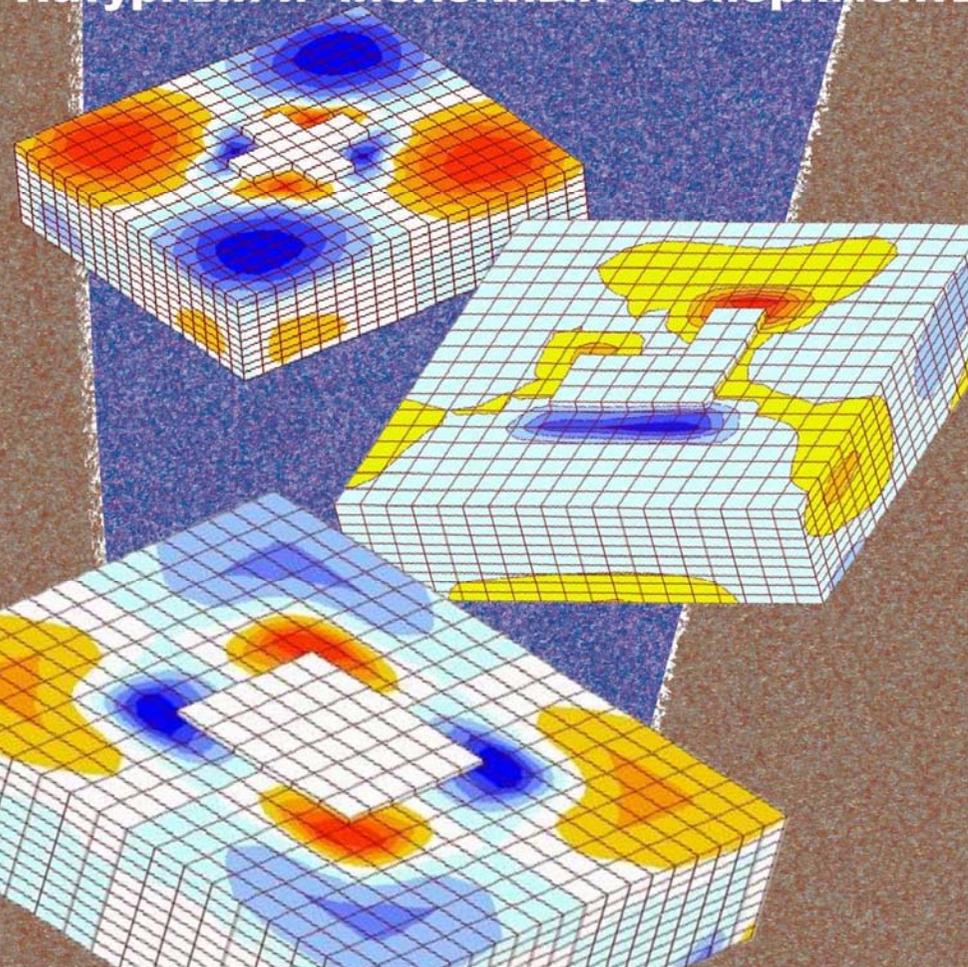


С.Ф. Клованич
В.И. Шеховцов

**Продавливание железобетонных плит
штампами различной геометрии.
Натурный и численный эксперименты**



Клованич С. Ф., Шеховцов В. И.

**ПРОДАВЛИВАНИЕ
ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПЛИТ.
НАТУРНЫЙ И ЧИСЛЕННЫЙ
ЭКСПЕРИМЕНТЫ**

ОДЕССА – 2011

ББК 38.53
УДК 624.04:624.073.4:539.3

Клованич С. Ф., Шеховцов В. И. Продавливание железобетонных плит
Натурный и численный эксперименты. –Одесса: ОНМУ, 2011. - 119 с.

Исследуется влияние формы штампа на работу железобетонных плит при продавливании. Рассматриваются штампы прямоугольные, угловые крестообразные. Проведена серия штамповых испытаний, позволивших установить реальные предельные нагрузки на штамп, формы поверхностей разрушения, построить графики развитие перемещений штампа. Для теоретической оценки используется метод конечных элементов в физически нелинейной постановке с использованием определяющих соотношений для железобетона, предложенных Н.И.Карпенко. Разработаны соответствующие алгоритмы и программы. Проведена серия расчетов экспериментальных образцов. Результаты расчетов неплохо согласуются с опытными данными.

Для преподавателей, аспирантов и студентов вузов строительных и гидротехнических специальностей, а также для специалистов в области расчета и проектирования железобетонных конструкций.

Рецензенты: А.Ф.Яременко - д.т.н., проф., зав.кафедрой строительной механики Одесской государственной академии строительства и архитектуры
В.В.Стоянов - д.т.н., проф., зав.кафедрой металлических, деревянных и пластмассовых конструкций Одесской государственной академии строительства и архитектуры

ISBN 966-7716-64-3

© С.Ф.Клованич
В.И.Шеховцов

ПРЕДИСЛОВИЕ

В современном строительстве получили распространение монолитные железобетонные здания с безригельным, безкапитальным каркасом, когда плоские плиты перекрытий постоянной толщины опираются непосредственно на колонны. По сравнению с ригельным каркасом, достигается существенная экономия материалов, снижение трудозатрат опалубочных и отделочных работ, увеличение полезной высоты помещений, архитектурная выразительность и т.д. Однако при такой конструктивной схеме на плиты в узлах сопряжения их с колоннами передается большая сосредоточенная нагрузка и существенно возрастает вероятность хрупкого разрушения этих плит от продавливания. Существующие нормативные документы, регламентируя необходимость обеспечения прочности этих узлов, тем не менее, сводят все расчетные зависимости к простым полуэмпирическим формулам, полученным на основе гипотезы о разрушении плит по некоторым предельным поверхностям с прямолинейной образующей и заданным углом наклона этой образующей к срединной плоскости плиты, так называемом, "конусе" или "пирамиде продавливания". В то же время, в большинстве экспериментальных исследований последних лет на колоннах круглого и прямоугольного поперечного сечения ставится под сомнение обоснованность этой гипотезы. Реальная форма поверхности разрушения плиты под колонной (штампом) имеет значительно более сложный вид, формируясь и видоизменяясь в процессе нагружения, зависит от вида бетона и арматуры, их прочностных и деформативных свойств, геометрии плиты, условий нагружения, граничных условий и т.д. Для колонн с поперечными сечениями более сложных форм, например, Г-образных, крестообразных, тавровых и т.д., экспериментальные исследования вообще не проводились и оценить степень обоснованности используемой гипотезы тем более не представляется возможным.

В данной работе описываются теоретические и экспериментальные исследования узла сопряжения железобетонных плит с колоннами различного поперечного сечения.

В первой главе проведен анализ отечественных и зарубежных литературных источников, касающихся вопросов продавливания железобетонных плитных конструкций и численных расчетов в нелинейной постановке по МКЭ.

Во второй главе приведены результаты экспериментальных исследований, целью которых было определение влияния формы штампа на работу плит при продавливании. В ходе эксперимента изучается форма

разрушения и углы наклона фигуры продавливания. Приводятся расчеты по методике [82], дается их сравнение с экспериментальными данными..

Третья глава посвящена модели железобетона Н.И. Карпенко. Приведено описание построения поверхности прочности бетона при сложном напряженном состоянии и даны основные физические соотношения для железобетона без трещин и с трещинами. Также приведены алгоритмы и блок-схемы, дающие возможность применить эту модель в программных комплексах для изучения продавливания железобетонных плит.

В четвертой главе описаны основные положения метода конечных элементов, определяющие уравнения МКЭ, наиболее распространенные шагово-итерационных процедуры. Даны алгоритмы реализации в конечно-элементном программном комплексе. Также приводится описание объемных конечных элементов из библиотеки программного комплекса.

Пятая глава посвящена численному исследованию напряженно-деформированного состояния железобетонных плит при продавливании штампами различной конфигурации. Сначала решаются тестовые задачи для штампов прямоугольных форм, расчетные значения сопоставляются с экспериментальными данными, полученными из независимых литературных источников. Результаты сопоставления позволяют сделать вывод о том, что с помощью предлагаемой конечноэлементной методики можно достаточно достоверно прогнозировать работу железобетонных плит при продавливании. Далее, в той же главе, приводятся результаты численного исследования образцов ранее испытанных плит для штампов различной конфигурации; прямоугольных, крестообразных, уголкового. Сравнение расчетных данных с опытными подтверждает надежность предлагаемой расчетной методики и пригодности ее для проведения практических расчетов прочности и деформативности железобетонных плит при продавливании штампами различной конфигурации, в частности для расчетов узлов сопряжения плит с колоннами с различной геометрией поперечных сечений. Приводится расчет узла сопряжения монолитной плиты с колонной здания.

ГЛАВА 1 ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЧНОСТИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПЛИТ ПРИ ПРОДАВЛИВАНИИ

1.1. Экспериментальные основы. Метод предельного равновесия.

Вопросы моделирования продавливания железобетонных плит по мере развития строительного производства и новых тенденций в архитектуре приобретают с каждым годом все большую значимость [24,39,40,42,79,85].

Исследования продавливания железобетонных плит имеют почти столетнюю историю. Это работы А.П. Васильева [15-18], Elstner R.C., Hognestad E. [107,108], Forsell C., Holmberg A. [111], Graf O. [100,113,114], Kinnunen, Nylander [117,118], Talbot A.N. [128], Richart F. [126,127], Yitzhaki [131] и др. Экспериментальные результаты перечисленных авторов позволили выявить влияние таких факторов, как прочность бетона, наличие или отсутствие изгибающих моментов, геометрия плит и площадок передачи нагрузок, расстояние от опор до штампа, типа и концентрации армирования, нагельного эффекта в арматуре, формы поверхности пирамиды продавливания, последовательность и характер трещинообразования и т.д. Исследования большинства авторов были направлены на получение полумпирических зависимостей для продавливающего усилия в бетоне с учетом перечисленных выше факторов. В основу же была положена методика расчета по предельным состояниям.

Так, Whitney C.S. [130] еще в 1957 году предложил, что прочность при продавливании является функцией предельного момента сопротивления M_u

$$\frac{P_{np}}{4h_0 \cdot (h_0 + a)} < 100 \text{ psi} + 0.75 \cdot \frac{M_u}{h_0^2} \cdot \sqrt{\frac{h_0}{l_s}}, \quad (1.1)$$

где P_{np} – продавливающая нагрузка;
 h_0 – рабочая высота плиты;
 a – размер сечения квадратной колонны (штампа);
 M_u – максимальный изгибающий момент;
 l_s – ширина нижнего тела пирамиды продавливания, боковые стороны которой наклонены под углом 45° .

Это направление получило развитие в работе Мое J. [123]. На основании проведенных им испытаний опертых по контуру плит была предложена зависимость

$$\frac{P_{np}}{Sh_0} < \left[15 \cdot \left(1 - 0.075 \frac{a}{h_0} \right) - 5.25 \varphi_0 \right] \cdot \sqrt{f'_c}, \quad (1.2)$$

где S – периметр штампа, который принимается за расчетное критическое сечение;

φ_0 – коэффициент, равный отношению разрушающих нагрузок при продавливании и изгибе;

f_c' – цилиндрическая прочность бетона на сжатие;

P_{np} , h_0 , a – те же, что и в формуле (1.1).

В дальнейшем Мое J. [123] констатировал, что прочность при продавливании напрямую зависит от прочности бетона на растяжение при скалывании, которая принимается пропорциональной $\sqrt{f_c'}$. На рис. 1.1 показана взаимосвязь между перерезывающей (продавливающей) силой V_n и изгибающим моментом V_{flex} [123]. Критическое сечение при определении несущей способности принимается по периметру грузовой площади.

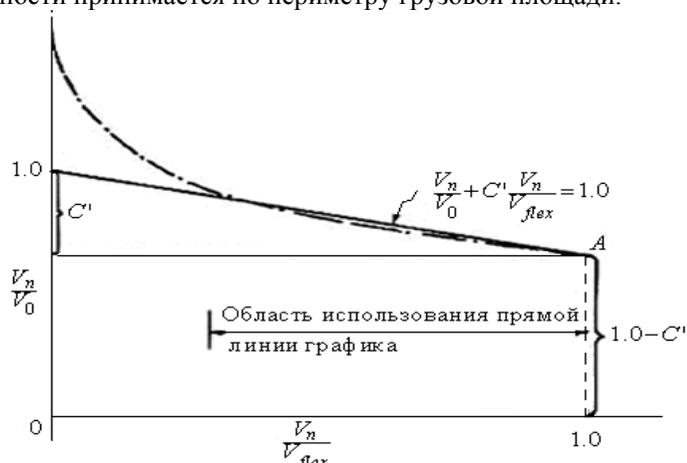


Рис. 1.1. Взаимосвязь между перерезывающей силой и изгибающим моментом.

Обобщив данные перечисленных исследований Американский институт бетона (ACI-ASCE Committee 326) [125] рекомендовал формулу

$$\frac{P_{np}}{4a + h_0} < 4\varphi \cdot \sqrt{f_c'} \quad (1.3)$$

где P , h_0 , a – те же, что и в формуле (1.1).

φ – эмпирический коэффициент;

f_c' – цилиндрическая прочность бетона на сжатие.

При этом принималось, что критическое сечение находится на расстоянии $h_0/2$ от продавливающего штампа (колонны).

В отечественном нормативном документе [83] для определения несущей способности при продавливании была принята предложенная проф. А.А.Гвоздевым зависимость

$$F_{np} < kR_{bt}b_{cp}h_0 \quad (1.4)$$

где P_{np} , h_0 – те же, что и в формуле (1.1).

R_{bt} – расчетное сопротивление бетона растяжению;

b_{cp} – среднее арифметическое величин периметров верхнего и нижнего оснований пирамиды продавливания в пределах рабочей высоты сечения;

$k = 0,75$ – коэффициент, принятый по результатам зарубежных экспериментальных исследований.

Меньшим основанием пирамиды продавливания служит площадь действия нагрузки, а боковые грани наклонены под углом 45° к горизонтали.

В последующие годы усилия советских исследователей были направлены, в основном, на совершенствование и уточнение параметров формулы (1.4). Предприняты попытки учесть такие факторы, как силы зацепления берегов трещин, диаметр и шаг продольной арматуры, наличие поперечной арматуры, нагельный эффект в арматуре в трещине, мембранный эффект сетки продольной арматуры, стесненные и нестесненные условия продавливания, конструктивные особенности сопряжений элементов и др.

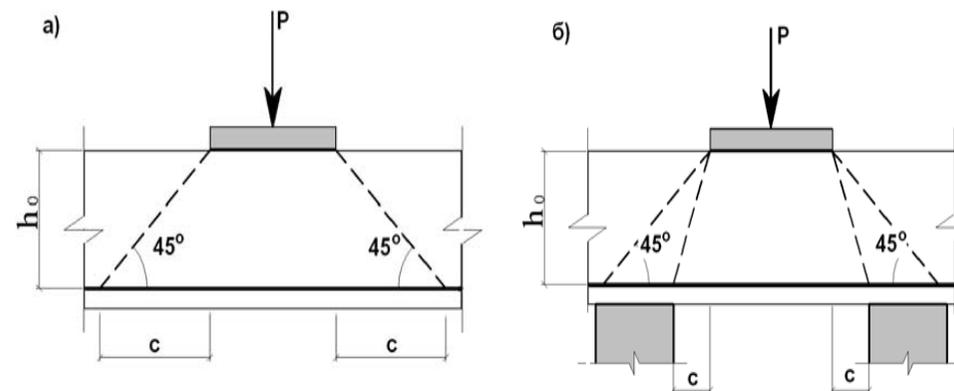


Рис. 1.2 Типы продавливания: а) свободное; б) стесненное.

Определению этих уточняющих факторов посвящены многочисленные работы, выполненных под руководством А.А. Гвоздева [21,22,8], А.С. Залесова [39-42], Н.Н.Коровина [60-63], а также работы К.Е. Ермуханова [38], Мухамедиева Т.А. [74], С.Г. Качановского [54], И.В.Шеховцова [91] и др

[4,24,55,66]. Эти уточнения вводились в практические расчеты и требования, заложенные в нормативных документах [82].

Следует отметить, что большинство авторов рассматривали разрушение от продавливания по замкнутой наклонной поверхности: наклонная трещина в растянутой зоне бетона переходила в сжатую зону, но под другим углом. Кроме этого, рассматривались случаи, так называемых, свободного продавливания и продавливания в стесненных условиях и (рис. 1.2).

В 2003 году А.С. Залесов и А. Иванов [45,46] предложили при расчетах

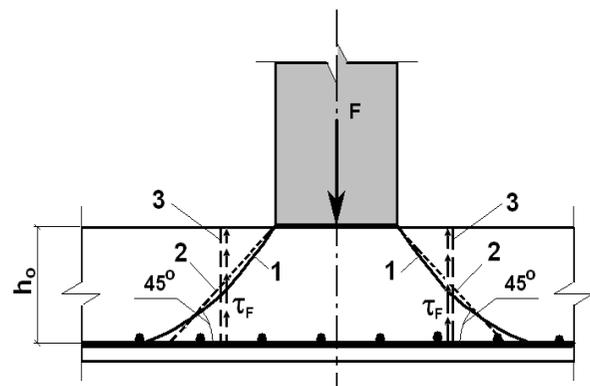


Рис. 1.3 Формы разрушения [45, 46]: 1 – фактическая поверхность разрушения; 2 – теоретическая поверхность разрушения; 3 – расчетное вертикальное сечение.

узлов сопряжения колон с плитами перекрытия форму разрушения, представленную на рис. 1.3. В качестве расчетной модели авторы предложили заменить наклонную поверхность пирамиды разрушения на условное вертикальное сечение, проходящее в середине наклонной поверхности, с высотой, равной рабочей высоте поперечного сечения. Похожая модель механизма продавливания лежит в основе нормативного документа по железобетонным конструкциям Российской Федерации [84] и сопутствующих документов [40].

1.2. Аналитические и численные исследования.

В целом ряде работ на основе экспериментальных данных и анализа поведения конкретных конструкций авторы предлагали свои аналитические модели по определению несущей способности плитных конструкций при продавливании.

Так Kinnunen S. и Nylander H. [118] предложили модель продавливания круглых плит с кольцевым и радиальным армированием колоннами круглого поперечного сечения, основанную на результатах статических испытаний.

Позже она была дополнена [117] и для круглых плит с ортогональным армированием в растянутой зоне. Согласно этой модели, зона за наклонной трещиной делилась на сектора, которые ограничивались наклонной трещиной, радиальными трещинами и периметром плиты. Вводилось понятие конического вкладыша, поддерживающего все сектора (рис. 1.4). Уравнения равновесия позволили авторам сформулировать итерационные процедуры для определения предельной нагрузки.

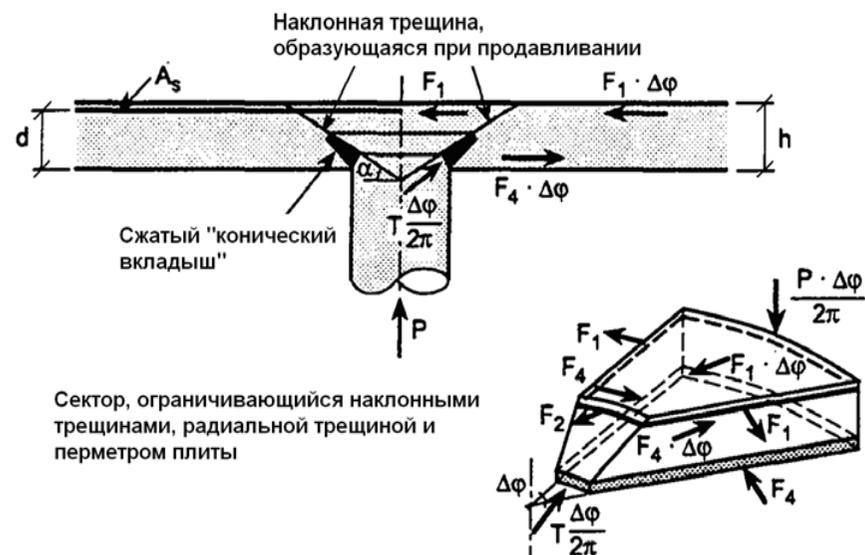


Рис. 1.4 Модель продавливания [118].

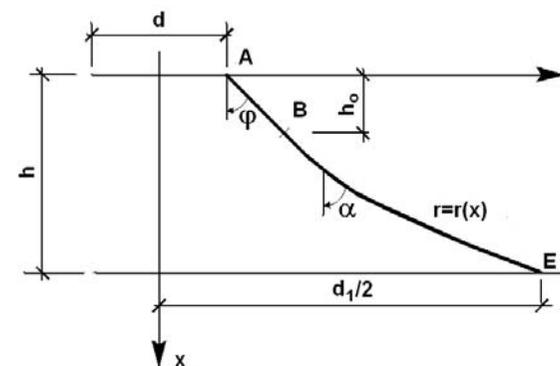


Рис. 1.5 Предполагаемая форма разрушения по [101].

В дальнейшем Hawkins N.M. и другие исследователи [115,116] пришли к выводу, что целесообразно располагать растянутую арматуру над колонной, что сдерживает развитие пластических деформаций в продольной арматуре и уменьшает ширину раскрытия трещин при одних и тех же условиях загрузки.

В середине 70-х годов Brastrup M.W. и др. [101] предложили модель продавливания для осесимметричной плиты, опертой на круглое кольцо с диаметром D , где бетон считался идеально пластическим материалом.

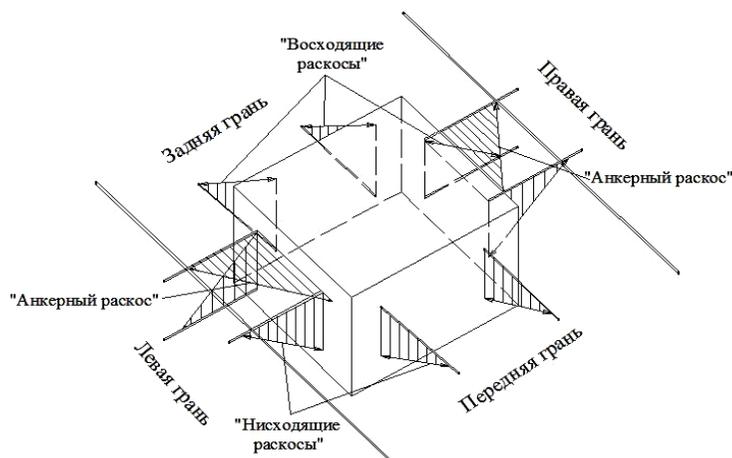


Рис. 1.6. Рамная (ферменная) модель [97].

На рис. 1.5 показана форма разрушения согласно этой модели. Здесь d – диаметр штампа; d_1 – диаметр распространения радиальной трещины на нижней поверхности плиты; кривая А-В-Е представляет собой наклонную трещину, возникающую при продавливании. Предельную нагрузку авторы получили на основе равенства возможных работ внешних и внутренних сил.

Alexander S.D.B. и Simmonds S.H. [97] предложили рамную модель механизма продавливания в узле сопряжения колонны с плитой. Модель условно представляет арматуру и тело бетона в виде своеобразной фермы (рамы) (рис. 1.6). Верхние арматурные стержни представляют собой горизонтальные пояса, а бетон от нижней грани плиты до верхнего армирования работают как наклонные стойки (раскосы). Согласно рис. 1.6 бетонные нисходящие «раскосы» препятствуют перемещению вниз, в то время как восходящие «раскосы» препятствуют перемещению вверх (к восходящим раскосам относят нижнюю арматуру и бетон от верха плиты до нижней арматуры).

В дальнейшем Alexander S.D.B. и Simmonds S.H. [98], для описания работы узлов сопряжения безбалочных перекрытий с колоннами усовершенствовали эту модель. Если в первой модели срезу препятствуют условные прямолинейные «сжатые стойки», то в усовершенствованной модели усилия среза на колонну передаются по параболической сжатой дуге (рис. 1.7).

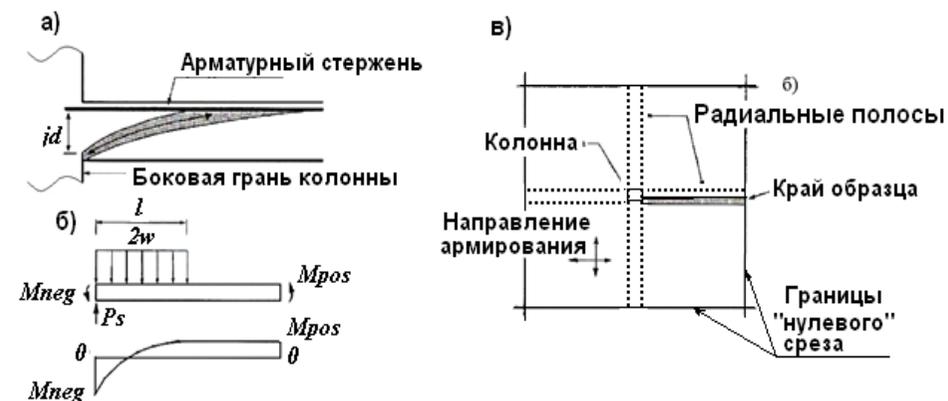


Рис.1.7 Разрушение по [98]: а) Модель разрушения; б) Расположение «радиальных полос»; в) Равновесие отдельной «радиальной полосы».

Предполагается, что нагрузки на плиту передаются четырьмя «радиальными полосами», пересекающими колонну (рис. 1.7б), которые могут быть представлены в виде консольных балок, показанных на рис.1.7в. Максимальная продавливающая сила определяется через изгибающую прочность полосы M_{neg} с учетом влияния усилий в арматуре, расположенной перпендикулярно этой полосе.

Dilger W.H. [105,106] и Dechka D.C. [104] предложили расчетную модель продавливания плит как без, так и с учетом поперечного армирования (рис. 1.8). При этом учитывались силы трения по площадкам с трещинами. Поверхность разрушения, узла сопряжения безбалочной безкапитальной плиты перекрытия с колонной, насчитывает восемь граней, прочность определяется суммированием предельных величин касательных напряжений по каждой из этих граней

$$\tau = k\sqrt{(\sigma + f_t) \cdot f_c}, \quad (1.5)$$

где σ нормальные напряжения по граням;

k - коэффициент трения, полученный из экспериментов;

f_c' - цилиндрическая прочность бетона на сжатие;
 f_t - цилиндрическая прочность бетона на растяжение;

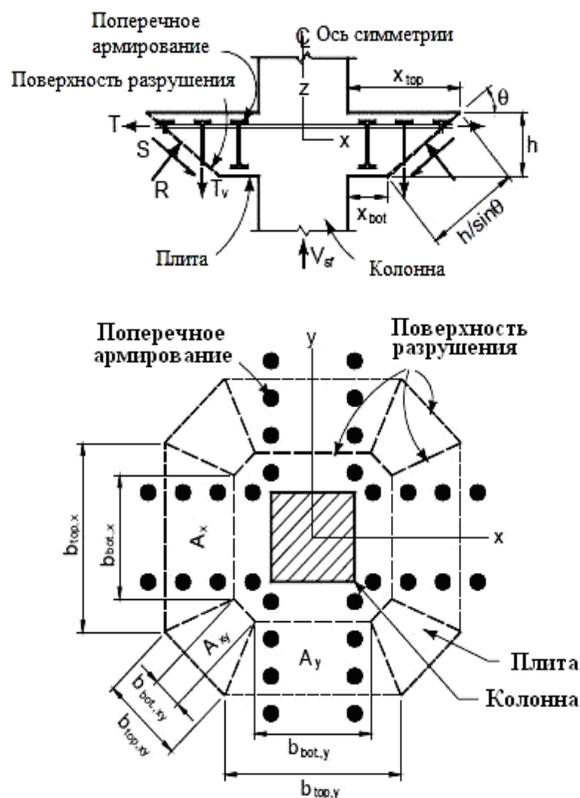


Рис. 1.8 Расчетная схема к модели [104]-[106].

На основании рассмотренных моделей, описывающих процессы и характер деформирования плит при продавливании, в различных странах были разработаны нормативные документы с различными методиками определения продавливающей силы. В Приложении 1 приводится краткое описание этих методик.

Таким образом, в результате обзора установлено, что существующие нормативные методики расчета железобетонных плит на продавливание, основаны на методе предельного равновесия и используют гипотезу о существовании заранее заданной поверхности разрушения. Однако, несмотря на то, что в экспериментальных исследованиях разрушение при продавливании действительно происходит по некоторым поверхностям, во многих случаях форма и местоположение поверхностей существенно

отличаются от заданных заранее. Более того, имеющиеся экспериментальные данные и расчетные нормативные методики ориентированы только на случаи, когда штампы или площадки передачи нагрузки имеют простейшие геометрические формы – круглую или прямоугольную. Для штампов более сложной конфигурации – крестообразной, Г-образной, тавровой, треугольной и др. в имеющейся литературе данных нет. В этом случае форма предельной поверхности, по которой происходит разрушение образца, может быть достаточно сложной, с трудом поддаваясь аналитическому описанию и, вообще, гипотеза о существовании заранее заданной поверхности разрушения (пирамиды продавливания) подвергается вполне обоснованному сомнению

В последние десятилетия для анализа напряженно-деформированного состояния железобетонных плит в зоне продавливания активно используется метод конечных элементов (МКЭ). При этом применяются различные, включая нелинейные, модели материалов, различные типы конечных элементов для моделирования бетона, арматуры, железобетона.

Так Nilsson L. [124] с помощью МКЭ изучал поведение арматурных стержней в круглых железобетонных плитах. Бетон на начальных этапах нагружения принимался упругим изотропным материалом, а в процессе трещинообразования приобретал деформационную анизотропность. Армирование было представлено стержневыми элементами из упруго-вязкопластичного материала.

Loseth S. и др. [120] одними из первых показали, что конечно-элементные программы, разработанные для нелинейного анализа бетонных конструкций, могут быть использованы для расчета конструкций при продавливании.

Zimmermann Th. и Rodriguez C. [132] с использованием МКЭ в нелинейной постановке анализировали работу защитной оболочки реактора на нагрузку от столкновения с самолетом. Ударное воздействие стенки с носовой частью самолета приводило к разрушению от продавливания стенок реактора. Бетон представлялся изотропным материалом с осевым трещинообразованием и разрушением. Арматура же моделировалась физически нелинейным материалом на основе диаграммы Прандтля с упрочнением. Применялись трехмерные изопараметрические элементы как для бетона, так и для связевых элементов арматуры. Расчеты показали, что в арматурной стали возможны пластические деформации, а трещины в бетоне направлены под углом в 45° к оси элементов.

В работе Andra H.-P. [99] для расчета на продавливание использовался программный комплекс ADINA, в котором реализована физическая модель железобетона с трещинами. Результаты расчета сравнивались с экспериментальными данными. В целом расчетный процесс разрушения при продавливании совпадает с опытным.

De Borst R. и Nauta P. [103] изучали продавливание на примере плоской задачи. Авторы исследовали поведение балки стенки под действием штампа.

Использовались плоские изопараметрические конечные элементы для моделирования бетона и стержневые элементы для арматуры. Бетон и арматура представлялись физически нелинейным материалом. Полученные результаты были близки к экспериментальным. Расположение наклонных трещин, в целом, отвечало гипотезе о пирамиде продавливания (рис. 1.9).

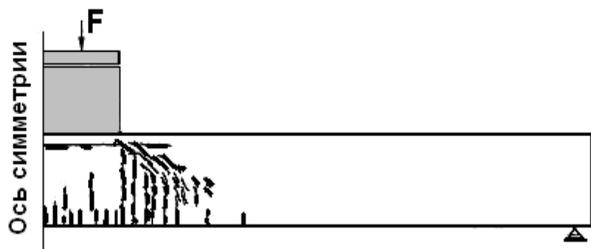


Рис.1.9 Трещины в осесимметричном образце в зоне продавливания[103].

Gonzalez-Vidoza F., Kotsovos M.D., Pavlovic M.N. [112] также изучали продавливание на примере расчета балок-стенок, с приложенной к ним сосредоточенной нагрузкой. Ими использовались плоские изопараметрические конечные элементы и определяющие соотношения для бетона, полученные на основе теории течения. Бетон и арматура работали совместно без проскальзывания. Арматура моделировалась стержневыми элементами. Численные исследования показали хорошую согласованность с экспериментальными значениями предельной нагрузки и перемещений. Однако, характер разрушения отличался от опытного.

Обзор численных исследований также не дает удовлетворительного ответа на вопрос о форме поверхности разрушения даже для штампов простейших форм, несмотря на то, что в целом для таких штампов нелинейные конечноэлементные расчеты адекватно описывают процесс разрушения. Траектории наклонных трещин не всегда совпадают с гипотетическими предельными поверхностями. По всей видимости это обстоятельство обусловлено тем, что используемые в существующих программах нелинейные модели деформирования и прочности железобетона как физически нелинейного, комплексного, анизотропного материала, обладающего способностью к трещинообразованию, не вполне достоверно описывают реальное его поведение в условиях сложного напряженного состояния. Численных исследования для штампов сложных форм, отличных от прямоугольной и круглой, в литературе не обнаружено.

