизны, соответствующих точке  $F$ , подставляем в уравнения (3.6) ... (3.11), (3.18) и (3.19) значения деформаций растянутой и сжатой арматуры и высоты растянутой зоны бетона, выраженные через деформации крайнего сжатого волокна бетона  $\epsilon_b$  и высоту сжатой зоны бетона  $x_b$ . После подстановки, полученных выражений для равнодействующих внутренних усилий в бетоне и арматуре в уравнения равновесия (3.4) и (3.5), получим:



$$\left\{ \begin{aligned}
& R_b b x_b \frac{a_1 \varepsilon_b}{2 \varepsilon_{bR}} + R_b b x_b \frac{a_2 \varepsilon_b^2}{3 \varepsilon_{bR}^2} + R_b b x_b \frac{a_3 \varepsilon_b^3}{4 \varepsilon_{bR}^3} + R_b b x_b \frac{a_4 \varepsilon_b^4}{5 \varepsilon_{bR}^4} + \\
& + R_b b x_b \frac{a_5 \varepsilon_b^5}{6 \varepsilon_{bR}^5} + A'_s R_s - R_{bt} b \left( \frac{\varepsilon_{btu} x_b}{\varepsilon_b} - \frac{\varepsilon_{btR} x_b}{2 \varepsilon_b} \right) - A_s E_s \frac{\varepsilon_b (h_0 - x_b)}{x_b} = 0; \\
M &= R_b b x_b^2 \frac{a_1 \varepsilon_b}{3 \varepsilon_{bR}} + R_b b x_b^2 \frac{a_2 \varepsilon_b^2}{4 \varepsilon_{bR}^2} + R_b b x_b^2 \frac{a_3 \varepsilon_b^3}{5 \varepsilon_{bR}^3} + R_b b x_b^2 \frac{a_4 \varepsilon_b^4}{6 \varepsilon_{bR}^4} + \\
& + R_b b x_b^2 \frac{a_5 \varepsilon_b^5}{7 \varepsilon_{bR}^5} + A'_s R_s (x_b - a') + \frac{R_{bt} b \varepsilon_{btu} x_b^2}{2 \varepsilon_b^2} - \frac{R_{bt} b \varepsilon_{btR} x_b^2}{6 \varepsilon_b^2} + \\
& + A_s E_s \frac{\varepsilon_b (h_0 - x_b)^2}{x_b}.
\end{aligned} \right. \quad (4.24)$$

Перезапишем систему уравнений (4.24), выделяя неизвестные  $\varepsilon_b$  и  $x_b$ , в следующем виде:

$$\left\{ \begin{aligned}
& \frac{R_b b a_1}{2 \varepsilon_{bR}} \varepsilon_b x_b + \frac{R_b b a_2}{3 \varepsilon_{bR}^2} \varepsilon_b^2 x_b + \frac{R_b b a_3}{4 \varepsilon_{bR}^3} \varepsilon_b^3 x_b + \frac{R_b b a_4}{5 \varepsilon_{bR}^4} \varepsilon_b^4 x_b + \frac{R_b b a_5}{6 \varepsilon_{bR}^5} \varepsilon_b^5 x_b + \\
& + A'_s R_s - R_{bt} b \varepsilon_{btu} \frac{x_b}{\varepsilon_b} + \frac{R_{bt} b \varepsilon_{btR} x_b}{2 \varepsilon_b} - A_s E_s h_0 \frac{\varepsilon_b}{x_b} + A_s E_s \varepsilon_b = 0; \\
M &= \frac{R_b b a_1}{3 \varepsilon_{bR}} \varepsilon_b x_b^2 + \frac{R_b b a_2}{4 \varepsilon_{bR}^2} \varepsilon_b^2 x_b^2 + \frac{R_b b a_3}{5 \varepsilon_{bR}^3} \varepsilon_b^3 x_b^2 + \frac{R_b b a_4}{6 \varepsilon_{bR}^4} \varepsilon_b^4 x_b^2 + \frac{R_b b a_5}{7 \varepsilon_{bR}^5} \varepsilon_b^5 x_b^2 + \\
& + A'_s R_s x_b - A'_s R_s a' + \frac{R_{bt} b \varepsilon_{btu} x_b^2}{2 \varepsilon_b^2} - \frac{R_{bt} b \varepsilon_{btR} x_b^2}{6 \varepsilon_b^2} + A_s E_s h_0^2 \frac{\varepsilon_b}{x_b} - \\
& - 2 A_s E_s h_0 \varepsilon_b + A_s E_s \varepsilon_b x_b.
\end{aligned} \right. \quad (4.25)$$

В систему уравнений (4.25) входят два уравнения с тремя неизвестными: деформацией крайнего сжатого волокна бетона, высотой сжатой зоны бетона и изгибающий момент, воспринимаемый сечением. Задаваясь условием экстремальности изгибающего момента, можно получить дополнительное уравнение, используя условие:

$$\frac{dM}{d\chi} = 0. \quad (4.26)$$

Кривизна  $\chi$ , связывающая между собой значения деформации крайнего сжатого волокна бетона  $\varepsilon_b$  и высоты сжатой зоны бетона  $x_b$ , во втором

уравнении системы (4.25) присутствует в неявном виде. В связи с тем, что выделение неизвестной  $\chi$  связано с крайне громоздкими математическими операциями, предлагается следующий метод определения значений кривизны и изгибающего момента, соответствующих точке  $F$ .

На первом этапе задаются серией из  $n$  значений деформации крайнего сжатого волокна бетона, находящихся в пределах от  $\epsilon_{bR}$  до  $\epsilon_{bu}$ . Разница между значениями принимается равной  $\Delta\epsilon_b = (\epsilon_{bu} - \epsilon_{bR}) (n + 1)^{-1}$ . Затем для каждого значения деформации крайнего сжатого волокна бетона определяются значения изгибающего момента и кривизны. Для этого значения деформаций растянутой и сжатой арматуры и высоты растянутой зоны бетона, выраженные через принятую деформацию крайнего сжатого волокна бетона, подставляются в уравнения (3.6) ... (3.11), (3.18) и (3.19). После подстановки, полученных выражений для равнодействующих внутренних усилий в бетоне и арматуре в уравнение равновесия (3.4) получим:

$$\begin{aligned} & R_b b x_b \frac{a_1}{2} \frac{\epsilon_b}{\epsilon_{bR}} + R_b b x_b \frac{a_2}{3} \frac{\epsilon_b^2}{\epsilon_{bR}^2} + R_b b x_b \frac{a_3}{4} \frac{\epsilon_b^3}{\epsilon_{bR}^3} + R_b b x_b \frac{a_4}{5} \frac{\epsilon_b^4}{\epsilon_{bR}^4} + \\ & + R_b b x_b \frac{a_5}{6} \frac{\epsilon_b^5}{\epsilon_{bR}^5} + A'_s R_s - R_{bt} b \left( \frac{\epsilon_{btu} x_b}{\epsilon_b} - \frac{\epsilon_{btR} x_b}{2\epsilon_b} \right) - A_s E_s \frac{\epsilon_b}{x_b} (h_0 - x_b) = 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

После приведения левой части уравнения (4.27) к общему знаменателю, получим:

$$\left[ \begin{aligned} & 30R_b b a_1 \epsilon_{bR}^4 \epsilon_b^2 x_b^2 + 20R_b b a_2 \epsilon_{bR}^3 \epsilon_b^3 x_b^2 + 15R_b b a_3 \epsilon_{bR}^2 \epsilon_b^4 x_b^2 + \\ & + 12R_b b a_4 \epsilon_{bR} \epsilon_b^5 x_b^2 + 10R_b b a_5 \epsilon_b^6 x_b^2 + 60A'_s R_s \epsilon_{bR}^5 \epsilon_b x_b - \\ & - 60R_{bt} b \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{btu} x_b^2 + 30R_{bt} b \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{btR} x_b^2 - 60A_s E_s \epsilon_b^2 \epsilon_{bR}^5 (h_0 - x_b) \end{aligned} \right] = 0. \quad (4.28)$$

$$60\epsilon_{bR}^5 \epsilon_b x_b$$

Уравнение (4.28) имеет смысл при значении высоты сжатой зоны бетона  $x_b \neq 0$ . Тогда уравнение (4.28) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} & 30R_b b a_1 \epsilon_{bR}^4 \epsilon_b^2 x_b^2 + 20R_b b a_2 \epsilon_{bR}^3 \epsilon_b^3 x_b^2 + 15R_b b a_3 \epsilon_{bR}^2 \epsilon_b^4 x_b^2 + \\ & + 12R_b b a_4 \epsilon_{bR} \epsilon_b^5 x_b^2 + 10R_b b a_5 \epsilon_b^6 x_b^2 + 60A'_s R_s \epsilon_{bR}^5 \epsilon_b x_b - 60R_{bt} b \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{btu} x_b^2 + \\ & + 30R_{bt} b \epsilon_{bR}^5 \epsilon_{btR} x_b^2 - 60A_s E_s h_0 \epsilon_{bR}^5 \epsilon_b^2 + 60A_s E_s \epsilon_{bR}^5 \epsilon_b^2 x_b = 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

После приведения подобных слагаемых уравнение (4.29) можно записать в виде:

$$F_1 x_b^2 + F_2 x_b + F_3 = 0, \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \text{где } F_1 = & 30R_b b a_1 \varepsilon_{bR}^4 \varepsilon_b^2 + 20R_b b a_2 \varepsilon_{bR}^3 \varepsilon_b^3 + 15R_b b a_3 \varepsilon_{bR}^2 \varepsilon_b^4 + 12R_b b a_4 \varepsilon_{bR} \varepsilon_b^5 + \\ & + 10R_b b a_5 \varepsilon_b^6 - 60R_{bt} b \varepsilon_{btu} \varepsilon_{bR}^5 + 30R_{bt} b \varepsilon_{btr} \varepsilon_{bR}^5 = R_b b \varepsilon_{bR}^2 \left( 30a_1 \varepsilon_{bR}^4 + \right. \\ & \left. + 20a_2 \varepsilon_{bR}^3 \varepsilon_b + 15a_3 \varepsilon_{bR}^2 \varepsilon_b^2 + 12a_4 \varepsilon_{bR} \varepsilon_b^3 + 10a_5 \varepsilon_b^4 \right) - 30R_{bt} b \varepsilon_b^5 (2\varepsilon_{btu} - \varepsilon_{btr}); \end{aligned}$$

$$F_2 = 60A'_s R_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_b + 60A_s E_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_b^2 = 60\varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_b (A'_s R + A_s E_s \varepsilon_b);$$

$$F_3 = -60A_s E_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_b^2 h_0.$$

Для решения уравнения (4.30), используется система компьютерной математики MATLAB. Из двух корней удовлетворяющих уравнению (4.30) выбирается корень, удовлетворяющий условие  $0 < x_b < h$ .

Высота сжатой зоны бетона, найденная из уравнения (4.30), используется для определения деформаций крайнего сжатого волокна бетона, сжатой арматуры, а также высоты растянутой зоны бетона. Для определения значений изгибающих моментов, воспринимаемых бетоном и арматурой, полученные значения деформаций и высот сжатой и растянутой зон бетона подставляются в уравнения (3.9) ... (3.11) и (3.19).

Значение изгибающего момента, воспринимаемого сечением, определяется из уравнения равновесия (3.5). Значение кривизны определяем по формуле (3.23).

Из серии значений изгибающих моментов и соответствующих им кривизн, полученных для принятых значений деформации крайнего сжатого волокна, выбирается наибольшее значение изгибающего момента и соответствующее ему значение кривизны, которые и будут соответствовать точке  $F$  на диаграмме «кривизна – изгибающий момент».

Для определения значений изгибающего момента и кривизны, соответствующих точке  $G$  на первом этапе определяем высоту сжатой зоны

бетона, задаваясь деформацией крайнего сжатого волокна бетона  $\varepsilon_b = \varepsilon_{bu}$ , предшествующей разрушению элемента. Деформации растянутой и сжатой арматуры, выраженные через деформацию крайнего сжатого волокна бетона, подставляем в уравнения (3.6) ... (3.8). После подстановки, полученных выражений для равнодействующих внутренних усилий в бетоне и арматуре в уравнение равновесия (3.4), получим:

$$R_b b x_b \frac{a_1 \varepsilon_{bu}}{2 \varepsilon_{bR}} + R_b b x_b \frac{a_2 \varepsilon_{bu}^2}{3 \varepsilon_{bR}^2} + R_b b x_b \frac{a_3 \varepsilon_{bu}^3}{4 \varepsilon_{bR}^3} + R_b b x_b \frac{a_4 \varepsilon_{bu}^4}{5 \varepsilon_{bR}^4} + R_b b x_b \times$$

$$\times \frac{a_5 \varepsilon_{bu}^5}{6 \varepsilon_{bR}^5} + A'_s R_s - R_{bt} b \left( \frac{\varepsilon_{btu} x_b}{\varepsilon_{bu}} - \frac{\varepsilon_{btR} x_b}{2 \varepsilon_{bu}} \right) - A_s E_s \frac{\varepsilon_{bu}}{x_b} (h_0 - x_b) = 0. \quad (4.31)$$

После приведения левой части уравнения (4.31) к общему знаменателю, получим:

$$\left[ \begin{aligned} &30R_b b a_1 \varepsilon_{bR}^4 \varepsilon_{bu}^2 x_b^2 + 20R_b b a_2 \varepsilon_{bR}^3 \varepsilon_{bu}^3 x_b^2 + 15R_b b a_3 \varepsilon_{bR}^2 \varepsilon_{bu}^4 x_b^2 + \\ &+ 12R_b b a_4 \varepsilon_{bR} \varepsilon_{bu}^5 x_b^2 + 10R_b b a_5 \varepsilon_{bu}^6 x_b^2 + 60A'_s R_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{bu} x_b - \\ &- 60R_{bt} b \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btu} x_b^2 + 30R_{bt} b \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btR} x_b^2 - 60A_s E_s \varepsilon_{bu}^2 \varepsilon_{bR}^5 (h_0 - x_b) \end{aligned} \right] = 0. \quad (4.32)$$

$$60\varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{bu} x_b$$

Для того чтобы дробь равнялась нулю необходимо, чтобы нулю равнялся ее числитель. Тогда уравнение (4.32), после раскрытия скобок примет вид:

$$30R_b b a_1 \varepsilon_{bR}^4 \varepsilon_{bu}^2 x_b^2 + 20R_b b a_2 \varepsilon_{bR}^3 \varepsilon_{bu}^3 x_b^2 + 15R_b b a_3 \varepsilon_{bR}^2 \varepsilon_{bu}^4 x_b^2 +$$

$$+ 12R_b b a_4 \varepsilon_{bR} \varepsilon_{bu}^5 x_b^2 + 10R_b b a_5 \varepsilon_{bu}^6 x_b^2 + 60A'_s R_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{bu} x_b -$$

$$- 60R_{st} b \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btu} x_b^2 + 30R_{bt} b \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{btR} x_b^2 - 60A_s E_s h_0 \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{bu}^2 +$$

$$+ 60A_s E_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{bu}^2 x_b = 0. \quad (4.33)$$

После приведения подобных слагаемых уравнение (4.33) можно записать в виде:

$$G_1 x_b^2 + G_2 x_b + G_3 = 0, \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned}
\text{где } G_1 &= 30R_b b a_1 \varepsilon_{bR}^4 \varepsilon_{bu}^2 + 20R_b b a_2 \varepsilon_{bR}^3 \varepsilon_{bu}^3 + 15R_b b a_3 \varepsilon_{bR}^2 \varepsilon_{bu}^4 + 12R_b b a_4 \varepsilon_{bR} \varepsilon_{bu}^5 + \\
&+ 10R_b b a_5 \varepsilon_{bu}^6 - 60R_{bt} b \varepsilon_{btu} \varepsilon_{bR}^5 + 30R_{bt} b \varepsilon_{btr} \varepsilon_{bR}^5 = R_b b \varepsilon_{bR}^2 \left( 30a_1 \varepsilon_{bR}^4 + \right. \\
&+ 20a_2 \varepsilon_{bR}^3 \varepsilon_{bu} + 15a_3 \varepsilon_{bR}^2 \varepsilon_{bu}^2 + 12a_4 \varepsilon_{bR} \varepsilon_{bu}^3 + 10a_5 \varepsilon_{bu}^4 \left. \right) + 30R_{bt} b \varepsilon_{bR}^5 \left( \varepsilon_{btR} - 2\varepsilon_{btu} \right); \\
G_2 &= 60A'_s R_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{bu} + 60A_s E_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{bu}^2 = 60\varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{bu} \left( A'_s R + A_s E_s \varepsilon_{bu} \right); \\
G_3 &= -60A_s E_s \varepsilon_{bR}^5 \varepsilon_{bu}^2 h_0.
\end{aligned}$$

Для решения уравнения (4.34), используется система компьютерной математики MATLAB. Из двух корней удовлетворяющих уравнению (4.34) выбирается корень, удовлетворяющий условие  $0 < x_b < h$ .