ГЛАВА 2 ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЛИТ ПРИ ПРОДАВЛИВАНИИ ШТАМПАМИ РАЗЛИЧНОЙ ГЕОМЕТРИИ

2.1. Характеристика опытных образцов и методика проведения экспериментов.

Для проведения экспериментальных исследований на продавливание были изготовлены квадратные образцы плоских железобетонных плит. Количество образцов – 6: три серии по два образца в каждой. Конструкция образцов и штампов представлена на рис.2.1 и таблице 2.1.

Таблица 2.1

Характеристика опытных образцов

№ п/п	Наименование	Геометрические размеры lxbxh, мм	Форма штампа в плане (рис.2.2)	Кол-во образцов (шт)
1	ПЛ*Кв	940x940x200	Квадратная	2
2	ПЛ*У	940x940x200	Г-образная	2
3	ПЛ*К	940x940x200	Крестообразная	2

* - обозначены номера плит в серии (1,2).

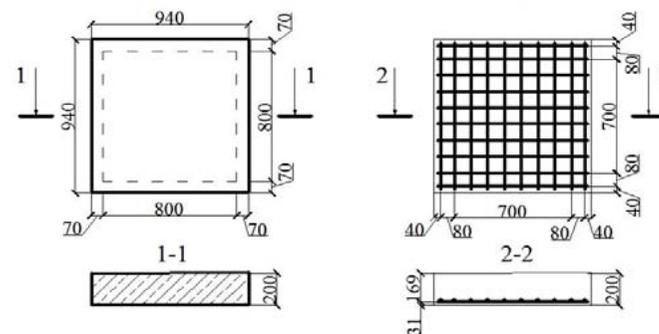


Рис. 2.1 Геометрические размеры и армирование образцов.

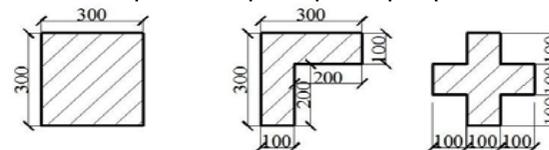


Рис. 2.2 Размеры штампов передачи нагрузки.

Толщина образцов 200 мм. Опираие - шарнирное по контуру. Расстояние в осях между цилиндрическими опорами составляло 800 мм.

Диаметр арматурной стали и шаг стержней были заданы таким образом, чтобы разрушение образца происходило в результате продавливания, а не изгиба. Армирование осуществлялось сетками из стержней $\varnothing 12$ мм А500С с шагом 100 мм на расстоянии 31 мм от нижней поверхности

Штампы изготавливались из стальной пластины толщиной 200 мм. Формы и размеры штампов приведены на рис.2.2 и в табл. 2.3.

Таблица 2.3

Прочностные и деформативные характеристики бетонов

№ п/п	Марка образца	R, МПа	R _b , МПа	R _{bt} , МПа	E _b , МПа	Коэффициент Пуассона
1	ПЛ1Кв	24,5	21,6	1,96	25217	0,17
2	ПЛ2Кв	24,6	21,8	1,97	24365	0,16
3	ПЛ1У	31,1	26,8	2,3	31870	0,17
4	ПЛ2У	33,3	27,0	2,4	32220	0,17
5	ПЛ1К	24,0	21,1	1,9	25455	0,17
6	ПЛ2К	38,8	33,6	2,16	33790	0,15

Образцы изготавливались из тяжелого бетона. Непосредственно перед экспериментом осуществлялись испытания кубов и призм из того же бетона. Результаты испытаний прочностных и деформативных характеристик бетона приведены в таблице 2.3.

Таблица 2.2

Геометрические характеристики штампов

№ п/п	Вид штампа передачи концентрированной нагрузки	Периметр штампа, P (см)	Площадь штампа, S (см ²)	Координаты центра тяжести в пределах границ (30x30см)
1	Квадратный	120	900	X _c =15см, Y _c =15см
2	Г-образный	120	500	X _c =11см, Y _c =19см
3	Крестообразный	120	500	X _c =15см, Y _c =15см



Рис. 2.3 Схема установки для испытания плит на продавливание.

Нагрузка на плиты передавалась через металлические штампы (см. рис.2.2) в геометрическом центре плиты. Для опирания образцов плит по контуру была использована металлическая прямоугольная распределительная рама из прокатного двутавра № 30. Рама устанавливалась на четыре распределительные балки, которые опирались на передвижной опорный стол гидравлической испытательной машины ИПС – 1000. Установка рамы на распределительных балках дает возможность вести наблюдение в процессе испытания за нижней поверхностью образцов. По контуру распределительной рамы устанавливались шарнирные опоры-катки, выполненные из круглой горячекатаной стали $\varnothing 20$ мм. На рис. 2.3-2.5 показана схема испытания, распределительная рама с установленным образцом и общий вид установки с плитой готовой к испытанию. Боковые грани маркировались буквами А,В,С,Д. Плита, подготовленная к испытаниям, устанавливалась на распределительные металлические пластины шириной 100 мм и толщиной 10 мм. Пластины устанавливались для исключения местного смятия бетона катками опор. Затем образец устанавливался на катки-опоры распределительной рамы. Между плитой и штампом насыпался песок толщиной до 3 мм.



Рис.2.4 Распределительная рама с установленным образцом.



Рис.2.5 Плита, подготовленная к испытанию в установке ИПС-1000.

На нижнюю поверхность опытного образца устанавливались индикаторы часового типа с ценой деления 0,01 мм, один – по геометрическому центру плиты, два других – по краям продавливающего штампа (см. рис.2.6 а,б). Подготовка к испытаниям, их проведение и обработка полученных результатов проводились в соответствии с ДСТУ Б В.2.5.-7-95 [35].

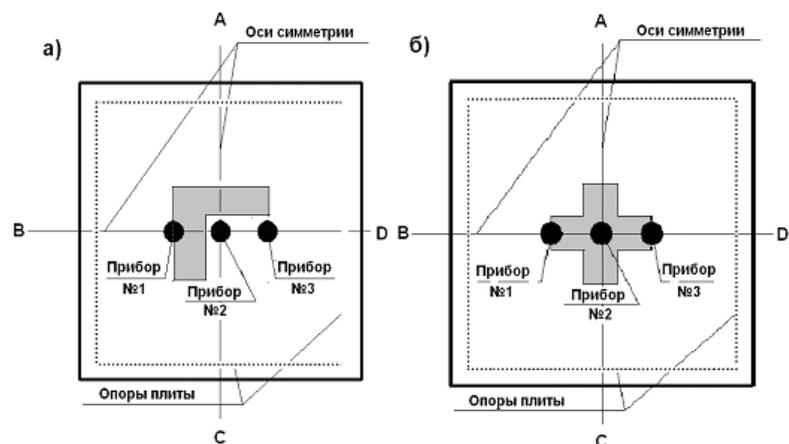


Рис.2.6 Схемы расположения приборов.

Перед началом испытаний производилась пригрузка образца до величины 0,2 от ожидаемой разрушающей нагрузки.

Загружение опытных образцов плит производилось ступенями до разрушения. Величина ступени составляла 0,1 от ожидаемой разрушающей. Разрушение сопровождалось значительным перемещением продавливающего штампа относительно верхней поверхности. На каждой ступени производилась выдержка. Она составляла 5 минут на начальных ступенях до появления первой трещины, и 10 минут на последующих ступенях. В начале и в конце выдержки производилась запись показаний приборов. Во время выдержки производился визуальный осмотр испытуемого образца, фиксировались трещины на боковой и нижней поверхностям плиты, измерялась ширина их раскрытия.

После разрушения плиты пирамиды продавливания отделялись от образца, производилось их измерение и фотографирование, уточнялась величина защитного слоя бетона, рабочая высота сечения и положение арматуры в местах разрушения.

2.2. Результаты экспериментальных исследований железобетонных плит на продавливание.

2.2.1. Квадратный штамп (плиты ПЛ1Кв, ПЛ2Кв).

Общий вид образца с квадратным штампом перед испытанием показан на рис. 2.7.

Загружение плиты ПЛ1Кв производилось ступенями по 40 кН. Разрушающая нагрузка равна 776 кН. Максимальные вертикальные перемещения составили: 3,08 мм (прибор №1); 3,43 мм (прибор №2); 3,02 мм (прибор №3).

Загружение плиты ПЛ2Кв также производилось ступенями по 40 кН. Разрушающая нагрузка равна 760 кН. Максимальные вертикальные перемещения составили: 3,26 мм (прибор №1); 3,69 мм (прибор №2); 3,43 мм (прибор №3).

Процесс образования трещин образцов ПЛ1Кв и ПЛ2Кв на различных этапах нагружения по граням показан на рис. 2.9-2.10.

На рис.2.8 представлена схема образования трещин на верхней поверхности плиты после разрушения.



Рис.2.7 Плиты со штампом квадратной формы.

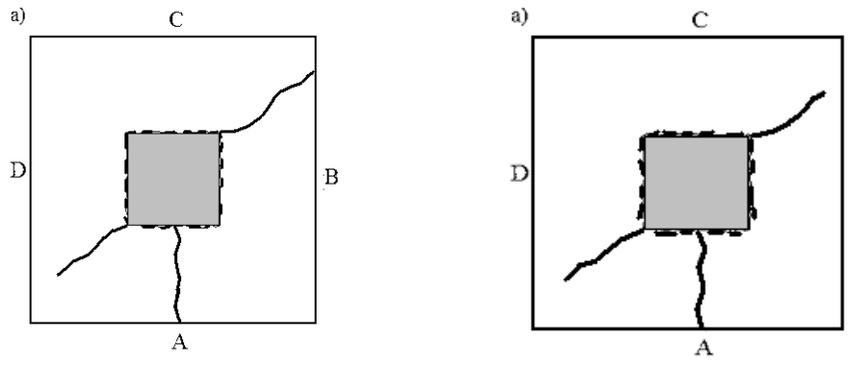


Рис.2.8 Трещины на верхней грани при разрушении а) – образец ПЛ1Кв; б) – образец ПЛ2Кв.

На рис.2.11-2.12 представлены графики прогибов опытных образцов плит ПЛ1Кв и ПЛ2Кв в зависимости от нагрузки, построенные по показаниям трех прогибомеров (рис.2.6а).

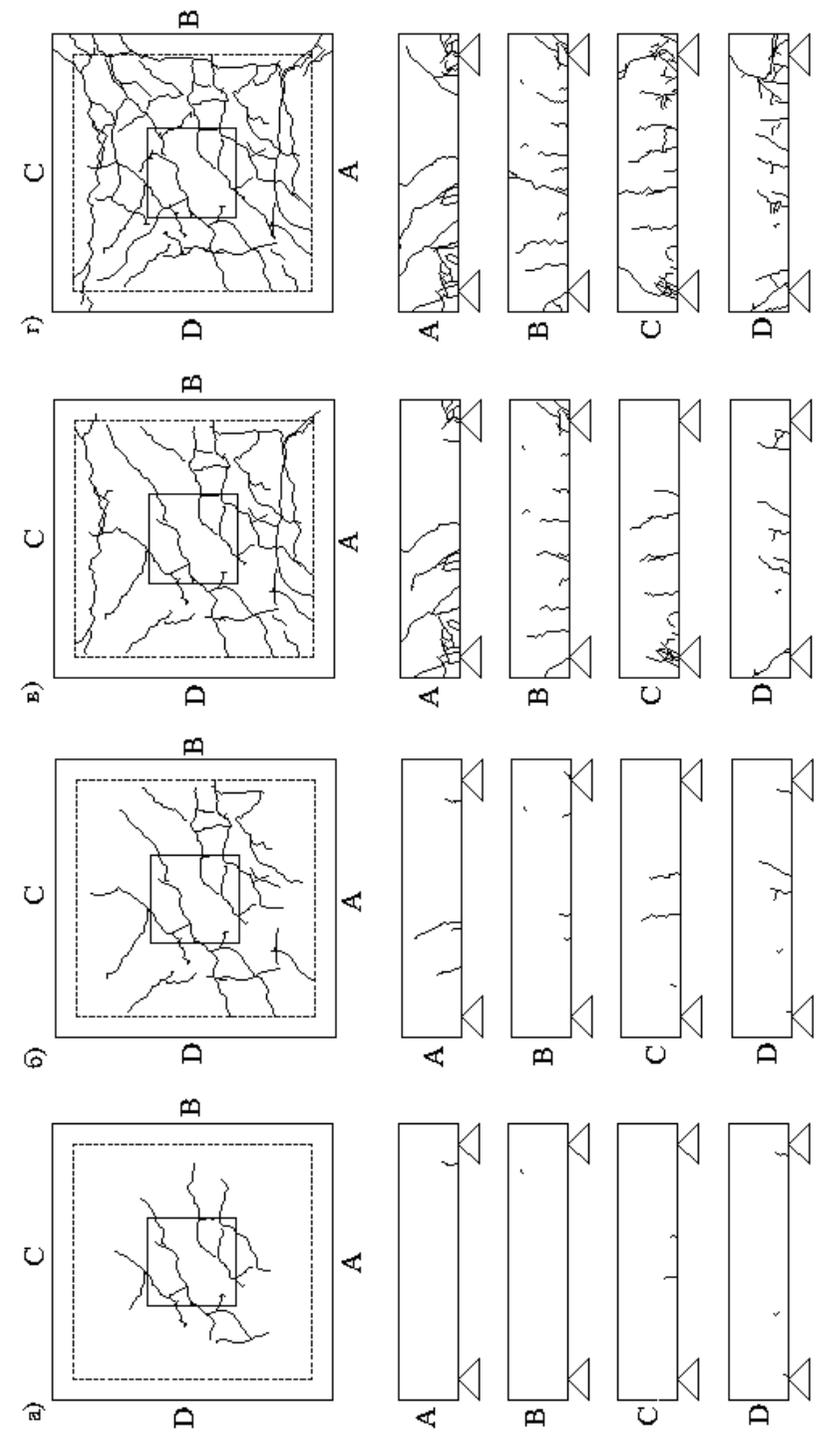


Рис.2.9 Схема развития трещин. Плита ПЛ1Кв: а) – при нагрузке 0,4 от разрушающей; б) – при нагрузке 0,6 от разрушающей; в) – при нагрузке 0,8 от разрушающей; г) – при нагрузке 0,95 от разрушающей.

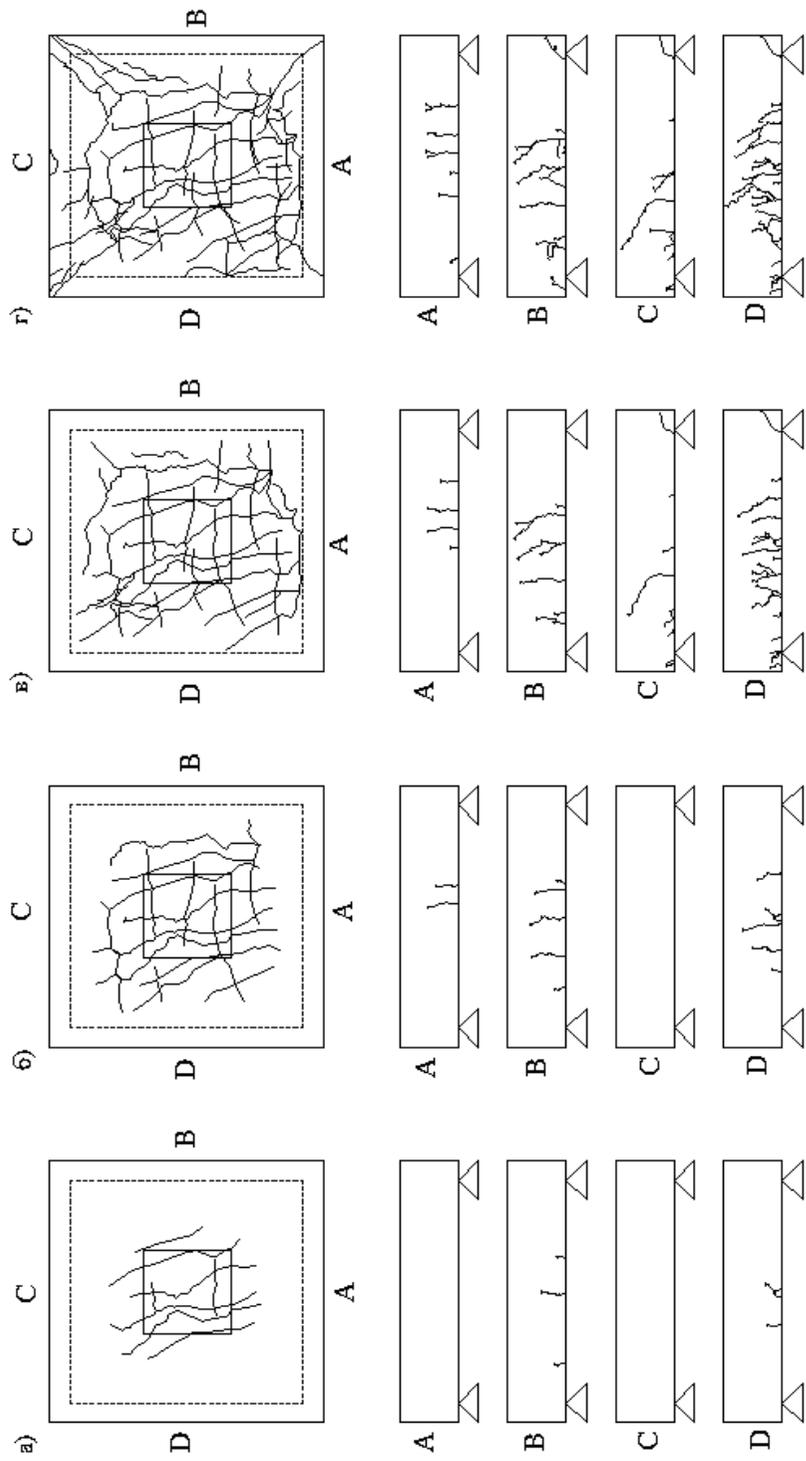


Рис.2.10 Схема развития трещин. Плита ПЛ2К6:
 – при нагрузке 0,4 от разрушающей; б) – при нагрузке 0,6 от разрушающей; в) – при нагрузке 0,8 от разрушающей.

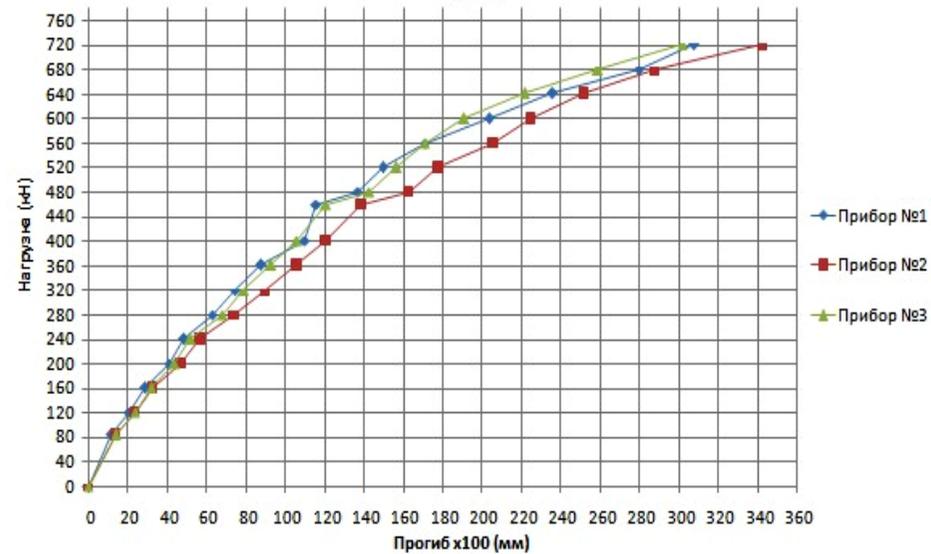


Рис.2.11 Вертикальные перемещения образца ПЛ2К6 по ступеням нагружения.

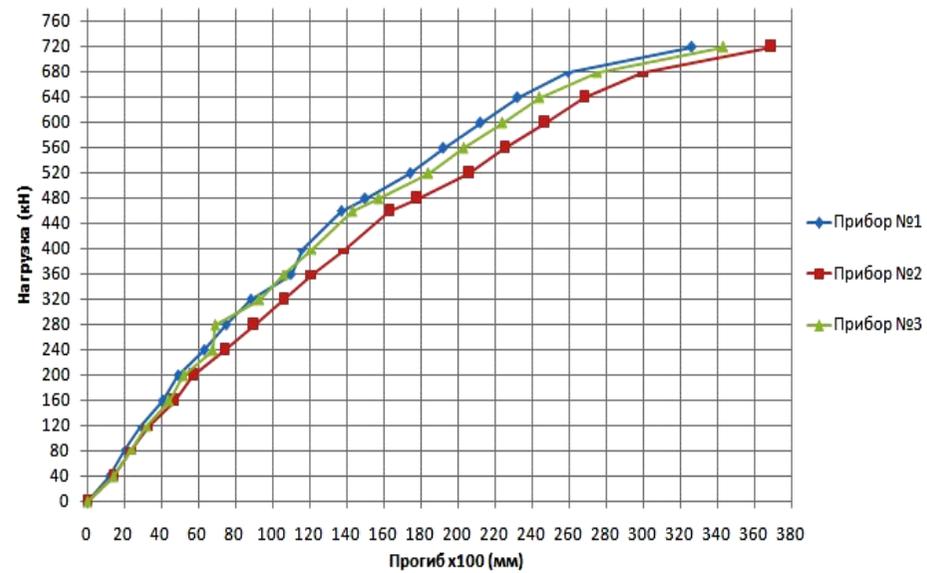


Рис.2.12 Вертикальные перемещения образца ПЛ2К6 по ступеням нагружения..

2.2.2. Штмп Г-образной формы (плиты ПЛ1У, ПЛ2У).

Общий вид образцов с уголковым штампом перед испытанием показан на рис.2.13.

Загружение плиты ПЛ1У производилось ступенями по 100 кН. Разрушающая нагрузка равна 850 кН. Максимальные вертикальные перемещения составили: 2,37 мм (прибор №1); 2,49 мм (прибор №2); 2,03 мм (прибор №3).

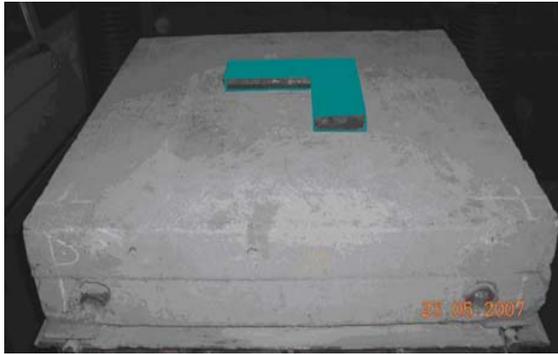


Рис. 2.13 Штмп Г-образной формы

Загружение плиты ПЛ2У производилось ступенями по 40 кН. Разрушающая нагрузка равна 720 кН. Максимальные вертикальные перемещения составили: 2,21 мм (прибор №1); 2,46 мм (прибор №2); 2,25 мм (прибор №3).

Процесс трещинообразования по граням образцов на различных этапах нагружения представлен на рис. 2.14-2.15. Трещины по верхней поверхности в момент разрушения показаны на рис.2.16.

На рис.2.17, 2.18 представлены графики зависимости вертикальных перемещений нижней поверхности плит от нагрузки.

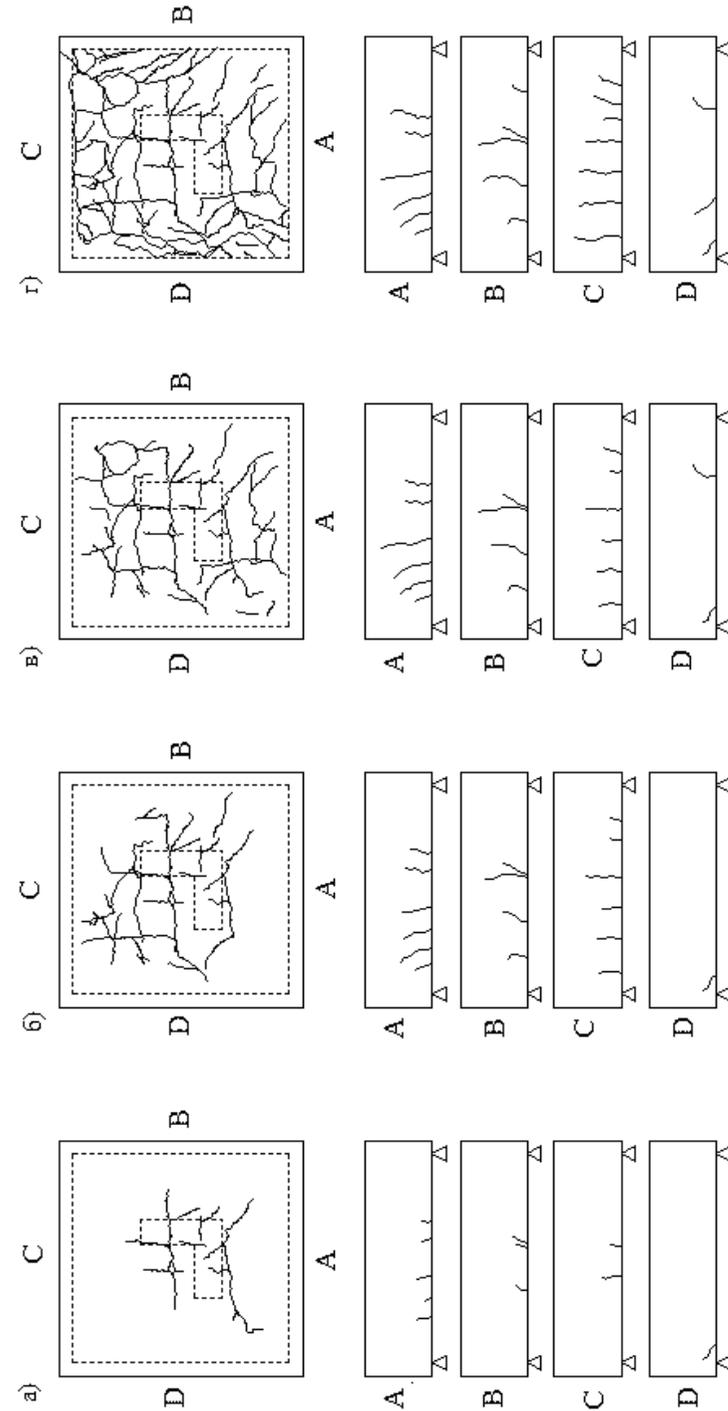


Рис.2.14 Схема развития трещин. Плита ПЛ1У:

а) – при нагрузке 0,4 от разрушающей; б) – при нагрузке 0,6 от разрушающей; в) – при нагрузке 0,8 от разрушающей; г) – при нагрузке 0,95 от разрушающей.

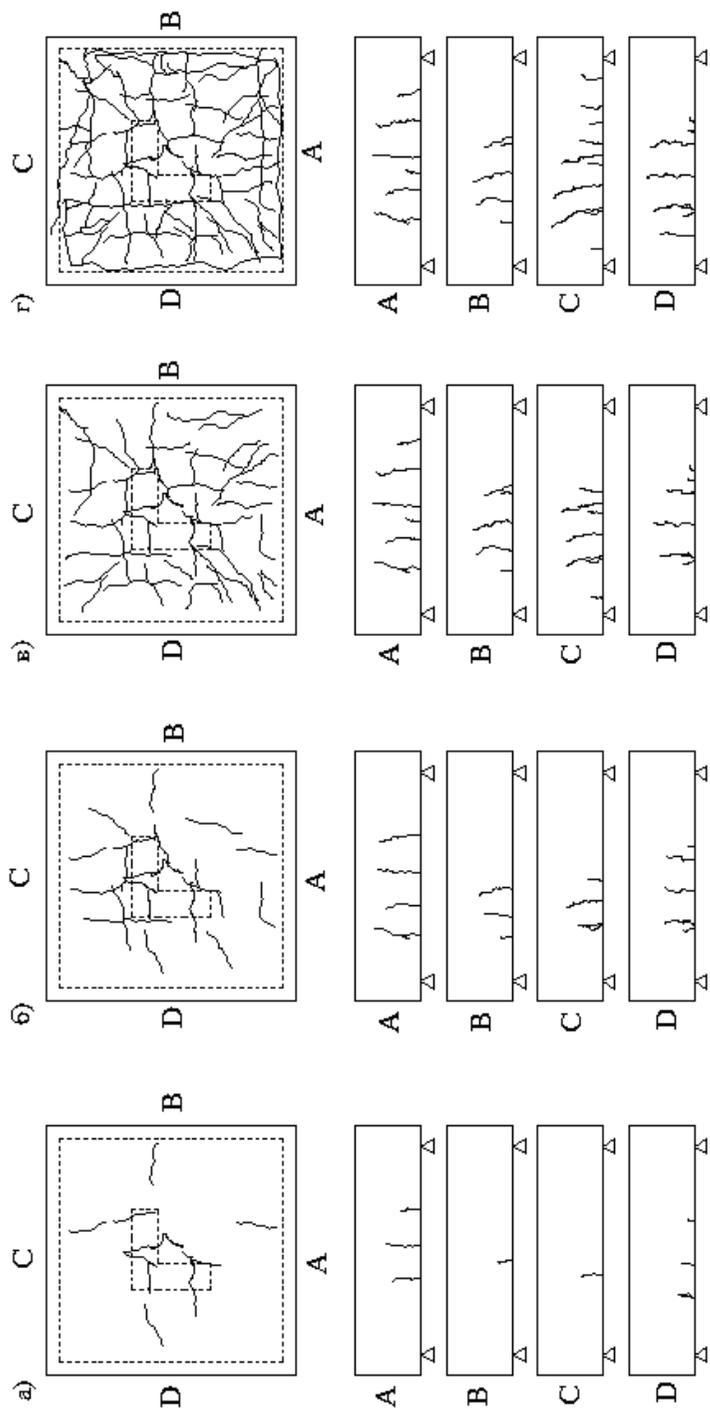


Рис.2.15 Схема развития трещин. Плита ПЛ2У:

а) – при нагрузке 0,4 от разрушающей; б) – при нагрузке 0,6 от разрушающей; в) – при нагрузке 0,8 от разрушающей; г) – при нагрузке 0,95 от разрушающей.

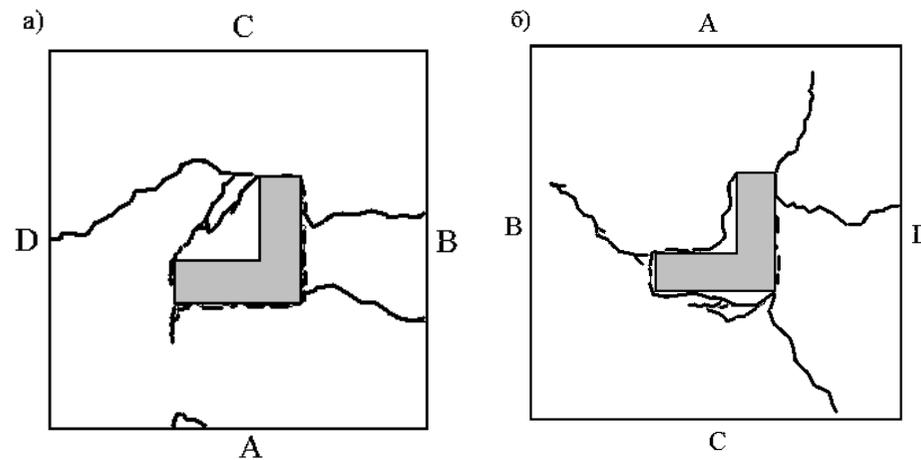


Рис.2.16 Схема трещин на верхней грани плиты после разрушения от продавливания: а) - плита ПЛ1У, б) – плита ПЛ2У.

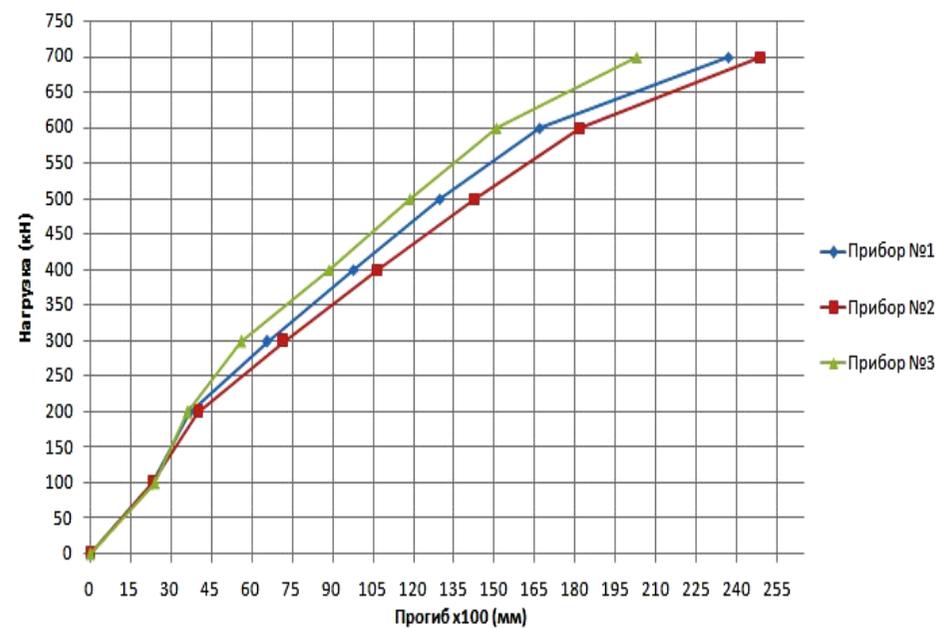


Рис.2.17 Вертикальные перемещения образца ПЛ1У по ступеням нагружения

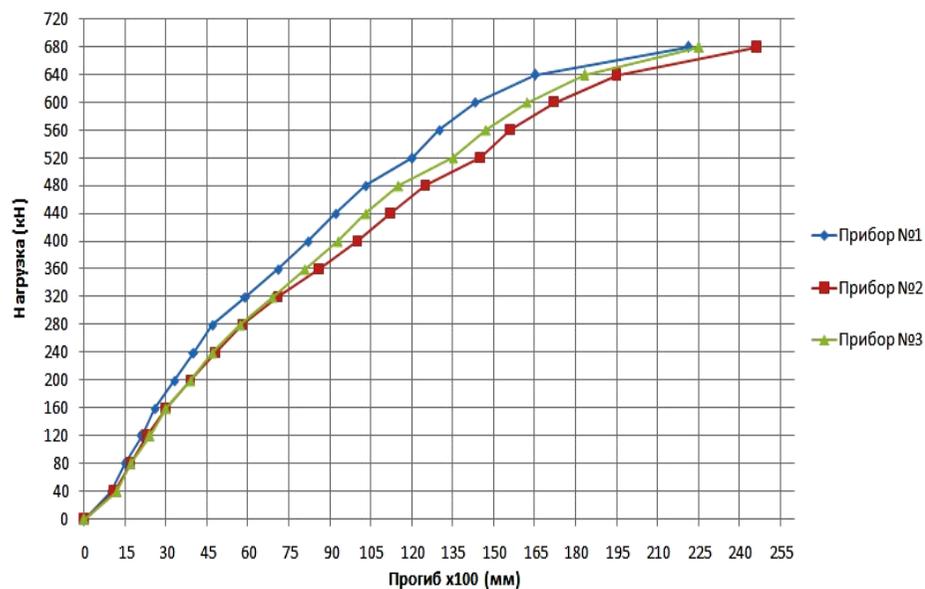


Рис.2.18 Вертикальные перемещения образца ПЛ2У по ступеням нагружения.

2.2.3. Штамп крестообразной формы (плиты ПЛ1К, ПЛ2К).

Общий вид образцов с крестообразным штампом перед испытаний показан на рис.2.19.



Рис. 2.19 Штамп крестообразной формы.

Загружение плиты ПЛ1К производилось ступенями по 40 кН. Разрушающая нагрузка составила 860 кН. Максимальные вертикальные перемещения: 5,03 мм (прибор №1); 5,71 мм (прибор №2); 5,39 мм (прибор №3).

Загружение плиты ПЛ2К производилось ступенями по 48 кН. Разрушающая нагрузка составила 760 кН. Максимальные вертикальные перемещения: 3,65 мм (прибор №1); 3,77 мм (прибор №2); 3,23 мм (прибор №3).

На рис.2.20 представлена схема образования трещин на верхней поверхности плиты после разрушения.

Процесс образования трещин образцов ПЛ1Кв и ПЛ2Кв на различных этапах нагружения по краям образцов показан на рис. 2.21, 2.22.

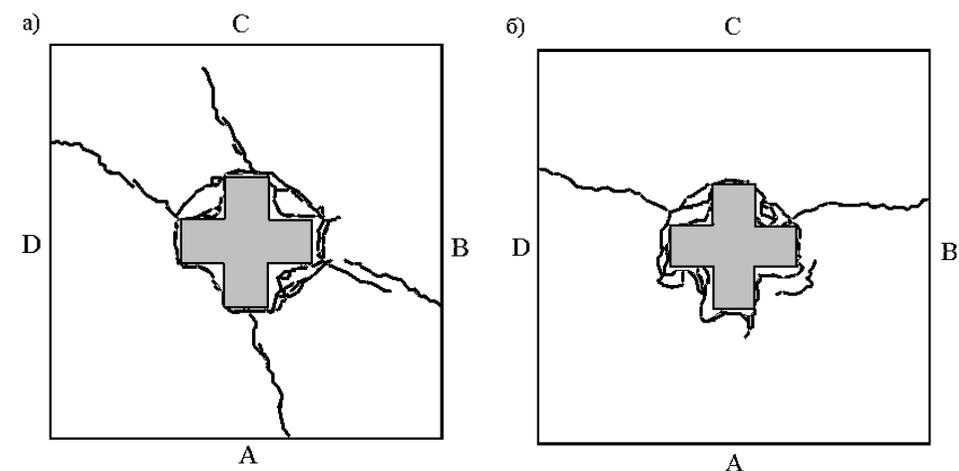


Рис.2.20 Схема трещин на верхней грани плиты после разрушения от продавливания: а) – плита ПЛ1К, б) – плита ПЛ2К.

На рис.2.23, 2.24 представлены графики вертикальных перемещений образцов в зависимости от величины нагрузки, построенные по показаниям 3-х прогибомеров (рис.2.6в).

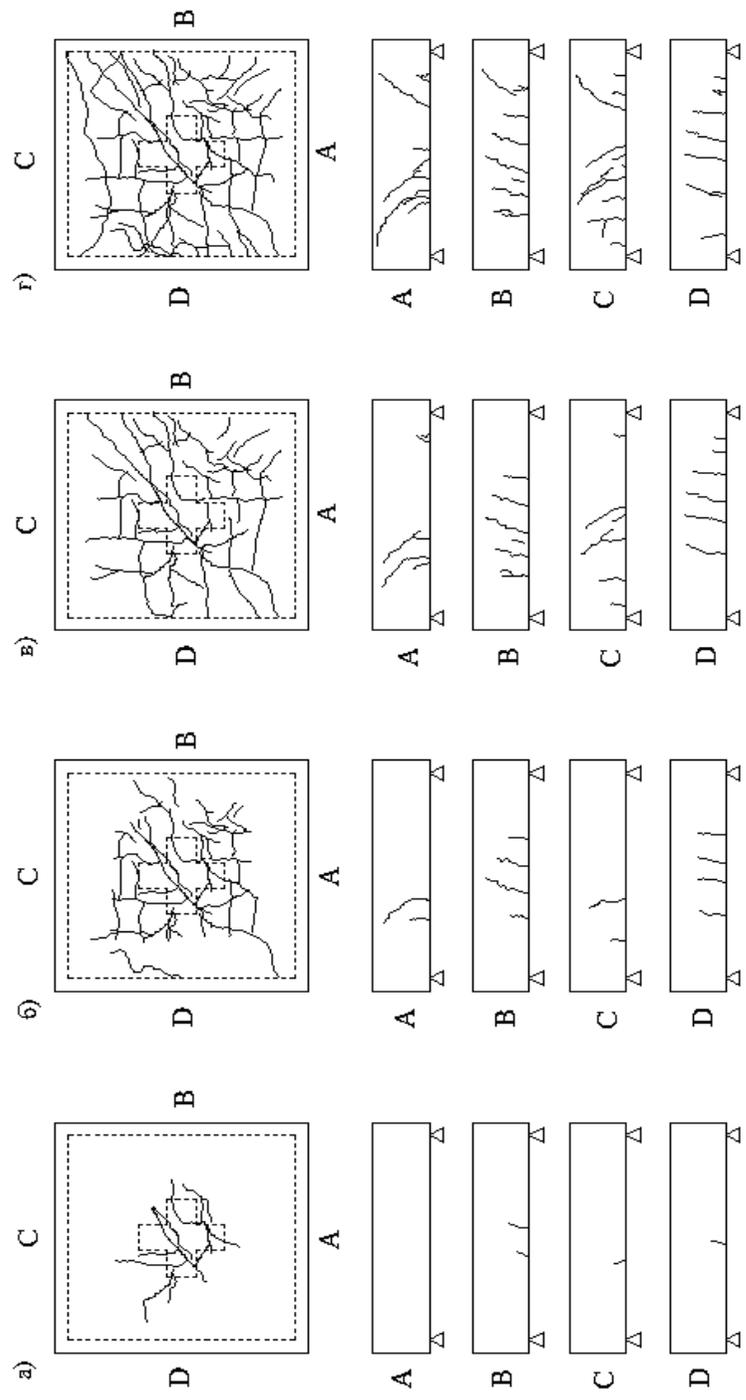


Рис.2.21 Схема развития трещин. Плита ПЛ2К:

а) – при нагрузке 0,4 от разрушающей; б) – при нагрузке 0,6 от разрушающей;
 в) – при нагрузке 0,8 от разрушающей; г) – при нагрузке 0,95 от разрушающей.

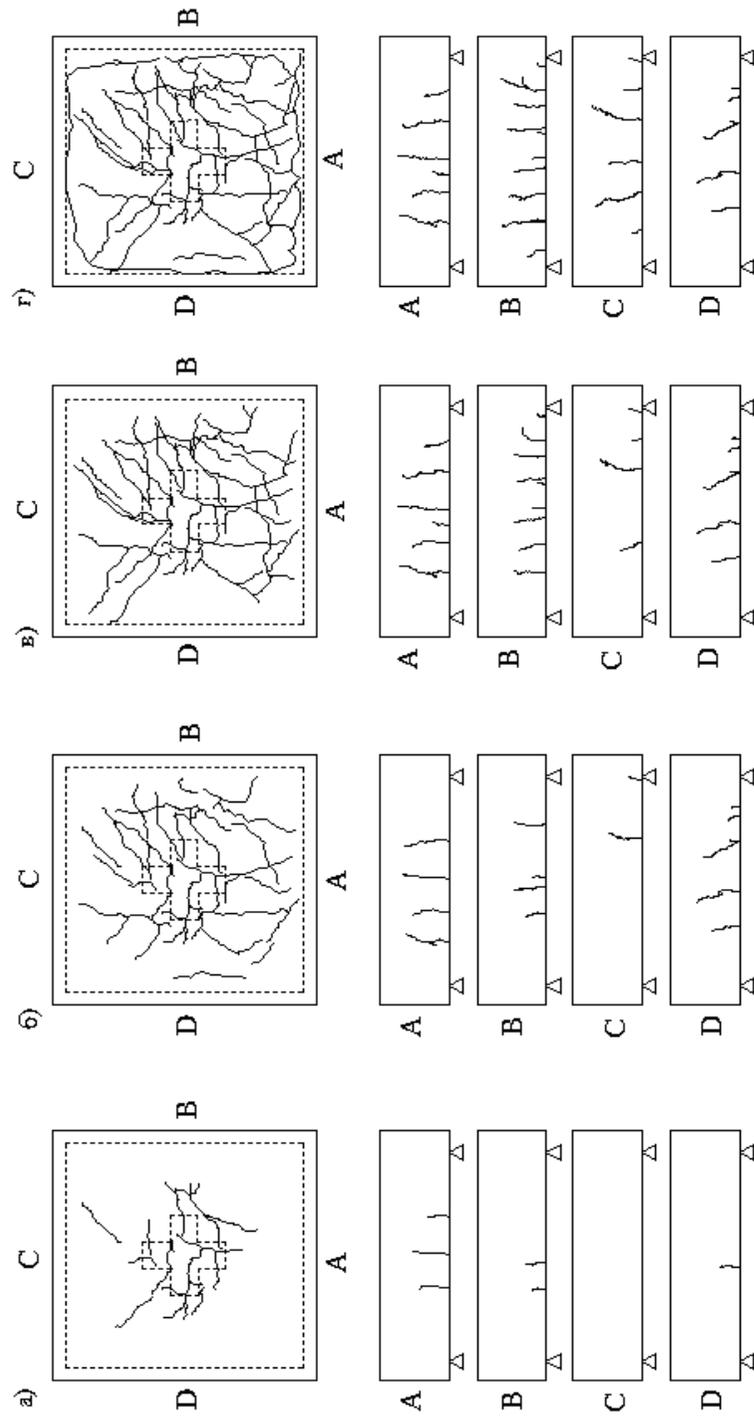


Рис.2.22 Схема развития трещин. Плита ПЛ2К:

а) – при нагрузке 0,4 от разрушающей; б) – при нагрузке 0,6 от разрушающей;
 в) – при нагрузке 0,8 от разрушающей; г) – при нагрузке 0,95 от разрушающей.

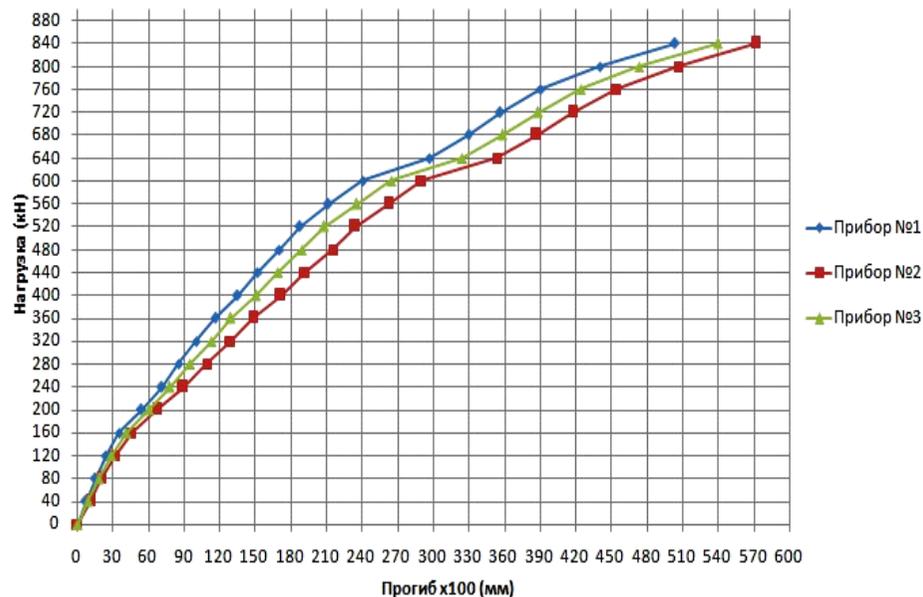


Рис.2.23 Вертикальные перемещения образца ПЛК по ступеням нагружения.

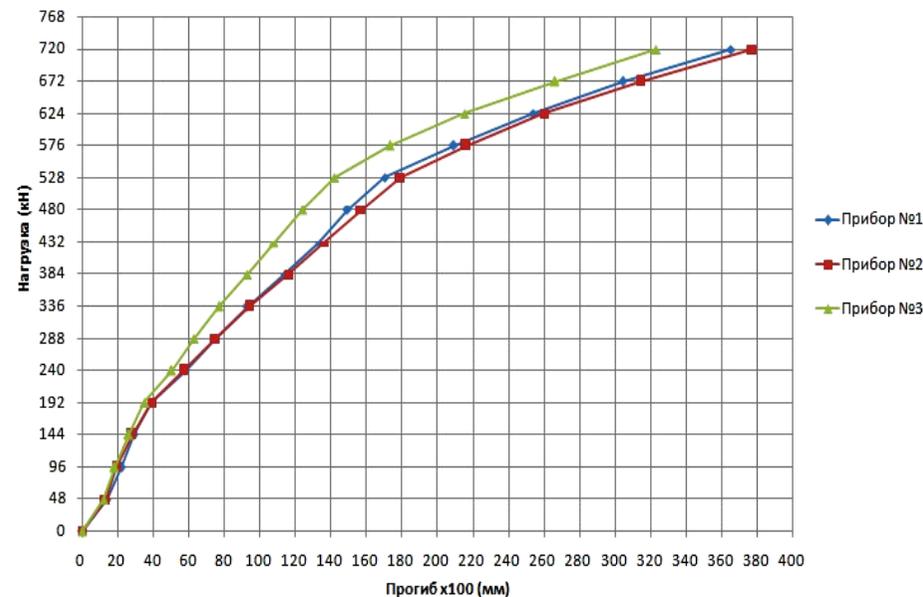


Рис.2.24 Вертикальные перемещения образца ПЛ2К по ступеням нагружения.

2.3. Сопоставление данных экспериментальных исследований с результатами расчетов по действующим нормативным документам

В Украине расчет на продавливание железобетонных плит осуществляется по п. 3.42 СНиП 2.03.01 – 84* [82]. Продавливание происходит по боковой поверхности пирамиды, меньшим основанием которой служит площадь действия продавливающей силы, а боковые грани наклонены под углом 45° к горизонтали (см. Приложение 1, рис. П.1).

Расчет на продавливание производится из условия:

$$F \leq \alpha R_{bt} u_m h_0, \quad (2.1)$$

где R_{bt} – расчетное сопротивление бетона растяжению;
 u_m – среднее арифметическое величин периметров верхнего P_v и нижнего P_n оснований пирамиды продавливания в пределах рабочей высоты сечения h_0 ;
 α – коэффициент, принимаемый для бетона: тяжелого – 1; мелкозернистого – 0.85; легкого – 0.8.

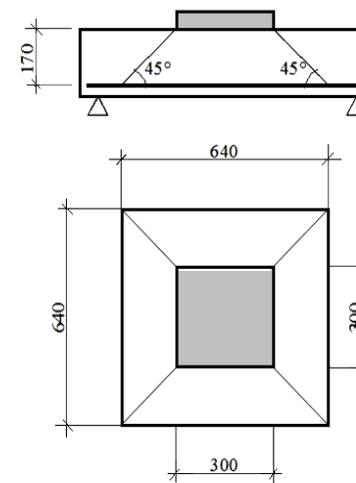


Рис. 2.25 Фигура продавливания по [82]. Квадратный штамп

Расчетная поверхность продавливания для штампа квадратной формы в плане изображена на рис.2.25. Периметры верхнего и нижнего основания соответственно равны:

$$P_g = 0,3 \cdot 4 = 1,2 \text{ м}; P_n = 0,64 \cdot 4 = 2,56 \text{ м}$$

Расчет плиты ПЛ1КВ:

Исходные данные: $R_{bt} = 1,96 \text{ МПа}$, $h_0 = 0,17 \text{ м}$, $u_m = \frac{1,2 + 2,56}{2} = 1,88 \text{ м}$,

$$F_{расч} = 1 \cdot 1,96 \cdot 1,88 \cdot 0,17 \cdot 1000 = 626 \text{ кН}.$$

Расчет плиты ПЛ2КВ:

Исходные данные: $R_{bt} = 1,97 \text{ МПа}$, $h_0 = 0,17 \text{ м}$, $u_m = \frac{1,2 + 2,56}{2} = 1,88 \text{ м}$,

$$F_{расч} = 1 \cdot 1,97 \cdot 1,88 \cdot 0,17 \cdot 1000 = 630 \text{ кН}.$$

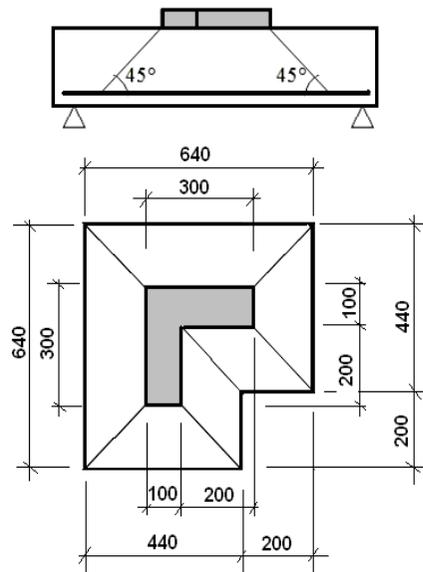


Рис. 2.26 Фигура продавливания согласно [82] (Г-образный штамп).

Расчетная поверхность продавливания для штампа Г-образной формы в плане изображена на рис. 2.26. Периметры верхнего и нижнего основания соответственно равны

$$P_g = (0,3 + 0,2 + 0,1) \cdot 2 = 1,2 \text{ м}; P_n = (0,64 + 0,44 + 0,2) \cdot 2 = 2,56 \text{ м}$$

Расчет плиты ПЛ1У:

Исходные данные: $R_{bt} = 2,30 \text{ МПа}$, $h_0 = 0,17 \text{ м}$, $u_m = \frac{1,2 + 2,56}{2} = 1,88 \text{ м}$,

$$F_{расч} = 1 \cdot 2,3 \cdot 1,88 \cdot 0,17 \cdot 1000 = 735 \text{ кН}.$$

Расчет плиты ПЛ2У:

Исходные данные: $R_{bt} = 2,4 \text{ МПа}$, $h_0 = 0,17 \text{ м}$, $u_m = \frac{1,2 + 2,56}{2} = 1,88 \text{ м}$,

$$F_{расч} = 1 \cdot 2,4 \cdot 1,88 \cdot 0,17 \cdot 1000 = 767 \text{ кН}.$$

Расчетная поверхность продавливания для штампа крестообразной формы в плане изображена на рис.2.27. Периметры верхнего и нижнего основания соответственно равны:

$$P_g = 0,1 \cdot 12 = 1,2 \text{ м}; P_n = 0,44 \cdot 4 + 0,1 \cdot 8 = 2,56 \text{ м}$$

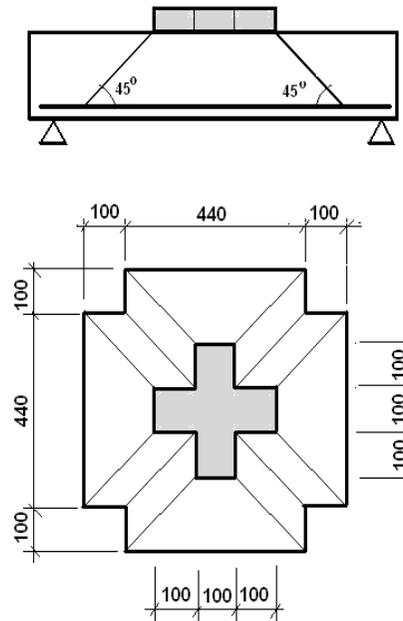


Рис. 2.27 Поверхность продавливания согласно [82] (крестообразный штамп).

Расчет плиты ПЛ1К:

Исходные данные: $R_{bt} = 1,9 \text{ МПа}$, $h_0 = 0,17 \text{ м}$, $u_m = \frac{1,2 + 2,56}{2} = 1,88 \text{ м}$,

$$F_{расч} = 1 \cdot 1,9 \cdot 1,88 \cdot 0,17 \cdot 1000 = 607 \text{ кН}.$$

Расчет плиты ПЛ2К:

Исходные данные: $R_{bt} = 2,15 \text{ МПа}$, $h_0 = 0,17 \text{ м}$, $u_m = \frac{1,2 + 2,56}{2} = 1,88 \text{ м}$,

$$F_{расч} = 1 \cdot 2,15 \cdot 1,88 \cdot 0,17 \cdot 1000 = 687 \text{ кН}.$$

Таблица 2.5

Сравнительная таблица экспериментальной разрушающей нагрузки и рассчитанной по формулам [82]

Плита (опытный образец)	Сечение продавливающего штампа	$u_m, \text{см}$	$F_{расч}$ по [82], кН	Экспериментальное значение F_n , кН	Отклонение %
ПЛ1Кв	Квадратное	188	626	776	24,0
ПЛ2Кв	Квадратное	188	630	760	20,6
ПЛ1У	Г-образное	188	735	850	15,6
ПЛ2У	Г-образное	188	767	720	Переоценка
ПЛ1К	Крестообразное	188	607	860	41,7
ПЛ2К	Крестообразное	188	687	760	10,6

В формуле (2.1) единственный геометрический параметр u_m не всегда дает ответ на вопрос о форме штампа. Так как для всех рассмотренных примеров периметры штампов одинаковы, то предельная нагрузка не должна зависеть от их формы, что не нашло опытного обоснования (см.табл.2.5).

2.4. Формы разрушения. Проверка гипотезы о пирамиде продавливания.

После доведения в процессе испытаний образцов до разрушения от них отделялась верхняя часть, представляющая собой фигуру продавливания.

Схематично вид сверху экспериментальных фигур продавливания для исследуемых форм штампов приведен на рис. 2.28.

Для плит ПЛ1Кв, ПЛ2Кв (квадратный штамп) фигура продавливания напоминала усеченную пирамиду с четко выраженными боковыми гранями и была следующего вида: верхняя грань повторяла очертания продавливающего штампа (рис.2.28а, 2.29). Нижняя грань стремилась к квадрату со скругленными углами. Среднее значение угла наклона боковых граней для плиты ПЛ1Кв составило 37° , а для плиты ПЛ2Кв - 40° .

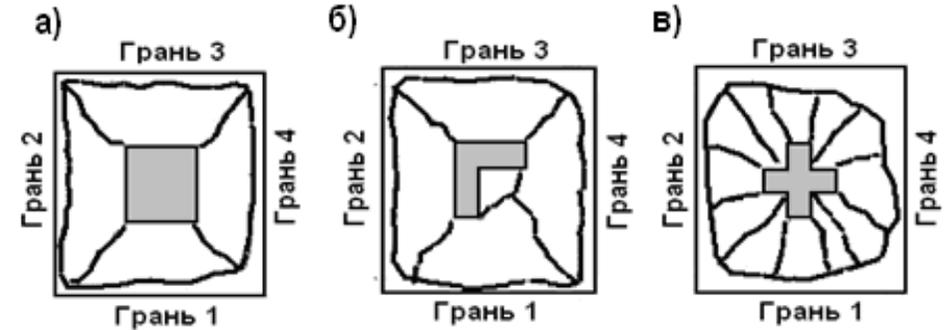


Рис.2.28 Фигуры продавливания.

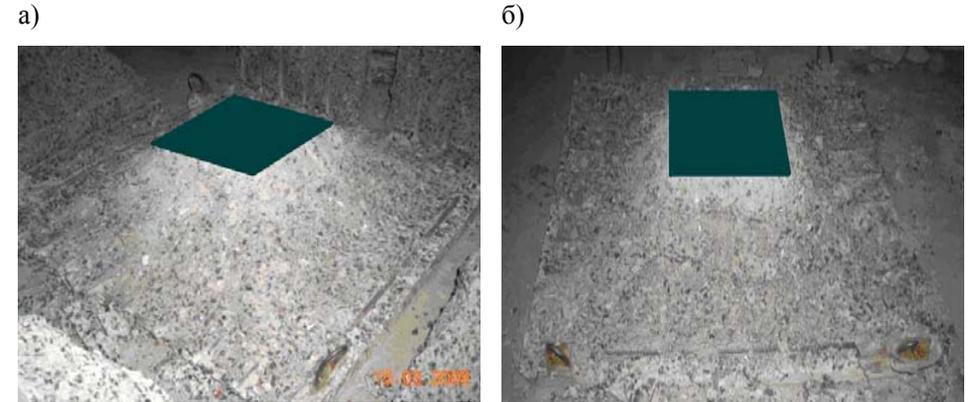


Рис.2.29 Экспериментальные фигуры продавливания при квадратном штампе: а) – образец ПЛ1Кв б) – образец ПЛ2Кв.

Фигура продавливания плит ПЛ1У и ПЛ2У (уголковый штамп) по очертанию приблизилась к усеченной пирамиде с верхней гранью приближенно описываемой криволинейным треугольником (образец ПЛ1У рис.2.28б) и квадрату (образец ПЛ2У). Нижняя грань по своему очертанию у обоих образцов приближалась к квадрату (рис.2.30). Среднее значение угла наклона боковых граней для плиты ПЛ1У составило 37° , а для плиты ПЛ2У - 44° .

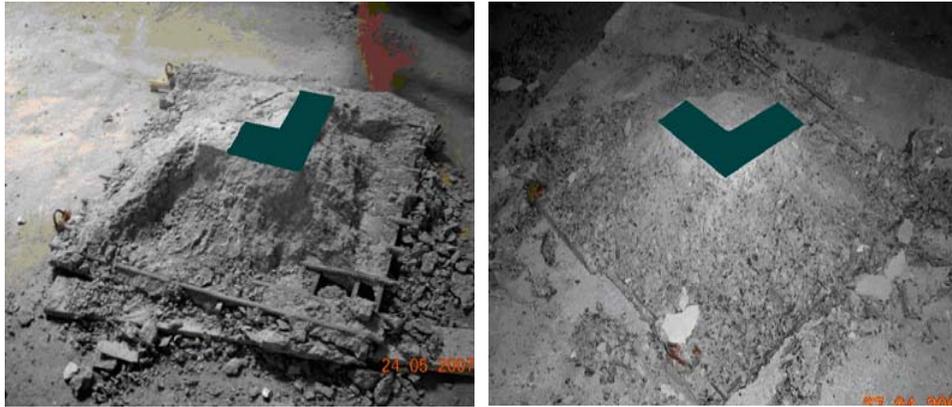


Рис.2.30 Экспериментальные фигуры продавливания при угловом штампе: а) – образец ПЛ1Кв б) – образец ПЛ2Кв.

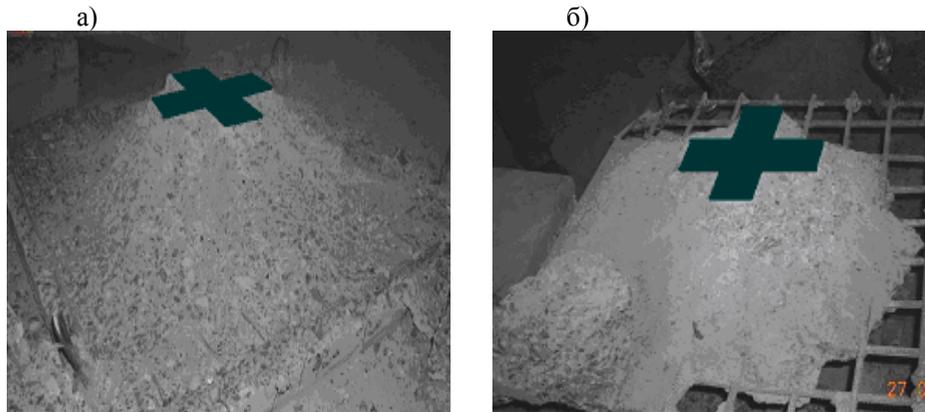


Рис.2.31. Экспериментальные фигуры продавливания при крестообразном штампе: а) – образец ПЛ1К б) – образец ПЛ2К.

Фигура продавливания плиты ПЛ1К и ПЛ2К (крестообразный штамп) (рис.2.28в, 2.31) имела сложную геометрическую форму. Верхняя грань, повторяла очертания штампа. Нижняя грань приближалась к окружности. В верхней части фигура продавливания имела двенадцать неярко выраженных боковых граней, выходящих из углов штампа. Среднее значение угла наклона боковых граней для плиты ПЛ1К составило 31°, а для плиты ПЛ2К - 38°.

Таблица 2.6

Средние углы наклона боковых граней фигур продавливания

Образец	Экспериментальный угол наклона	$\frac{\beta_{СНП} = 45^\circ}{\beta_{факт}}$
1	3	4
ПЛ1Кв	37°	1.22
ПЛ2Кв	40°	1.125
ПЛ1У	37°	1.22
ПЛ2У	44°	1.02
ПЛ1К	31°	1.45
ПЛ2К	38°	1.18

Полученные в экспериментах средние углы наклона боковых граней фигуры продавливания сведены в табл.2.6.

Таким образом полученные экспериментально фигуры продавливания под штампом существенно отличаются от классической «пирамиды». Углы наклона боковых граней не равны 45° даже для штампа квадратной формы (табл.2.6). В действующей нормативной методике не учитывается не только форму штампа, но и средний фактический угол наклона образующей фигуры продавливания.

ГЛАВА 3 МОДЕЛЬ ЖЕЛЕЗОБЕТОНА С ТРЕЩИНАМИ

Железобетон, как композиционный материал, состоит из двух совместно работающих сред – бетона и арматуры. И бетон, и арматура, являются физически нелинейными материалами. Причем в бетоне в результате микротрещинообразования проявляется еще и анизотропия. Все это предопределяет сложность моделирования процессов его деформирования, особенно в условиях сложного напряженного состояния. Как известно, механические свойства любого материала характеризуются матрицей связей между напряжениями и деформациями, так называемой, матрицей упругости. Для железобетона эта матрица является функцией напряженно-деформированного состояния и должна быть сформулирована с общих позиций механики деформируемого твердого тела. На сегодняшний день известно большое количество работ, посвященных моделированию железобетона как комплексного материала [5,,64,72,81,89,92,93] и развитие различных анизотропных моделей бетона и железобетона [6,12-14,50,65,67,94,95]. Наиболее общей и физически обоснованной из них представляется модель, предложенная Н.И.Карпенко [49-53]. Именно эта модель положена в основу дальнейших исследований и используется для численного моделирования процесса продавливания железобетонных плит штампами различной конфигурации.

Приведем основные положения этой модели, способы ее алгоритмизации с целью подключения разработанных алгоритмов в программный комплекс нелинейного расчета конструкций методом конечных элементов [57].