Высота сжатой зоны бетона, найденная из уравнения (4.34), используется для определения растянутой и сжатой арматуры, а также высоты растянутой зоны бетона. Для определения значений изгибающих моментов, воспринимаемых бетоном и арматурой, полученные значения деформаций и высот сжатой и растянутой зон бетона подставляются в уравнения (3.9) ... (3.11) и (3.19).

Значение изгибающего момента, воспринимаемого сечением, определяется из уравнения равновесия (3.5). Значение кривизны, соответствующей точке  $G$  определяем по формуле (3.23).

## 4.2 Алгоритм построения линеаризованных диаграмм «изгибающий момент – кривизна»

Из приведенных выше диаграмм видно, что тип диаграммы зависит как от процента армирования, так и от соотношения прочностей бетона и арматуры. В связи с тем, что определение границ применимости каждого типа диаграммы «изгибающий момент – кривизна» для сечений железобетонных изгибаемых элементов не является целью данной работы, предлагается строить линеаризованные диаграммы «изгибающий момент – кривизна» по алгоритму, блок схема которого представлена на рис. 4.4 ... 4.6.

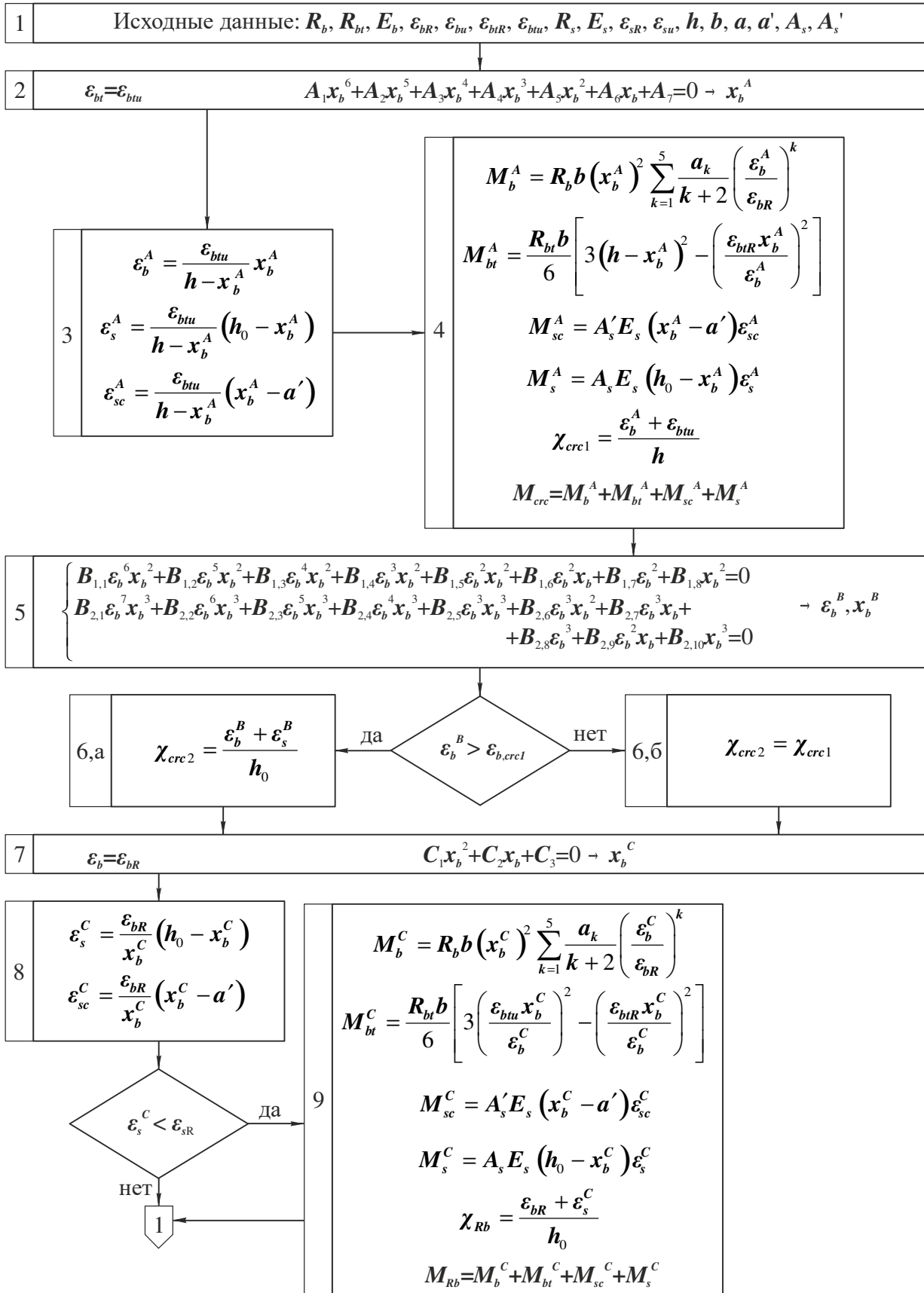


Рис. 4.4 Блок-схема построения линеаризованной диаграммы

«изгибающий момент – кривизна»

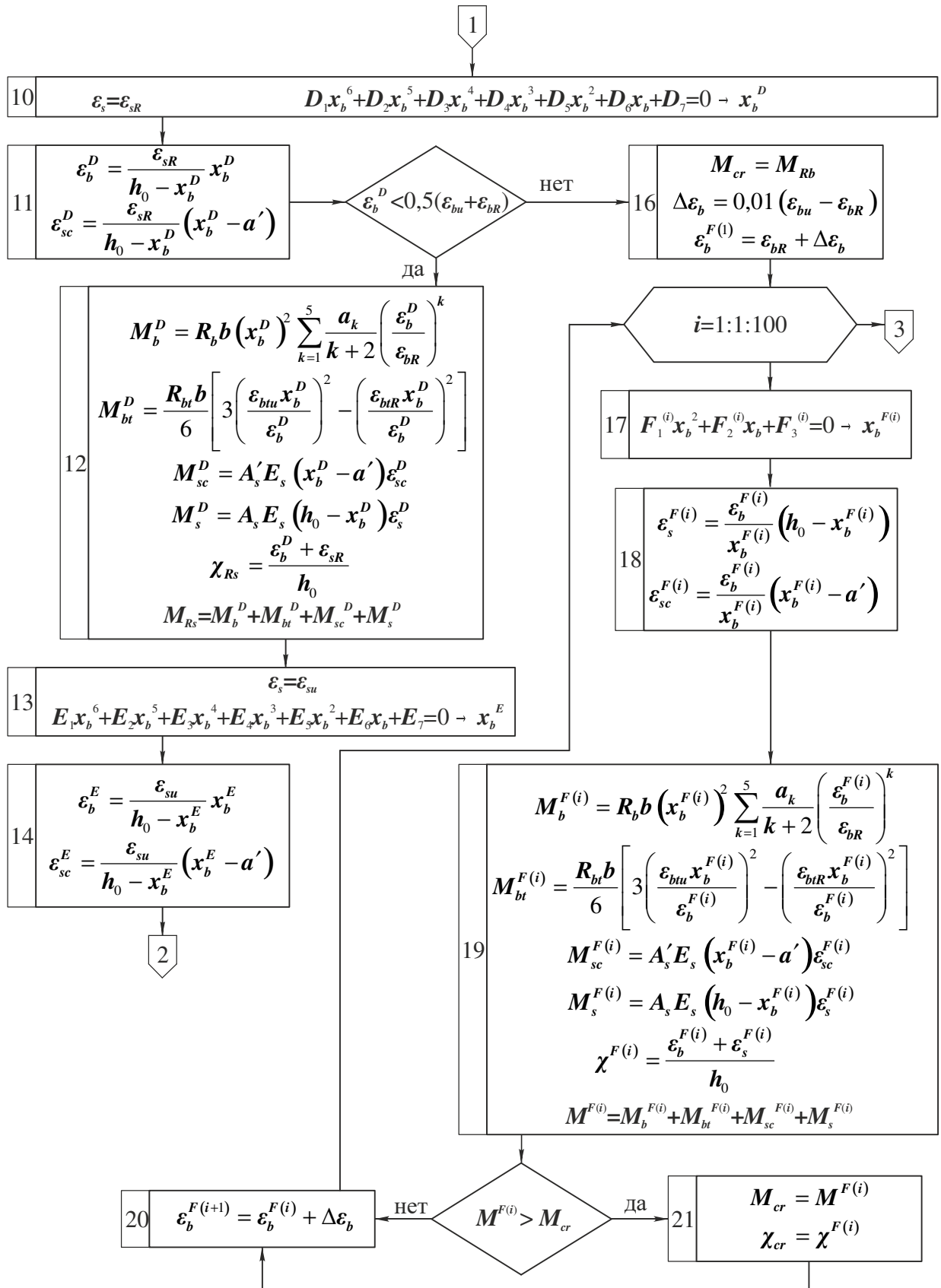


Рис. 4.5 Блок-схема построения линеаризованной диаграммы «изгибающий момент – кривизна» (продолжение)

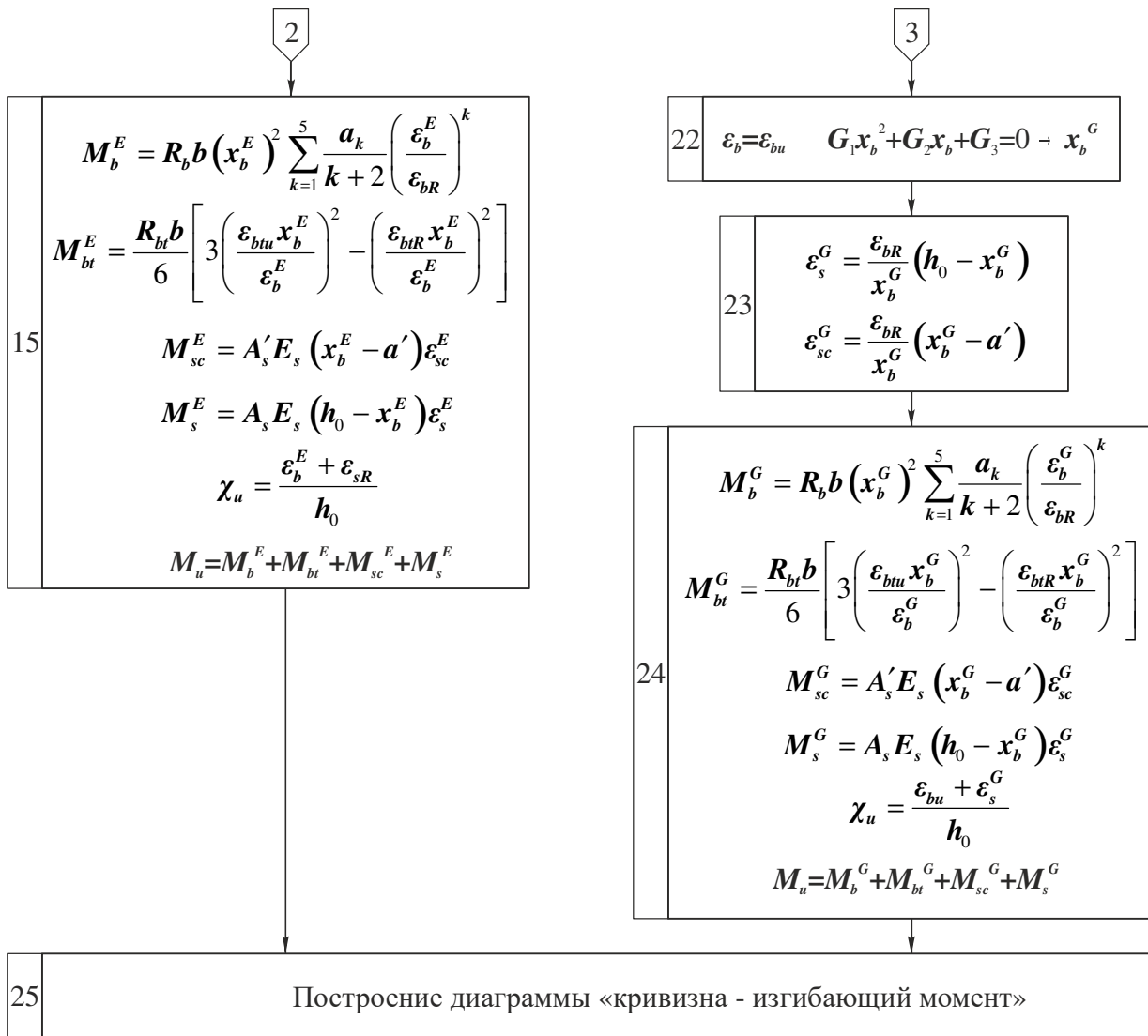


Рис. 4.6 Блок-схема построения линейризированной диаграммы «изгибающий момент – кривизна» (окончание)

1. Исходными данными при построении диаграммы «момент-кривизна» для прямоугольного сечения железобетонных изгибаемых элементов являются:

- расчетная прочность бетона на сжатие  $R_b$  и растяжение  $R_{bt}$ ;
- начальный модуль упругости бетона  $E_b$ ;
- предельные деформации сжатого и растянутого бетона  $\varepsilon_{bR}$ ,  $\varepsilon_{bu}$ ,  $\varepsilon_{btR}$ ,  $\varepsilon_{btu}$ ;
- расчетная прочность арматурной стали  $R_s$ ;
- модуль упругости арматурной стали  $E_s$ ;
- предельные деформации арматурной стали  $\varepsilon_{sR}$ ,  $\varepsilon_{su}$ ;



- размеры сечения  $h$  и  $b$ ;
- площади растянутой и сжатой арматуры  $A_s$  и  $A_s'$ ;
- величины защитного слоя для растянутой и сжатой арматуры  $a$  и  $a'$ .

2. Принимается деформация крайнего растянутого волокна бетона  $\varepsilon_{bt} = \varepsilon_{btu}$  и из уравнения (4.5) определяется высота сжатой зоны бетона.

3. Определяются деформации крайнего сжатого волокна бетона, сжатой и растянутой арматуры при принятой деформации крайнего растянутого волокна бетона и полученной высоте сжатой зоны.

4. Полученные значения деформаций бетона и арматуры подставляются в уравнения (3.9) ... (3.11) и (3.19), и из уравнения равновесия (3.5) определяется момент трещинообразования  $M_{crc}$ . Значение кривизны  $\chi_{crc1}$  определяется по формуле (3.20).

5. Из системы уравнений (4.9) определяются значения деформации крайнего сжатого волокна бетона и высоты сжатой зоны, соответствующие точке  $B$  на диаграмме «кривизна – изгибающий момент».

6. Затем по формуле (3.23) вычисляется значение кривизны  $\chi_{crc2}$ . При этом если ни в одной паре корней системы уравнений не будет значения деформации крайнего сжатого волокна бетона, превышающего значения  $\varepsilon_{b,crc1}$ , то принимается значение кривизны  $\chi_{crc2} = \chi_{crc1}$ .