3.1. Общие предпосылки

Железобетон рассматривается как анизотропный, физически нелинейный материал, состоящий из двух совместно работающих сплошных сред – бетона и распределенной по объему арматуры. Совместность работы этих сред обеспечивается выполнением следующих условий

$$\{\sigma\} = \{\sigma_b\} + \sum_s \{\sigma_s\}; \quad (3.1)$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_b\} = \{\varepsilon_s\}, \quad (3.2)$$

где $\{\sigma\}$, $\{\sigma_b\}$ и $\{\sigma_s\}$ – вектора-функций напряжений по граням элемента в железобетоне, бетоне и армирующей среде s -ого направления;

$\{\varepsilon\}$, $\{\varepsilon_b\}$ и $\{\varepsilon_s\}$ – вектора-функции деформаций железобетона, бетона и арматуры s -ого направления.

Вектора-функции напряжений для бетона и арматуры связаны между собой

$$\{\sigma_b\} = [D_b]\{\varepsilon_b\}; \quad (3.3)$$

$$\{\sigma_s\} = [D_s]\{\varepsilon_s\}, \quad (3.4)$$

где $[D_b]$, $[D_s]$ – матрицы механических характеристик для бетона и армирующей среды s -ого направления.

Подставляя выражения (3.3) и (3.4) в условия (3.1) и (3.2), получим определяющее соотношение для железобетона в виде

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}, \quad (3.5)$$

где $[D]$ матрица механических характеристик железобетона

$$[D] = [D_b] + \sum_s [D_s] \quad (3.6)$$

Теперь необходимо сформулировать матрицы, входящие в выражение (3.6). Их определение проще всего осуществляется в местных ортогональных осях, которые совпадают с осями симметрии свойств бетона и арматуры.

Рассмотрим железобетонный элемент в форме единичного куба, выделенного из конструкции, работающего в условиях трехосного напряженного состояния [50] (рис.3.1). Грани этого элемента ориентированы по направлениям местной ортогональной системы координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 , совпадающими с осями главных напряжений в бетоне. Элемент произвольно армирован в нескольких направлениях. Каждое направление армирования " s " характеризуется местной системой координат η_1, η_2, η_3 . (ось η_1 совпадает с направлением армирования, остальные ей перпендикулярны), и коэффициентом армирования μ_s , равному площади арматуры, пересекающей единичную площадку, нормальную оси η_1 . Связь местных осей с общими координатами осуществляется при помощи направляющих косинусов. Поскольку, согласно (3.6), определяющие соотношения для железобетона получаются суммированием матриц для бетона и арматуры, рассмотрим получение этих матриц отдельно в местных системах координат. Кроме того, будем иметь в виду, что особенностью железобетона, как комплексного материала является то, что он может находиться в двух состояниях – без трещин и с трещинами. Переход из одного состояния в другое устанавливается по условиям прочности бетона при сложном напряженном состоянии. В этой связи, предварительно рассмотрим эти условия, а также, сформулированные на их основе, критерии трещинообразования.

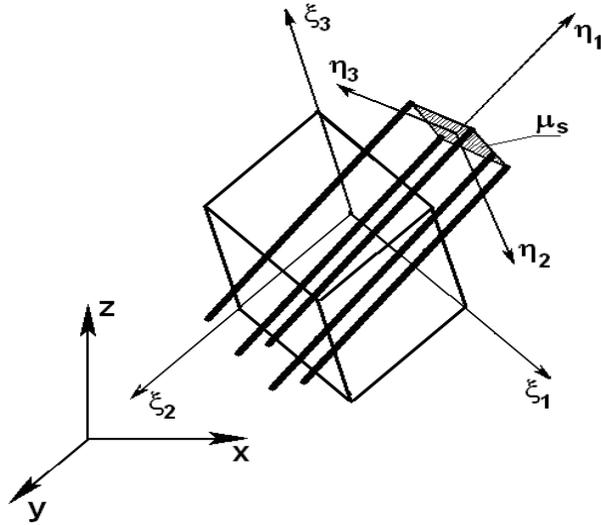


Рис.3.1 Элементарный параллелепипед, выделенный из конструкции

3.2. Прочность бетона. Схемы образования трещин

Как известно, прочность бетона при сложном напряженном состоянии определяется с помощью предельной поверхности, симметричной относительно пространства главных напряжений. Для описания этой поверхности существует достаточно большое количество предложений, полный обзор которых можно найти в работах [8, 23, 49, 50, 77]. Не останавливаясь на анализе всех предложений, примем в качестве исходной поверхность, предложенную в работе [50], как одну из наиболее общих и достоверных. Для аналитического описания этой поверхности используется следующее выражение

$$a\sigma_{b1}^2 + b\sigma_{b3}^2 + \sigma_{b1} \left[\tilde{\gamma}_b (f-b) + \tilde{\gamma}_{bt} \right] R_b + \sigma_{b3} \left(\tilde{\gamma}_b b - f \tilde{\gamma}_{bt} \right) R_b - \quad (3.7)$$

$$- \sigma_{b1} \sigma_{b3} (a+b+1-f) - \tilde{\gamma}_b \tilde{\gamma}_{bt} f \cdot R_b^2 = 0,$$

где $\sigma_{b1} = \sigma_{b2} > \sigma_{b3}$ - главные напряжения в бетоне; R_b - прочность бетона на сжатие; f, n - коэффициенты равные единице для тяжелого бетона [94]

$$a = nb; \quad (3.8)$$

$$b = \frac{\tilde{\gamma}_{bt}}{\tilde{\gamma}_b - n\tilde{\gamma}_{bt}}. \quad (3.9)$$

Выражения для параметров $\tilde{\gamma}_b$, $\tilde{\gamma}_{bt}$ получены на основе экспериментальных данных и описываются зависимостями [50]

$$\tilde{\gamma}_b = 1 + \frac{3R_{bn}}{R_{bn}} \left(\frac{R_{bn}}{R_{bn}} \right) \left\{ 1 - \left[\frac{(1-\psi)(1-\mu_\sigma - 2\beta)}{2\beta + \psi(1-\mu_\sigma - 2\beta)} \right]^2 \right\}; \quad (3.10)$$

$$\tilde{\gamma}_{bt} = \tilde{\gamma}_{bt(2)} + \left(\tilde{\gamma}_{bt(2)} - \tilde{\gamma}_{bt(1)} \right) \left[1 - \frac{(\mu_\sigma^* - \mu_p^*)(\mu_p^* + p)}{(1-\mu_p^*)(1+p)} \right],$$

где $\beta = 0.3 + \frac{R_{bn}}{200}$; $\psi = \frac{1-\beta-\beta\sqrt{1-\beta}}{(1-\beta)(1+\sqrt{1-\beta})}$; $p = 0$.

Здесь параметры μ_σ , μ_σ^* , μ_p^* находятся из выражений

$$\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}; \quad (3.11)$$

$$\mu_\sigma^* = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3 + \Delta}{\sigma_1 - \sigma_3 + \Delta}; \quad (3.12)$$

$$\mu_p^* = \frac{\sigma_3 - \sigma_3 + \Delta}{\sigma_1 - \sigma_3 + \Delta}, \quad (3.13)$$

где $\Delta = 0,25R_{bt}$.

Выражение (3.7) может быть решено относительно любого из главных напряжений $\sigma_{b1}, \sigma_{b2}, \sigma_{b3}$. Для этого вводятся следующие обозначения:

$$\sigma = \sigma_{b1}; \quad n_1 = \frac{\sigma_{b3}}{\sigma}; \quad n_2 = 1, \quad \text{при } \sigma_{b1} \neq 0$$

если $\sigma_{b1} = 0$, то

$$\sigma = \sigma_{b3}; \quad n_1 = 1; \quad n_2 = \frac{\sigma_{b1}}{\sigma}, \quad \text{при } \sigma_{b3} \neq 0; \quad m = \frac{\sigma_{b2}}{\sigma}$$

Тогда условие прочности (3.7) запишем в виде

$$\left[an_2^2 + bn_1^2 - n_1 n_2 (a+b+1-f) \right] \sigma^2 + \left\{ n_2 [\tilde{\gamma}_b (f-b) + \tilde{\gamma}_{bt}] + n_1 (\tilde{\gamma}_b b - f \tilde{\gamma}_{bt}) \right\} R_b \sigma - \tilde{\gamma}_b \tilde{\gamma}_{bt} f \cdot R_b^2 = 0 \quad (3.14)$$

Откуда, решив квадратное уравнение можно найти значение σ , находящееся на предельной поверхности, т.е. значение прочности бетона по одному из главных направлений

$$\left. \begin{array}{l} \text{если } \sigma_{b1} \neq 0, \\ R_{b1} = \sigma \quad R_{b3} = n_1 R_{b1} \quad R_{b2} = m_1 R_{b1}, \text{ где } m_1 = \frac{\sigma_{b2}}{\sigma_{b1}}; \\ \text{если } \sigma_{b3} \neq 0, \\ R_{b3} = \sigma \quad R_{b1} = n_2 R_{b3} \quad R_{b2} = m_2 R_{b3}, \text{ где } m_2 = \frac{\sigma_{b2}}{\sigma_{b3}}; \end{array} \right\} \quad (3.15)$$

Полученные значения прочности бетона R_{bi} ($i=1,2,3$) по i -ому главному направлению могут служить для определения параметров его состояния, а также условием образования трещин по этому направлению.

Введем параметр δ_i ($i=1,2,3$), характеризующий состояние элемента следующим образом [57]:

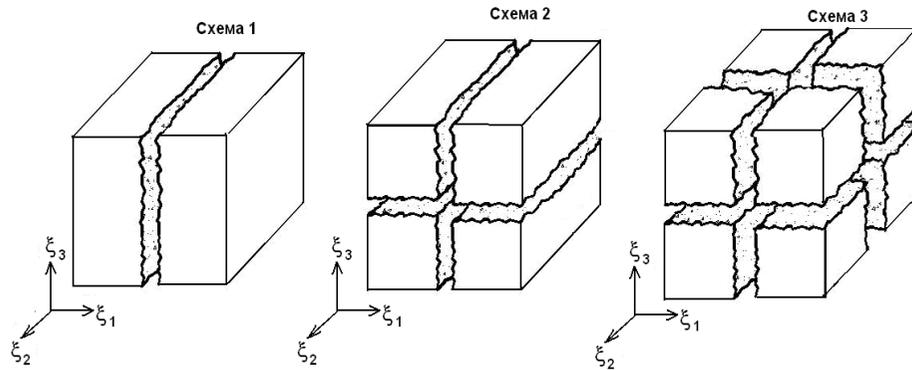


Рис. 3.2 Схемы образования трещин

$\delta_i = 0$, если $|\sigma_i| < |R_{bi}|$ - по i -ому направлению трещин нет и прочность обеспечена,
 $\delta_i = 1$, если $\sigma_i > R_{bi} > 0$ - трещина по i -ому главному направлению,
 $\delta_i = 2$, если $\sigma_i < -R_{bi} < 0$ - элемент разрушен от сжатия в i -ом направлении.
 Возможные схемы образования трещин, когда один или несколько параметров $\delta_i = 1$ приведены на рис.3.2.

При этом параметр δ_i ($i=1,2,3$) для различных схем трещин принимается равным:

- Схема 1 ($\delta_1 = 1; \delta_2 = \delta_3 = 0$) - одна трещина: по площадке с нормалью ξ_1 ;
- Схема 2 ($\delta_1 = \delta_3 = 1; \delta_2 = 0$) - две трещины: по площадкам с нормальми ξ_1 и ξ_3 ;
- Схема 3 ($\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 1$) - три трещины: по всем трем главным площадкам;

На рис. 3.3 приведена блок-схема процедуры определения состояния элемента по главным направлениям.

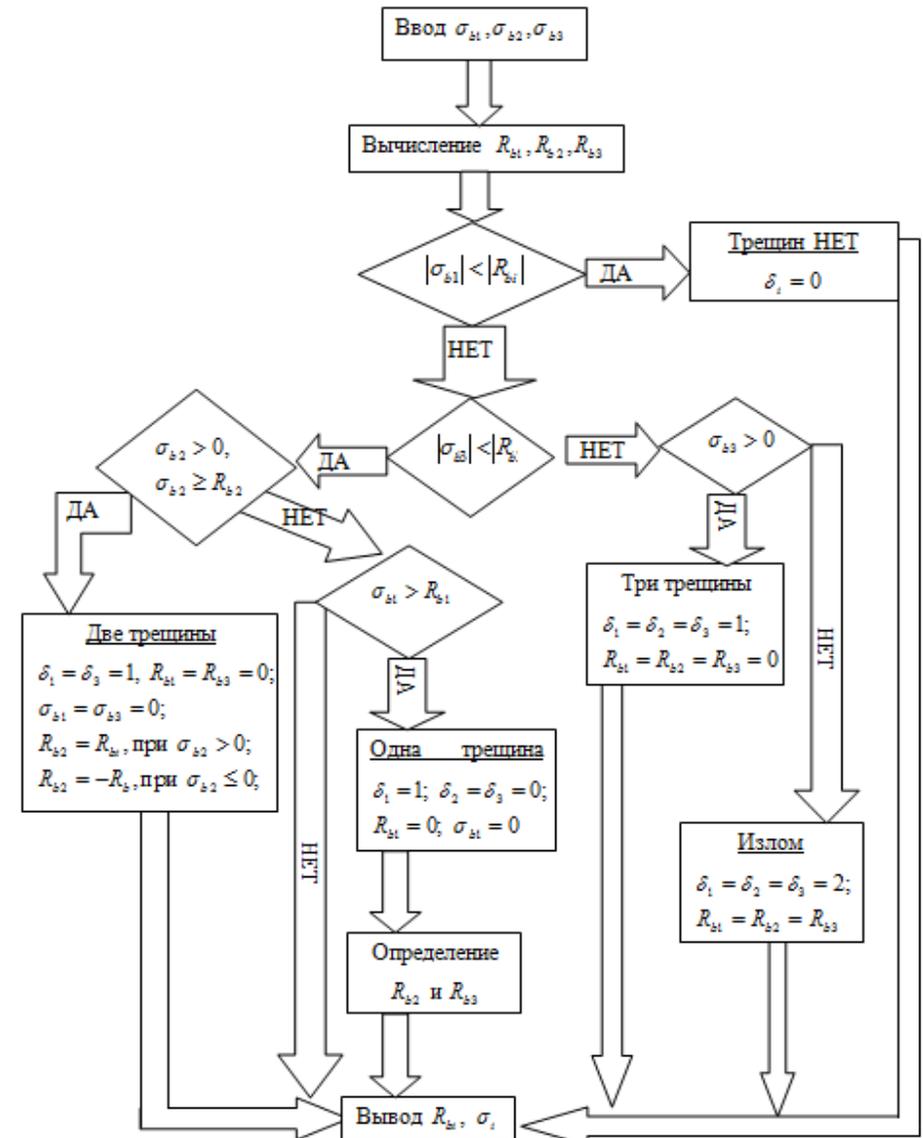


Рис. 3.3 блок-схема процедуры определения состояния работы элемента по главным направлениям

3.3. Определяющие соотношения для железобетона без трещин.

Поскольку матрица механических характеристик железобетонного элемента $[D]$, определяется через матрицы бетона $[D_b]$ и арматуры $[D_s]$ (3.6) рассмотрим зависимости для этих матриц отдельно [50].

3.3.1. Бетон.

Бетон – физически нелинейный материал. Его механические характеристики зависят от достигнутого уровня напряжений. Поскольку, по главным направлениям эти напряжения различны, то в нем развивается, так называемая, деформационная анизотропия. Поэтому для бетона на этапе до образования трещин используется анизотропная (ортотропная) модель. Матрица механических характеристик бетона выглядит так

$$[D_b] = \frac{1}{\Omega} \begin{bmatrix} E_1(1-\nu_{23}\nu_{32}) & E_1(\nu_{12}+\nu_{13}\nu_{32}) & E_1(\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23}) & 0 & 0 & 0 \\ E_2(\nu_{21}+\nu_{31}\nu_{23}) & E_2(1-\nu_{13}\nu_{31}) & E_2(\nu_{23}+\nu_{13}\nu_{21}) & 0 & 0 & 0 \\ E_3(\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32}) & E_3(\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31}) & E_3(1-\nu_{12}\nu_{21}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega G_{31} \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

где $\Omega = 1 - 2\nu_{21}\nu_{13}\nu_{32} - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31}$.

В (3.16) E_1, E_2, E_3 - упругопластические (секущие) модули деформаций бетона при растяжении-сжатии в направлении i -ой главной оси; ν_{ij} - переменные коэффициенты поперечной деформации, характеризующие растяжение-сжатие бетона в направлении i -ой оси при нагружении вдоль j -ой оси; G_{ij} - секущие модули сдвига бетона.

Матрица (3.16) имеет девять независимых параметров материала, которые являются функциями трех главных напряжений, при этом в связи с симметрией матрицы $[D_b]$ между ее компонентами существует связь

$$\nu_{ij}E_i = \nu_{ji}E_j \quad (3.17)$$

Определение выше приведенных параметров и составляет основное содержание формулировки ортотропной модели бетона.

Секущие модули продольных деформаций бетона по i -ому главному направлению E_i представим в виде

$$E_i = \lambda_{bi}E_b, \quad (3.18)$$

где E_b - начальный модуль деформации бетона; λ_{bi} - коэффициент пластичности бетона по i -ому направлению.

Коэффициент пластичности λ_{bi} зависит от напряжений по i -ому направлению и устанавливается по зависимости [50]

$$\lambda_{bi} = \xi_{bi} + (\lambda_{0i} - \xi_{bi}) \sqrt{1 - e_{1i}\eta_i - e_{2i}\eta_i^2}, \quad (3.19)$$

где ξ_{bi} - значения λ_b при $\eta_i = 1$;

η_i - уровни главных напряжений.

При трехосном сжатии $\sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_1 > 0$ (здесь напряжения сжатия принимаются положительными)

$$\xi_{bi} = \lambda_R = \frac{R_{bi}}{E_b \varepsilon_r}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.20)$$

где R_{bi} - прочность по i -ому направлению, определяемая с помощью условий прочности по формулам (3.7)-(3.15);

ε_r - деформации в вершине диаграммы.

При смешанном напряженном состоянии

$$\sigma_3 > \sigma_2 > 0, \quad \sigma_1 < 0$$

$$\xi_{bi} = \xi_{b3} = \lambda_R / \left| \frac{\tilde{\sigma}_3}{R_b} \right|. \quad (3.21)$$

$$\sigma_3 > 0, \quad \sigma_2 > \sigma_1 < 0$$

$$\xi_{bi} = \xi_{b3} \left[1 - (1 - 0.75)^4 \sqrt{\left| \frac{\tilde{\sigma}_i}{R_{bi}} \right|} \right]. \quad (3.22)$$

Здесь $\lambda_{b3} = 1 - (1 - \lambda_R) \left| \frac{\tilde{\sigma}_3}{R_b} \right|$.

В случае трехосного растяжения, когда $\sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_1 < 0$, λ_{bi} ($i = 1, 2, 3$) принимается равным 1. В формулах (3.21), (3.22) $i = 1, 2$.

Уровень напряжений определяющийся по формуле

$$\eta_i = \left| \frac{\sigma_i}{R_{bi}} \right|, \quad (3.23)$$

e_{1i}, e_{2i} - параметры кривизны диаграммы, причем $e_{2i} = 1 - e_{1i}$;

$$e_{1i} = 2 - 2,05 \xi_{bi} \quad (3.24)$$

λ_{0i} - значение коэффициента λ_{bi} при $\eta_i = 0$. Эти коэффициенты находятся в зависимости от положения на кривой диаграммы и напряженного состояния.

При смешанном напряженном состоянии $\lambda_{0i}=1$, для трехосного сжатия коэффициент определяется по формуле

$$\lambda_{oi} = 1 - c^3 \sqrt{\left| \frac{\sigma_3}{R_b} \right|}. \quad (3.25)$$

Здесь параметры $c = \left(0,75 \left| \lambda_R - \hat{\lambda}_{bi} \right| \right)^S$, $S = \frac{60}{75 - R_b} \leq 5$. Размерность величин 60 и 75 - МПа.

Параметр \mathcal{E}_r для тяжелого бетона определяется зависимостью [48]

$$\mathcal{E}_r = \frac{(18 + R_{b,ser})(62R_{b,ser} + 0.675R_{b,ser}^2 + 22)}{(53000 - 62R_{b,ser})(7R_{b,ser} + R_{b,ser}^2 + 22)}, \quad (3.26)$$

где размерность констант 18, 22, 53000 - МПа.

Модули поперечных деформаций $\nu_{Пij}$ также являются функциями главных напряжений и определяются так [50]

$$\nu_{Пij} = \mathfrak{E}_{Пij} + (\nu_0 - \mathfrak{E}_{Пij}) \sqrt{1 - \eta_i^2}, \quad (3.27)$$

где $\mathfrak{E}_{Пij}$ - значение секущего модуля $\nu_{Пij}$ в вершине диаграммы сжатия равно

$$\mathfrak{E}_{Пij} = \mathfrak{E}_{Пji} \approx \nu_0 + 1 - \sqrt[3]{\mathcal{E}_{b3} \left| \frac{\tilde{\sigma}_i^П - \tilde{\sigma}_k^П}{\tilde{\sigma}_1^П - \tilde{\sigma}_3^П} \right|}, \quad (3.28)$$

$\nu_0 \approx 0,15 \dots 0,2$ - начальное значение коэффициента поперечных деформаций, принимаемое по экспериментальным данным. Приведенные значения напряжений $\tilde{\sigma}_i^П$ и $\tilde{\sigma}_k^П$ получены путем умножения напряжений $\tilde{\sigma}_i$ и $\tilde{\sigma}_k$ на коэффициент $\alpha_R = \frac{R_b}{R_{bt}}$. В формулах (3.27)-(3.28) $i, k = 1, 2, 3$.

Для определения секущих модулей сдвига большинством авторов, включая [50], рекомендуют использовать зависимость, предложенную Лехницким С.Г. [69]

$$G_{ij} = \frac{E_i E_j}{E_i + E_j + 2\nu_{ij} E_i}. \quad (3.29)$$

Приведем блок-схему определения секущих модулей продольных и поперечных деформаций бетона (рис.3.4).

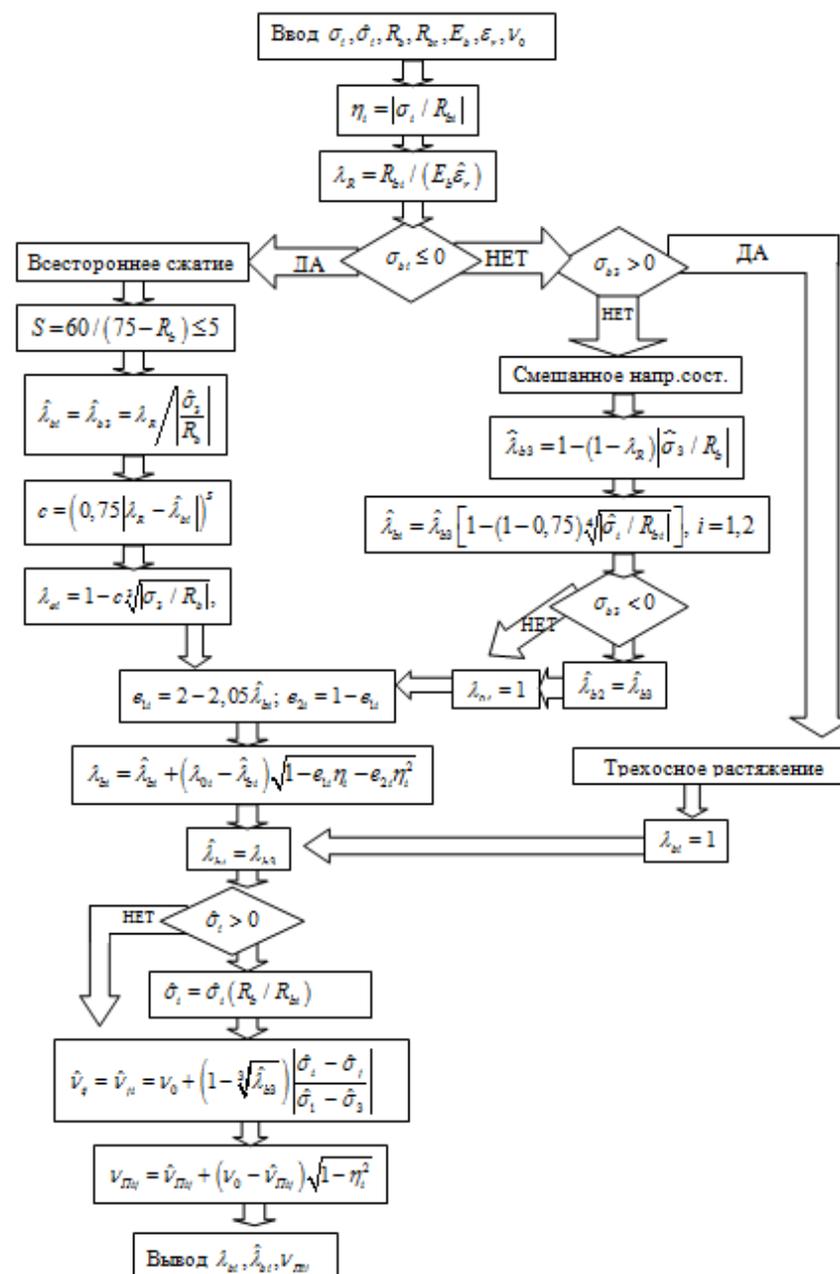


Рис. 3.4 Блок-схема определения секущих модулей продольных и поперечных деформаций бетона

3.3.2. Арматура.

Матрицу $[D_s]$ для арматуры s -ого направления будем строить в местной системе координат η_1, η_2, η_3 как для однонаправленного материала (рис.3.1), способного воспринимать усилия только по площадкам перпендикулярным направлениям стержней [49]. Деформационные зависимости для арматуры в таком случае имеют вид

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{s1} \\ \sigma_{s2} \\ \sigma_{s3} \\ \tau_{s12} \\ \tau_{s23} \\ \tau_{s31} \end{Bmatrix} = [D_s] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{s1} \\ \varepsilon_{s2} \\ \varepsilon_{s3} \\ \gamma_{s12} \\ \gamma_{s23} \\ \gamma_{s31} \end{Bmatrix}. \quad (3.30)$$

Матрица $[D_s]$ равна

$$[D_s] = \mu_s \begin{bmatrix} E_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_s \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

где E_s – модуль продольных деформаций арматуры s -ого направления;

G_s – модуль сдвига армирующей среды s -ого направления.

Для определения модуля продольных деформаций арматуры E_s используется диаграмма Прандтля с упрочнением (рис. 3.5), справедливая как в области сжатия так и растяжения. При этом модуль E_s определяется по формуле

$$E_s = \begin{cases} E_s^0, & \text{при } \varepsilon_s < \varepsilon_s^0 \\ \frac{\sigma_s^T - (\varepsilon_s - \varepsilon_s^T) E_s^T}{\varepsilon_s}, & \text{при } \varepsilon_s > \varepsilon_s^0 \end{cases}, \quad (3.32)$$

где E_s^0 - начальный модуль упругости арматуры s -ого направления;

σ_s^T - предел текучести арматуры;

E_s^T - модуль упрочнения.

Модуль сдвига армирующей среды предлагается определять по формуле [9, 9]

$$G_s = \frac{E_s}{1 + \nu_s \mu_s}, \quad (3.33)$$

где: ν_s - коэффициент Пуассона для стали.

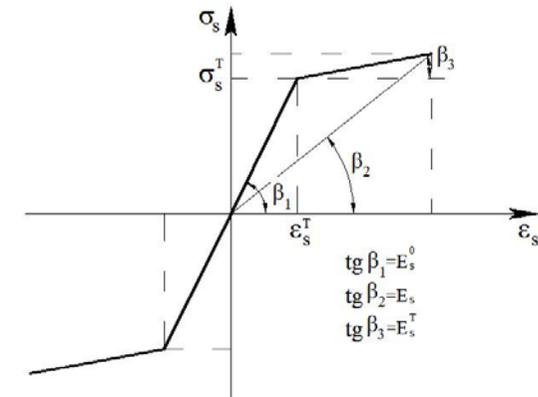


Рис. 3.5. Диаграмма деформирования арматурной стали (диаграмма Прандтля с упрочнением).

Матрицы $[D_b]$ и $[D_s]$ для бетона и арматуры s -ого направления установлены в местных ортогональных системах координат $\xi_i (i=1,2,3)$ и $\eta_s (s=1,2,3)$. Естественно, перед тем, как осуществлять их суммирование в соответствии с формулой (3.6) при получения итоговой матрицы для железобетона, их необходимо преобразовать к единой общей системе координат X, Y, Z . Эти преобразования осуществляются по хорошо известным правилам

$$\begin{aligned} [D_b] &= [m_b] [D_b'] [m_b]^T; \\ [D_s] &= [m_s] [D_s'] [m_s]^T, \end{aligned} \quad (3.34)$$

где $[m_b], [m_s]$ - квадратные матрицы шестого порядка, компонентами которых являются квадратичные функции $m_{ck} (k=1,2,3)$ (направляющие косинусы), перевода из местной системы координат в общую [50]

$$[m_x] = \begin{bmatrix} m_{11}^2 & m_{12}^2 & m_{13}^2 & 2m_{11}m_{12} & 2m_{12}m_{13} & 2m_{11}m_{13} \\ m_{21}^2 & m_{22}^2 & m_{23}^2 & 2m_{21}m_{22} & 2m_{22}m_{23} & 2m_{21}m_{23} \\ m_{31}^2 & m_{32}^2 & m_{33}^2 & 2m_{31}m_{32} & 2m_{32}m_{33} & 2m_{31}m_{33} \\ m_{11}m_{21} & m_{12}m_{32} & m_{13}m_{23} & m_{11}m_{22} + m_{11}m_{22} & m_{12}m_{23} + m_{13}m_{22} & m_{11}m_{23} + m_{13}m_{21} \\ m_{21}m_{31} & m_{22}m_{32} & m_{23}m_{33} & m_{21}m_{32} + m_{22}m_{31} & m_{22}m_{33} + m_{23}m_{32} & m_{21}m_{33} + m_{23}m_{31} \\ m_{31}m_{11} & m_{32}m_{12} & m_{33}m_{13} & m_{11}m_{32} + m_{12}m_{31} & m_{12}m_{33} + m_{13}m_{32} & m_{11}m_{33} + m_{13}m_{31} \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

$x=b,s$

Так как у арматуры и бетона свои локальные оси, то структура матрицы $[m_x]$ будет для обоих материалов одинакова, а сами значения функций m_{ck} будут различными.

3.4. Определяющие соотношения для железобетона с трещинами.

Так же, как и на стадии до образования трещин, железобетон с трещинами будем считать сплошным, анизотропным физически нелинейным, комплексным материалом, для которого формально справедливы условия совместности (3.1), (3.2) и соотношение (3.6). Рассмотрим железобетонный элемент, показанный на рис.3.1, и предположим, что на одной или нескольких гранях такого элемента образовалась трещина.

Сначала определим компоненты тензора напряжений по граням элемента трещинами по площадкам с нормалью ξ_i (схема 1 на рис.3.2). По площадкам-трещинам усилия воспринимаются в основном арматурой и лишь частично, в начальный момент, остаточными связями зацепления в бетоне [590]. В арматурных стержнях в сечениях с трещиной возникают нормальные σ_{si} и касательные τ_{s12} и τ_{s13} напряжения, которые достигают в этих сечениях максимальных значений. С удалением от трещин эти напряжения уменьшаются. Причем, касательные напряжения, которые обусловлены вынужденными тангенциальными смещениями стержня у берегов трещин, затухают довольно быстро и на некотором удалении от трещин становятся пренебрежимо малыми. Нормальные же напряжения падают до конечных значений за счет сил сцепления по контакту арматуры с бетоном, и на участке между трещинами оцениваются интегрально при помощи средней величины $\bar{\sigma}_{ms1}$. Умножив напряжения в арматурном стержне на площади арматуры можно получить составляющие усилий по граням элемента с трещиной (рис. 3.6).

Спроектируем эти усилия на оси ξ_i ($i=1,2,3$). Используя формулы преобразования тензоров второго ранга, будем иметь

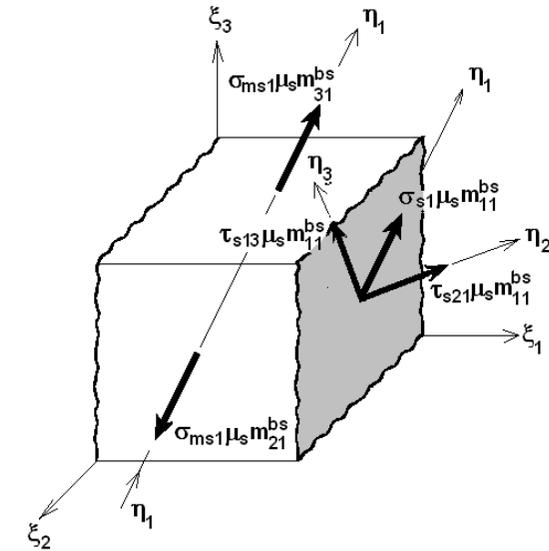


Рис. 3.6 Составляющие усилий в арматуре по грани элемента с трещиной

$$\{\tilde{\sigma}_{srk}\} = \delta_r \left(\sigma_{si} \mu_{si} m_{ri} m_{ki} + \sum_{j=1}^3 \tau_{sij} \mu_{si} m_{ri} m_{rj} \right) + (1 - \delta_r) \sigma_{msi} m_{ri} m_{ki}; \quad r, k = 1, 2, 3, \quad (3.36)$$

где $\{\tilde{\sigma}_{srk}\} = \{\sigma_s^*\} = \{\bar{\sigma}_{s11} = \sigma_{s1}; \bar{\sigma}_{s22} = \sigma_{s2}; \bar{\sigma}_{s33} = \sigma_{s3}; \tau_{s12}; \tau_{s21}; \tau_{s23}; \tau_{s32}; \tau_{s13}; \tau_{s31}\}$ - вектор-функция напряжений в арматуре по граням элемента в осях ξ_i ($i=1,2,3$);

$\bar{\sigma}_{msi}$ - средние нормальные напряжения в арматуре на участке между трещинами

$$m_{ij} = m_{ij}^{bs}.$$

Причем, компоненты напряжений (3.36) образуют несимметричный тензор, то есть $\tau_{srk} \neq \tau_{skr}$. Как будет сказано далее, это приведет к несимметричности и тензора деформаций. Множители δ_r ($i=1,2,3$) для различных схем трещин (рис.3.2) принимают, как и ранее, следующие значения: схема 1 - $\delta_1=1, \delta_2=\delta_3=0$; схема 2 - $\delta_1=\delta_2=1, \delta_3=0$; схема 3 - $\delta_1=\delta_2=\delta_3=1$.

При отсутствии трещин все δ_r равны нулю. Отметим, что при нескольких направлениях армирования необходимо просуммировать $\{\sigma_{srk}\}$, вычисленные для каждого из направлений.

Общие напряжения по граням элемента $\{\sigma_{rk}\}$ вычисляются по-разному: на площадках-трещинах они суммируются из напряжений в арматуре и напряжений зацепления берегов трещин (индекс «з»)

$$\sigma_{rk} = \tilde{\sigma}_{srk} + \sigma_{zrk}, \quad (3.37)$$

а на остальных площадках - из напряжений в арматуре и бетоне

$$\sigma_{rk} = \tilde{\sigma}_{srk} + \sigma_{brk}, \quad (3.38)$$

или в обобщенном виде:

$$\{\sigma^*\} = \{\sigma_s^*\} + \{\sigma_b^*\}, \quad (3.39)$$

где для напряжений по площадкам-трещинам индекс «b» заменяется на индекс «з».

Теперь необходимо определить относительные деформации в арматурных стержнях s -ого направления в местной системе координат η_1, η_2, η_3 . Деформации состоят из двух слагаемых

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{sij} + \varepsilon_{bij}, \quad (3.40)$$

где $\varepsilon_{ii} = \varepsilon_i$, $\varepsilon_{ij} = \gamma_{ij}^*$ при $i \neq j$

Первое слагаемое в формуле (3.40) обусловлено раскрытием трещин и взаимным сдвиг их берегов. Оно определяется по следующей формуле

$$\varepsilon_{sij} = \sum_{p=1}^3 \delta_p (\varepsilon_{p1} m_{p1} m_{1j} + \varepsilon_{p2} m_{p1} m_{2j} + \varepsilon_{p3} m_{p1} m_{3j}), \quad p=1,2,3. \quad (3.41)$$

Второе слагаемое связано с деформациями блоков бетона между трещинами и определяется по формуле

$$\varepsilon_{bij} = \sum_{p=1}^3 (1 - \delta_p) (\varepsilon_{p1} m_{p1} m_{1j} + \varepsilon_{p2} m_{p1} m_{2j} + \varepsilon_{p3} m_{p1} m_{3j}). \quad (3.42)$$

Отнесем деформации ε_{sij} и ε_{bij} к деформациям железобетонного элемента ε_{pk} в местной ортогональной системе координат ξ_1, ξ_2, ξ_3

$$\{\varepsilon_{pk}\} = \{\varepsilon^*\} = \{\varepsilon_{11} = \varepsilon_1; \varepsilon_{22} = \varepsilon_2; \varepsilon_{33} = \varepsilon_3; \gamma_{12}^*; \gamma_{21}^*; \gamma_{23}^*; \gamma_{32}^*; \gamma_{13}^*; \gamma_{31}^*\}, \quad (3.43)$$

Здесь деформации сдвига γ_{ij}^* разделены на две составляющие, так как они связаны с соответствующими составляющими несимметричного тензора напряжений. Множитель δ_p определяется аналогично (3.36).

Остановимся на определении связи напряжений в арматуре с общими деформациями железобетонного элемента с трещинами [51, 73]. Следует иметь в виду, что общие деформации будут складываться из двух составляющих: первое определяет те деформации арматуры, которые непосредственно связаны с напряжениями вдоль стержней в трещине, второе слагаемое – это влияние деформаций блоков бетона между трещинами. Таким

образом, продольные деформации арматуры в трещине в направлении η_l могут быть определены по формуле [57]

$$\varepsilon_l = \frac{\sigma_{s1} \psi_s}{E_s} + \tilde{\varepsilon}_{b1} (1 - \psi_s), \quad (3.44)$$

где E_s – модуль деформации арматуры s -ого направления (для упруго-пластической стадии деформирования арматуры он заменяется на секущий);

ψ_s – коэффициент В.И. Мурашева, учитывающий влияние растянутого на участке между трещинами бетона на работу арматуры s -ого направления, определяется из выражения

$$\psi_s = 1 - \omega \frac{R_{bt}}{\sigma_{s1} \mu_s}, \quad (3.45)$$

где $\omega \approx 0,7$ – коэффициент полноты эпюры растягивающих напряжений в бетоне;

$\tilde{\varepsilon}_{b1} (1 - \psi_s)$ – деформации арматуры, вызванные поперечными деформациями блоков бетона между трещинами $\tilde{\varepsilon}_{bi}$ в осях ортотропии ξ_1, ξ_2, ξ_3 .

Деформации $\tilde{\varepsilon}_{bi}$ вычисляются по формуле

$$\tilde{\varepsilon}_{bi} = \sum_{p=1}^3 (1 - \delta_p) (\varepsilon_{p1} m_{p1} m_{1i} + \varepsilon_{p2} m_{p1} m_{2i} + \varepsilon_{p3} m_{p1} m_{3i}). \quad (3.46)$$

Продольные деформации арматуры можно определить также через средние напряжения $\bar{\sigma}_{ms1}$

$$\varepsilon_l = \frac{\bar{\sigma}_{ms1}}{E_s}. \quad (3.47)$$

Определим нормальные напряжения σ_{s1} и $\bar{\sigma}_{ms1}$ в арматурных стержнях s -ого направления в осях ξ_1, ξ_2, ξ_3 из соотношений (3.44) и (3.47) с учетом выражений (3.40) и (3.46) для любой схемы трещин

$$\sigma_{s1} = \frac{E_s}{\psi_s} \sum_{p=1}^3 [\delta_p + \psi_s (1 - \delta_p)] (\varepsilon_{p1} m_{p1} m_{11} + \varepsilon_{p2} m_{p1} m_{21} + \varepsilon_{p3} m_{p1} m_{31}) \quad (3.48)$$

$$\bar{\sigma}_{ms1} = E_s \sum_{p=1}^3 (\varepsilon_{p1} m_{p1} m_{11} + \varepsilon_{p2} m_{p1} m_{21} + \varepsilon_{p3} m_{p1} m_{31})$$

При определении касательных напряжений будем полагать, что они обусловлены исключительно сдвигом берегов трещин и связаны только с угловыми деформациями $\varepsilon_{sij} = \gamma_{sij}^*$ ($i \neq j$). Эта связь осуществляется при помощи следующего соотношения [50]

$$\tau_{s1j} = \frac{E_s \gamma_{s1j}^*}{\psi_s n_{\tau s}} = \frac{E_s}{\psi_s n_{\tau s}} \left[\sum_{p=1}^3 \delta_p (\varepsilon_{p1} m_{p1} m_{1j} + \varepsilon_{p2} m_{p1} m_{2j} + \varepsilon_{p3} m_{p1} m_{3j}) \right]; \quad (3.49)$$

при $p = 1, 2, 3; j = 2, 3$,

где $n_{\tau s}$ – коэффициент, учитывающий податливость стержней в бетоне тангенциальным смещениям у берегов трещины [49, 50].

Установим связь между напряжениями и деформациями в железобетонном элементе для арматуры s -ого направления в координатах ξ_1, ξ_2, ξ_3 , совпадающими с осями главных напряжений в бетоне. Путем подстановки выражений (3.48) и (3.49) в формулу (3.36) получим

$$\tilde{\sigma}_{srk} = \frac{E_s}{\psi_s} \mu_s m_{r1} m_{p1} \left\{ m_{k1} m_{q1} [\delta_r \delta_p (1 - \psi_s) + \psi_s] + \delta_r \delta_p \frac{1}{n_{\tau s}} \sum_{j=2}^3 m_{kj} m_{qj} \right\} \varepsilon_{pq}. \quad (3.50)$$

Теперь запишем соотношение (3.50) в матричной форме

$$\{\sigma_s^*\} = [D_s^*] \{\varepsilon_s^*\}, \quad (3.51)$$

где вектора $\{\sigma_s^*\}$ и $\{\varepsilon_s^*\}$ определены полученными выше выражениями (3.36) и (3.40).

В железобетонном элементе с трещиной связь между напряжениями и деформациями в бетоне в осях главных напряжений ξ_i имеет вид

$$\{\sigma_b^*\} = [D_b^*] \{\varepsilon_b^*\}. \quad (3.52)$$

В выражениях (3.51) и (3.52) матрицы $[D_s^*]$ и $[D_b^*]$ из-за несимметричности векторов напряжений и деформаций будут иметь размерность 9×9 . На площадках-трещинах матрицы бетона $[D_b^*]$ формируются при $E_i = E_3$, $G_{ij} = G_3$, и $\nu_{ij} = 0$, где E_3 , G_3 – модули связей зацепления бетона, ν_{ij} – коэффициент поперечных деформаций.

В развернутом виде соотношение (3.52), например для схемы 1, может быть записано так

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{b1} \\ \sigma_{b2} \\ \sigma_{b3} \\ \tau_{b12} \\ \tau_{b21} \\ \tau_{b23} \\ \tau_{b32} \\ \tau_{b13} \\ \tau_{b31} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Omega} \begin{pmatrix} E_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & \nu_{23} E_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_{23} E_2 & E_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{b1} \\ \varepsilon_{b2} \\ \varepsilon_{b3} \\ \gamma_{b12} \\ \gamma_{b21} \\ \gamma_{b12} \\ \gamma_{b23} \\ \gamma_{b32} \\ \gamma_{b31} \end{Bmatrix}, \quad (3.53)$$

$$\Omega = 1 - \nu_{32} \nu_{23}.$$

Для остальных схем трещин также несложно развернуть соотношения (3.52).

Ниже, на рис. 3.7-3.8, приведены блок схемы вычисления матриц жесткости для бетона и арматуры.

Если считать, что средние деформации элемента равны средним деформациям арматуры и бетона, с помощью выражений (3.51) и (3.52) с учетом соотношений (3.39) получаем определяющие соотношения для железобетона с трещинами в осях главных напряжений в бетоне ξ_1, ξ_2, ξ_3

$$\{\sigma^*\} = [D^*] \{\varepsilon^*\}, \quad (3.54)$$

где $[D^*] = [D_b^*] + \sum_s [D_s^*]$ – квадратная матрица девятого порядка для железобетона с трещинами.

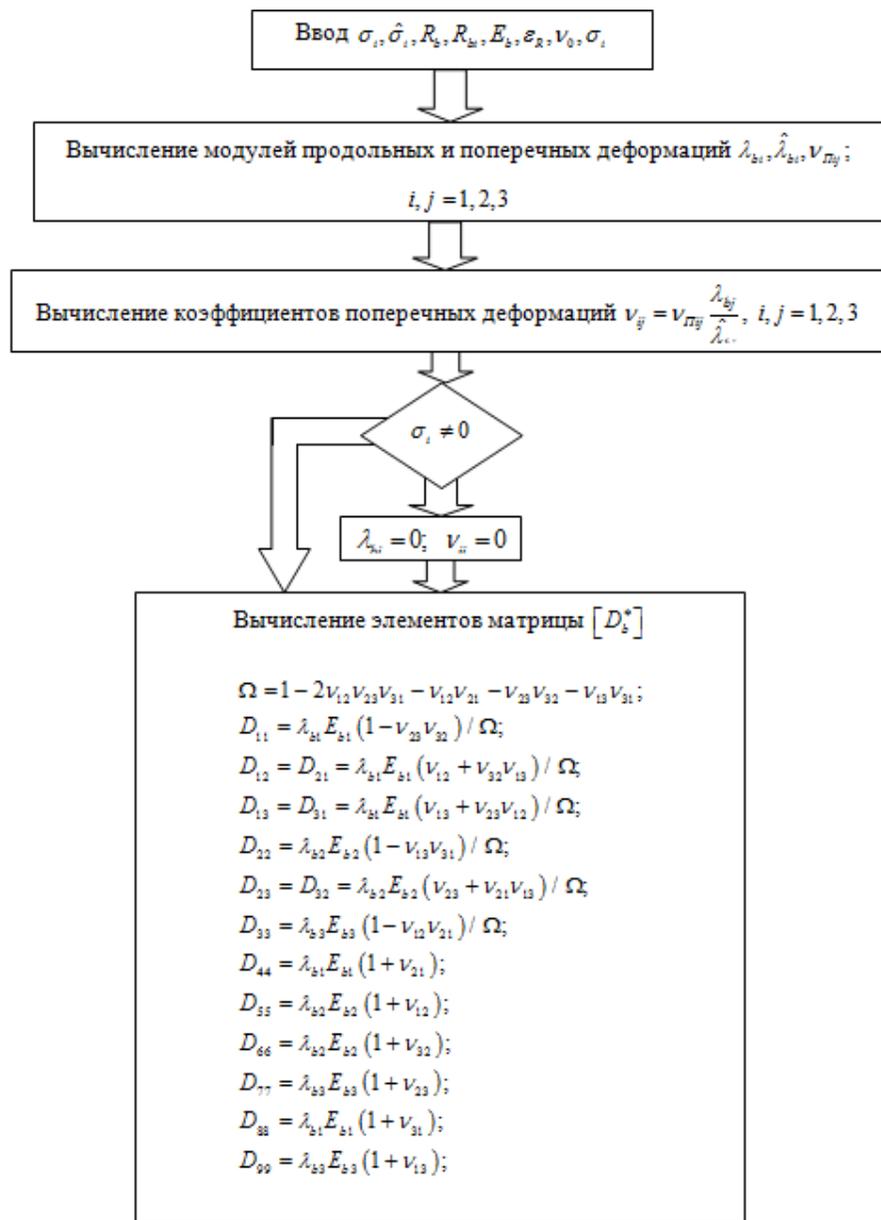


Рис. 3.7 Блок-схема построения матрицы жесткости бетона $[D]$

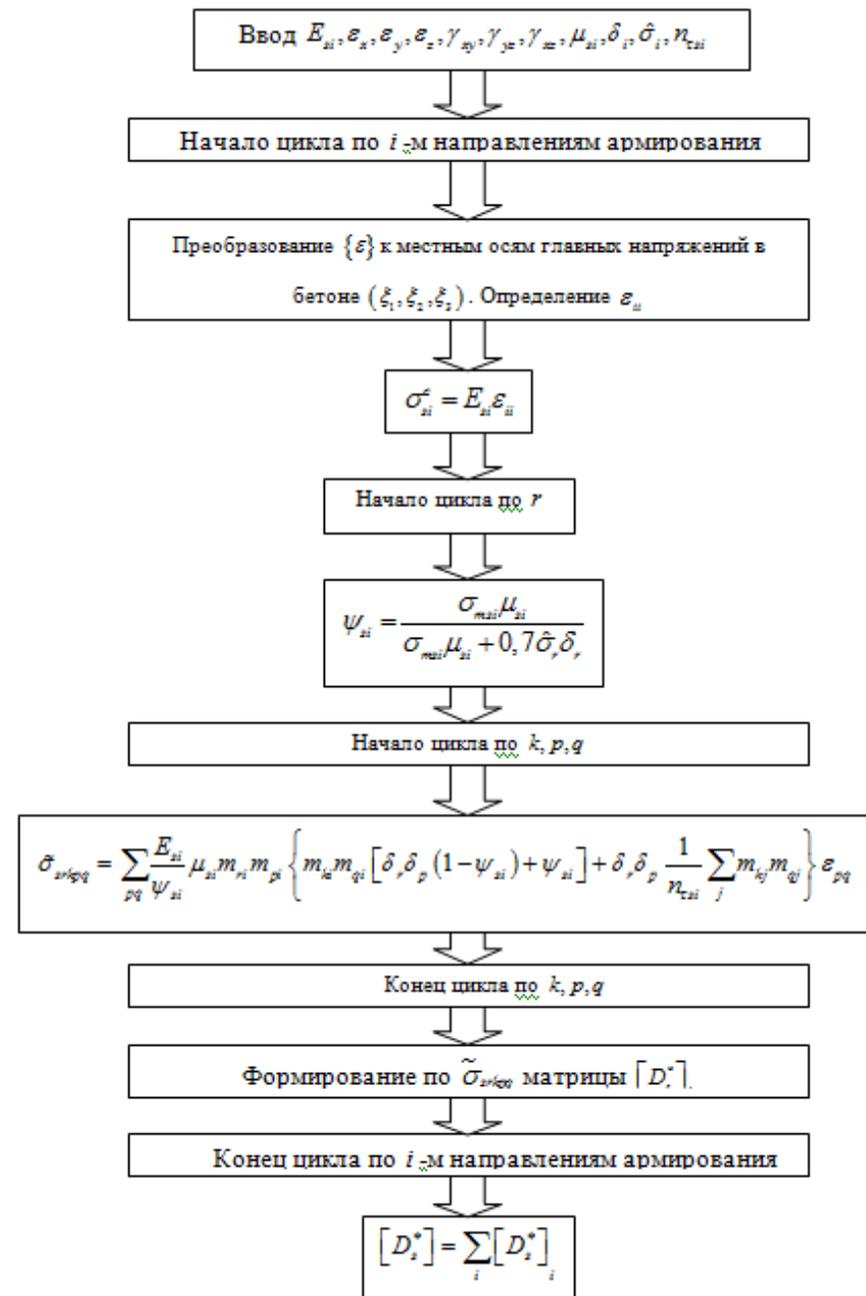


Рис. 3.8 Блок-схема построения матрицы жесткости арматуры $[D_s^*]$

Непосредственное использование соотношения (3.54), содержащего в себе компоненты несимметричного тензора деформаций, в производные от перемещений которого входят компоненты жесткого поворота и не соблюдается закон парности касательных напряжений, не могут быть использованы в расчетах. Чтобы исправить это, необходимо исключить жесткий поворот, а касательные напряжения приравнять друг к другу

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji} = \gamma_{ij}^* + \gamma_{ji}^*, \quad \tau_{ij}^* = \tau_{ji}^* = \tau_{ij}. \quad (3.55)$$

При таком представлении вновь образованные вектора деформаций и напряжений будут иметь обычный вид и размерность, равную шести $\{\sigma\} = \{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \tau_{12} \tau_{23} \tau_{31}\}$ и $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \gamma_{12} \gamma_{23} \gamma_{31}\}$.

Для симметризации определяющих соотношений примем подход, предложенный в [570]. Для этого представим связь между векторами $\{\varepsilon\}$ и $\{\varepsilon^*\}$ в виде

$$\{\varepsilon\} = [H]\{\varepsilon^*\}, \quad (3.56)$$

где $[H]$ - прямоугольная матрица 6x9, состоящая из единиц и нулей

$$[H] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Далее, учитывая очевидное энергетическое равенство $\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} = \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma^*\}$ и используя выражение (3.56), получим

$$\{\sigma^*\} = [H]^T \{\sigma\}. \quad (3.57)$$

Сопоставляя (3.54) с (3.5), окончательно получим

$$[D] = \left([H]^T [D^*]^{-1} [H] \right)^{-1}. \quad (3.58)$$

Здесь матрица $[D]$ - искомая квадратная матрица 6x6, осуществляющая связь уже между симметричными векторами напряжений и деформаций. Так же как и для железобетона без трещин, матрица $[D]$ должна быть преобразована из местной системы координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 в общую X, Y, Z . Это преобразование осуществляется по формуле (3.34).

3.5. Алгоритмизация вычисления определяющих соотношений

Алгоритм вычисления матрицы механических характеристик железобетона сформулируем в виде блок-схемы (рис.3.8). Именно этот алгоритм положен в основу соответствующей подпрограммы, реализовыванной в конечно-элементном программном комплексе [57].

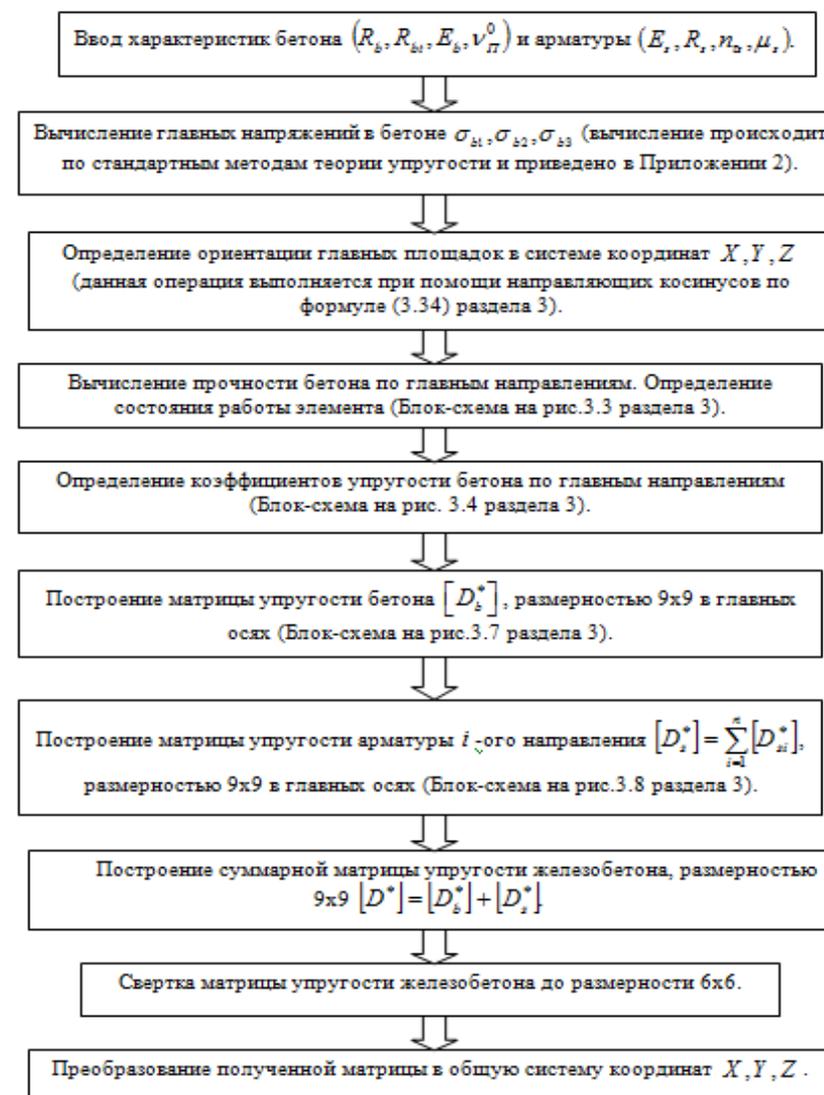


Рис. 3.8 Блок-схема вычисления матрицы для железобетона

ГЛАВА 4
РЕАЛИЗАЦИЯ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ
ЖЕЛЕЗОБЕТОНА В МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

4.1. Решение физически нелинейных задач МКЭ

Расчет железобетонных конструкций методом конечных элементов с учетом реальных свойств материалов приводит к необходимости решения систем нелинейных алгебраических уравнений. Нелинейность разрешающих уравнений МКЭ обусловлена непропорциональной связью между напряжениями и деформациями, т.е., так называемой, физической нелинейностью.

Рассмотрим общие принципы численного решения нелинейных задач методом конечных элементов в форме метода перемещений.

Как известно, разрешающим уравнением МКЭ в этом случае является уравнение равновесия

$$\{P\} = [K]\{q\} \quad (4.1)$$

где $\{P\}$ - вектор – столбец узловых внешних сил системы;

$\{q\}$ - вектор-столбец узловых перемещений системы.

При этом вся информация о физической нелинейности содержится в матрице жесткости системы $[K]$, компоненты которой связаны с матрицами жесткости $[K]_i$ отдельных i -ых элементов и получаются путем суммирования по узлам системы компонент матриц всех элементов, которые связаны с этим узлом [7]. В свою очередь, матрица жесткости любого i -го элемента определяется по формуле [44]

$$[K]_i = \iiint_{V_i} [B]^T [D][B] dv. \quad (4.2)$$

Здесь $[B]$ - матрица, зависящая от вида и геометрии конечного элемента, а также от способа аппроксимаций узловых перемещений;

$[D]$ - матрица механических характеристик материала i -го элемента.

В главе 3 была сформулирована физическая модель для железобетона при сложном напряженном состоянии и в результате получены определяющие уравнения в виде матрицы $[D]$. Ясно, что эта матрица нелинейна, ее компоненты являются сложными функциями деформаций, напряжений, т.е. функциями основных неизвестных задачи. $[D] = [D(\bar{q})]$. Таким образом, разрешающее уравнение МКЭ (4.1) является нелинейным. Математическая

формулировка задачи в данном случае сводится к решению нелинейных разрешающих уравнений

$$\bar{F}(\{\bar{q}\}) = [\bar{K}(\{\bar{q}\})]\{\bar{q}\} - \{\bar{P}\} = 0. \quad (4.3)$$

Рассмотрим общие способы решения нелинейного уравнения (4.3) [9]. Допустим, что известно решение этого уравнения $\{q\}$. Тогда вариация (4.3) из положения равновесия по $\{\delta q\}$ с учетом того, что $\{P\}$ не зависит от $\{q\}$, будет иметь вид

$$\delta F(\{q\}) = \delta([K(\{q\})]\{q\}). \quad (4.4)$$

Введем в рассмотрение матрицу жесткости $[K_T]$, зависящую от достигнутого уровня перемещений $\{q + \delta q\}$. Согласно рис.4.1а получим

$$\delta F(\{q\}) = [K_T]\{\delta q\}.$$

Рассмотрим процедуру Ньютона-Рафсона применительно к уравнению (4.3), взяв за k - е приближение к корню вектор-столбец $\{q^{(k)}\}$. Легко видеть, что если $\{q^{(k)}\} \approx \{q + \delta q\}$, то $\delta F(\{q\}) = -F(\{q^{(k)}\})$, $[K_T] = [K(\{q^{(k)}\})]$ и, следовательно,

$$\{\Delta q^{(k+1)}\} = -[K(\{q^{(k)}\})]^{-1} F(\{q^{(k)}\}). \quad (4.5)$$

Отсюда

$$\{q^{(k+1)}\} = \{q^{(k)}\} - [K(\{q^{(k)}\})]^{-1} F(\{q^{(k)}\}), \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.6)$$

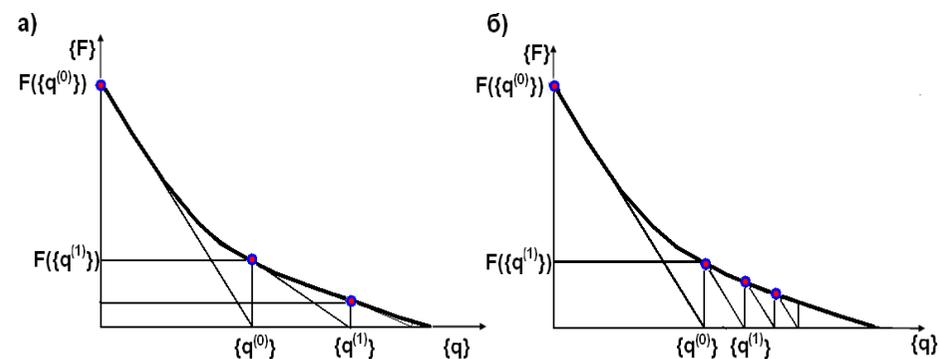


Рис.4.1 Методы решения нелинейных задач: а) Ньютона-Рафсона;
б) Ньютона-Канторовича.

Если в (4.6) задать матрицу $\left[K(\{q^{(k)}\}) \right]$ постоянной, то придем к процедуре Ньютона-Канторовича (рис.4.1б)

$$\{q^{(k+1)}\} = \{q^{(k)}\} - \left[K(\{q^{(k)}\}) \right]^{-1} F(\{q^{(k)}\}). \quad (4.7)$$

Вектор $F(\{q^{(k)}\})$, является неуравновешенным вектором-столбцом нагрузки $\{\Delta \bar{P}\}$ (невязкой сил).

Для решения уравнения (4.3) также можно использовать метод итераций

$$\{q^{(k+1)}\} = \left[K(\{q^{(k)}\}) \right]^{-1} \{P\}, \quad (4.8)$$

непосредственно следующий из (4.6). На первом этапе такой процедуры вектор $\{q^{(0)}\}$ определяется посредством матрицы жесткости $[K_o]$, в которой все члены, связанные с физической нелинейностью, принимаются равными нулю. Затем решения повторяются, причем на каждом $k+1$ этапе матрица жесткости уточняется с помощью вектора узловых перемещений, найденного на предыдущем шаге итерационного процесса.

При любом итерационном процессе процедуру счета повторяют до тех пор, пока разница между результатами решений, полученными на данном и предыдущем этапах, не будет достаточно малой.

Рассмотрим метод упругих решений А.А.Ильюшина [47], заключающийся в следующем. Вначале решается чисто упругая задача и определяется вектор-столбец узловых перемещений $\{q^{(0)}\} = [K_o]^{-1} \{P\}$, которому соответствует в каждом i -м конечном элементе вектор-функция деформаций $\{\varepsilon^{(0)}\}_i$. Затем, используя определяющие уравнения связи между напряжениями и деформациями, находится вектор-функция $\{\sigma^{(0)}\} = \left[D(\{q^{(0)}\}_i) \right] \{\varepsilon\}$. Это дает возможность определить вектор-столбец узловых внешних сил $\{P_{\sigma^{(0)}}\}$, обусловленный узловыми перемещениями $\{q^{(0)}\}$ в рассматриваемой нелинейной системе. Далее вычисляется разность

$$\{\Delta P^{(1)}\} = \{P\} - \{P_{\sigma^{(0)}}\}, \quad (4.9)$$

представляющая собой вектор невязки сил, который прикладывается к рассчитываемой конструкции, и из упругого решения находятся перемещения $\{\Delta q^{(1)}\} = [K_o]^{-1} \{\Delta P^{(1)}\}$. После этого определяется вектор-столбец $\{q^{(1)}\} = \{q^{(0)}\} + \{\Delta q^{(1)}\}$ и соответствующие ему $\{\varepsilon^{(1)}\}$, $\{\sigma^{(1)}\}$ и $\{P^{(2)}\}$. Затем

процесс повторяется до тех пор, пока невязка сил $\{\Delta P^{(k)}\}$ не будет меньше заданной точности решения. Описанная процедура полностью совпадает с методом Ньютона-Канторовича, если матрица жесткости остается постоянной, но здесь каждая из рассматриваемых величин имеет вполне определенный физический смысл. В случае если матрица жесткости уточняется на каждой итерации, причем это уточнение получается с помощью секущей линеаризации, то метод упругих решений можно рассматривать как некий модифицированный вариант метода Ньютона-Рафсона.

Схематично, методы решения нелинейного матричного уравнения изображены на рис.4.2.

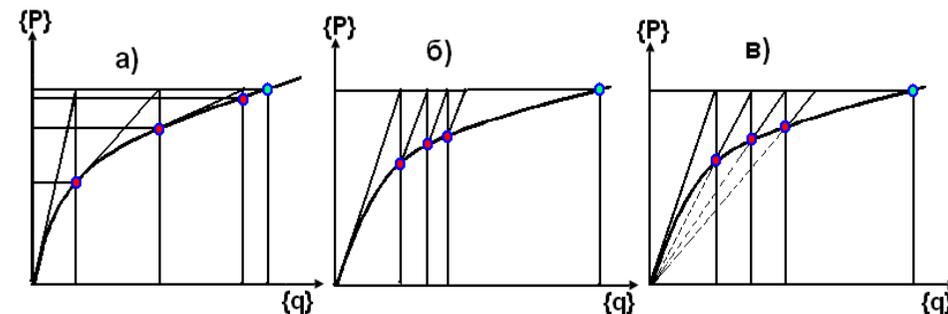


Рис.4.2 Итерационные методы: а) Ньютона-Рафсона; б) Ньютона-Канторовича; в) модифицированный Ньютона-Рафсона.