7. Принимается деформация крайнего сжатого волокна бетона  $\varepsilon_b = \varepsilon_{bR}$  и из уравнения (4.23) определяется высота сжатой зоны бетона.

8. Определяются значения деформаций сжатой и растянутой арматуры при принятой деформации крайнего сжатого волокна бетона и полученной высоте сжатой зоны. Если полученное значение деформации растянутой арматуры не превышает предельного значения  $\varepsilon_{sR}$ , то переходят к п.9, в противном случае переходят к п.10.

9. Полученные значения деформаций бетона и арматуры подставляются в уравнения (3.9) ... (3.11) и (3.19), и из уравнения равновесия (3.5) определяется значение изгибающего момента  $M_{Rb}$ . Значение кривизны  $\chi_{Rb}$  определяется по формуле (3.23).

10. Принимается деформация растянутой арматуры  $\varepsilon_{st} = \varepsilon_{sR}$  и из уравнения (4.14) определяется высота сжатой зоны бетона.

11. Определяются значения деформаций крайнего сжатого волокна бетона и сжатой арматуры при принятой деформации растянутой арматуры и полученной высоте сжатой зоны. Если полученное значение деформации крайнего сжатого волокна не превышает значения  $0,5(\varepsilon_{bR} + \varepsilon_{bu})$ , то переходят к п.12, в противном случае переходят к п.16.

12. Полученные значения деформаций бетона и арматуры подставляются в уравнения (3.9) ... (3.11) и (3.19), и из уравнения равновесия (3.5) определяется значение изгибающего момента  $M_u$ . Значение кривизны  $\chi_{Rs}$  определяется по формуле (3.23).

13. Принимается деформация растянутой арматуры  $\varepsilon_{st} = \varepsilon_{su}$  и из уравнения (4.19) определяется высота сжатой зоны бетона.

14. Определяются значения деформаций крайнего сжатого волокна бетона и сжатой арматуры при принятой деформации растянутой арматуры и полученной высоте сжатой зоны.

15. Определяется значение кривизны  $\chi_u$  по формуле (3.23), и переходят к п.25.

16. Первоначально задаются значением изгибающего момента  $M_{cr}=M_{Rb}$ . Затем задаются значением прироста деформации крайнего сжатого волокна бетона  $\Delta\varepsilon_b = 0,01(\varepsilon_{bu} - \varepsilon_{bR})$  и начальным значением деформации крайнего сжатого волокна бетона равным  $\varepsilon_b^{(1)} = \varepsilon_{bR} + \Delta\varepsilon_b$ .

17. Для принятого значения деформации крайнего сжатого волокна бетона из уравнения (4.30) определяется высота сжатой зоны бетона.

18. Определяются деформации крайнего сжатого волокна бетона, сжатой и растянутой арматуры при принятой деформации крайнего растянутого волокна бетона и полученной высоте сжатой зоны.

19. Полученные значения деформаций бетона и арматуры подставляются в уравнения (3.9) ... (3.11) и (3.19), и из уравнения равновесия

(3.5) определяется значение изгибающего момента  $M^{(i)}$ . Значение кривизны  $\chi^{(i)}$  определяется по формуле (3.23).

20. Принимается значение деформации крайнего сжатого волокна бетона  $\varepsilon_b^{(i+1)} = \varepsilon_b^{(i)} + \Delta\varepsilon_b$  и расчет по пп. 17 ... 20 повторяется до достижения деформацией сжатого волокна бетона значения  $\varepsilon_b = \varepsilon_{bu}$ .

21. Из полученных значений изгибающих моментов и кривизн выбирается наибольшее значение изгибающего момента и значение соответствующей ему кривизны.

22. Принимается деформация крайнего сжатого волокна бетона  $\varepsilon_b = \varepsilon_{bu}$  и из уравнения (4.34) определяется высота сжатой зоны бетона.

23. Определяются значения деформаций сжатой и растянутой арматуры при принятой деформации крайнего сжатого волокна бетона и полученной высоте сжатой зоны.

24. Полученные значения деформаций бетона и арматуры подставляются в уравнения (3.9) ... (3.11) и (3.19), и из уравнения равновесия (3.5) определяется значение изгибающего момента  $M_u$ . Значение кривизны  $\chi_u$  определяется по формуле (3.23).

25. По полученным значениям изгибающих моментов и соответствующих им кривизн, строится диаграмма «кривизна – изгибающий момент» для заданного сечения.

В соответствии с предложенным алгоритмом в системе компьютерной математики MATLAB составлена программа для построения линеаризованных диаграмм «изгибающий момент – кривизна», позволяющих описывать работу прямоугольных сечений железобетонных изгибаемых элементов вплоть до разрушения.

## **5 РАСЧЕТ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ РАМНЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

### **5.1 Учет трещинообразования в элементах рамных железобетонных конструкций**

В работе построение методики определения напряженно-деформированного состояния железобетонных рамных конструкций основывается на модели деформирования изгибаемых железобетонных элементов с использованием деформационной теории.

При этом в соответствии с работой А.В.Геммерлинга [32], принимается, что при сравнительно небольших деформациях рамных конструкций влиянием деформаций сжатия на искривление оси можно пренебречь.

Известно, что распределение внутренних усилий в статически неопределимых конструкциях зависит от жесткостей составляющих ее элементов. В свою очередь, в связи с трещинообразованием, жесткость железобетонных элементов зависит от уровня возникающих в них внутренних усилий.

В связи с этим задачу определения напряженно-деформированного состояния железобетонных рамных конструкций предлагается решать методом последовательного уточнения жесткостей.

Влиянием процесса трещинообразования на изменение продольной жесткости элемента пренебрегаем, так как образование трещин происходит не по всей длине элемента, а лишь в отдельных его сечениях.

Для определения напряженно-деформированного состояния железобетонных рамных конструкций элементы исходной расчетной схемы разбиваются на участки с кусочно-постоянной жесткостью. Пример разбиения конструкции и порядок нумерации участков приведен на рис. 5.1.

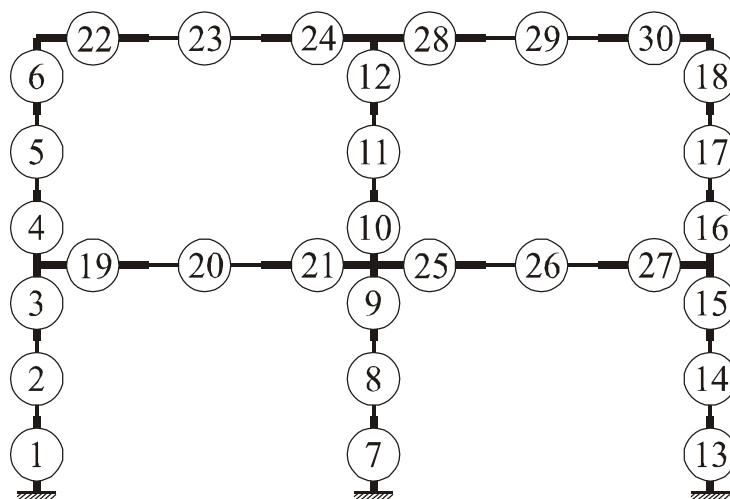


Рис. 5.1 Пример разбиения и нумерации участков рамной конструкции

Физический закон деформирования сечений железобетонной рамы имеет вид:

$$M = B\chi, \quad (5.1)$$

где  $M$  – изгибающий момент;

$B$  – изгибная жесткость сечения;

$\chi$  – кривизна сечения.

Для каждого участка конструкции, имеющего постоянную изгибную жесткость, в соответствии с предложениями изложенными в Разделе 4, строится линеаризованная диаграмма «кривизна – изгибающий момент».

На первом этапе расчета изгибная жесткость всех элементов принимается упругой и определяется на основе формулы (5.1) как отношение момента трещинообразования к кривизне соответствующей началу работы элемента с трещинами

$$B_i^{(1)} = \frac{M_{crs,i}}{\chi_{crs,1,i}}. \quad (5.2)$$

В результате расчета заданной конструкции определяются значения изгибающих моментов, возникающих в элементах конструкции. На основе формулы (5.1) по принятым значениям жесткостей и полученным значениями изгибающих моментов, определяются значения кривизн

$$\chi_i^{(s)} = \frac{M_i^{(s)}}{B_i^{(s)}}. \quad (5.3)$$

На втором и последующих этапах расчета, в соответствии с полученными на предыдущей итерации значениями кривизн, по диаграммам «кривизна – изгибающий момент» для каждого участка уточняется значение изгибной жесткости

$$B_i^{(s)} = \frac{M_i^{(s-1)} \left( \chi_i^{(s-1)} \right)}{\chi_i^{(s-1)}}. \quad (5.4)$$

Значения изгибающих моментов, полученные в результате расчета на втором и последующих этапах, сравниваются со значениями, полученными на предыдущей итерации. Расчет продолжается до тех пор, пока разница между значениями на текущей и предыдущей итерации не окажется меньше заданной величины  $\xi$ , характеризующей точность расчета

$$\left| \frac{M^{(s)} - M^{(s-1)}}{M^{(s)}} \right| \leq \xi. \quad (5.5)$$

Блок-схема, иллюстрирующая предлагаемый алгоритм расчета железобетонных рамных конструкций, приведена на рис. 5.2.

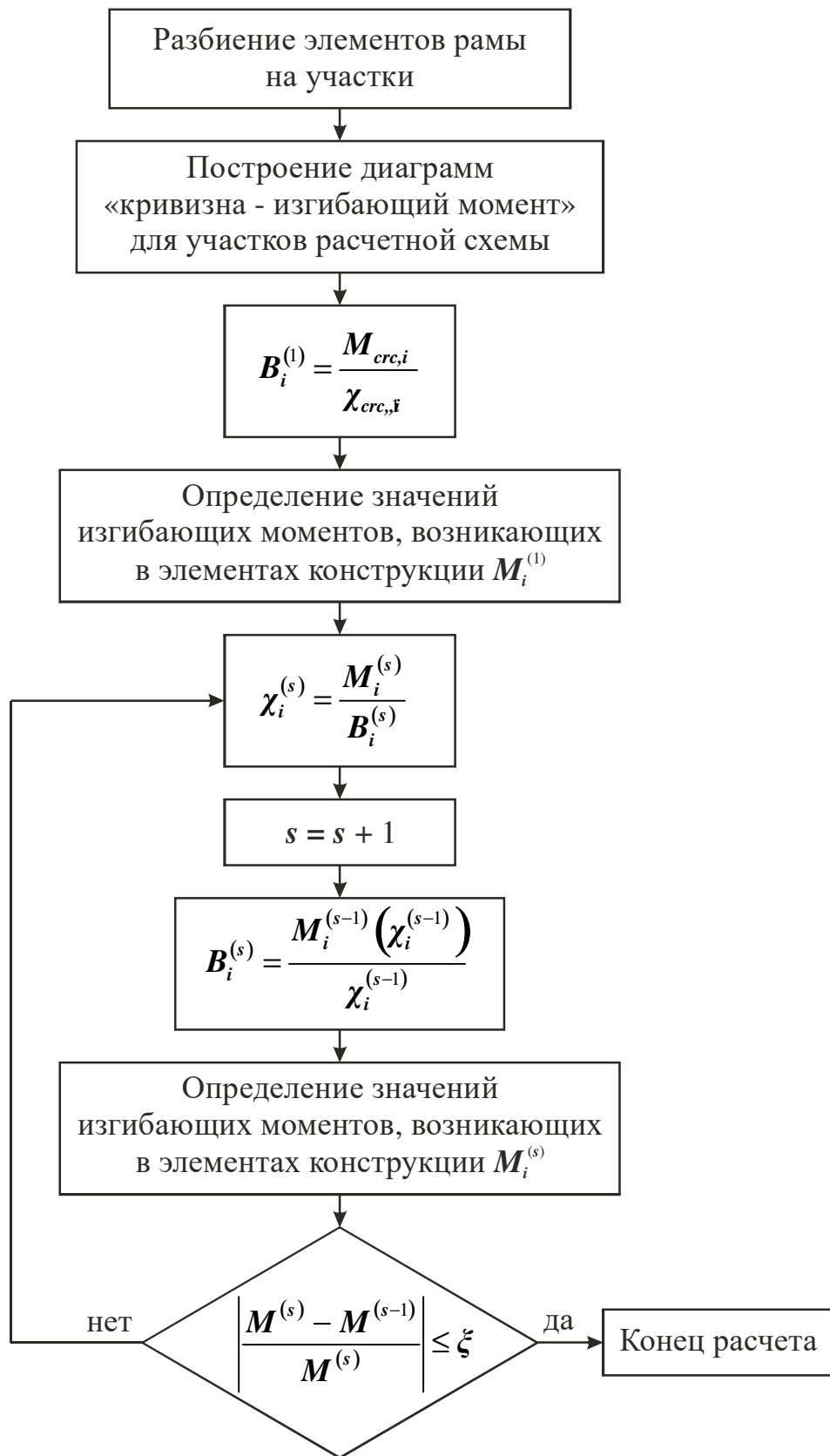


Рис. 5.2 Блок-схема расчета железобетонных рам с учетом процессов деформирования сечений

В соответствии с предложенным алгоритмом, в системе компьютерной математики MATLAB составлена программа для определения напряженно-деформированного состояния железобетонных рамных конструкций с произвольным количеством этажей и пролетов. Предложенная методика позволяет оценивать несущую способность железобетонных статически неопределимых рамных конструкций при последовательном увеличении нагрузки.

## **5.2 Пример расчета П-образной железобетонной рамной конструкции с учетом трещинообразования**

В Киевском национальном университете строительства и архитектуры А.Я.Барашиковым, Л.А.Мурашко и Г.М.Реминцем [9] выполнены обширные исследования работы П-образных железобетонных рам при действии повторных длительных нагрузок. Программой исследований предусматривалось испытание двух рам одноразовой кратковременной нагрузкой вплоть до разрушения.

Конструкция рам представлена на рис. 5.3. Рамы имели следующие проектные размеры в осях: высота  $H = 1125$  мм; пролет  $L = 1500$  мм. Ригель имел сечение размерами  $120 \times 170$  мм, стойка –  $120 \times 135$  мм. Для армирования рамы использовалась арматура класса А-П, имеющая предел текучести  $\sigma_y = 338$  МПа и модуль упругости  $E_s = 213000$  МПа. Стойки армировались двумя стержнями диаметром 10 мм во внутренней грани и двумя стержнями диаметром 14 мм во внешней грани сечения. Ригель армировался двумя стержнями диаметром 14 мм в нижней и верхней гранях сечения. При этом верхняя арматура располагалась только над опорами на участке длиной 500 мм.

Испытание трех образцов рамы РП<sub>28</sub> проводилось на действие одноразовой кратковременной нагрузки до разрушения в возрасте 28 суток. Призмная прочность бетона на момент испытания составляла  $R_b = 36,2$  МПа.