Таким образом, решение нелинейных задач сводится к последовательному приближению к искомому решению. Процесс вычислений заканчивается, когда достигнута заданная точность решения ε , т.е., при выполнении условия $\|\delta q\| \leq \varepsilon$. Здесь $\|\delta q\|$ - норма вектора $\{\delta q\}$. При этом под нормой чаще всего принимают евклидову норму

$$\|\delta q\| = \sqrt{\{\delta q\}^T \{\delta q\} / \{q\}^T \{q\}}. \quad (4.10)$$

Нелинейность задачи ведет к нарушению принципа суперпозиции и ее решение существенным образом зависит от истории (пути) нагружения. В случае сложного, непропорционального нагружения решение может быть получено лишь разбиением пути нагружения на малые интервалы и суммированием найденных на каждом интервале решений, т.е. на основе шагового метода.

Для реализации шаговой концепции метод конечных элементов должен быть сформулирован в инкрементальной форме, когда разрешающие уравнения записываются не для конечных величин узловых внешних воздействий, а для их приращений в пределах каждого шага. При этом процесс

деформирования тела как при динамических, так и при статических кратковременных и длительных воздействиях удобно представлять как процесс движения его точек, а решение задачи отыскивать, последовательно переходя от шага к шагу, в виде перемещения узловых точек $\{q\}$ в момент времени $t + \Delta t$, т.е. $\{q^{t+\Delta t}\} = \{q^t\} + \{\Delta q\}$. При этом вектор решения на каждом шаге $\{\Delta q\}$ должен быть найден из системы уравнений (4.3), но записанной в инкрементальной форме [57]

$$[K(\{q^t\})]\{\Delta q\} - \{\Delta P\} = 0, \quad (4.11)$$

где $[K(\{q^t\})]$ - матрица жесткости системы, являющаяся функцией ее состояния в момент времени t ; $\{\Delta P\}$ - вектор приращений узловых внешних сил системы.

Процедура шагового метода представлена графически на рис. 4.3а.

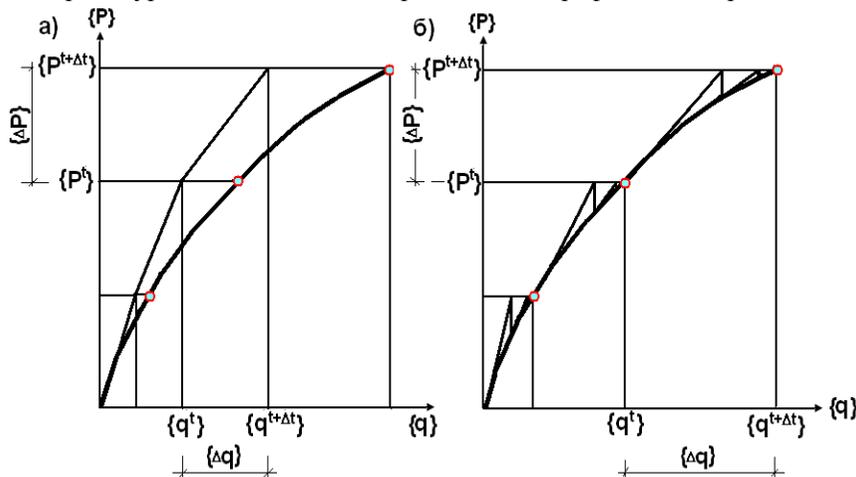


Рис. 4.3. Шаговые методы: а) простой шаговый; б) шагово-итерационный.

При решении реальных задач приходится иметь дело с конечными временными интервалами, что, как видно из рис.4.3а, ведет к «дрейфу» приближенного решения от точного. Для устранения этого «дрейфа» на каждом шаге могут быть использованы различные итерационные алгоритмы, описанные ранее. Пример шагово-итерационного алгоритма приведен на рис.4.3б.

Блок-схема алгоритма нелинейного расчета по методу конечных элементов шагово-итерационным методом приведена на рис.4.4.

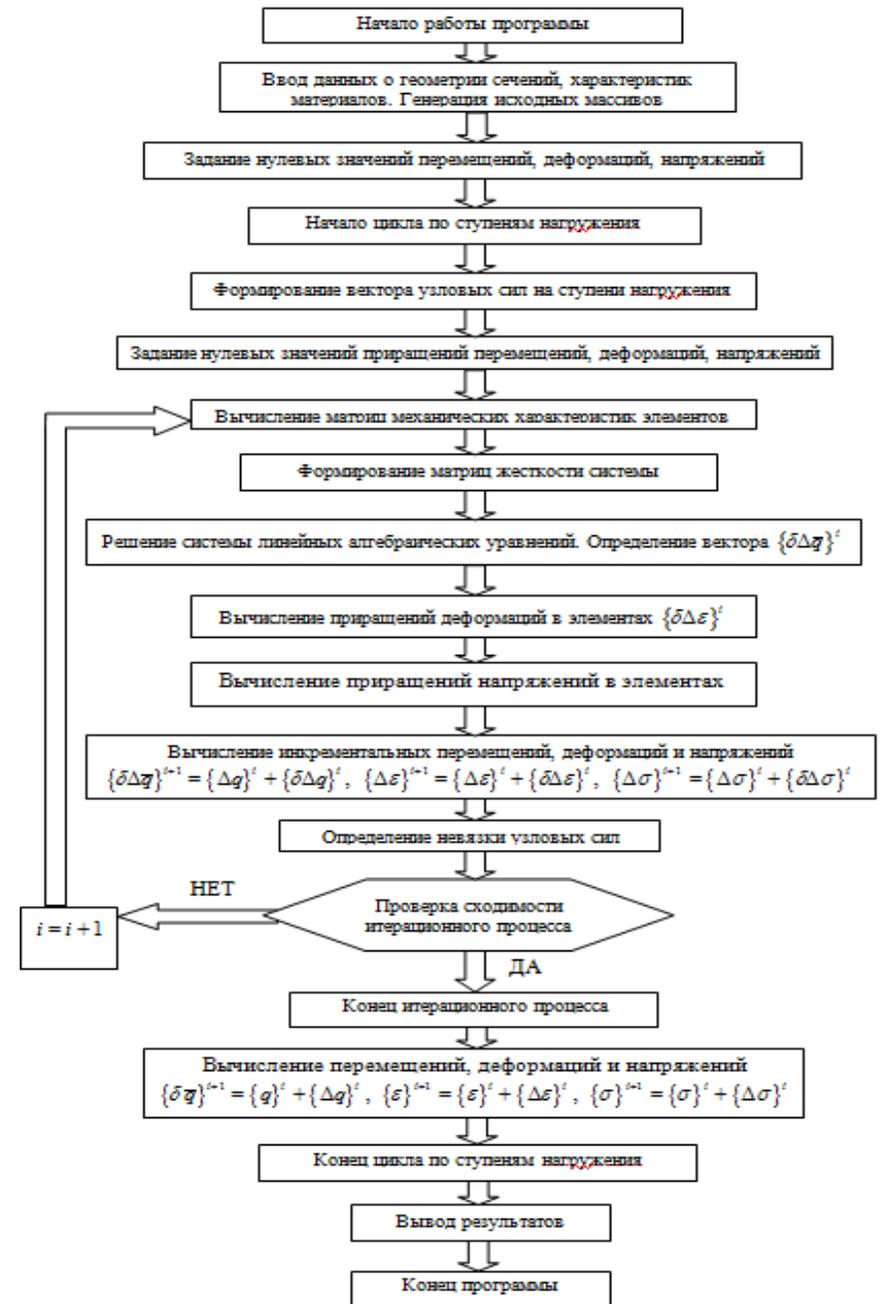


Рис. 4.4 Блок-схема алгоритма нелинейного расчета

4.2. Конечные элементы для решения трехмерных задач

Для решения трехмерных задач в программном комплексе «CONCORD» [57] существует библиотека объемных конечных элементов. Несмотря на то, что матрицы жесткости любого из этих элементов вычисляются по общей формуле (4.2), тем не менее, для каждого конкретного их вида эта матрица является уникальной. Каждый конечный элемент будет характеризоваться своей матрицей $[B]$, называемой матрицей деформаций, зависящей от его геометрии и способа интерполяции узловых перемещений. Кроме того, способ интерполяции определяет процедуру численного вычисления определенного интеграла по объему элемента.

Рассмотрим те из объемных элементов, которые использовались для решения трехмерной задачи механики железобетона при численном моделировании продавливания плоских железобетонных плит.

4.2.1. Элемент в виде параллелепипеда

Рассмотрим i -ый конечный элемент в виде параллелепипеда с восемью узловыми точками (рис.4.5) [75,121].

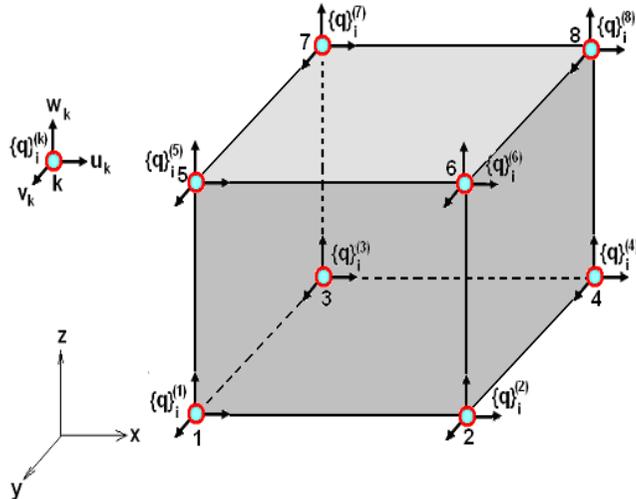


Рис.4.5. Конечный элемент в виде параллелепипеда.

Вектор узловых перемещений этого элемента имеет 24 компонента, объединенных в 8 блоков по количеству узлов

$$\{q\}_i = \left\{ \{q\}_i^{(1)} \dots \{q\}_i^{(k)} \dots \{q\}_i^{(8)} \right\} \quad (4.12)$$

где каждый из векторов равен $\{q\}_i^{(k)} = \{q_1^{(k)} q_2^{(k)} q_3^{(k)}\} = \{u_k v_k w_k\}$.

Аналогичную структуру также будет иметь и вектор узловых сил

$$\{R\}_i = \left\{ \{R\}_i^{(1)} \dots \{R\}_i^{(k)} \dots \{R\}_i^{(8)} \right\}, \quad (4.13)$$

где $\{R\}_i^{(k)} = \{R_1^{(k)} R_2^{(k)} R_3^{(k)}\}$.

Связь между векторами (4.12) и (4.13) осуществляется с помощью матрицы жесткости, которая имеет блочную структуру, с количеством блоков равным количеству узлов параллелепипеда

$$[K]_i = \begin{bmatrix} [K]_{i1}^{(1)} & \dots & [K]_{i1}^{(k)} & \dots & [K]_{i1}^{(8)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [K]_{ij}^{(1)} & \dots & [K]_{ij}^{(k)} & \dots & [K]_{ij}^{(8)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [K]_{i8}^{(1)} & \dots & [K]_{i8}^{(k)} & \dots & [K]_{i8}^{(8)} \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

где типовой блок определяется по формуле

$$[K]_{ij}^{(k)} = \iiint_{V_i} ([B]^{(j)})^T [D][B]^{(k)} dv. \quad (4.15)$$

Для того, чтобы построить матрицу жесткости элемента необходимо выразить перемещения точек внутри элемента $\{u\} = \{u(x, y, z) \ v(x, y, z) \ w(x, y, z)\}$ через перемещения его узлов $\{q\}_i$, другими словами установить зависимость вида

$$\{u\} = [C]\{q\}_i. \quad (4.16)$$

Здесь $[C]$, так называемая, матрица интерполяционных функций, которая в данном случае будет иметь восемь блоков, по числу узлов

$$[C] = [[C]^{(1)} \dots [C]^{(k)} \dots [C]^{(8)}], \quad (4.17)$$

каждый из которых равен $[C]^{(k)} = E_3 C_k(x, y, z)$, где E_3 - единичная матрица третьего порядка.

Интерполяционные функции $C_k(x, y, z)$ обычно формулируют не в общей системе координат x, y, z , а в местной, трехмерной нормализованной, имеющей для параллелепипеда вид (рис. 4.6)

$$\xi = \frac{x-x_c}{a}; \quad \eta = \frac{y-y_c}{b}; \quad \zeta = \frac{z-z_c}{c} \quad (4.18)$$

где x_c, y_c, z_c - координаты центра тяжести параллелепипеда.

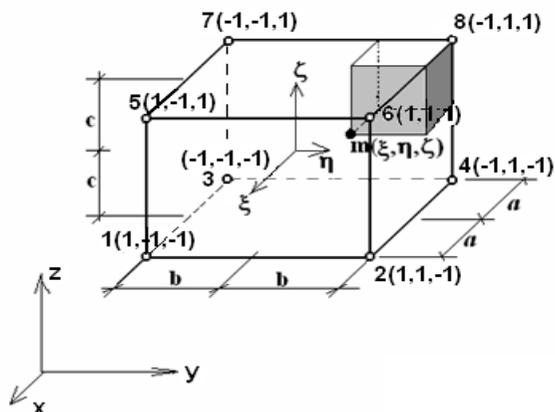


Рис. 4.6. Нормализованные координаты для параллелепипеда.

В этих координатах интерполяционная функция будет иметь вид

$$C_k(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi_k \xi)(1 + \eta_k \eta)(1 + \zeta_k \zeta) \quad (4.19)$$

и представляет собой интерполяционный полином первого порядка. Физический смысл выражений (4.19) заключается в том, что каждая из зависимостей представляет собой отношение объема соответствующего заштрихованного параллелепипеда с вершиной в данной точке к объему всего конечного элемента (рис.4.6).

Деформации внутри элемента определяются через перемещения его узлов посредством, так называемой, матрицы деформаций $[B]$, содержащей восемь стандартных блоков, которые входят в качестве сомножителей в подынтегральное выражение соотношения (4.15)

$$[B] = \left[[B]^{(1)} \dots [B]^{(k)} \dots [B]^{(8)} \right] \quad (4.20)$$

Стандартный блок матрицы деформаций определяется с помощью соотношения

$$[B]^{(k)} = [\Phi] C_k(x, y, z), \quad (4.21)$$

где $[\Phi]$ матрица дифференциальных операторов

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

После дифференцирования, получим

$$[B]^{(k)} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \frac{\xi_k}{a}(1 + \eta_k \eta)(1 + \zeta_k \zeta) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\eta_k}{b}(1 + \xi_k \xi)(1 + \zeta_k \zeta) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\zeta_k}{c}(1 + \xi_k \xi)(1 + \eta_k \eta) \\ \frac{\eta_k}{b}(1 + \xi_k \xi)(1 + \zeta_k \zeta) & \frac{\xi_k}{a}(1 + \eta_k \eta)(1 + \zeta_k \zeta) & 0 \\ 0 & \frac{\zeta_k}{c}(1 + \xi_k \xi)(1 + \eta_k \eta) & \frac{\eta_k}{b}(1 + \xi_k \xi)(1 + \zeta_k \zeta) \\ \frac{\zeta_k}{c}(1 + \xi_k \xi)(1 + \eta_k \eta) & 0 & \frac{\xi_k}{a}(1 + \eta_k \eta)(1 + \zeta_k \zeta) \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Матрица жесткости элемента также блочная и имеет вид (4.14), где каждый из блоков которой может быть вычислен по формуле (4.15). Произведя замену переменных, и, имея в виду, что элементарный объем равен $dv = dx dy dz = abc d\xi d\eta d\zeta$, представим (4.15) так

$$[K]_{ij}^{(k)} = abc \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ([B]^{(j)})^T [D][B]^{(k)} d\xi d\eta d\zeta \quad (4.23)$$

Подматрица $[K]_{ij}^{(k)}$ - квадратная, третьего порядка

$$[K]_{ij}^{(k)} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

После взятия определенного интеграла, имея в виду постоянство матрицы $[D]$ по объему элемента, получим

$$\begin{aligned} K_{11} &= D_{11}\theta_{11} + D_{44}\theta_{22} + D_{66}\theta_{33} + D_{14}(\theta_{12} + \theta_{21}) + D_{16}(\theta_{13} + \theta_{31}) + D_{46}(\theta_{23} + \theta_{32}); \\ K_{12} &= D_{12}\theta_{12} + D_{24}\theta_{22} + D_{26}\theta_{32} + D_{14}\theta_{11} + D_{44}\theta_{21} + D_{46}\theta_{31} + D_{15}\theta_{13} + D_{45}\theta_{23} + D_{56}\theta_{33}; \\ K_{13} &= D_{13}\theta_{13} + D_{34}\theta_{23} + D_{36}\theta_{33} + D_{15}\theta_{12} + D_{45}\theta_{22} + D_{56}\theta_{32} + D_{16}\theta_{11} + D_{46}\theta_{21} + D_{66}\theta_{31}; \\ K_{21} &= D_{21}\theta_{21} + D_{14}\theta_{11} + D_{15}\theta_{31} + D_{24}\theta_{22} + D_{44}\theta_{12} + D_{45}\theta_{32} + D_{26}\theta_{23} + D_{46}\theta_{13} + D_{56}\theta_{33}; \\ K_{22} &= D_{22}\theta_{22} + D_{44}\theta_{11} + D_{55}\theta_{33} + D_{24}(\theta_{12} + \theta_{21}) + D_{25}(\theta_{23} + \theta_{32}) + D_{45}(\theta_{13} + \theta_{31}); \\ K_{23} &= D_{23}\theta_{23} + D_{34}\theta_{13} + D_{35}\theta_{33} + D_{25}\theta_{22} + D_{45}\theta_{12} + D_{55}\theta_{32} + D_{26}\theta_{21} + D_{46}\theta_{11} + D_{56}\theta_{31}; \\ K_{31} &= D_{13}\theta_{31} + D_{15}\theta_{21} + D_{16}\theta_{11} + D_{34}\theta_{32} + D_{45}\theta_{22} + D_{46}\theta_{32} + D_{36}\theta_{33} + D_{56}\theta_{23} + D_{66}\theta_{13}; \\ K_{32} &= D_{23}\theta_{32} + D_{25}\theta_{22} + D_{26}\theta_{12} + D_{34}\theta_{31} + D_{45}\theta_{21} + D_{46}\theta_{11} + D_{35}\theta_{33} + D_{55}\theta_{23} + D_{65}\theta_{13}; \\ K_{33} &= D_{11}\theta_{11} + D_{44}\theta_{22} + D_{66}\theta_{33} + D_{14}(\theta_{21} + \theta_{12}) + D_{16}(\theta_{31} + \theta_{13}) + D_{46}(\theta_{32} + \theta_{23}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \theta_{11} &= \frac{bc}{96} \xi_j \xi_k (3 + \eta_j \eta_k) (3 + \zeta_j \zeta_k); & \theta_{21} &= \frac{c}{48} \xi_j \eta_k (3 + \zeta_j \zeta_k); \\ \theta_{12} &= \frac{c}{48} \xi_k \eta_j (3 + \zeta_j \zeta_k); & \theta_{22} &= \frac{ac}{96} \eta_j \eta_k (3 + \xi_j \xi_k) (3 + \zeta_j \zeta_k); \\ \theta_{13} &= \frac{b}{48} \xi_k \zeta_j (3 + \eta_j \eta_k); & \theta_{23} &= \frac{a}{48} \zeta_j \eta_k (3 + \xi_j \xi_k); \\ \theta_{31} &= \frac{b}{48} \xi_j \zeta_k (3 + \eta_j \eta_k); \\ \theta_{32} &= \frac{a}{48} \zeta_k \eta_j (3 + \xi_j \xi_k); \\ \theta_{33} &= \frac{ab}{96} \zeta_j \zeta_k (3 + \xi_j \xi_k) (3 + \eta_j \eta_k) \end{aligned}$$

Рассмотренный элемент в виде параллелепипеда относится к элементам первого порядка и допускает изопараметрическое отображение (рис.4.7). Для этого необходимо осуществить преобразование координат с использованием тех же интерполяционных функций, что и при интерполяции узловых перемещений

$$\begin{aligned} x &= C_1 x_1 + \dots + C_k x_k + \dots + C_n x_n; \\ y &= C_1 y_1 + \dots + C_k y_k + \dots + C_n y_n; \\ z &= C_1 z_1 + \dots + C_k z_k + \dots + C_n z_n, \end{aligned} \quad (4.25)$$

где $n=8$ – число узлов элемента; C_k – интерполяционные функции.

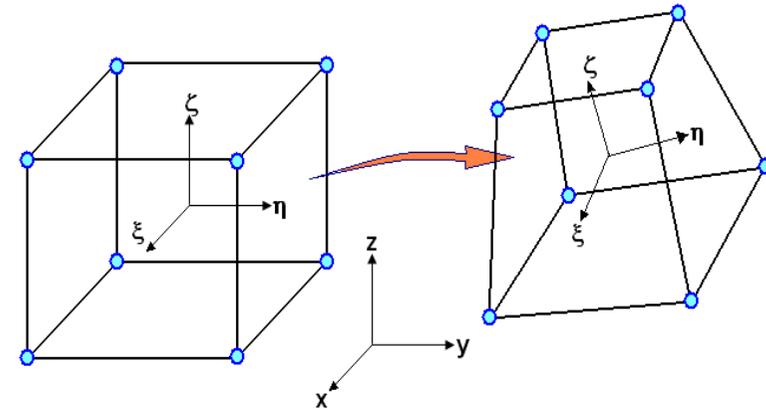


Рис. 4.7. Отображение элемента первого порядка (прямолинейного): а) в местных осях; б) в общих осях

4.2.2. Криволинейные элементы

Чтобы повысить точность расчета необходимо увеличить число разбиений и уменьшить размеры элементов, что часто приводит к огромному числу разрешающих уравнений и сопровождается значительными вычислительными трудностями. Поэтому, на практике точность решения повышают не за счет увеличения числа элементов, а путем выбора в качестве интерполяционных функций полиномов второго, третьего и т.д. порядков. Порядок полиномов определяет и названия элементов – элементы второго, третьего и т.д. порядков. Такие элементы, в отличие от элементов первого порядка, обеспечивают неразрывность на границах со смежными элементами не только перемещений, но и деформаций. Разумеется, при этом возникает необходимость увеличить число степеней свободы элемента. Наиболее естественным путем для этого служит введение дополнительных узлов на ребрах. В результате количество узлов, например для параллелепипеда второго порядка увеличится до 20. При этом число степеней свободы станет равным 60. Если для описания геометрии использовать те же интерполяционные функции, что и для перемещений, тогда можно изопараметрически отобразить элементы с прямолинейными ребрами в аналогичные криволинейные. На рис.4.8 приведены результаты отображения для объемного элемента второго порядка.

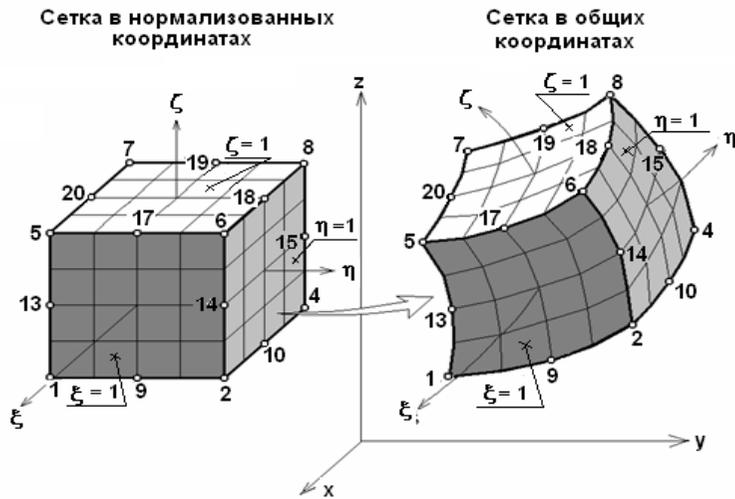


Рис. 4.8 Отображение криволинейных элементов в трехмерных координатах.

Далее приводятся без выводов интерполяционные полиномы сирендипова семейства для элементов второго порядка, которые в изопараметрических элементах используются как для интерполяции перемещений, так и для интерполяции координат [44, 133].

Интерполяционные полиномы для 20-ти узлового восьмиугольника второго порядка (рис.4.8) выражаются через нормализованные координаты ξ, η, ζ и имеют вид:

- для угловых узлов

$$C_k = \frac{1}{8}(1 + \xi_k \xi)(1 + \eta_k \eta)(1 + \zeta_k \zeta)(\xi_k \xi + \eta_k \eta + \zeta_k \zeta - 2), \quad k = 1, \dots, 8, \quad (4.26)$$

- для узлов на ребрах элемента

$$C_k = \frac{1}{4}[(1 + \xi_k \xi - (1 - \xi_k^2)\xi^2)][(1 + \eta_k \eta - (1 - \eta_k^2)\eta^2)][(1 + \zeta_k \zeta - (1 - \zeta_k^2)\zeta^2)] \quad (4.27)$$

Матрицы жесткости криволинейных элементов получаются по общим формулам (4.2) и (4.23), содержащие объемные интегралы. Поскольку интерполяционные функции для этих элементов, а следовательно и матрицы деформаций $[B]$, содержащие производные интерполяционных функций, формулируются в местных нормализованных координатах ξ, η, ζ , то необходимо перед интегрированием осуществить преобразование в общую систему x, y, z .

Такое преобразование координат ξ, η, ζ можно осуществить с помощью зависимостей [133]

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_k}{\partial \xi} &= \frac{\partial C_k}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial C_k}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial C_k}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial C_k}{\partial \eta} &= \frac{\partial C_k}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial C_k}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial C_k}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial C_k}{\partial \zeta} &= \frac{\partial C_k}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial C_k}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial C_k}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (4.28)$$

или то же самое, но в матричной форме

$$\left\{ \frac{\partial C_k}{\partial \xi} \right\} = [J] \left\{ \frac{\partial C_k}{\partial x} \right\}, \quad (4.29)$$

где $\left\{ \frac{\partial C_k}{\partial \xi} \right\} = \left\{ \frac{\partial C_k}{\partial \xi} \quad \frac{\partial C_k}{\partial \eta} \quad \frac{\partial C_k}{\partial \zeta} \right\}; \quad \left\{ \frac{\partial C_k}{\partial x} \right\} = \left\{ \frac{\partial C_k}{\partial x} \quad \frac{\partial C_k}{\partial y} \quad \frac{\partial C_k}{\partial z} \right\};$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} - \text{матрица Якоби.}$$

Из (4.29) и получаются искомые соотношения в виде

$$\left\{ \frac{\partial C_k}{\partial x} \right\} = [J]^{-1} \left\{ \frac{\partial C_k}{\partial \xi} \right\} \quad (4.30)$$

Замена переменных под знаком определенного интеграла требует выражения элементарных объемов в новой системе координат. Это делается с помощью следующей зависимости

$$dv = dx dy dz = \det |J| d\xi d\eta d\zeta, \quad (4.31)$$

где $\det |J|$ - определитель матрицы Якоби.

Матрицу Якоби несложно получить, вычисляя производные по общим координатам, учитывая, что они связаны с местными координатами зависимостями (4.25), т.е.

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial C_k}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial C_k}{\partial \xi} y_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial C_k}{\partial \xi} z_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial C_k}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial C_k}{\partial \eta} y_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial C_k}{\partial \eta} z_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial C_k}{\partial \zeta} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial C_k}{\partial \zeta} y_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial C_k}{\partial \zeta} z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial \xi} & \frac{\partial C_2}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial C_n}{\partial \xi} \\ \frac{\partial C_1}{\partial \eta} & \frac{\partial C_2}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial C_n}{\partial \eta} \\ \frac{\partial C_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial C_2}{\partial \zeta} & \dots & \frac{\partial C_n}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & z_n \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

где n – число узлов элемента.

После всех предварительных преобразований, связанных с заменой координат на нормализованные местные, определение матриц для элемента сводится к вычислению определенного интеграла вида

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \quad (4.33)$$

Якобианы здесь включены в качестве множителей в подынтегральную функцию f .

Процедура взятия определенного интеграла (4.33) в виде замкнутой квадратуры практически нереализуема. Поэтому, приходится прибегать к численному интегрированию. Формулы численного интегрирования запишем так [57]

$$I \approx \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n H_i H_j H_m f(\xi_i, \eta_j, \zeta_m). \quad (4.34)$$

Здесь n – число точек интегрирования в направлении каждой независимой переменной; H_i, H_j, H_m – весовые коэффициенты одномерной квадратуры Гаусса.

Квадратурные таблицы можно найти в справочной литературе или в [44, 133]

ГЛАВА 5 РАСЧЕТЫ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Здесь представлены результаты численных исследований экспериментальных образцов, рассмотренных в главе 2. Расчеты осуществлялись методом конечных элементов по программе «CONCORD» [57], в которой реализована модель железобетона с трещинами Н.И.Карпенко, описанная в главе 3. Для проверки правильности принятой модели материала, корректности задания расчетной схемы и отладки ее программной реализации было предварительно решено несколько тестовых задач. Исходными данными для тестовых задач служили эксперименты зарубежных исследователей [109, 119, 122, 129], занимающихся вопросами работы плитных конструкций при продавливании. Приведем одну из тестовых задач, которая подтверждает достоверность выбранной методики расчета и физической модели материала.

5.1. Решение тестовой задачи

Моделируется работа железобетонной плиты, опертой по контуру, нагруженной квадратным штампом, по которой имеются экспериментальные данные [119] (рис.5.1). Характеристики материалов, принятые в эксперименте: бетон – цилиндрическая прочность $f_{cc}=35$ МПа, $E_b=47000$ МПа, $\nu=0.2$; арматура – $\varnothing 14$ $R_s=365$ МПа, $E_s=200000$ МПа.

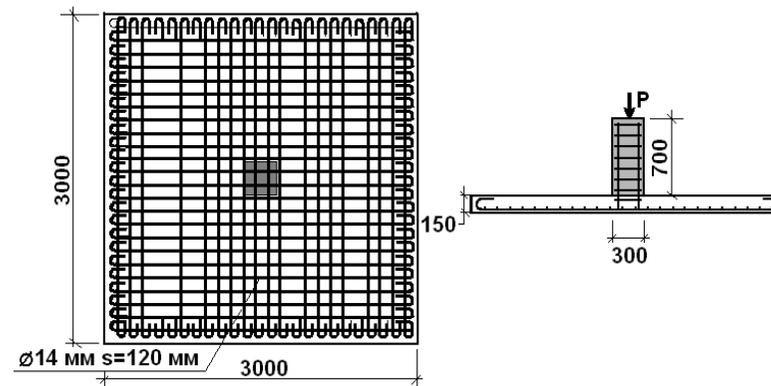


Рис.5.1. Геометрические размеры и армирование образцов для эксперимента [119].

Нагрузка прикладывалась ступенями по 40 кН. Предельная нагрузка в эксперименте составила 423 кН.

Расчетная схема плиты изображена на рис. 5.2. Использовались 8-ми узловые объемные конечные элементы. Общее число элементов – 2004, общее

количество узлов – 2655. Граничные условия - шарнирное опирание по четырем сторонам. Нагрузка передавалась через квадратный штамп большой жесткости размером 300x300 мм и прикладывалась ступенями по 40 кН. Армирование моделировалось путем «размазывания» арматурных стержней и задания коэффициента армирования для каждого из направлений арматурных стержней μ_c ($c = x, y, z$). Основные жесткостные характеристики элементов представлены в табл. 5.1. Номерам типов жесткости соответствует: 1 - бетон; 2 – бетон + армирование. Расчет велся шагово-итерационным методом.

Расчетное разрушение образца произошло на 11 ступени при нагрузке 440 кН. Результаты расчетов в виде изолиний нормальных σ_z , σ_x и касательных τ_{xy} напряжений на этой ступени приведены на рис. 5.3-5.5. На рис.5.6 представлены графики вертикальных перемещений центра нижней поверхности плиты и дано сопоставление с экспериментальными данными [119].

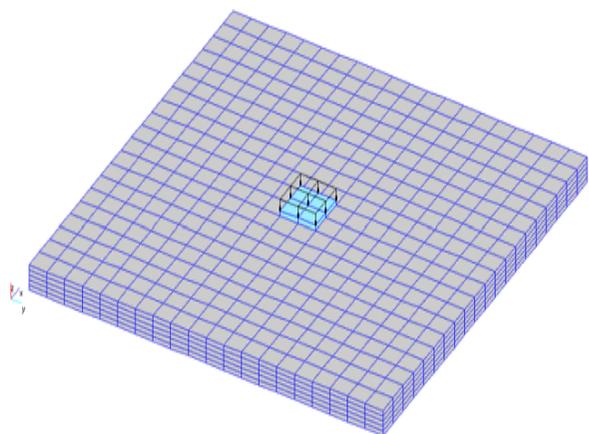


Рис.5.2 Расчетная схема плиты.

Таблица 5.1

Исходные данные для численного расчета плиты

Тип жесткости	Модуль упругости, E_b (МПа)	Коэф. Пуассона, ν	Предел прочности на сжатие R_b (МПа)	Предел прочности на растяжение R_{bt} (МПа)	$E_s \mu_x$ (МПа)	$E_s \mu_y$ (МПа)
1	47000	0,17	40,6	2,7	-	-
2	47000	0,17	40,6	2,7	42000	42000

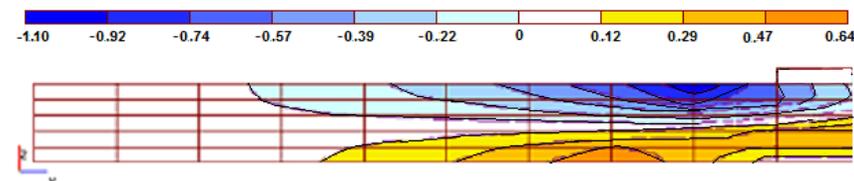


Рис.5.3 Изолинии напряжений σ_x (МПа) на 11 ступени для половины плиты. Сечение посередине плиты.

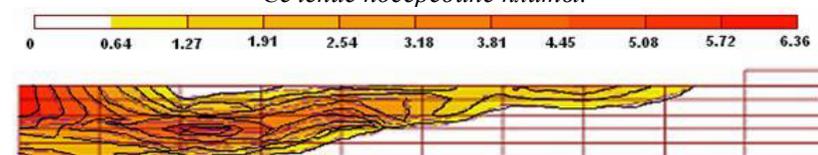


Рис.5.4 Изолинии напряжений σ_z (МПа) на 11 ступени для половины плиты. Сечение посередине плиты.

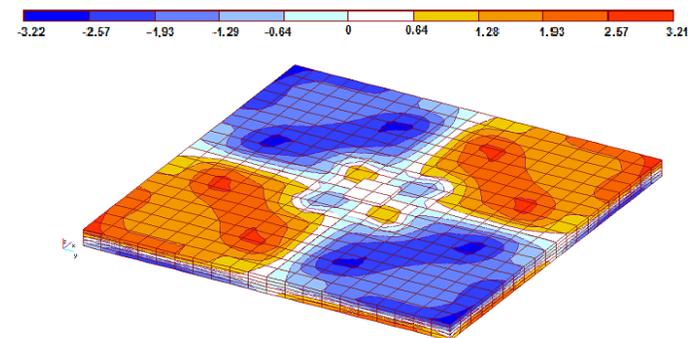


Рис. 5.5 Изолинии касательных напряжений τ_{xy} (МПа) на верхней плоскости плиты на 11 ступени загрузки.

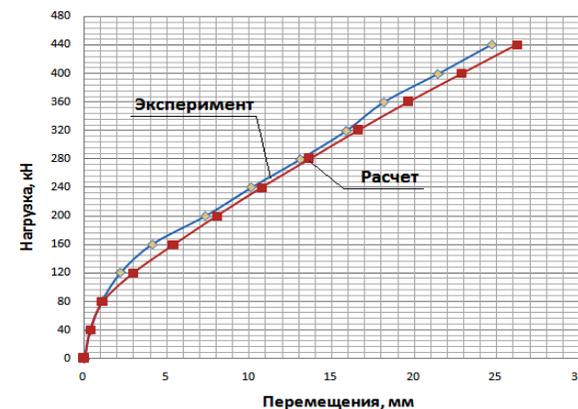


Рис 5.6 Вертикальные перемещения по ступеням нагружения

На графике (рис.5.6) наблюдается достаточно хорошее совпадение расчетных значений с экспериментальными. Это дает основание утверждать, что реализованная расчетная методика на основе теоретических предпосылок, изложенных в гл. 3,4, является приемлемой для исследовательских задач по определению напряженно-деформированного состояния плит при продавливании.

5.2. Расчеты экспериментальных образцов

Напряженно-деформированное состояние всех испытанных образцов (гл.2) моделировалось методом конечных элементов. Использовались объемные 8-ми узловые конечные элементы, описанные в главе 4. Расчетная схема состоит из 3276 элементов и 4020 узлов. Опирающие образцы шарнирные в узлах нижней поверхности, отмеченных на рис.5.7.

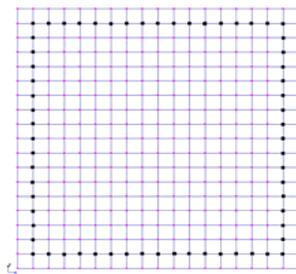


Рис. 5.7 Закрепленные узлы

Равномерно-распределенная нагрузка прикладывалась по площади штампа. Геометрические размеры и формы штампов передачи нагрузки аналогичны экспериментальным (табл. 2.1,2.2). Армирование моделировалось путем «размазывания» арматурных стержней и задания коэффициента армирования для каждого из направлений арматурных стержней μ_c ($c = x, y, z$).

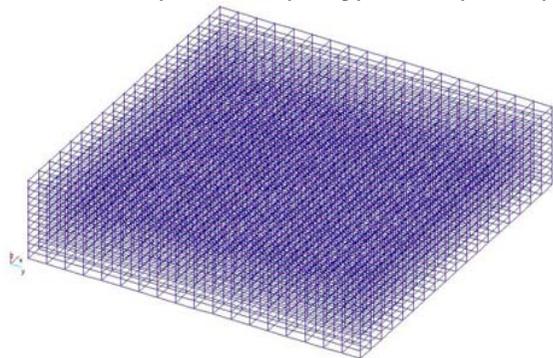


Рис. 5.8 Общий вид конечно-элементной схемы плит.

Продавливающий штамп моделировался упругими конечными элементами высокой жесткости. Расчетный процесс нагружения воспроизводил процесс испытания натуральных образцов, нагрузка прикладывалась ступенчато и величина ее на каждой ступени была аналогична экспериментальной. Общий вид конечно-элементных моделей плит показан на рис.5.8

5.2.1. Плита ПЛ1Кв. Квадратный штамп.

Моделируется работа плиты с равномерно распределенной нагрузкой, приложенной через штамп квадратного сечения. Жесткостные характеристики материалов приведены в табл. 2. На рис.5.9 изображена расчетная схема образца с квадратным штампом. Расчет велся шагово-итерационным методом. Нагрузка прикладывалась ступенями по 40 кН. Разрушение в расчете произошло на 18 ступени при нагрузке 720 кН. Результаты расчета на этой ступени, в виде изолиний напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ и перемещений в направлении оси z представлены на рис.5.10-5.18.

Таблица 5.2

Исходные данные для численного расчета плиты ПЛ1Кв

Тип жесткости	Модуль упругости E_b (МПа)	Коэф. Пуассона, ν	Предел прочн. на сжатие R_b (МПа)	Предел прочн. на растяж. R_{bt} (МПа)	E_s, μ_x (МПа)	E_s, μ_y (МПа)
1	25000	0,17	216	1,96	-	-
2	25000	0,17	216	1,96	70000	70000

В таблице номерам типов жесткости соответствует: 1 - бетон; 2 – бетон + армирование.

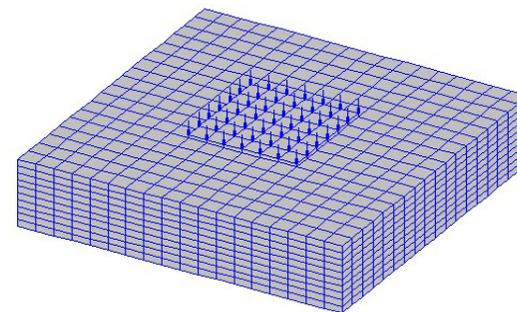


Рис.5.9 Расчетная схема плиты с квадратным штампом.

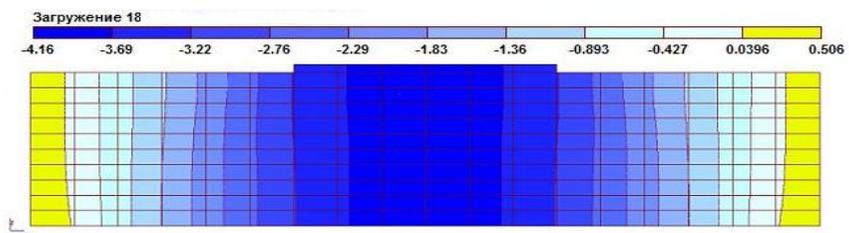


Рис.5.10 Изополя вертикальных перемещений (мм). Сечение посередине плиты 18 ступень загрузки.

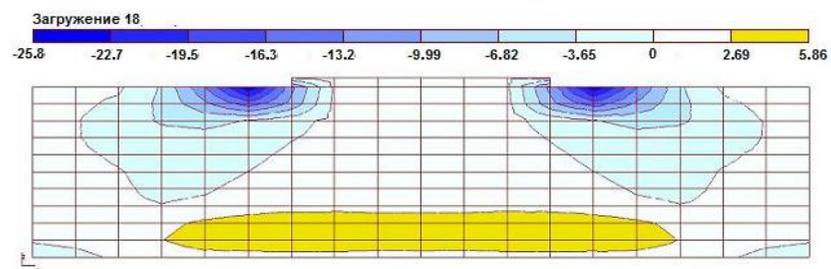


Рис.5.11 Изополя напряжений σ_x (МПа). Сечение посередине плиты. 18 ступень загрузки.

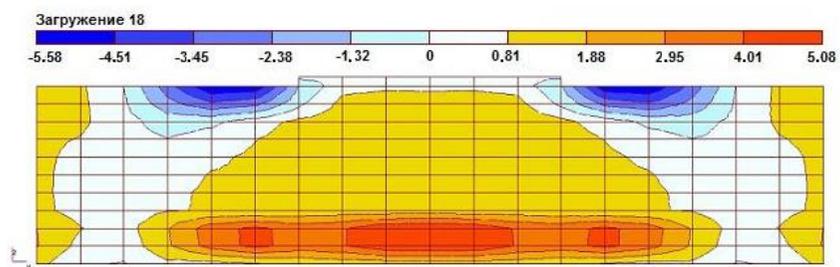


Рис.5.12 Изополя напряжений σ_y (МПа). Сечение посередине плиты. 18 ступень загрузки.

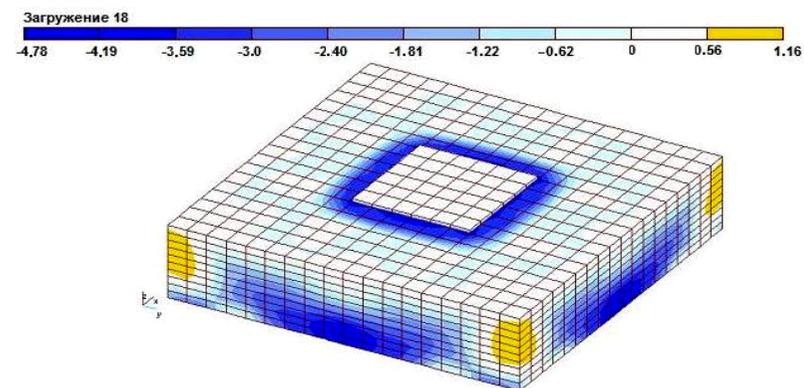


Рис.5.13. Изополя напряжений σ_z на гранях плиты (МПа). 18 ступень загрузки.

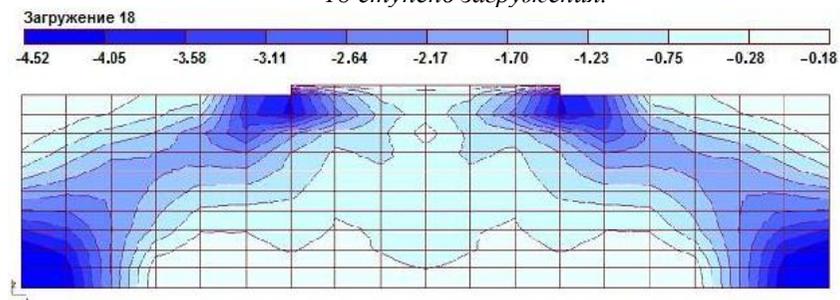


Рис.5.14. Изополя напряжений σ_z (МПа). Сечение посередине плиты. 18 ступень загрузки.

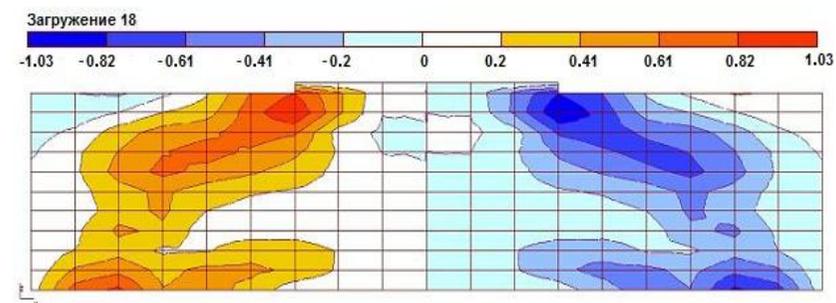


Рис.5.15. Изополя напряжений τ_{xy} (МПа). Сечение посередине плиты. 18 ступень загрузки.

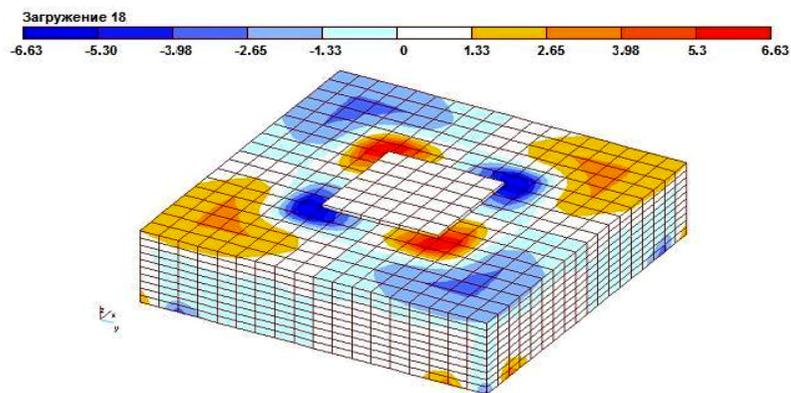


Рис.5.16. Изополя напряжений τ_{xy} на гранях плиты (МПа). 18 ступень загрузки.

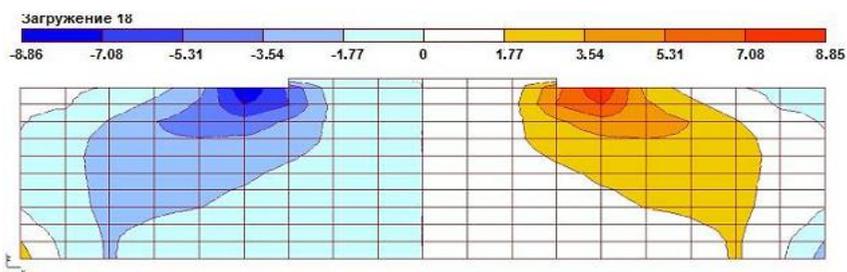


Рис.5.17. Изополя напряжений τ_{xz} (МПа). Сечение посередине плиты.

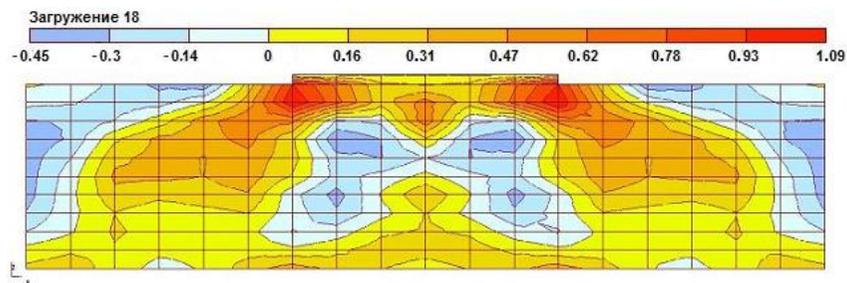
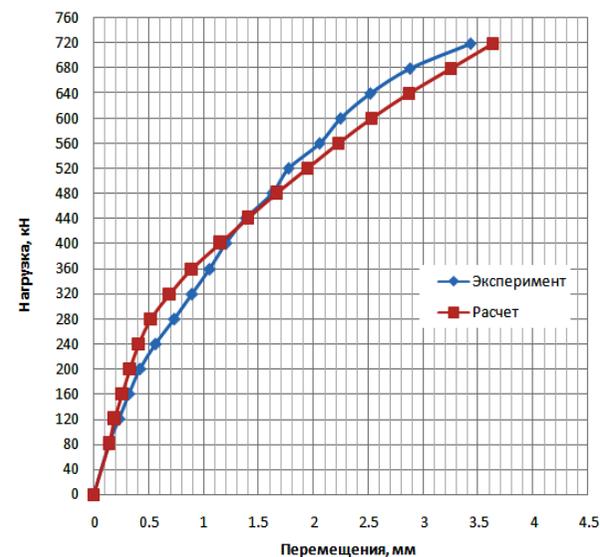


Рис.5.18. Изополя напряжений τ_{yz} (МПа). Сечение посередине плиты. 18 ступень загрузки.



№ ступени	Эксперимент, мм	Расчет, мм	Отклонение, %
1	0,14	0,14	0
2	0,24	0,2	16
3	0,33	0,27	18
4	0,43	0,34	20
5	0,57	0,42	26
6	0,74	0,53	28
7	0,9	0,7	22,2
8	1,06	0,9	15,1
9	1,21	1,16	4,2
10	1,39	1,41	4,5
11	1,63	1,67	2,4
12	1,78	1,95	9,5
13	2,06	2,23	8,2
14	2,25	2,53	12,4
15	2,52	2,87	13,9
16	2,88	3,25	12,8
17	3,43	3,63	5,8
Среднее расхождение, %			12,9

Рис.5.19. Вертикальные перемещения плиты по ступеням нагружения.

Сравнительный график вертикальных перемещений центра нижней поверхности, приведенный на рис.5.19, показывает удовлетворительное совпадение расчетных результатов с опытными данными.

5.2.2. Плита ПЛ2У. Штамп Г-образного сечения.

Моделируется работа плиты с равномерно распределенной нагрузкой, приложенной к штампу Г-образной формы. Расчетная схема фрагмента представлена на рис.5.20. Исходные данные для расчета в виде жесткостных характеристик материалов приведены в табл. 5.3.

Нагрузка прикладывалась ступенями по 40 кН. Расчет велся шагово-итерационным методом. Разрушение произошло на 17 ступени при предельной нагрузке 680 кН.

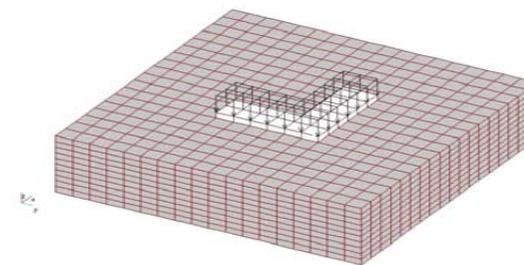


Рис.5.20. Общий вид расчетной плиты со штампом Г-образного сечения.

Таблица 5.3

Исходные данные для численного расчета плиты ПЛ2У

Тип жесткости	Модуль упруг. E_b (МПа)	Коэф. Пуассона, ν	Предел прочн. на сжатие R_b (МПа)	Предел прочн. на растяжение R_{bt} (МПа)	$E_s \mu_x$ (МПа)	$E_s \mu_y$ (МПа)
1	32000	0,17	27	2,4	-	-
2	32000	0,17	27	2,4	70000	70000

В таблице номерам типов жесткости соответствует: 1 - бетон; 2 – бетон + армирование.

Результаты расчета в виде изолиний напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}$ и перемещений в направлении оси z представлены на рис.5.21-5.29. На рисунках показаны также напряжения в плите в предельной стадии.

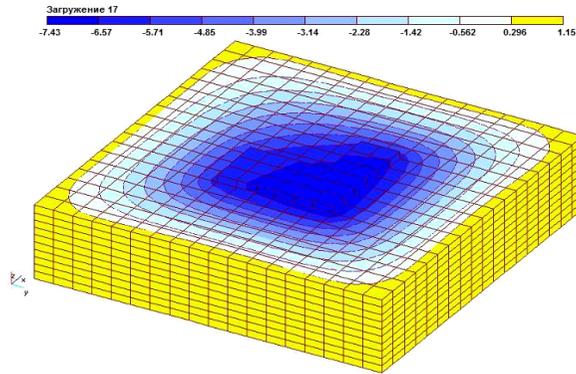


Рис. 5.21 Изополя вертикальных перемещений плиты (мм). 17 ступень загрузки.

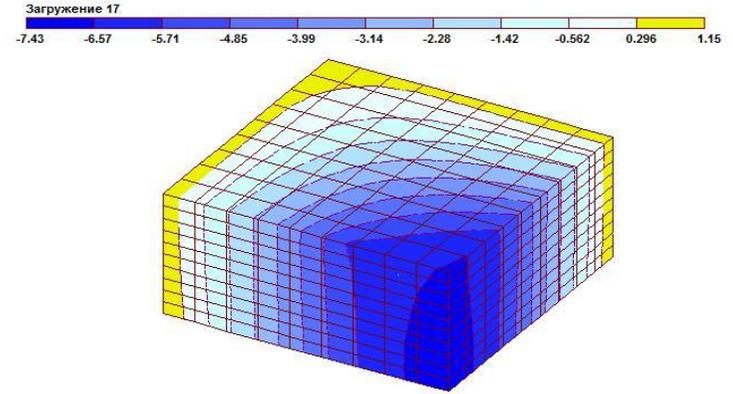


Рис. 5.22 Изополя вертикальных перемещений четверти плиты (мм). 17 ступень загрузки.

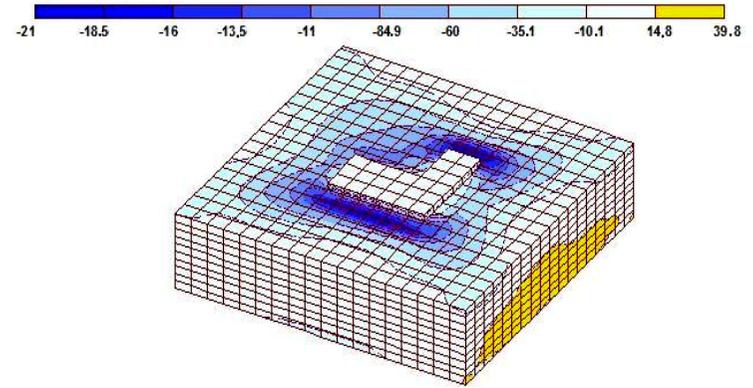


Рис. 5.23 Изополя напряжений σ_x на гранях плиты (МПа). 17 ступень загрузки.

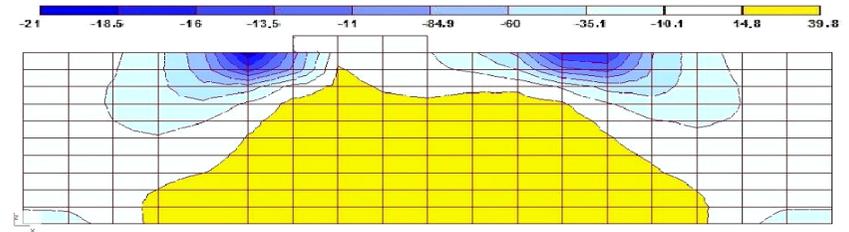


Рис. 5.24 Изополя напряжений σ_x (МПа). Сечение посередине плиты. 17 ступень загрузки.

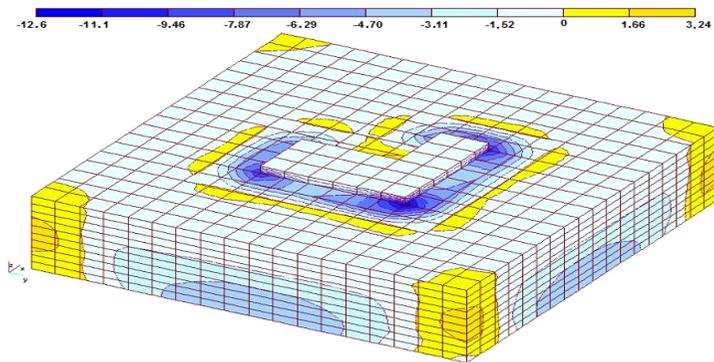


Рис. 5.25 Изополя напряжений σ_z на гранях плиты (МПа). 17 ступень загрузки.

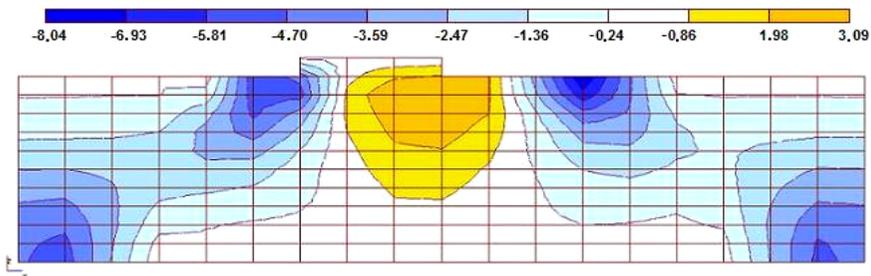


Рис. 5.26 Изополя напряжений σ_z (МПа). Сечение посередине плиты. 17 ступень загрузки.

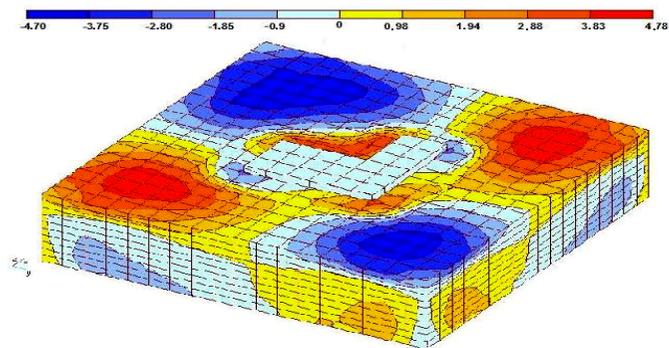


Рис. 5.27 Изополя напряжений τ_{xy} на гранях плиты (МПа). 17 ступень загрузки.

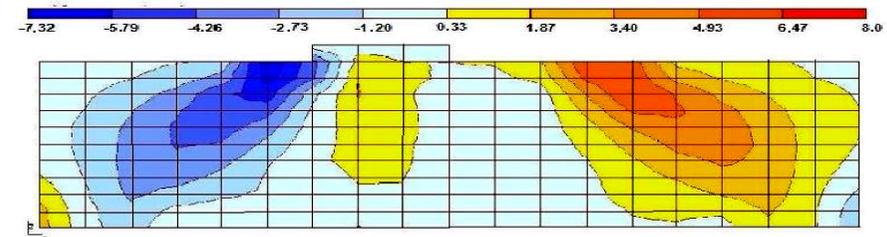


Рис. 5.28 Изополя напряжений τ_{xz} (МПа). Сечение посередине плиты. 17 ступень загрузки.

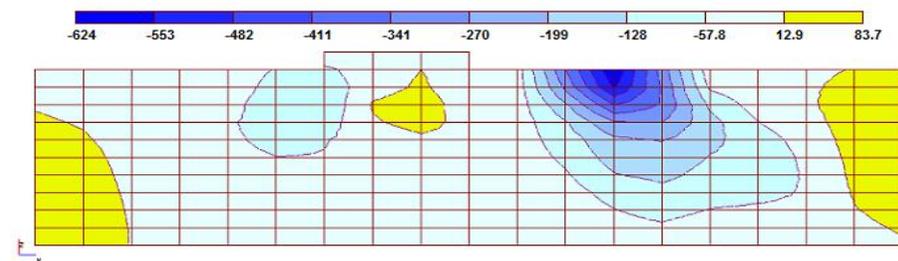
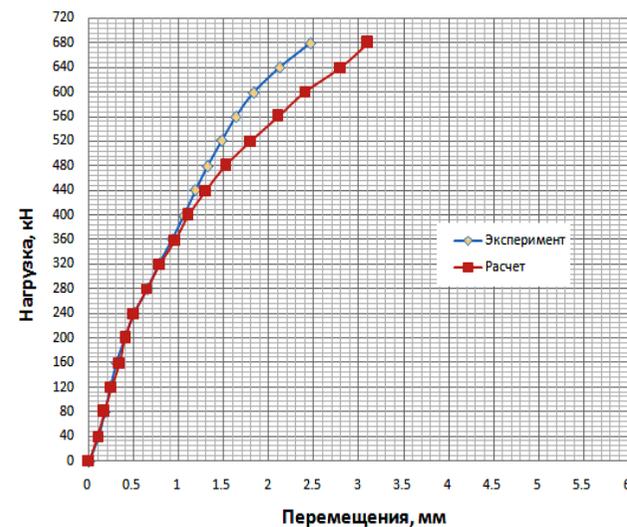


Рис. 5.29 Изополя напряжений τ_{yz} (МПа). Сечение посередине плиты. 17 ступень загрузки.



№ ступени	Эксперимент, мм	Расчет, мм	Отклонение, %
1	0,11	0,11	0
2	0,17	0,17	0
3	0,24	0,25	4
4	0,31	0,34	9
5	0,4	0,4	0
6	0,5	0,5	0
7	0,65	0,64	2
8	0,78	0,79	1,3
9	0,92	0,96	4,2
10	1,05	1,1	4,5
11	1,18	1,3	9,2
12	1,32	1,52	13,2
13	1,48	1,8	17,8
14	1,63	2,1	22,4
15	1,83	2,4	23,7
16	2,12	2,8	24,3
17	2,46	3,1	20,6
Среднее расхождение, %			9,2

Рис. 5.30 Вертикальные перемещения по ступеням загрузки.

График расчетных вертикальных перемещений центра нижней поверхности плиты по ступеням нагружения, приведенный на рис.5.30, показывает достаточно хорошее совпадение с экспериментальными данными вплоть до 13-ой ступени. Среднее расхождение с опытом на предельных стадиях нагружения составило 9,2%.

5.2.3 Плита ПЛ2К. Штамп крестообразной формы.

Расчетная схема фрагмента представлена на рис.5.31. Нагрузка – равномерно распределенная прикладывалась к штампу ступенями, аналогичными опытному, по 48 кН. Расчетные характеристики материалов приведены в табл. 5.4. На. Расчет велся шагово-итерационным методом.

Разрушение плиты произошло на 15 ступени при расчетной нагрузке 720 кН.

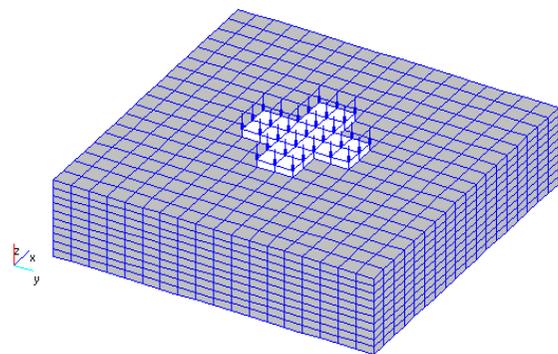


Рис. 5.31 Расчетной схема плиты с нагрузкой с крестообразным штампом.

Таблица 5.4

Исходные данные для расчета плиты ПЛ2К

Тип жесткости	Модуль упругости E_b (МПа)	Коэф. Пуассона, ν	Предел прочности на сжатие R_b (МПа)	Предел прочн. на растяжении R_{bt} (МПа)	$E_s \mu_x$ (МПа)	$E_s \mu_y$ (МПа)
1	33800	0,15	33,6	2,16	-	-
2	33800	0,15	33,6	2,16	70000	70000

Номерам типов жесткости соответствует: 1 – бетон; 2 – бетон + армирование.

Результаты расчета напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{xy}$ и перемещений по оси z на 15 ступени нагружения представлены на рис.5.32-5.38.

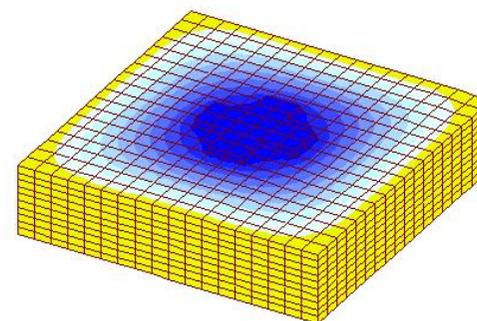
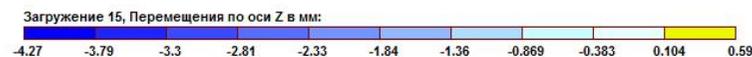


Рис.5.32 Изополя вертикальных перемещений плиты (мм). 15 ступень загрузки

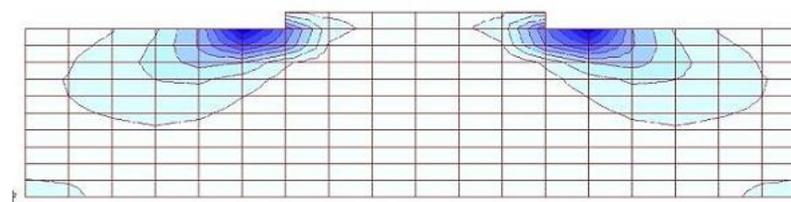


Рис.5.33 Изополя напряжений σ_x (МПа). Сечение посередине плиты. 15 ступень загрузки.