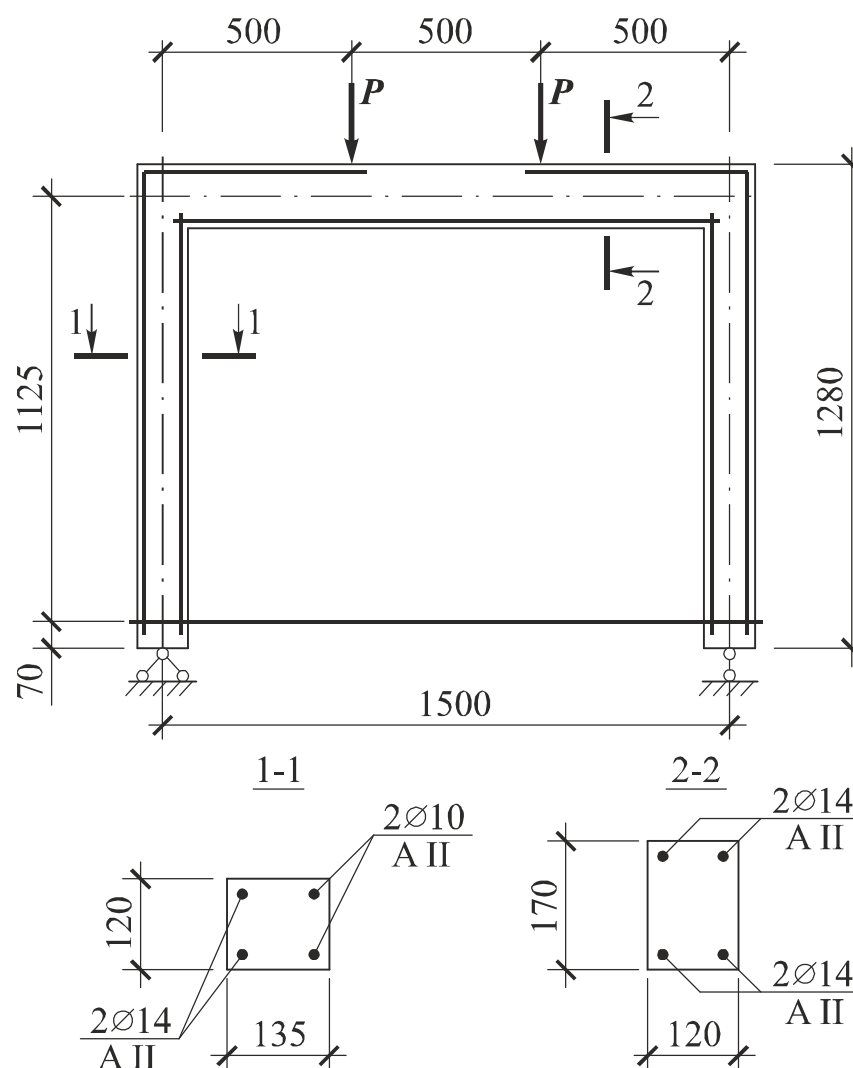


Рис. 5.3 Конструкция рамы РП<sub>28</sub>

Испытание рамы проводилось двумя сосредоточенными силами, прикладываемыми на расстоянии 500 мм от оси стоек. Нагрузка к раме прикладывалась ступенями по 5 кН. Для раскрытия статической неопределимости рамы на каждой ступени измерялось значение усилия (распора) в затяжке, выполненной из арматурного стержня диаметром 20 мм класса А-І.

По экспериментальным значениям распора  $H$  в раме вычислялись значения узловых  $M_{sup}$  и пролетных  $M_{sp}$  изгибающих моментов.

При помощи программы, составленной в системе компьютерной математики MATLAB, в соответствии с предлагаемой методикой определения напряженно-деформированного состояния железобетонных

рамных конструкций был произведен расчет описанной выше рамы РП<sub>28</sub> на каждой ступени нагружения. В таблице 5.1 приведено сравнение экспериментальных и теоретических значений изгибающих моментов, полученных по предлагаемой методике, и статистическая оценка распределения отношения теоретических и экспериментальных значений изгибающих моментов  $M_{exp}/M_{teor}$ .

Таблица 5.1

Сравнение экспериментальных и теоретических значений изгибающих моментов в раме РП<sub>28</sub> [9]

$P$ , кН	$H^{exp}$ , кН	$M_{sup}^{exp}$ , кН	$M_{sup}^{teor}$ , кН	$\frac{M_{sup}^{exp}}{M_{sup}^{teor}}$	$M_{sp}^{exp}$ , кН	$M_{sp}^{teor}$ , кН	$\frac{M_{sp}^{exp}}{M_{sp}^{teor}}$
0	0	0	0	-	0	0	-
5	0,64	0,72	0,87	0,83	1,78	1,63	1,09
10	1,96	2,21	1,75	1,26	2,80	3,25	0,86
15	2,68	3,02	2,93	1,03	4,49	4,57	0,98
20	3,34	3,77	3,98	0,95	6,23	6,02	1,03
25	4,36	4,91	4,99	0,98	7,60	7,51	1,01
30	5,67	6,38	5,88	1,08	8,62	9,12	0,95
35	6,01	6,76	6,98	0,97	10,74	10,52	1,02
40	7,12	8,01	7,87	1,02	11,99	12,13	0,99
45	8,00	9,00	8,83	1,02	13,50	13,67	0,99
50	9,86	11,09	10,86	1,02	13,91	14,14	0,98
55	10,10	11,36	11,13	1,02	16,14	16,37	0,99
Выборочное среднее, $M_x$				1,02	0,99		
Выборочная дисперсия, $D_x$				0,10	0,06		
Выборочный коэффициент вариации, $C_v$				0,10	0,06		
Доверительный интервал (при $P = 0,95$ )	верхний предел			0,95	0,96		
	нижний предел			1,08	1,02		

В справочном пособии [34] приведен пример расчета двухшарнирной железобетонной рамы, конструкция которой изображена на рис. 5.4. Размеры рамы в осях составляют: высота  $H = 6000$  мм, пролет  $L = 12000$  мм. Поперечное сечение ригеля имеет размеры  $300 \times 600$  мм, сечение стойки –

300 × 500 мм. Армирование рамы принимается из арматуры класса А-III с нормативным сопротивлением  $R_s = 395$  МПа и модулем упругости  $E_s = 200000$  МПа. Стойки армируются симметрично, площадь арматуры у граней составляет  $7,5 \text{ см}^2$ . Рабочая арматура ригеля принимается площадью  $18 \text{ см}^2$ , монтажная –  $4,5 \text{ см}^2$ . Принято, что рабочая арматура ригеля в узлах расположена у верхней грани на участках длиной 2000 мм, в пролете – у нижней грани на участке длиной 8000 мм. В расчете принимается призматическая прочность бетона  $R_b = 25,5$  МПа.

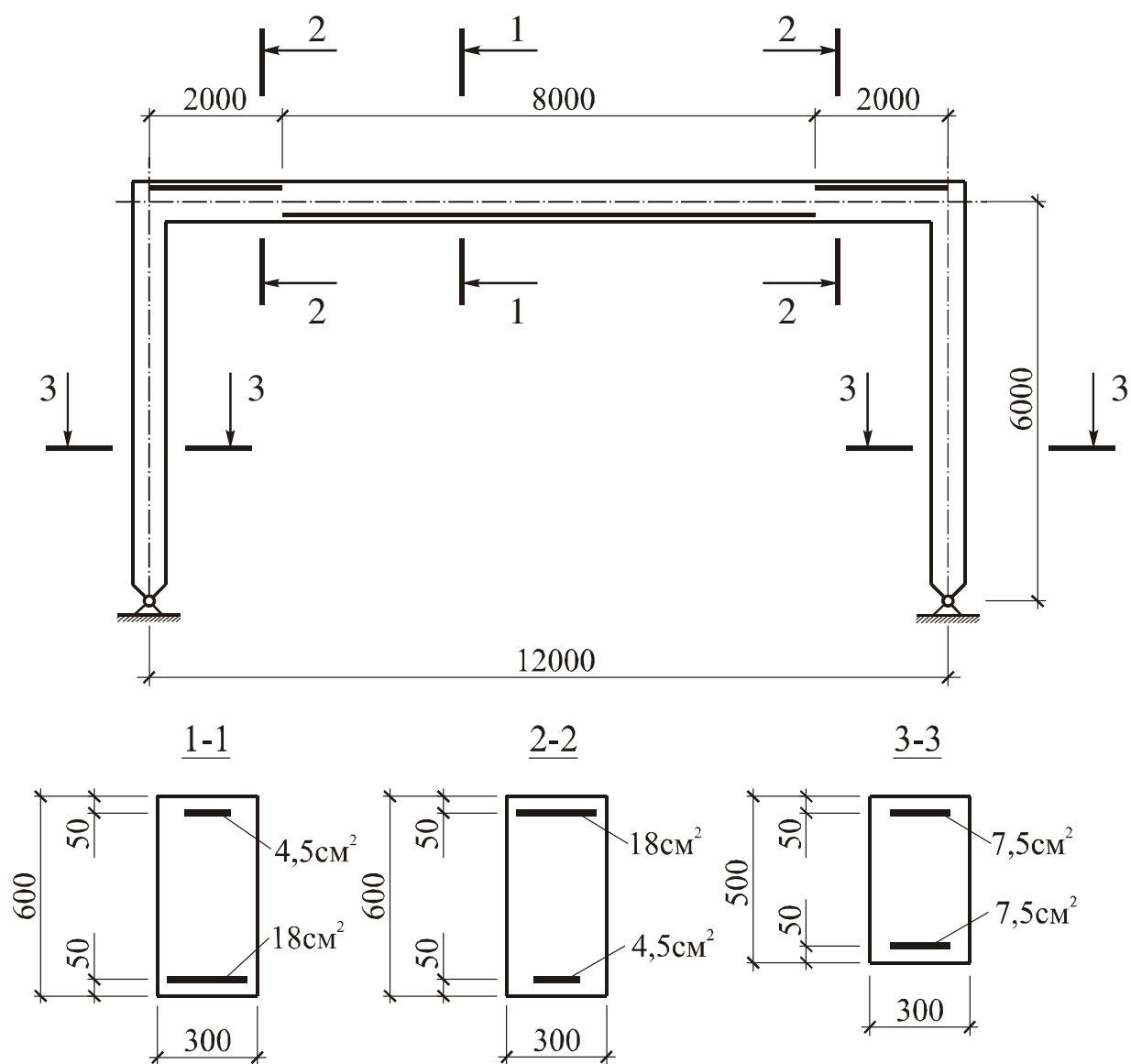


Рис. 5.4 Конструкция двухшарнирной железобетонной рамы

Заданная железобетонная рамная конструкция рассчитывалась на действие двух сосредоточенных сил  $P = 1800$  кН, приложенных к стойкам, и распределенной нагрузки  $q = 20$  кН/м, действующей на протяжении всего ригеля (рис. 5.5).

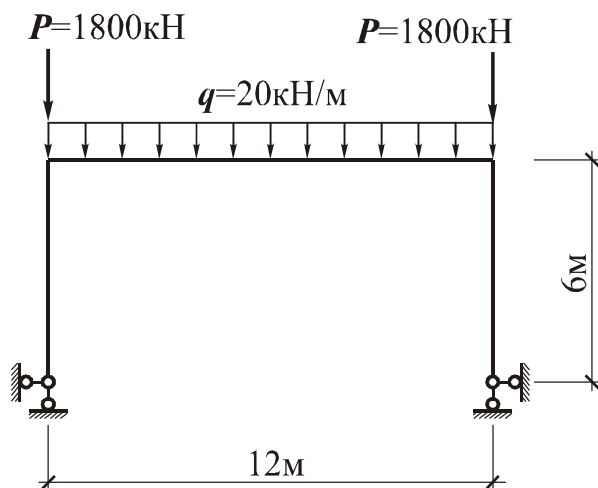


Рис. 5.5 Расчетная схема двухшарнирной железобетонной рамы

В справочном пособии расчет рамы производился при помощи метода сил с последовательным уточнением жесткостей. При этом принималось, что при заданной нагрузке трещины в стойках не образуются, а ригель разбивался на 24 участка длиной 0,5 м для учета, происходящего в нем трещинообразования.

Описанная выше рама также была рассчитана при помощи программы, составленной в системе компьютерной математики MATLAB, в упругой стадии и с учетом трещинообразования. В таблице 5.2 приведено сравнение результатов расчетов при помощи метода сил и предлагаемой методики, соответственно в упругой стадии и с учетом процессов трещинообразования.

В таблице 5.3. приведено сравнение значений изгибающих моментов возникающих в сечениях ригеля заданной двухшарнирной рамы при расчете в упругой стадии и с учетом трещинообразования.

Таблица 5.2

## Сравнение результатов расчета двухшарнирной рамы

Сечение	Значения изгибающих моментов, кНм					
	в упругой стадии			с учетом трещинообразования		
	Метод сил	ЧА МГЭ	$\Delta$ , %	Метод сил	ЧА МГЭ	$\Delta$ , %
в узле	-149,83	-149,72	0,07	-188,23	-185,56	1,4
в пролете	210,17	210,28	0,05	171,77	174,44	1,6

Таблица 5.3

## Значения изгибающих моментов в левой половине ригеля при упругом расчете и расчете с учетом трещинообразования

	Значения изгибающих моментов, кНм		$\Delta$ , %
	в упругой стадии	с учетом трещинообразования	
0	-149,72	-185,56	24
0,5	-92,22	-128,06	39
1	-39,72	-75,56	90
1,5	7,78	-28,06	-
2	50,28	14,44	71
2,5	87,78	51,94	41
3	120,28	84,44	30
3,5	147,78	111,94	24
4	170,28	134,44	21
4,5	187,78	151,94	19
5	200,28	164,44	18
5,5	207,78	171,94	17
6	210,28	174,44	17

Как видно из таблицы 5.3, трещинообразование оказывает существенное влияние на перераспределение усилий, которое в пролетном и узловом сечениях достигает 20%, а в сечениях близких к сечению, в котором изменяется знак возникающего изгибающего момента, достигает 90%.

### 5.3. Анализ напряженно-деформированного состояния и несущей способности многоэтажной многопролетной рамной конструкции

Рассмотрим расчет монолитного железобетонного плоского каркаса девятиэтажного четырехпролетного жилого здания с плоской кровлей на действие вертикальной нагрузки с учетом процессов трещинообразования.

Пролет каркаса равен 6,0 м, высота этажей – 3,0 м, шаг поперечных рам – 6,0 м.

Армирование всех элементов каркаса принимается из стержневой арматуры класса А400С с расчетным сопротивлением  $R_s = 360$  МПа и модулем упругости  $E_s = 200000$  МПа. Для колонн принимается бетон класса В30 с призменной прочностью  $R_b = 17$  МПа, для ригелей – бетона класса В25 с призменной прочностью  $R_b = 14,5$  МПа.

Подбор арматуры в элементах рамной конструкции выполняется по результатам предварительного расчета в предположении работы в упругой стадии. Для этого задаемся размерами сечений элементов конструкции. Высоту сечения ригелей рекомендуется принимать в пределах от 1/15 до 1/10 длины пролета. Таким образом, принимаем следующие размеры сечения ригеля: высота  $h_p = 50$  см, ширина  $b_p = 30$  см. Сечение колонн принимается размерами  $h_c \times b_c = 40 \times 40$  см.

Собственный вес погонного метра ригелей составит:

$$h_p \cdot b_p \cdot \rho = 0,6 \cdot 0,3 \cdot 25 = 4,5 \text{ кН/м}$$

С учетом коэффициента надежности по нагрузке:

$$q^p = 4,5 \cdot 1,1 = 4,95 \text{ кН/м}$$

Нагрузки на междуэтажные перекрытия и покрытие принимаются по таблицам 5.4 и 5.5.

## Нагрузки на междуэтажные перекрытия

Вид нагрузки	Нормативная нагрузка, кН/м <sup>2</sup>	Коэффициент надежности по нагрузке	Расчетная нагрузка, кН/м <sup>2</sup>
Постоянная			
1. Паркетный пол, $t=0,02\text{м}$ , $\rho=8\text{кН/м}^3$	0,16	1,1	0,176
2. Шлакобетонный слой, $t=0,065\text{м}$ , $\rho=16\text{кН/м}^3$	1,04	1,2	1,248
3. Пенобетонная звукоизоляционная плита, $t=0,06\text{м}$ , $\rho=5\text{кН/м}^3$	0,3	1,2	0,36
4. Железобетонная панель (по каталогу) приведенной толщиной 110мм, $t=0,11\text{м}$ , $\rho=25\text{кН/м}^3$	2,75	1,1	3,025
ИТОГО	$g^n = 4,25$		$g = 4,81$
Временная			
5. Кратковременная	2,8	1,3	3,64
6. Длительная	1,2	1,3	1,56
ИТОГО	$p^n = 4$		$p = 5,2$
Полная нагрузка			
7. Постоянная и длительная	5,45		6,37
8. Кратковременная	2,8		3,64
ИТОГО	8,25		10,01

Нормативная нагрузка на ригель перекрытия:

$$q^n = 8,25 \cdot 6 = 49,5 \text{ кН/м}$$

Расчетная нагрузка на ригель перекрытия:

$$q = 10,01 \cdot 6 = 60,06 \text{ кН/м}$$

Расчетная нагрузка на ригель перекрытия с учетом его собственного веса:

$$q_y = 60,06 + 4,95 \approx 65,0 \text{ кН/м}$$

## Нагрузки на покрытие

Вид нагрузки	Нормативная нагрузка, кН/м <sup>2</sup>	Коэффициент надежности по нагрузке	Расчетная нагрузка, кН/м <sup>2</sup>
Постоянная			
1. Рубероидный ковер в три слоя (вес одного слоя 0,050 кН/м <sup>2</sup> )	0,15	1,2	0,18
2. Цементная стяжка, $t=0,03\text{м}$ , $\rho=20\text{кН/м}^3$	0,6	1,3	0,78
3. Утеплитель из пенобетонных плит, $t=0,12\text{м}$ , $\rho=5\text{кН/м}^3$	0,6	1,2	0,72
4. Пароизоляция из одного слоя рубероида	0,05	1,2	0,06
5. Железобетонная панель (по каталогу) приведенной толщиной 110мм, $t=0,11\text{м}$ , $\rho=25\text{кН/м}^3$	2,75	1,1	3,025
ИТОГО	$g^n = 4,15$		$g = 4,765$
Временная			
6. Снеговая	0,88	1,14	1,00
в том числе длительная	0,192	1,14	0,219
кратковременная	0,688	1,14	0,781
Полная нагрузка			
7. Постоянная и длительная	4,342		4,984
8. Кратковременная	0,688		0,781
ИТОГО	5,03		5,765

Нормативная нагрузка на ригель покрытия:

$$q^n = 5,03 \cdot 6 = 30,2 \text{ кН/м}$$

Расчетная нагрузка на ригель покрытия:

$$q = 5,765 \cdot 6 = 34,6 \text{ кН/м}$$

Расчетная нагрузка на ригель покрытия с учетом его собственного веса



$$q_y = 34,6 + 4,95 \approx 40,0 \text{ кН/м}$$

Расчетная схема монолитного железобетонного каркаса девятиэтажного четырехпролетного жилого здания с плоской кровлей для расчета на действие полной нагрузки представлена на рис. 5.6.

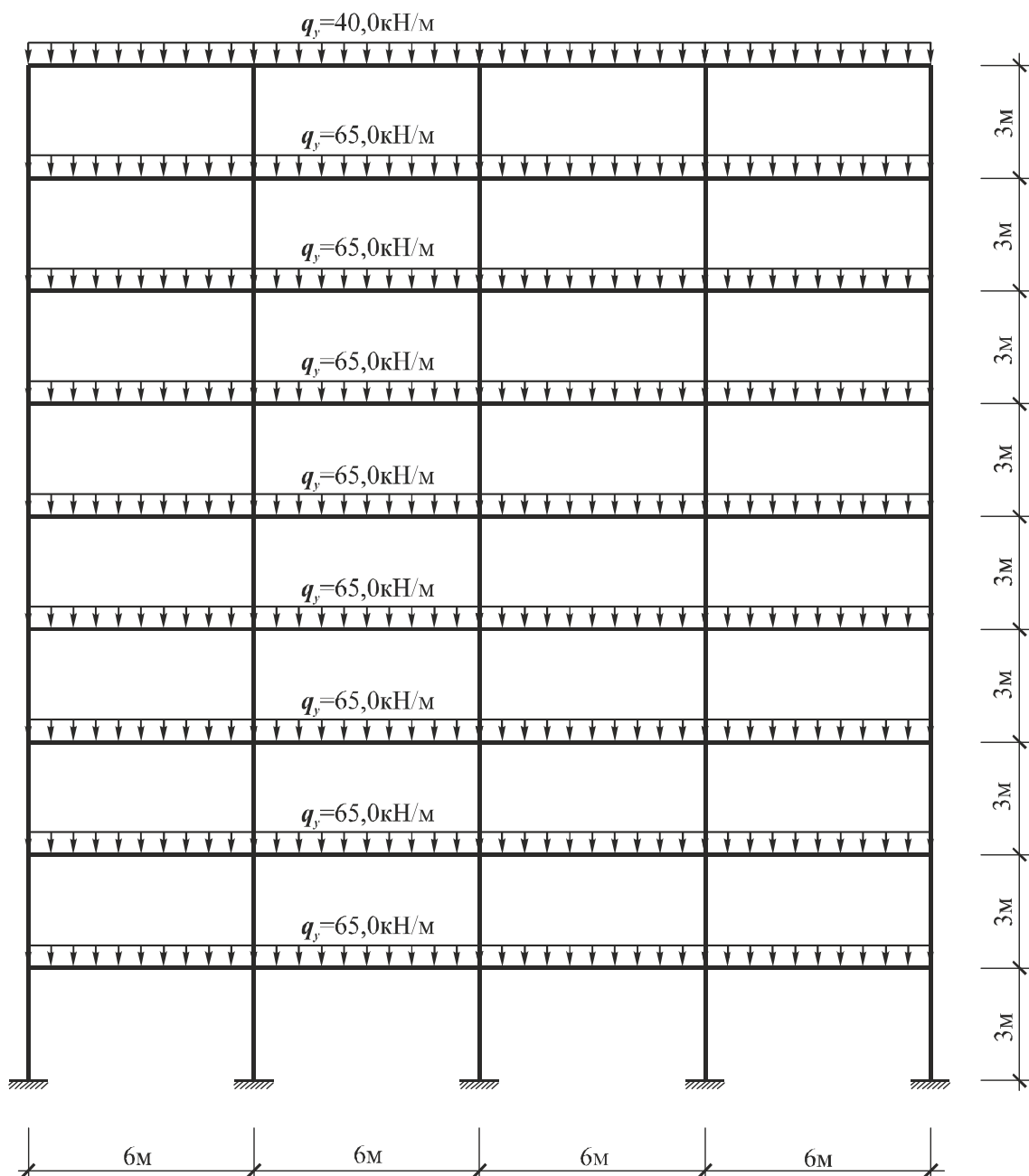


Рис. 5.6 Расчетная схема девятиэтажной четырехпролетной железобетонной рамы на действие постоянной и полезной нагрузки

По значениям внутренних усилий, полученным в результате предварительного расчета, принимается следующее армирование (рис. 5.7):

– армирование стоек принимается симметричным  $(4+4)\varnothing 28$  А400С с площадью  $A_s = A_s' = 24,63 \text{ см}^2$ ;

– ригель в пролете армируется рабочей арматурой  $4\varnothing 16$  А400С с площадью  $A_s = 8,04 \text{ см}^2$  и конструктивной арматурой  $2\varnothing 16$  А400С с площадью  $A_s = 4,02 \text{ см}^2$ ;

– ригель в опорных зонах на расстоянии  $l/4$  от узлов армируется рабочей арматурой  $2\varnothing 16$  и  $2\varnothing 28$  А400С с площадью  $A_s = 16,34 \text{ см}^2$  и конструктивной арматурой  $2\varnothing 16$  А400С с площадью  $A_s = 4,02 \text{ см}^2$ .

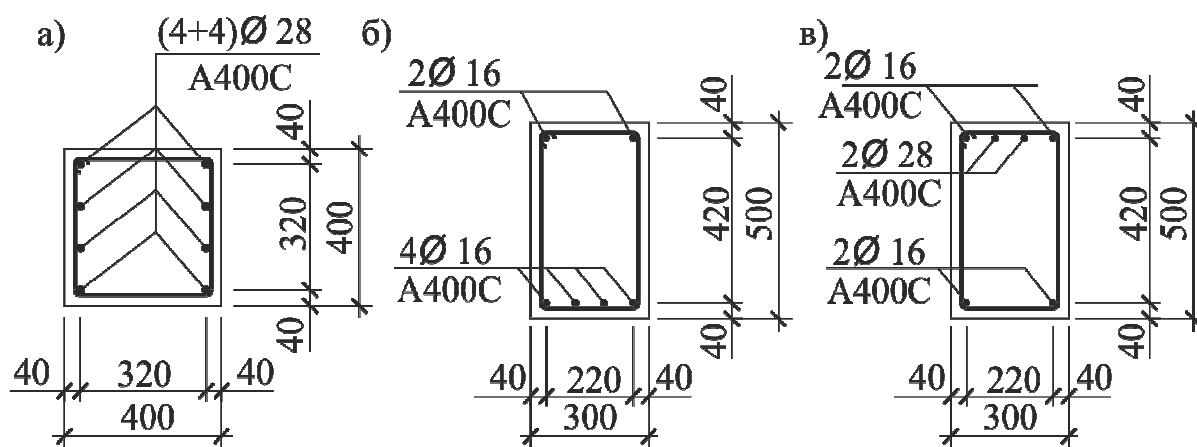


Рис. 5.7 Армирование элементов железобетонного рамного каркаса:

а) – стоек; б) – ригелей в пролете; в) – ригелей в опорных зонах

По принятому армированию для сечений конструктивных элементов каркаса строятся линеаризированные диаграммы «изгибающий момент – кривизна», в соответствии с предложениями изложенными в Разделе 4. Линеаризированные диаграммы «изгибающий момент – кривизна» для пролетного и опорного сечений ригеля приведены на рис. 5.8 и 5.9.

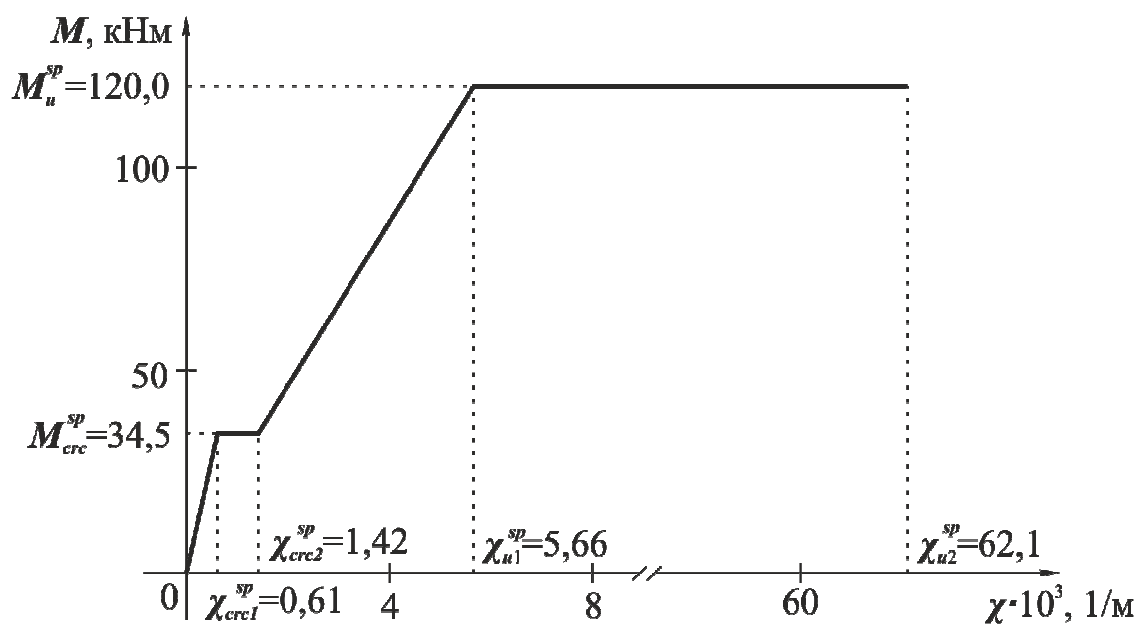


Рис. 5.8 Диаграмма «изгибающий момент – кривизна»  
для пролетного сечения ригеля

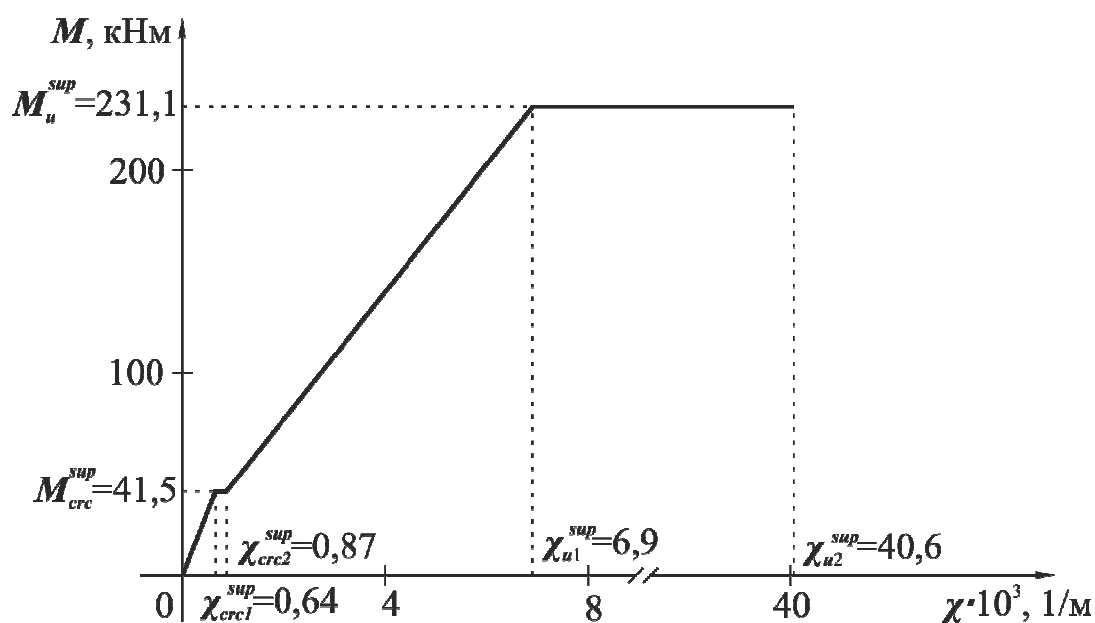


Рис. 5.9 Диаграмма «изгибающий момент – кривизна»  
для опорного сечения ригеля

Сравнение результатов расчета в упругой стадии и с учетом трещинообразования при расчетной нагрузке представлено в табл. 5.6 – 5.8.

Таблица 5.6

Сравнение значений изгибающих моментов,  
возникающих в колоннах крайнего ряда при расчете  
в упругой стадии и с учетом трещинообразования

№ элемента	№ сечений	Расчет в предположении упругой работы	Расчет с учетом трещинообразования	$\Delta, \%$
1	1	40,09	43,73	9
	3	-76,05	-83,54	10
2	1	99,25	109,75	11
	3	-94,44	-100,47	6
3	1	95,53	100,40	5
	3	-97,38	-101,97	5
4	1	99,89	105,06	5
	3	-100,89	-104,42	4
5	1	102,79	106,52	4
	3	-103,67	-106,51	3
6	1	105,22	107,51	2
	3	-105,89	-108,61	3
7	1	107,07	107,24	0
	3	-107,50	-109,57	2
8	1	108,55	106,90	-2
	3	-108,63	-110,17	1
9	1	109,02	105,28	-3
	3	-124,14	-118,51	-5
Примечание: Сечение 1 находится в начале элемента, 3 – в конце элемента				

Таблица 5.7

Сравнение значений изгибающих моментов,  
возникающих в ригелях крайнего пролета при расчете  
в упругой стадии и с учетом трещинообразования

№ элемента	№ сечений	Расчет в предположении упругой работы	Расчет с учетом трещинообразования	$\Delta, \%$
46	1	-175,29	-193,29	10
	2	102,26	88,42	-14
	3	-205,18	-214,88	5
47	1	-189,97	-200,87	6
	2	100,33	88,75	-12
	3	-194,36	-206,63	6
48	1	-197,27	-207,03	5
	2	100,66	88,65	-12
	3	-186,40	-200,66	8
49	1	-203,68	-210,94	4
	2	100,64	88,42	-12
	3	-180,04	-197,23	10
50	1	-208,89	-214,02	3
	2	100,67	88,29	-12
	3	-174,77	-194,41	11
51	1	-212,96	-215,85	1
	2	100,67	88,38	-12
	3	-170,69	-192,39	13
52	1	-216,05	-216,47	0
	2	100,71	88,67	-12
	3	-167,53	-191,18	14
53	1	-217,65	-215,45	-1
	2	100,46	88,90	-12
	3	-166,44	-191,74	15
54	1	-124,14	-118,51	-5
	2	67,85	65,43	-4
	3	-100,17	-110,63	10
Примечание: Сечение 1 находится в начале элемента, 2 – в середине элемента, 3 – в конце элемента				

Таблица 5.8

Сравнение значений изгибающих моментов,  
возникающих в ригелях среднего пролета при расчете  
в упругой стадии и с учетом трещинообразования

№ элемента	№ сечений	Расчет в предположении упругой работы	Расчет с учетом трещинообразования	$\Delta, \%$
55	1	-201,50	-209,97	4
	2	92,44	83,39	-10
	3	-198,62	-208,25	5
56	1	-198,97	-207,47	4
	2	93,14	84,86	-9
	3	-199,74	-207,80	4
57	1	-198,78	-207,41	4
	2	93,29	84,81	-9
	3	-199,64	-207,97	4
58	1	-198,02	-207,15	5
	2	93,56	84,92	-9
	3	-199,85	-208,01	4
59	1	-197,55	-207,04	5
	2	93,76	84,98	-9
	3	-199,93	-208,01	4
60	1	-197,17	-206,94	5
	2	93,92	85,05	-9
	3	-199,98	-207,96	4
61	1	-197,10	-207,04	5
	2	93,99	85,03	-10
	3	-199,91	-207,89	4
62	1	-196,11	-206,65	5
	2	94,27	85,12	-10
	3	-200,35	-208,11	4
63	1	-116,21	-118,55	2
	2	59,34	59,61	0
	3	-125,11	-122,24	-2

Примечание: Сечение 1 находится в начале элемента, 2 – в середине элемента, 3 – в конце элемента

Как видно из таблиц 5.6 ... 5.8, трещинообразование в элементах многоэтажных многопролетных рамных каркасов оказывает существенное влияние в основном на стойки крайних рядов и ригели крайних пролетов. Так разница значений изгибающих моментов при расчете в предположении упругой работы конструкции и с учетом трещинообразования для стоек крайних рядов изменяется в пределах от 5% для стоек верхних этажей до 11...13% для стоек первого и второго этажа.

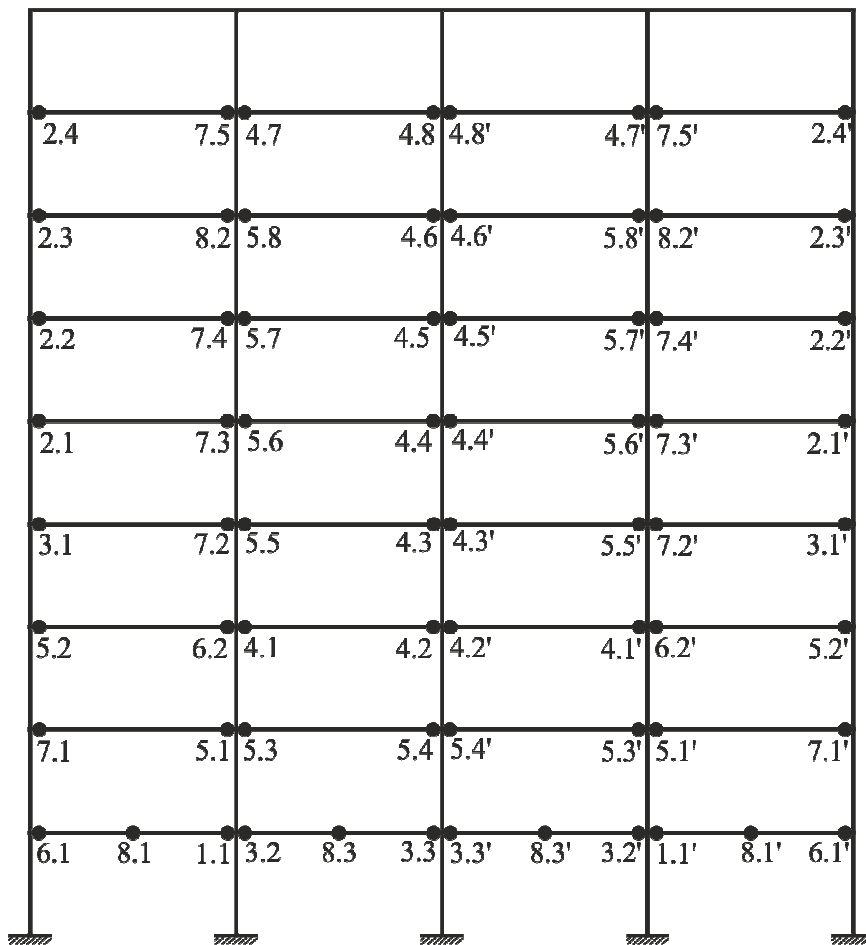
Перераспределение изгибающих моментов в ригелях средних пролетов в результате трещинообразования не превышает 5% в опорных сечениях и 10% в пролетных сечениях. В ригелях крайних пролетов разница значений изгибающих моментов при расчете в предположении упругой работы конструкции и с учетом трещинообразования для опорных сечений изменяется в пределах от 5% для нижних этажей до 15% для верхних этажей; для пролетных сечений перераспределение составляет около 15% по всей высоте каркаса.

При помощи программы, составленной в системе компьютерной математики MATLAB, в соответствии с предлагаемой методикой было произведено исследование несущей способности железобетонного каркаса здания с принятым выше армированием элементов при пошаговом увеличении нагрузки вплоть до разрушения. При этом нагрузка на ригели междуэтажных перекрытий увеличивалась с шагом 5 кН/м, а на ригели покрытия – с шагом 3,1 кН/м. После достижения расчетных значений нагрузки на ригели междуэтажных перекрытий увеличивалась с шагом 1 кН/м, а на ригели покрытия – с шагом 0,6 кН/м.

Анализ результатов расчета на каждом шаге загрузки показал, что запроектированный железобетонный рамный каркас работает в упругой стадии до уровня нагрузки на ригели междуэтажных перекрытий  $q_y = 15,0$  кН/м. При нагрузках свыше 15 кН/м образуются нормальные трещины в опорных сечениях ригелей, вызывающие перераспределение

внутренних усилий. При нагрузках свыше 25 кН/м образуются нормальные трещины в пролетных сечениях ригелей.

Увеличение нагрузки свыше расчетных значений ведет к образованию условных пластических шарниров. Схема образования условных пластических шарниров, предшествующих разрушению железобетонного рамного каркаса с обозначением порядка их формирования приведена на рис. 5.10.



- 1.\* - при нагрузке на междуэтажные перекрытия  $q = 69$  кН/м
- 2.\* - при нагрузке на междуэтажные перекрытия  $q = 70$  кН/м
- 3.\* - при нагрузке на междуэтажные перекрытия  $q = 71$  кН/м
- 4.\* - при нагрузке на междуэтажные перекрытия  $q = 72$  кН/м
- 5.\* - при нагрузке на междуэтажные перекрытия  $q = 73$  кН/м
- 6.\* - при нагрузке на междуэтажные перекрытия  $q = 74$  кН/м
- 7.\* - при нагрузке на междуэтажные перекрытия  $q = 75$  кН/м
- 8.\* - при нагрузке на междуэтажные перекрытия  $q = 76$  кН/м

Рис. 5.10 Схема образования пластических шарниров



Первый условный пластический шарнир образуется в опорном сечении ригеля крайнего ряда первого этажа, примыкающего к стойке среднего ряда, при нагрузке на ригели междуэтажных перекрытий  $q_y = 69,0$  кН/м и нагрузке на ригели покрытия  $q_y = 42,5$  кН/м. При дальнейшем увеличении нагрузки условные пластические шарниры образуются в опорных сечениях ригелей.

Потеря несущей способности рамы происходит при нагрузке на ригели междуэтажных перекрытий  $q_y = 76,0$  кН/м и нагрузке на ригели покрытия  $q_y = 46,8$  кН/м, в результате образования третьих условных пластических шарниров в пролетных сечениях ригелей первого этажа.

По результатам расчета на каждом шаге загрузки построены диаграммы зависимостей значений изгибающих моментов в опорных и пролетных сечениях ригелей первого этажа от величины нагрузки на ригели междуэтажных перекрытий, представленные на рис. 5.11, 5.12. Горизонтальные участки на диаграммах свидетельствует об образовании пластических шарниров.

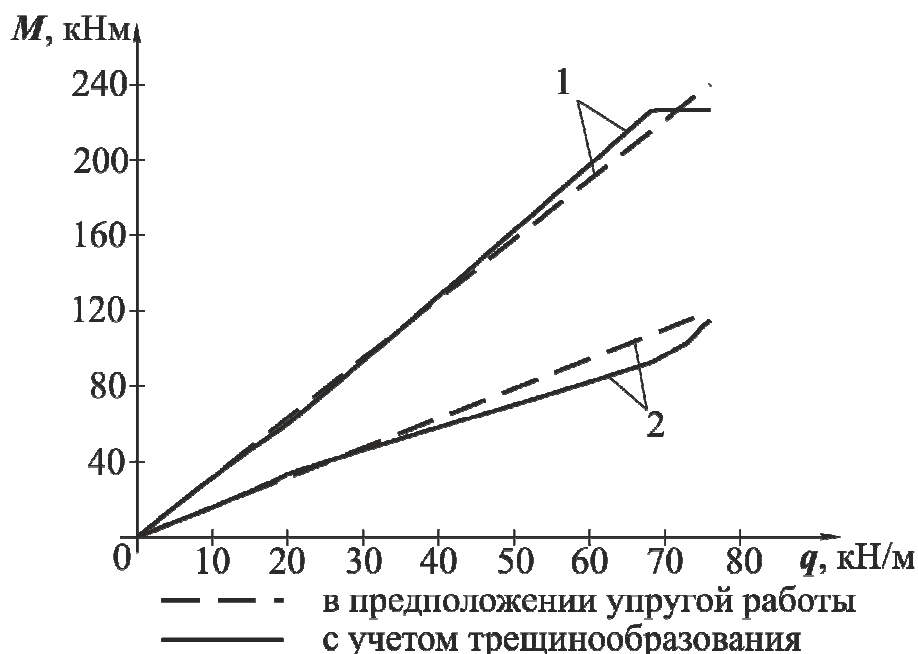


Рис. 5.11 Зависимость значений изгибающих моментов в ригелях крайних пролетов первого этажа от величины нагрузки:

1 – в опорном сечении; 2 – в пролетном сечении

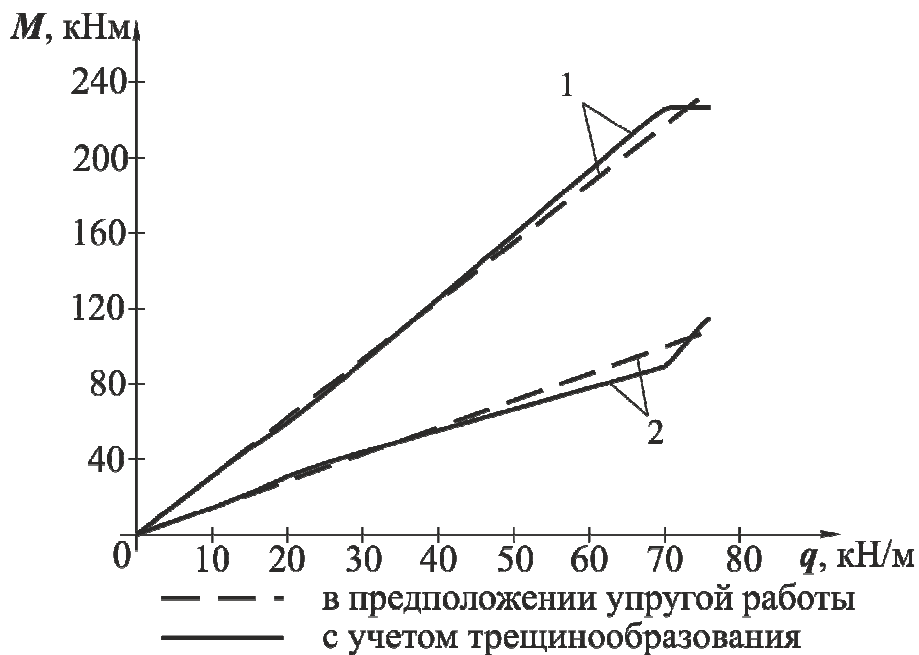


Рис. 5.12 Зависимость значений изгибающих моментов в ригелях средних пролетов первого этажа от величины нагрузки  
1 – в опорном сечении; 2 – в пролетном сечении.

Коэффициент резерва несущей способности запроектированной рамы до образования первого условного пластического шарнира и до разрушения по отношению к расчетной нагрузке составляет соответственно 1,06 и 1,17; по отношению к характеристической нагрузке – 1,13 и 1,38.

Анализ порядка формирования условных пластических шарниров для рассмотренной расчетной схемы при принятом армировании свидетельствует, о неполном использовании несущей способности колонн.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Асаад Р.Х. Разработка методов расчета статически неопределимых железобетонных балок с учетом нисходящей ветви деформирования: автореф. дис. на звание канд. техн. наук: спец. 05.23.01 «Строительные конструкции, здания и сооружения» / Р.Х. Асаад. – Ташкент, 1984. – 20 с.

2. Бабич В.Є. Напружено-деформований стан і міцність нерозрізних залізобетонних балок при одноразових та повторних навантаженнях: дис. ... на здоб. наук. ст. канд. техн. наук – Рівне, 2005 – 176 с.

3. Баженов В.А. Численные методы в механике / В.А.Баженов, А.Ф.Дашенко, Л.В.Коломиец, В.Ф.Оробей, Н.Г.Сурьянинов. – Одесса: «Стандартъ», 2005. – 564 с.

4. Байков В.Н. Определение внутренних усилий статически неопределимых железобетонных балок и прогибов с учетом неупругих свойств конструкции // В.Н.Байков. Бетон и железобетон. – 1965. - №4. – С.38-41.

5. Байков В.Н. Особенности разрушения бетона, обусловленные его ортотропным деформированием / В.Н.Байков // Бетон и железобетон. - 1988. - №12. - С. 13-15.

6. Байков В.Н. Расчет изгибаемых элементов с учетом экспериментальных зависимостей между напряжениями и деформациями для бетона и высокопрочной арматуры // В.Н.Байков. Известия вузов: Строительство и архитектура. – 1981. – № 65. – С. 26-32.

7. Бамбура А.М. До аналітичного описання діаграми механічного стану бетону при одноразовому короткочасному деформуванню / А.М.Бамбура // Будівельні конструкції: Збірник наукових праць. – Київ: НДІБК, 2002.-№ 57. – С.31-34.

8. Бамбура А.М. Експериментальні основи прикладної деформаційної теорії залізобетону: дис. на здоб. наук. ст. доктора техн. Наук : спец 05.23.01 «Будівельні конструкції, будівлі та споруди» / А.М.Бамбура – Київ: НДІБК, 2005, - 379 с.

9. Барашиков А.Я. Исследование деформативности железобетонных рам. / А.Я.Барашиков, Л.А.Мурашко, Г.М.Реминец, - Киев: Издательство «Будівельник», 1974. – 86 с.

10. Барашиков А.Я. Способ определения изгибной и сдвиговой жесткостей в плоскости железобетонных и армоцементных панелей с трещинами при расчете зданий на статические и сейсмические воздействия / А.Я.Барашиков, В.И.Колчунов, Чунг Хоа Нгуен // Строительные конструкции. – К., Будівельник, 1993. – № 45-46. – С. 48-51.

11. Барашиков А.Я.. Залізобетонні конструкції / А.Я.Барашиков, Л.М.Буднікова, Л.В.Кузнєцов та ін. / За ред. А.Я.Барашикова. – К.: Вища школа, 1995, – 591с.

12. Беккиев М.Ю. Влияние формы поперечного сечения на прочность, деформативность и трещиностойкость изгибаемых элементов из тяжелого и туфобетона: автореф. дис. ... канд. техн. наук: спец. 05.23.01 «Строительные конструкции, здания и сооружения» / М.Ю. Беккиев. - М., 1986

13. Бетонні та залізобетонні конструкції. Основні положення: ДБН В.2.6-98:2009. – Офіц. изд. Київ: Міністерство регіонального розвитку та будівництва України, 2011. – 71с. – (Нормативний документ Мінрегіонбуд України).

14. Бетонні та залізобетонні конструкції з важкого бетону. Правила проектування: ДСТУ Б В.2.6-156: 2010. – Офіц.изд. Київ: Міністерство регіонального розвитку та будівництва України, 2011. – 166с. – (Нормативний документ Мінрегіонбуд України)

15. Бондаренко В.М. Диалектика механики железобетона // В.М.Бондаренко. Бетон и железобетон. – 2002. – №1. – С. 24-27.

16. Бондаренко В.М. К вопросу о концептуальных основах теории железобетона / В.М.Бондаренко // Бетон и железобетон. - 2001. - №2. - С. 16-18.
17. Бондаренко В.М. Некоторые вопросы нелинейной теории железобетона / В.М.Бондаренко – Харьков, 1968. – 324 с.
18. Бондаренко В.М. Основные принципы расчета железобетонных статически неопределимых конструкций с учетом нелинейности деформирования, ползучести и наличия трещин // В.М.Бондаренко, Л.И.Борисова. Строительные конструкции. – 1972. – № 19. – С.
19. Бондаренко В.М. Основные принципы расчета железобетонных статически неопределимых конструкций с учетом нелинейности деформирования, ползучести и наличия трещин / В.М.Бондаренко, Л.И.Борисова // Строительные конструкции. – К.: Будивельник, 1972. – № 19.
20. Бондаренко В.М. Расчетные модели силового сопротивления железобетона: Монография. / В.М.Бондаренко, В.И.Колчунов. – М.: Изд. АСВЮ, 2004. – 472 с.
21. Верещагин В.С. Метод определения изгибающих моментов в неразрезных многопролетных балках с учетом перераспределения усилий / В.С.Верещагин // Бетон и железобетон.– 2003. – № 4. – С. 16-18.
22. Верещагин В.С. Определение прогибов многопролетных железобетонных балок с нормальными трещинами / В.С.Верещагин // Бетон и железобетон. – 2004. – №1. – С. 20-21.
23. Войцеховский А.В. К расчету статически неопределимых железобетонных балок при силовых и деформационных воздействиях / А.В.Войцеховский, А.А.Голоднов // Расчет, конструирование и технология изготовления бетонных и железобетонных изделий. – М., 1989. – С. 16-20.
24. Гвоздев А.А. Задачи и перспективы развития теории железобетона / А.А. Гвоздев // Строительная механика и расчет сооружений. - 1981. - №6. - С. 14-17.

25. Гвоздев А.А. Новое в проектировании бетонных и железобетонных конструкций / А.А. Гвоздев и др. / Под ред. Гвоздева А.А. - М.: Стройиздат, 1978.

26. Гвоздев А.А. О полной диаграмме сжатия бетона, армированного поперечными сетками / А.А.Гвоздев, А.В.Шубик, Н.Г.Матков // Бетон и железобетон. - 1988. - №4. - С. 37-39.

27. Гвоздев А.А. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия. Вып.1. Сущность метода и его обоснование / А.А.Гвоздев. - М.: Стройиздат, 1949. - 280 с.

28. Гвоздев А.А. О перераспределении усилий в статически неопределимых железобетонных обычных и предварительно напряженных конструкциях / А.А.Гвоздев– М.: Госстройиздат, 1955. – 29 с.

29. Гвоздев А.А. О перераспределении усилий в статически неопределимых железобетонных обычных и предварительно напряженных конструкциях / А.А.Гвоздев. – М.: Госстройиздат, 1955. – 29 с.

30. Гвоздев А.А. Определение величины разрушающей нагрузки для статически неопределимых систем, претерпевающих пластические деформации // А.А. Гвоздев. Труды конференции по пластическим деформациям. – М. – Л.: АН СССР, 1938.

31. Гвоздев А.А. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия / А.А.Гвоздев – М.: Госстройиздат, 1949. – 249 с.

32. Геммерлинг А.В. Расчет стержневых систем./ А.В.Геммерлинг – М., Стройиздат, 1974. – 207 с.

33. Голышев А.Б. и др. Железобетонные конструкции. Т.2. Строительная механика / А. Б. Голышев, В. П. Полищук, В. Я. Бачинский. Под ред. А. Б. Голышева. – К.: Логос, 2003. – 415 с.

34. Голышев А.Б. Проектирование железобетонных конструкций: Справочное пособие / А.Б.Голышев, В.Я.Бачинский, А.В.Харченко, И.В.Руденко / Под. ред. А.Б.Голышева. – К.: Будивельник, 1990. – 544 с.

35. Голышев А.Б. Проектирование железобетонных конструкций: Справочное пособие / А.Б.Голышев, В.Я.Бачинский, В.П.Полищук, А.В.Харченко, И.В.Руденко; Под ред. А.Б.Голышева. – 2-е изд., перераб. и доп. – К.:Будивэльнык, 1990. – 544 с.

36. Грищенко И.В. Алгоритм расчета статически неопределимых стержневых железобетонных конструкций / И.В.Грищенко, А.А.Дыховичный // Соппротивление материалов и теория сооружений. – К.: Будівельник, 1972. – №. 16.

37. Грищенко И.В. Методы оценки распределения усилий в стержневых статически неопределимых железобетонных конструкциях / И.В.Грищенко // Строительные конструкции. – К.: Будивельник, 1972. – № 19.

38. Дарков А.В. Строительная механика, учеб. для строит. спец. вузов. – 8-е изд. перераб. и доп./ А.В.Дарков, Н.Н.Шапошников – М., Высш. шк., 1986. – 607 с.

39. Демчина Б.Г. Дослідження нерозрізних двохпролітних фібробетонних та залізобетонних балок / Б.Г.Демчина, І.Д.Кавацюк, Р.М.Світій // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. – Рівне, 2006. – № 14. – С. 165-169.

40. Дорофеев В.С. К построению линеаризированных диаграмм деформирования изгибаемых железобетонных элементов / В.С.Дорофеев, А.В.Ковров, А.В.Ковтуненко, Н.К.Высочан // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. Зб. наук. праць. №22., Рівне, НУВГП, 2011. – С.320-327.

41. Дорофеев В.С. Модель деформирования железобетонных изгибаемых элементов / В.С.Дорофеев, А.В.Ковров, А.В.Ковтуненко, Р.Э.Чайковский, Т.А.Максимова // Будівельні конструкції. Міжвідомчий науково-технічний збірник. Науково-технічні проблеми сучасного залізобетону. № 74, Книга 1, – Київ: НДІБК, 2011. – С.336-343.

42. Дорофеев В.С. Определение напряженно-деформированного состояния железобетонных рамных конструкций с учетом процессов

трещинообразования / В.С.Дорофеев, А.В.Ковров, А.В.Ковтуненко, А.М.Кушнир // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». №662, – Львів, НУ «Львівська політехніка», 2010. – С.169-174.

43. Дорофеев В.С. Расчет изгибаемых элементов с учетом полной диаграммы деформирования бетона / В.С.Дорофеев, В.Ю.Барданов. – Одесса: ОДАБА, 2003. – 210с.

44. Дыховичный А.А. Определение деформаций изгибаемых элементов железобетонных конструкций при расчете статически неопределимых систем / А.А.Дыховичный, И.В.Грищенко // Строительные конструкции. – К.: Будівельник, 1969. – № 12. –

45. Дыховичный А.А. Статически неопределимые железобетонные конструкции / А.А.Дыховичный – К.: Будівельник, 1978. – 108 с.

46. Залесов А.С. Деформационная расчетная модель железобетонных элементов при действии изгибающих моментов и продольных сил / А.С.Залесов, Е.А.Чистяков, И.Ю.Ларичев // Бетон и железобетон. - 1996. - №5. - С. 16-18.

47. Залесов А.С. Расчет изгибаемых элементов на выносливость с учетом аналитических диаграмм деформирования бетона и арматуры / А.С.Залесов, И.Г.Мирсаяпов // Бетон и железобетон. -1993. - №4. - С. 22-24.

48. Залесов А.С. Новые методы расчета железобетонных элементов по нормальным сечениям на основе деформационной расчетной модели / А.С.Залесов, Е.А.Чистяков, И.Ю.Ларичева // Бетон и железобетон. – 1997. – №5. – С.31-34.

49. Залесов А.С. Расчет железобетонных конструкций по проекту новых норм / А.С.Залесов, Т.А.Мухамедиев, Е.А.Чистяков // Бетон на рубеже третьего тысячелетия: Материалы 1-й Всероссийской конференции по проблемам бетона и железобетона. – 2001. – 2-я книга. – С.711-717.

50. Залесов А.С. Расчет трещиностойкости железобетонных конструкций по новым нормативным документам / А.С. Залесов, Т.А. Мухамедиев, Е.А. Чистяков // Бетон и железобетон. – 2002.-№5 – С.15-19.



51. Залесов А.С. Современное состояние и дальнейшее развитие методов расчета и нормативной базы железобетонных конструкций / А.С.Залесов, Т.М.Пецольд, В.В.Тур и др // Инженерные проблемы современного бетона и железобетона: Материалы международной конф. – 1997. – С.1-27.
52. Зеикевич О. Метод конечных элементов в технике. / О.Зеикевич - М., 1975. – 541 с.
53. Ильин В.П. Численные методы решения задача строительной механики: Справ. Пособие / В.П.Ильин, В.В.Карпов, А.М.Масленников; Под общ. ред. В.П.Ильина, - Мн.: Выш. шк., 1990. – 349 с.
54. Инструкция по расчету статически неопределимых железобетонных конструкций с учетом перераспределения усилий. – М: Госстройиздат, 1960. – 4-68 с.
55. Ільчук Н.І. Особливості роботи П-подідних рам при короткочасних малоциклових навантаженнях: дис. на здоб. наук. ст. канд. техн. наук – Львів: 05.23.01 / Н.І.Ільчук - Львів, 2007 – 228 с.
56. Кальницкий А.А. Расчет статически неопределимых железобетонных конструкций с учетом перераспределения усилий / А.А.Кальницкий – М.: Стройиздат, 1970. – 168 с.
57. Карпенко Н.И. К построению методики расчета стержневых элементов на основе диаграмм деформирования материалов / Н.И.Карпенко, Т.А.Мухамедиев, М.И.Сапожников // Совершенствование методов расчета статически неопределимых железобетонных конструкций. - М.: НИИЖБ, 1987. - С. 25-34.
58. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона / Н.И.Карпенко. - М.: Стройиздат, 1996.-409 с.
59. Ковров А.В. Автоматизация формирования матриц численно-аналитического метода граничных элементов при расчете многопролетных неразрезных балок переменной жесткости / А.В.Ковров, А.В.Ковтуненко //

Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури, № 26, Одеса: ОДАБА, 2007. – С. 184-189.

60. Ковров А.В. Автоматизация формирования матриц численно-аналитического варианта метода граничных элементов при статическом расчете плоских многопролетных одноэтажных рам / А.В.Ковров, Т.А.Синюкина, Т.С.Цатуров, А.В.Ковтуненко // Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури, № 5, Дніпропетровськ: ПДАБА, 2011. – С.36-43.

61. Ковров А.В. О закономерностях формирования матриц численно-аналитического варианта МГЭ при расчете железобетонных рамных конструкций / А.В.Ковров, А.В.Ковтуненко // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури, № 34, Одеса: ОДАБА, 2009. – С.360-366.

62. Козачевский А. И. О перераспределении усилий в стержневых системах / А.И.Козачевский // Строительная механика и расчет сооружений. – М., 1968. – № 6. – С. 40-41.

63. Козачевский А.И. Исследование перераспределения усилий сложных стержневых системах с учетом неупругих свойств железобетона / А.И.Козачевский, С.М.Крылов // Совершенствование расчета статически неопределимых железобетонных конструкций / Под ред. А.А.Гвоздева, С.М.Крылова. – М.: Стройиздат, 1968. – С. 43-62.

64. Козачевский А.И. Численные методы расчета железобетонных конструкций с учетом неупругих свойств материалов и их приложение при автоматизированном проектировании: автореф. дис. ... д-ра техн. наук: спец. 05.23.01 «Строительные конструкции, здания и сооружения» / А.И.Козачевский– М., 1985, – 17 с.

65. Коковин О.А. Учет неупругих свойств материалов при расчете статически неопределимых конструкций / О.А.Коковин // Совершенствование расчета статически неопределимых железобетонных конструкций. – М., 1968. – С. 195-210.

66. Короткин Я.И. Строительная механика корабля и теория упругости. Изгиб и устойчивость стержней и стержневых систем. / Я.И.Короткин, В.А.Постнов, Н.Л. Сиверс – Л.: Судостроение, 1968. – Том 1. – 424 с.

67. Корх О.О. Використання методу граничних інтегральних рівнянь для розрахунку елементів будівельних конструкцій / О.О.Корх, О.І. Корх // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. – 2004. – №11. – С. 202-207.

68. Крылов С.М. Исследования перераспределения усилий в неразрезных железобетонных балках / С.М.Крылов, Ю.В.Зайцев // Расчет железобетонных конструкций: Труды НИИЖБ. – М., 1961, – № 23. – С. 272-309.

69. Крылов С.М. К вопросу о расчете железобетонных неразрезных балок с учетом перераспределения усилий / С.М. Крылов, С. Икрамов // Исследования по теории железобетона: Труды НИИЖБ. – М.: Госстройиздат, 1960. – № 17. – С. 154-177.

70. Крылов С.М. Перераспределение усилий в статически неопределимых железобетонных конструкциях / С.М.Крылов. – М.: Госстройиздат, 1964. – 121 с.

71. Крылов С.М. Распределение усилий в статически неопределимых железобетонных конструкциях в эксплуатационной стадии их работы: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук: спец. 05.23.01 «Строительные конструкции, здания и сооружения» / С.М.Крылов – М., 1970. – 34с.

72. Кузнецов В.И. Упругое основание / В.И.Кузнецов. – Москва: Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре, 1952. – 296с.

73. Кукунаев В.С. Механічна модель залізобетонних плит різної товщини. / В.С.Кукунаев - К.: вид-во “Сталь”, 2008. -177с.

74. Кукунаев В.С. Оцінка сейсмічного ризику існуючих об'єктів будівництва у АР Крим / В.С.Кукунаев, О.Л.Лобанов // Міжвідомчий

науково-технічний збірник “Будівельні конструкції” - К.: НДІБК, 2010. - вип. 73. - С. 239-244.

75. Кукунаєв В.С. Деяких особливостей проектування залізобетонних перекритій на основі безригельного каркасу / В.С.Кукунаєв, Б.П.Гудков, М.П.Корляков // Міжвідомчий науково-технічний збірник “Будівельні конструкції” - К.: НДІБК, 2011. - вип. 74. - С. 625-633.

76. Лившиц Я.Д. Определение жесткости элементов статически неопределимых железобетонных конструкций при длительно действующей нагрузке / Я.Д.Лившиц, С.С.Баранович // Строительные конструкции. – К.: Будивельник, 1973. – № 21. – С. 139-146.

77. Маилян Л. Р. Построение динамической диаграммы «момент-кривизна» изгибаемых элементов / Л.Р.Маилян // Бетон и железобетон. - 1989. - №7. - С. 32-34.

78. Маилян Л.Р. Расчет статически неопределимых стержневых железобетонных систем: Учебное пособие / Л.Р.Маилян – Ростов-на-Дону: Рост. инж.-строит. ин-т, 1988. – 91 с.

79. Маилян Л.Р. Сопротивление железобетонных статически неопределимых балок силовым воздействиям / Л.Р.Маилян. - Ростов-на-Дону: Ростовский университет, 1989. – 176 с.

80. Методические рекомендации по уточненному расчету железобетонных элементов с учетом полной диаграммы сжатия / А.Н.Бамбура, В.Я.Бачинский, Н.В.Журавлева, И.Н.Пешков. – К.:НИИСК, 1987. – 25с.

81. Михайлов К.В. Расчет прочности нормальных сечений изгибаемых элементов с учетом полной диаграммы деформирования бетона / К.В.Михайлов // Бетон и железобетон. - 1993. - №3. - С. 26-27.

82. Мурашев В.И. Трещиноустойчивость, жесткость и прочность железобетона / В.И.Мурашев– М.: Машстройиздат, 1950. – 268 с.

83. Немировский Я.М. Жесткость изгибаемых железобетонных элементов и раскрытие трещин в них / Я.М.Немировский Исследование

обычных и предварительно напряженных конструкций: Сб. ЦНИИС. – М., 1949.

84. Немировский Я.М. Жесткость изгибаемых железобетонных элементов и раскрытие трещин в них / Я.М.Немировский // Исследование обычных и предварительно напряженных конструкций: Сб. ЦНИИС. – М., 1949.

85. Немировский Я.М. К вопросу о расчете жесткости изгибаемых железобетонных элементов / Я.М.Немировский // Бетон и железобетон. – 1955. – № 7. С. 250-254.

86. Никитин И.К. Практический способ расчета изгибаемых железобетонных элементов по деформациям и раскрытию трещин. / И.К.Никитин //Строительное проектирование промышленных предприятий – М: 1963. - №4 - С.26-31.

87. Оробей В.Ф. Метод граничных интегральных уравнений в расчетах линейных систем / В.Ф.Оробей, А.Ф.Дашченко, Н.Н.Андрюченко – К.: Наукова думка, 1995. – 390 с.

88. Оробей В.Ф. Решение задач статики, динамики и устойчивости стержневых систем. Применение метода граничных элементов: учебное пособие / В.Ф.Оробей, А.В.Ковров – Одесса, 2004. – 122 с.

89. Панышин Л.Л. Оценка эффективности неупругой деформационной модели при расчете нормальных сечений / Л.Л.Панышин, М.В.Крашенинников // Бетон и железобетон. – № 3. – 2003. – С. 19-22.

90. Пособие к СНиП 2.08.01-85 по проектированию жилых зданий. Вып. 3. часть 2. Конструкции жилых зданий. – М.:Стройиздат, 1989

91. Постнов В.А. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. / В.А.Постнов, И.Я.Хархурим - Л., 1974. – 342 с.

92. Прокопович И. Е. Об учете перераспределения внутренних усилий в железобетонных статически неопределимых конструкциях при длительном действии нагрузки // И.Е.Прокопович, В.А.Зедгенидзе - Строительные конструкции. – 1972. – № 19. – С. 95-100.

93. Прокопович И.Е. Влияние длительных процессов на напряженное и деформированное состояние сооружений / И.Е.Прокопович. – М., Госстройиздат, 1963. – 260 с.

94. Прокопович И.Е. Влияние длительных процессов на напряженное и деформированное состояние сооружений / И.Е.Прокопович. – М., Госстройиздат, 1963. – 260 с.

95. Прокопович И.Е. Исследование работы железобетонных плит с учетом трещинообразования и ползучести // И.Е.Прокопович, А.Ф.Яременко. Проблемы ползучести и усадки бетона: Сб. ЦНИИС Минтрансстроя. – М., 1974. – № 77. – С. 17-25.

96. Прокопович И.Е. О построении зависимостей между напряжениями и деформациями нелинейной теории ползучести // И.Е.Прокопович, А.Ф.Яременко, П.Г.Балдук. Известия вузов: Строительство и архитектура. – 1985. – № 1. – С. 8-9.

97. Прокопович И.Е. О приближенном способе определения прогибов железобетонных балок при длительном действии нагрузки // И.Е.Прокопович, И.И.Темнов, В.И.Шатохин. Строительные конструкции. – 1967. – №.5.

98. Прокопович И.Е. О приближенном способе определения прогибов железобетонных балок при длительном действии нагрузки / И.Е.Прокопович, И.И.Темнов, В.И.Шатохин // Строительные конструкции. – К.: Будівельник, 1967. – №5.

99. Прокопович И.Е. Прикладная теория ползучести / И.Е.Прокопович, В.А.Зедгенидзе – М.: Стройиздат, 1980. – 240 с.

100. Расторгуев Б.С. Оценка надежности нормальных сечений железобетонных элементов с использованием стохастических диаграмм деформаций бетона и стали / Б.С.Расторгуев, В.В.Павлинов // Бетон и железобетон. - 2000. - №2. - С. 16-20.

101. Ржаницын А.Р. Строительная механика. / А.Р.Ржаницын– М.: Высшая школа, 1991. – 440 с.

102. Роговий С.І. Проблеми дослідження і реалізації діаграм стану бетону в теорії розрахунку залізобетонних конструкцій / С.І.Роговий // Будівельні конструкції. – К.: НДІБК, 2003. – № 59. – Книга 1. – С. 137-142.

103. Руденко И.В. К разработке инженерных способов решения задач нелинейной теории ползучести железобетона / И.В.Руденко, А.Б.Голышев // Строительные конструкции. – К.: Будивельник, 1970. – № 16. – С. 22-28.

104. Руководство по расчету статически неопределимых железобетонных конструкций. – М.: Стройиздат, 1975. – 193 с.

105. СНиП 2.03.01-84\*. Бетонные и железобетонные конструкции // Госстрой СССР. – М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1989. – 80 с. – (Нормативный документ)

106. Соломин В. И. Методы расчета и оптимальное проектирование железобетонных фундаментных конструкций / В.И.Соломин, С.Б.Шматков - М.: Стройиздат, 1986. – 208 с.

107. Соломин В.И. Исследование работы и методы расчета железобетонных фундаментных плит и балок: автореферат дисс ... доктора технических наук: 05.23.01 «Строительные конструкции, здания и сооружения / В.И.Соломин. – Москва, 1975. – 47с.

108. Соломин В.И. О расчете железобетонных плит и балок, опирающихся на упругое основание / В.И.Соломин // «Строительная механика и расчет сооружений». – 1974. – № 5. – С. 19-21.

109. Строительная механика корабля и теория упругости. Изгиб и устойчивость стержней, стержневых систем, пластин и оболочек. / В.А.Постнов, Д.М.Ростовцев, В.П.Суслов, Ю.П.Кочанов – Л.: Судостроение, 1987. – Том 2. – 416 с.

110. Строительная механика. Специальный курс. Применение метода граничных элементов: учебное пособие / В.А.Баженов, А.Ф.Дашченко., Л.В.Коломиец, В.Ф.Оробей – Одесса, Астропринт. 2001. – 288 с.

111. Темнов И.И. Изгиб железобетонных балок с обычной арматурой при длительной нагрузке // И.И.Темнов. Известия вузов: Строительство и архитектура. – 1962. – № 3. – С. 59-75.

112. Темнов И.И. Изгиб железобетонных балок с обычной арматурой при длительной нагрузке / И.И.Темнов // Известия вузов: Строительство и архитектура. – 1962. – № 3. – С. 59-75.

113. Тихий М. Расчет железобетонных рамных конструкций в пластической стадии / М. Тихий, Й. Ракосник. – М.: Стройиздат, 1976. – 198с.

114. Узун И.А. Коэффициенты упругопластичности бетона сжатой зоны на всех стадиях работы элементов / И.А.Узун // Бетон и железобетон. - 1993. - №8. - С. 26-27.

115. Узун И.А. Расчет параметров напряженно-деформированного состояния изгибаемых элементов с применением деформационной модели / И.А.Узун // Будівельні конструкції. – НДІБК, 2003. – № 59. – Книга 1.- С.346-351.

116. Узун И.А. Реализация диаграмм деформирования бетона при однородном и неоднородном напряженных состояниях / И.А.Узун // Бетон и железобетон. - 1991.-№8.-С. 19-20.

117. Узун И.А. Учет реальных диаграмм деформирования материалов в расчетах железобетонных конструкций / И.А.Узун // Бетон и железобетон. - 1997. - №2. - С. 25-27.

118. Узун И.А. Чисельні дослідження напружено-деформованого стану стержневих елементів / И.А.Узун, А.В.Ковров // Строительство и техногенная безопасность: Сборник научных трудов. – № 8. – Симферополь, 2003. – С. 51-52.

119. Узун І.О. Врахування діаграм роботи бетону та арматури в розрахунках залізобетонних конструкцій / І.О.Узун // Будівельні конструкції. – К.: НДІБК, 1999. – № 50 – С. 228-232.



120. Улицкий И.И. Жесткость изгибаемых железобетонных элементов / И.И.Улицкий, Н.С.Метелюк, Г.М.Реминец. – К.: Госстройиздат УССР, 1963. – 86 с.

121. Улицкий И.И. Определение перемещений (жесткости) железобетонных изгибаемых и внецентренно сжатых элементов при длительном действии нагрузки. Строительные конструкции / И.И.Улицкий, И.В.Руденко. – К.: Будивельник, 1965. – Вып. I.

122. Ф.А. Иссерс. Регулирование усилий в статически неопределимых изгибаемых конструкциях / Ф.А.Иссерс, Л.Л.Лемыш, Д.М.Лаковский, В.М.Эренбург // Бетон и железобетон. – № 6. – 1995. – С. 25-28.

123. Цейтлин С.Ю. Об общей закономерности деформирования железобетона при изгибе / С.Ю.Цейтлин // Межотраслевые вопросы строительства. Отечественный опыт. ЦИНИС, 1969. - № 7. – С.10-15.

124. Чайка В.П. Конструкционные механические характеристики бетона / В.П.Чайка // Бетон и железобетон. - 1992. - №10. - С. 10-12.

125. Чайка В.П. Характеристика диаграмм неоднородного сжатия бетона / В.П.Чайка // Бетон и железобетон. - 1994. - №1. - С. 17-19.

126. Чинь Ким Дам. Влияние длительной нагрузки высокого уровня на деформативность и несущую способность железобетонных балок: Дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01 «Строительные конструкции, здания и сооружения» / Чинь Ким Дам – Одесса, 1985

127. Чобан Г.С. Расчет и конструирование железобетонных неразрезных балок на основе экспериментально-теоретических зависимостей между внутренними усилиями и жесткостью сечений: автореф. дисс. на соискание науч. степени канд. техн. наук: спец. 05.23.01 «Строительные конструкции, здания и сооружения» / Г.С.Чобан. - Одесса, 1988. – 16 с.

128. Шатохин В.И. Изгиб и внецентренное сжатие железобетонного стержня с двойной арматурой / В.И.Шатохин // Известия вузов: Строительство и архитектура. – 1966. – № 5. – С. 3-11.

129. Шатохин В.И. Исследование на универсальном стенде простых и неразрезных железобетонных балок / В.И.Шатохин, В.А.Зедгенидзе // Экспериментальные исследования инженерных сооружений: Тезисы докладов по II симпозиуму. – 1966. – С. 75-80.

130. Шматков С.Б. О нелинейной расчетной модели системы «Фундаментная плита - основание» / С.Б.Шматков, С.Г.Крейлис // «Основания фундаменты и механика грунтов». - 1989. - №1. - с 27-28.

131. Шмуклер В.С. Учет полной диаграммы « $\sigma_b - \varepsilon_b$ » в алгоритме расчета железобетонных элементов / В.С.Шмуклер, И.Я.Лучковский // Будівельні конструкції: Відомчий науково-технічний збірник. – К.: НДІБК, 2003. – № 59. – С. 143-150.

132. Щелкунов В.Г. Напряженно-деформированное состояние сжатого бетона и железобетона / В.Г.Щелкунов. – Киев-Одесса: Вища школа. Головное изд-во, 1983. – 156 с.

133. Яременко А.Ф. Зависимости между кривизнами и усилиями для элементов железобетонных плит с наклонными трещинами и их экспериментальное обоснование / А.Ф.Яременко, С.Н.Титов // Строительные конструкции. – К.: Будивельник, 1985. – № 38, – С. 56-60.

134. Яременко А.Ф. Напряженно-деформированное состояние неразрезных железобетонных балок / А.Ф.Яременко, А.В.Ковров // Автомобільні дороги і дорожнє будівництво: Науково-технічний збірник. – К., 2004. – № 71. – С. 198-205.

135. Яременко А.Ф. Напряженно-деформированное состояние неразрезных железобетонных балок / А.Ф.Яременко, А.В.Ковров // Автомобільні дороги і дорожнє будівництво: Науково-технічний збірник. – К., 2004. – № 71. – С. 198-205.

136. Яременко А.Ф. О практическом способе определения жесткости железобетонных балок / А.Ф.Яременко, А.В.Ковров, Т.А.Синюкина // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури – Одеса: ОДАБА, 2005. – №20, – С. 389-394.

137. Яременко А.Ф. О практическом способе определения жесткости железобетонных балок / А.Ф. Яременко, А.В. Ковров, Т.А. Синюкина // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури – Одеса: ОДАБА, 2005. – № №20, – С. 389-394.

138. Яременко А.Ф. Расчет неразрезных балок с помощью метода граничных элементов в системе MATLAB / А.Ф.Яременко, В.Ф.Оробей, А.В.Ковров, Ю.А.Ковров // Бетон и железобетон в Украине: Научно-технический и производственный журнал. – № 3. – 2005. – С.6-9.

139. Ярин Л.И. Методы расчета железобетонных конструкций переменной жесткости вследствие трещинообразования: автореф. дис. ... д-ра. техн. наук: 05.23.01 / Л.И.Ярин М., 1989. – 45 с.

140. BS EN 1992, Eurocode 2: Design of concrete structures. Part 1: General rules and rules for buildings. December 2004.

141. Ernst G.G., Smith G.M., Riveland A.R. und Pierce D. N. Basic reinforced concrete frame performance under vertical and lateral loads. ACI Journal 70 (1973).- No. 4.- S. 261 – 269.

142. Foster S., Marti P., Mojsilovic N. Desing of Reinforced Concrete Solids Using Stress Analysis // ACI Structural Journal. – 2003. - Vol. 100, No. 6.- P.758-764.

143. Glanville W.H., Tomas F.J. The redistribution of moments in reinforced concrete beams and frames. Institution of Civil Engineers, London, 1936.

144. Goszczyński S., Włodarczyk M. Intensywność procesu zarysowania belek żelbetonowych w funkcji momentu zginającego // Pięćdziesiąta pierwsza konferencja naukowa Komitetu inżynierii lądowej i wodnej PAN i Komitetu nauki PZITB. – Gdańsk-Krynica, 2005. – s.65-72.

145. Jasiński R., Ortega H., Piekarczyk A., Starosolski W. Zbrojenie belek stalą o dużej i małej ciągliwości – badania porównawcze // Pięćdziesiąta pierwsza konferencja naukowa Komitetu inżynierii lądowej i wodnej PAN i Komitetu nauki PZITB. – Gdańsk-Krynica, 2005. – s.73-80.

146. Malesza J., Łapko A. Wpływ sztywności przekrojów przywęzłowych na stan naprężeń w węslach ram monolitycznych. // Pięćdziesiąta druga konferencja naukowa Komitetu inżynierii lądowej i wodnej PAN i Komitetu nauki PZITB. – Gdańsk-Krynica, 2006.