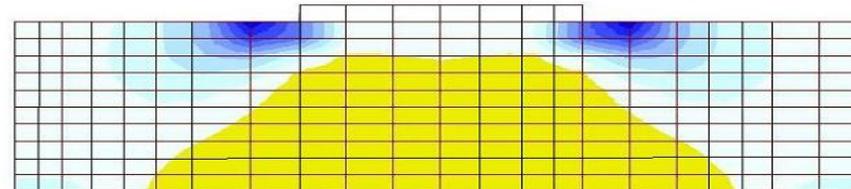


Рис.5.34 Изополя напряжений σ_y (МПа). Сечение посередине плиты. 15 ступень загрузки.

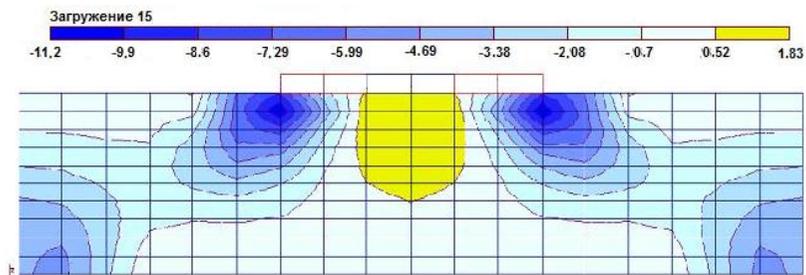


Рис. 5.35 Изополя напряжений σ_z (МПа). Сечение посередине плиты. 15 степень загрузки.

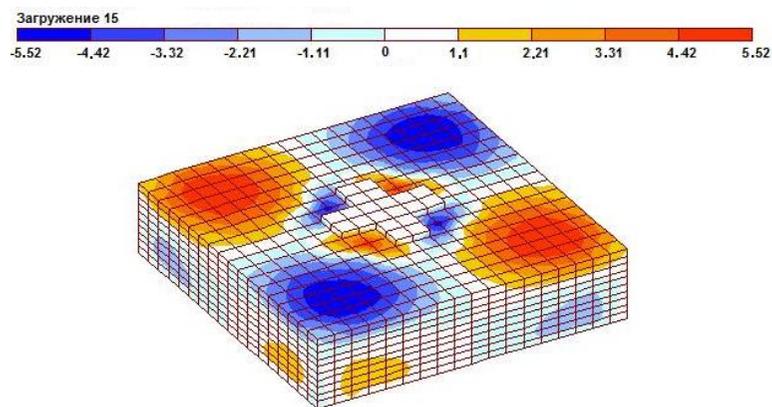


Рис. 5.36 Изополя напряжений τ_{xy} на гранях плиты (МПа). 15 степень загрузки.

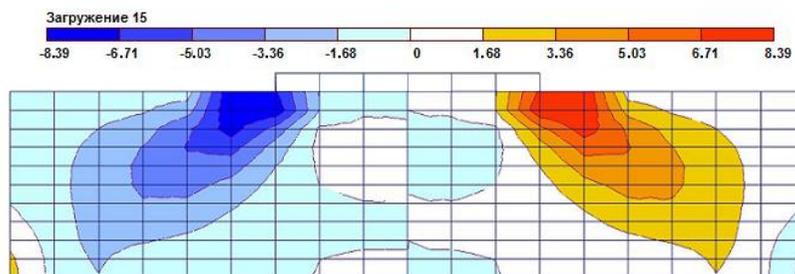


Рис. 5.37 Изополя напряжений τ_{xz} (МПа). Сечение посередине плиты. 15 степень загрузки.

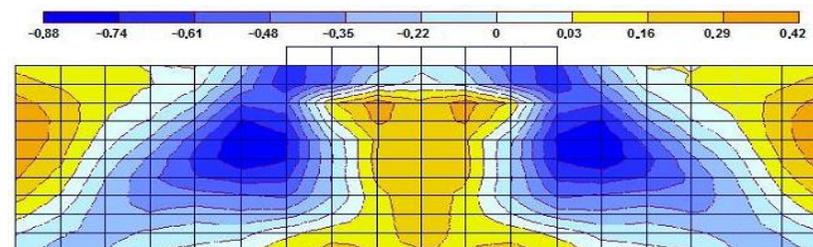
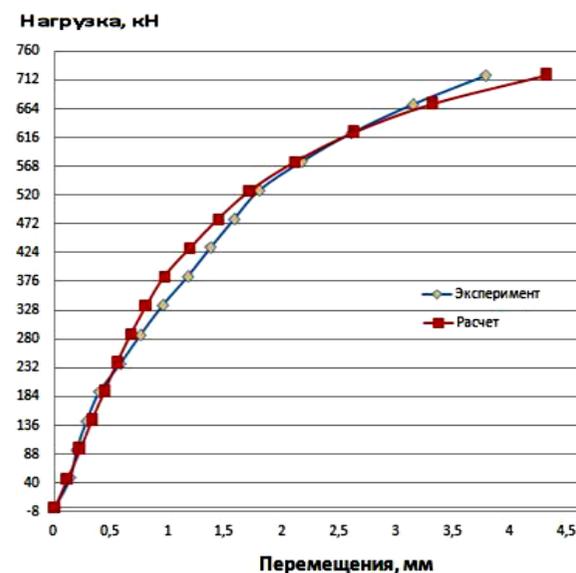


Рис. 5.38 Изополя напряжений τ_{yz} (МПа). Сечение посередине плиты. 15 степень загрузки.



№ ступени	Эксперимент, мм	Расчет, мм	Отклонение, %
1	0,13	0,1	23
2	0,19	0,17	10
3	0,28	0,31	11
4	0,39	0,42	7
5	0,57	0,54	5
6	0,75	0,7	7
7	0,94	1,06	12
8	1,16	1,22	5
9	1,36	1,4	3
10	1,57	1,46	7
11	1,79	1,72	3,9
12	2,16	2,08	3,7
13	2,6	2,62	0,8
14	3,14	3,38	7
15	3,77	4,3	14
Среднее расхождение, %			7,9

Рис. 5.39 Вертикальные перемещения по ступеням нагружения.

График вертикальных перемещений центра нижней плоскости плиты по ступеням нагружения, приведенный на рис.5.39, показывает достаточно хорошее совпадение расчетных данных с экспериментальными.

И в заключении приведем сводную таблицу значений предельных нагрузок на штампы всех рассмотренных форм полученные в экспериментах, рассчитанные по методике СНиП [82] (п.2.3), а также в результате конечноэлементного расчета. Видно, что предельная нагрузка, установленная

Таблица 5.5

Сравнительная таблица предельных нагрузок

Плита	Предельная нагрузка по эксперименту	Предельная нагрузка по СНИП, кН	Различие с опытом, %	Предельная нагрузка по расчету, кН	Различие с опытом, %
ПЛ1Кв	776	626	24,0	720	7,2
ПЛ2Кв	760	630	20,6	740	2,6
ПЛ1У	850	735	15,6	820	3,5
ПЛ2У	720	767	переоценка	680	5,6
ПЛ1К	860	607	41,7	820	4,6
ПЛ2К	760	687	10,6	720	5,3

нелинейным расчетом по МКЭ с учетом сформулированных в главе 3 определяющих соотношений для железобетона больше соответствует фактическим экспериментальным результатам.

5.3. Расчет фрагмента монолитной плиты перекрытия

По предлагаемой конечноэлементной методике был осуществлен расчет фрагмента монолитной безбалочной плиты перекрытия здания.

План этажа и фрагмент армирования плиты показаны на рис. 5.40. По проекту плита армируется двумя арматурными сетками (в верхней и нижней зонах плиты) из арматуры Ø10мм класса А400С, с шагом в обоих направлениях 150 мм. Также в верхнем и нижнем уровне в направлении буквенных и цифровых осей через колонну проходят по 4 дополнительных стержня Ø20мм А400С. Класс бетона В25. Толщина плиты – 200 мм. Сечение колонны – 400х400 мм. Плита и часть колонны моделировались объемными конечными элементами. Число элементов составило 3640, количество узлов 4895. Равномерно распределенная нагрузка прикладывалась к верхней грани плиты, нижняя и верхняя грани колонны закреплены.

Расчет велся шагово-итерационным методом, величина нагрузки на каждом шаге составляла 5,3 кН/м².

Расчетной схема фрагмента приведена на рис. 5.41, 5.42. На рис.5.42 дано отображения типов жесткостей конечных элементов. Эти жесткостные характеристики сведены в табл. 5.6.

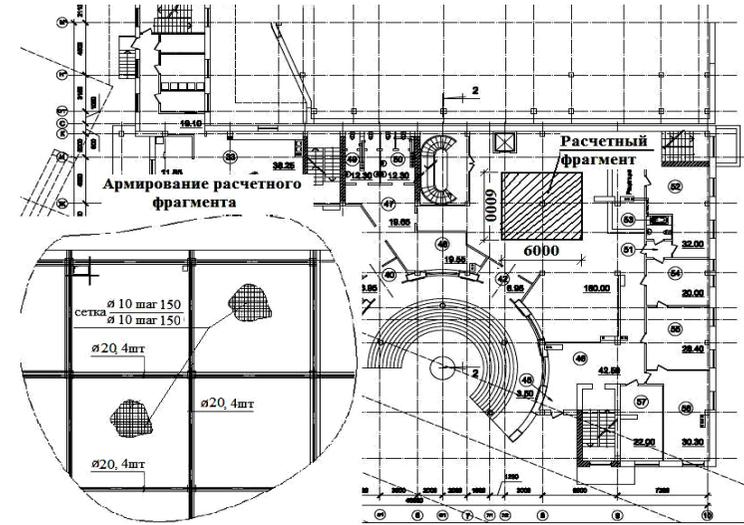


Рис. 5.40. План безбалочной плиты перекрытия на отм.0.000, с указанным расчетным фрагментом. Армирование фрагмента.

Таблица 5.6

Исходные данные для численного расчета фрагмента плиты

Тип жесткости	Модуль упругости E_b (МПа)	Коэф. Пуассона, ν	Предел прочн. на сжатие R_b (МПа)	Предел прочно. на растяжение R_{bt} (МПа)	$E_s \mu_x$ (МПа)	$E_s \mu_y$ (МПа)
1	30000	0,2	14,5	1,05	59850	59850
2	30000	0,2	14,5	1,05	15700	15700
3	30000	0,2	14,5	1,05	-	-

1-бетон+арматура скрытых ригелей; 2-бетон+фоновая сетка; 3 – бетон без армирования.

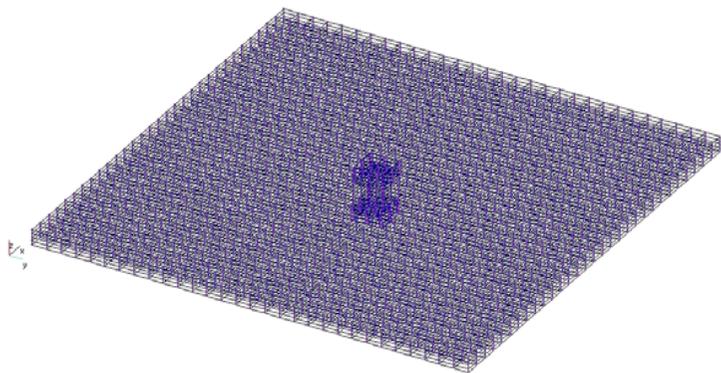


Рис. 5.41. Конечно-элементная модель фрагмента плиты.

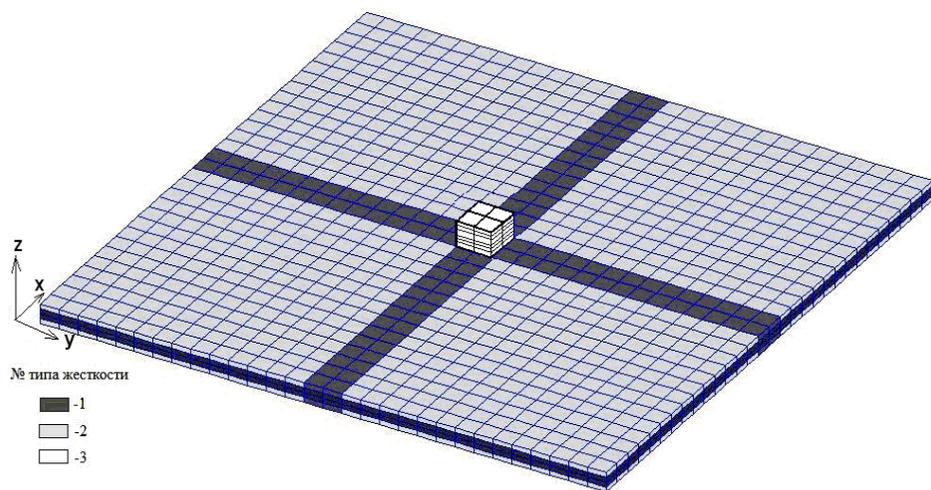


Рис. 5.42. Типы жесткостей элементов (табл. 5.6).

Разрушение от продавливания произошло на 6 ступени при предельной полезной нагрузке на плиту перекрытия 27 кН/м^2 . На рис. 5.43-5.47 представлено напряженно-деформированное состояние на различных ступенях нагружения в виде изолиний $\sigma_y, \sigma_z, \tau_{xz}$.

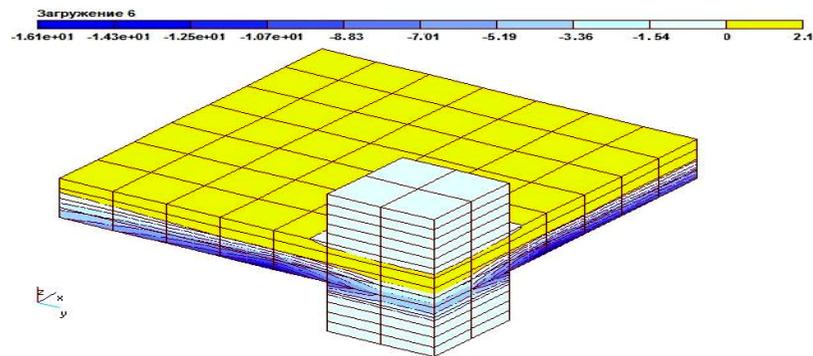


Рис. 5.43 Изополя напряжений σ_y в МПа. 6 ступень загрузки.

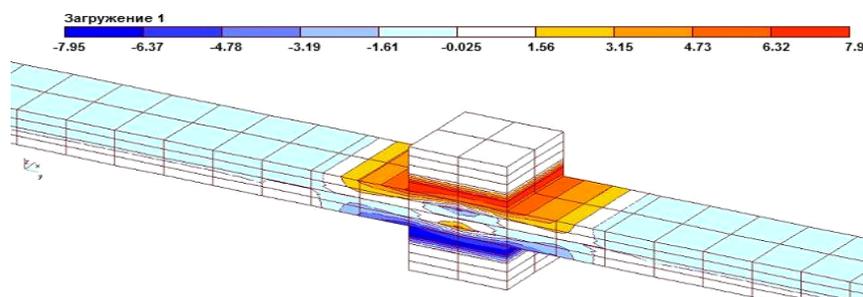


Рис. 5.44 Распределение напряжений σ_z в МПа по центральной полосе плиты на 1-ой ступени нагружения.

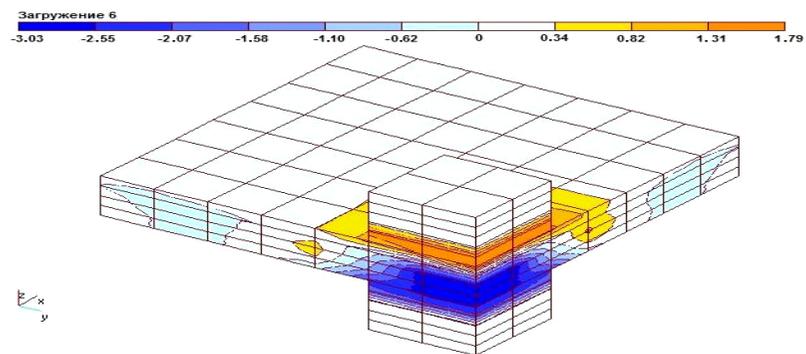


Рис. 5.45 Изополя напряжений σ_z в МПа. 6 ступень загрузки.

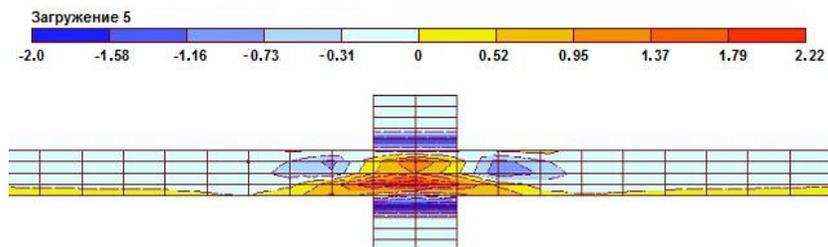


Рис. 5.46 Изополя касательных напряжений τ_{xz} в МПа на 5 ступени загрузки. Сечение посередине плиты.

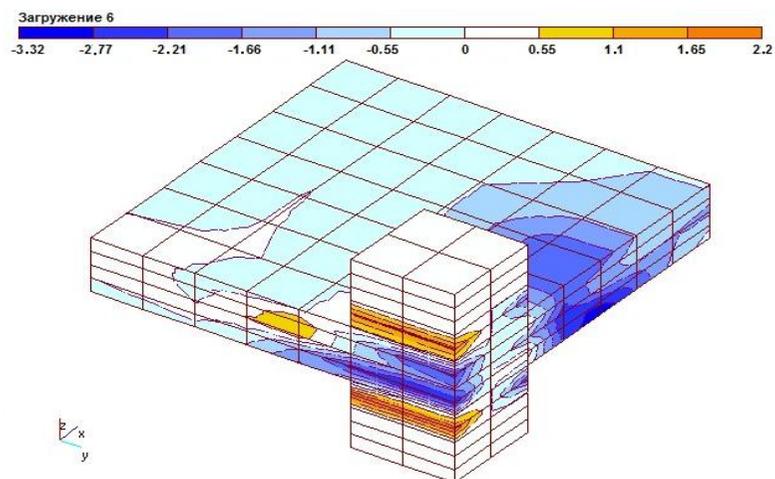


Рис. 5.47 Изополя касательных напряжений τ_{xz} в МПа на 6 ступени нагружения.

На рис. 5.48 приведено сечение посередине плиты с обозначением номеров ступеней на которых в соответствующих элементах образуется трещина. Усилия в заштрихованных элементах на 6 ступени нагружения превысили заданное расчетное сопротивление сжатию, следовательно, в элементах плиты по периметру колонны, произошло раздробление сжатой зоны бетона, что характерно при разрушении от продавливания.

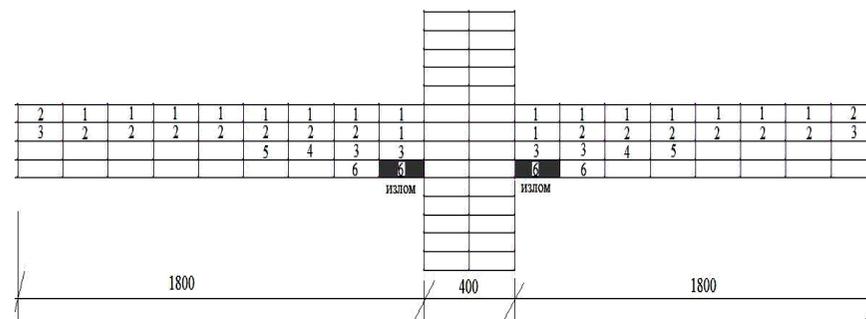


Рис. 5.48 Схема трещин в объемных элементах. Цифрами обозначены номера ступеней.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александровский С.В. Расчет бетонных и железобетонных конструкций на изменение температуры и влажности с учетом ползучести / Александровский С.В. – М.: Стройиздат, 1973. – 432 с.
2. Ахвердов И.Н. Основы физики бетона / Ахвердов И.Н. – М.: Стройиздат, 1981. – 464 с.
3. Бабич Е.М. Исследования влияния многократного сжатия на деформации и трещинообразование тяжелого бетона / Е.М. Бабич, А.П. Погореляк. – Гидромелиорация и гидротехническое строительство. – Львів: Вища школа, Вип. 5. – 48 с.
4. Байков В.И. Сигалов Э.Е. Железобетонные конструкции: Общий курс / В.И. Байков, Э.Е. Сигалов – М.: Стройиздат, 1985. - 782с.
5. Бамбура А.Н. К построению деформационной теории железобетона стержневых систем на экспериментальной основе / А.Н. Бамбура, А.Б. Гурковский – Строительные конструкции. Межвед. н.-т. сб. «Научно-технические проблемы современного железобетона», вып.59 - Киев: НИИСК, 2003. – С.121-130.
6. Барашиков А.Я. Диаграмма деформирования бетона при одно- и двухосном сжатии / А.Я. Барашиков, В.Н. Барабаш, А.Д. Журавський - Строительные конструкции. –вып.43. – Киев: Будівельник, 1990. – С. 85-99.
7. Бате К. Численные методы анализа и метод конечных элементов / К. Бате, Е. Вилсон – М.: Стройиздат, 1982. -447с.
8. Берг О.Я. Физические основы теории прочности бетона и железобетона/ Берг О.Я. - М.: Госстройиздат, 1961. – 96 с.
9. Бидный Г.Р., Колчин Г.Б., Клованич С.Ф. Матричный метод решения задач строительной механики. – Кишинев: «Штиинца», 1981. – 308 с.
10. Бидный Г.Р. Расчет железобетонных конструкций методом конечных элементов / Бидный Г.Р. – Кишинев: Штиинца, 1979. – 223 с.
11. Бич П.М. Вариант теории прочности бетона / Бич П.М. - Бетон и железобетон № 6, 1980. - С. 28 - 29.
12. Бондаренко В.М. Расчетные модели силового сопротивления железобетона / В.М. Бондаренко, В.И. Колчунов – М.: Изд. ас. строит. вузов, 2004.- 472с.
13. Бондаренко В.М. Расчет железобетонных плит и оболочек методом интегрального модуля деформаций / Бондаренко В.М., Тимко И.А., Шагин А.Л. – Харьков, 1967.- 132с.
14. Бондаренко В.М., Инженерные методы нелинейной теории железобетона / В.М. Бондаренко, С.В. Бондаренко - М.: Стройиздат, 1982. - 287 с.
15. Васильев А.П. Башмаки стаканного типа для сборных железобетонных конструкций / Васильев А.П. - Журнал НОИС.-1932, №4-5. - С.12-14.

16. Васильев А.П. Сборный железобетон в многоэтажных зданиях / А.П. Васильев, С.Д. Рыжик - Проект и стандарт. 1935, №1. - С.14-16.
17. Васильев А.П. Элементы и стыки сборных железобетонных конструкций / Васильев А.П. М.: 1936.-С. 20-24.
18. Васильев А.П. Элементы сборных железобетонных конструкций и их соединения / Васильев А.П. М.: Промстройпроект, ОНТИ, 1935. - (Справочник проектировщика промышленных сооружений, т.4.)
19. Воскобойник П.П. Сложное напряженное состояние бетона зоны разрушения и его учет в расчете прочности нормальных сечений железобетонных элементов [Текст]: автореф. дис. на получение научн. степени канд. техн. наук: спец. 05.23.01 "Строительные конструкции" / Воскобойник Павел Павлович; Одесский инженерно-строительный институт. – Одесса, 1985. – 22 с.
20. Воскобойник П.П. Дослідження тріщиностійкості та жорсткості залізобетонних консолей / П.П. Воскобойник, М.В. Яковенко. – Міжвідомчий науково-технічний збірник наукових праць (Будівництво). Вип.67 – Киев, НИИСК «Будівельні конструкції». – 2007. – С.105-112.
21. Гвоздев А.А. Переходные формы между разрушением по наклонному сечению и продавливанием / А.А. Гвоздев, А.С. Залесов, К.Е. Ермуханов. – Бетон и железобетон. – 1980, №3. – С.27-29.
22. Гвоздев А.А., Карпенко Н.И. Работа железобетона с трещинами при плоском напряженном состоянии / А.А. Гвоздев, Н.И. Карпенко. – Строительная механика и расчет сооружений. -1965, №2. –С. 20-23.
23. Гениев Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона / Г.А. Гениев, В.Н. Киссюк, Г.А. Тюпин. – М.: Стройиздат, 1974. -316 с.
24. Гольшев А.Б. Курс лекцій з основ розрахунку будівельних конструкцій із опору залізобетону / Гольшев А.Б. – Киев, 2004. - 340 с.
25. Городецкий А.С. Метод конечных элементов в проектировании транспортных сооружений / Городецкий А.С. – М.: «Транспорт», 1981. – 144 с.
26. Городецкий А.С. Расчет железобетонных балок-стенок с учетом образования трещин методом конечных элементов / А.С. Городецкий, В.С. Здоренко. – Сопротивление материалов и теория сооружений. – Киев: Будівельник, 1975, вып. 57. – С.59-66.
27. Городецкий А.С. Информационные технологии расчета и проектирования строительных конструкций / А.С. Городецкий, В.С. Шмуклер, А.В. Бондарев. – Киев – Харьков, 2003. -889 с.
28. ГОСТ 10180-90 (СТ СЭВ 3978-83). Бетоны. Методы определения прочности по контрольным образцам. - Госстрой СССР. – М: Издательство стандартов, 1991. – 45 с.
29. ГОСТ 12004 – 81 Сталь арматурная. Методы испытания на растяжение. - Госстрой СССР. – М: Издательство стандартов, 1983. – 11 с.

30. ГОСТ 23732-79 Вода для бетонов и растворов. Технические условия. – Госстрой СССР. – М.: Издательство стандартов, 1982. – 4 с.

31. ГОСТ 24452-80. Бетоны. Методы определения призмочной прочности, модуля упругости и коэффициента Пуассона. – Госстрой СССР. – М.: Издательство стандартов, 1985. – 16 с.

32. Демчина Б.Г. Вогнестійкість одно- і багатопарових просторових конструкцій житлових та громадських будівель: Дис. доктора техн. наук: 05.23.01 / Демчина Богдан Григорович. – Київ, 2002. – 368 с.

33. Дмитриев Л.Г. Изгиб нелинейно упругих пластин / Л.Г. Дмитриев, В.Н. Шевченко. - ЭВМ в исследованиях и проектировании объектов строительства. – Киев: Будивельник, 1970. – С. 94-103.

34. ДСТУ 3760:2006 (ISO 6935-2:1991, NEQ) Прокат арматурный для железобетонных конструкций. – Киев: Держспоживстандарт Украины, 2007 – 28 с.

35. ДСТУ Б В.2.5.-7-95 (ГОСТ 8829-94). Конструкції будинків і споруд. Конструкції і виробі бетонні і залізобетонні. Методи випробування навантаженням і оцінка міцності, жорсткості і тріщиніткості. – К.: Вид-во стандартів, 1995. – 86 с.

36. ДСТУ Б.В.2.7-112-2002 Цементы. Общие технические условия. – Киев: - Вид-во стандартів, 2002. – 30 с.

37. ДСТУ Б.В.2.7-34-2001 Щебінь для будівельних робіт із скельних гірських порід та відходів сухого магнітного збагачення залізистих кварцитів гірничо-збагачувальних комбінатів і шахт України. – Київ: Укрархбудінформ, 2001. – 32 с.

38. Ермуханов К.Е. О переходных формах между разрушением плит по наклонному сечению и их продавливанием / Ермуханов К.Е. - Бетон и железобетон. – 1981, №1. – С. 17-18.

39. Залесов А.С. Краевое продавливание / А.С. Залесов, В.А. Гундарь, В.В. Чижевский. – Бетон и железобетон. – 1990, №2 – С. 36-38.

40. Залесов А.С. Научно-технический отчет по теме: «Разработка методики расчета и конструирования монолитных железобетонных безбалочных перекрытий, фундаментных плит и ростверков на продавливание» / А.С. Залесов, Е.А. Чистяков, А.С. Махно. – М.: ГУП НИИЖБ. – 2002 – 55 с.

41. Залесов А.С. Продавливание железобетонных плит / А.С. Залесов, К.Е. Ермуханов, С.Г. Качановский – В кн.: Исследование железобетонных конструкций при статических, повторных и динамических воздействиях. – М.: НИИЖБ Госстроя СССР. – 1984 – С.17-22.

42. Залесов А.С. Прочность плит с поперечной арматурой на продавливание / А.С. Залесов, К. Е. Ермуханов И.А. Момбеков. – Бетон и железобетон.- 1990, №6. – С. 23-24.

43. Залесов А.С. Прочность и деформативность плит на продавливание / А.С. Залесов, В.С. Дорофеев, И.В. Шеховцов. – Бетон и железобетон. – 1992, №8. – С. 14-17.

44. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / Зенкевич О. – М.: Мир, 1975. – 541 с.

45. Иванов. А. Расчет прочности плоских плит перекрытий без поперечной арматуры монолитных каркасных зданий на продавливание. А. Иванов., А.С. Залесов – Известия вузов. Строительство и архитектура. – 2003. – С.200-205.

46. Иванов. А. Расчет прочности плоских плит перекрытий с поперечной арматуры монолитных каркасных зданий на продавливание / А. Иванов. – Известия вузов. Строительство и архитектура. – 2003. – С.206-210.

47. Ильюшин А.А. Пластичность / А.А. Ильюшин - М.: ГИТТЛ, 1948. - 376 с.

48. Карпенко Н.И. Исходные и трансформированные диаграммы деформирования бетона и арматуры / Н.И. Карпенко, Т.А. Мухамедиев, А.Н. Петров, - Напряженно-деформированное состояние бетонных и железобетонных конструкций. – М.: НИИЖБ, 1986. – С. 7-25.

49. Карпенко Н.И. К построению общей ортотропной модели деформирования бетона / Н.И. Карпенко, - Строительная механика и расчет сооружений. -1987, №2. – С. 31-36.

50. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона / Карпенко Н.И. – М.: Стройиздат, 1996. -416с.

51. Карпенко Н.И. Расчет плоских железобетонных конструкций с трещинами на силовые и температурные воздействия / Н.И. Карпенко, С.Ф. Клованич, Т.А. Балан – Тр. НИИЖБ Поведение бетонов и элементов железобетонных конструкций при нагреве. – М.: Стройиздат, 1982. – С. 67-76.

52. Карпенко Н.И. Расчет элементов стен методом конечных разностей / Н.И. Карпенко, Л.И. Ярин, В.С. Кукунаев, под ред. К.В.Михайлова. – Новое о прочности железобетона. - М.: Стройиздат, 1977. – С. 141-165.

53. Карпенко Н.И. Теория деформирования железобетона с трещинами / Н.И. Карпенко –М.: Стройиздат, 1976. -208с.

54. Качановский С.Г. Переход от разрушения по наклонному сечению к продавливанию для плит с поперечной арматурой / Качановский С.Г. - Развитие технологии расчета и конструирование железобетонных конструкций. - Труды ин-та НИИЖБ. – С. 57-60.

55. Климов Ю.А. Сучасні методи розрахунку залізобетонних конструкцій за граничними станами другої групи / Климов Ю.А. – Навчальний посібник. – К.:КНУБА, 2001. – 46 с.

56. Клованич С.Ф. Влияние формы штампа приложения нагрузки на работу плит при продавливании / С.Ф. Клованич, В.И. Шеховцов –

Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. НУВГ та природокористування. – Рівне: ПП«Баришев», 2007. – С.213-216.

57. Клованич С.Ф. Метод конечных элементов в нелинейных задачах инженерной механики / Клованич С.Ф. – Запорожье: Изд-во журнала «Мир геотехники», 2009. – 324 с.

58. Клованич С.Ф. Нелинейный расчет железобетонных плит на действие локальной нагрузки методом конечных элементов / С.Ф. Клованич, В.И. Шеховцов – Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. НУВГ та природокористування. – Рівне: ПП«Баришев», 2009. – С.221-228.

59. Клованич С.Ф. О расчете пространственных железобетонных конструкций методом конечных элементов / С.Ф. Клованич, С.Н. Карпенко – Сборник трудов научно-технической конференции «Бетон и железобетон в третьем тысячелетии». - Ростов-на-Дону: 2000. - С. 179-184.

60. Коровин Н.Н. Продавливание плит ростверков прямоугольными колоннами / Коровин Н.Н. - В кн. «Элементы и узлы каркасов многоэтажных зданий» - Сборник трудов, под ред. А.П.Васильева. - М.: Стройиздат, 1980 - С. 30-40.

61. Коровин Н.Н. Продавливание ростверков свайных фундаментов крайними сваями / Коровин Н.Н.- В кн. «Элементы и узлы каркасов многоэтажных зданий» - Сборник трудов, под ред. А.П.Васильева. - М.: Стройиздат, 1980 - С. 40-49.

62. Коровин Н.Н. Экспериментальное исследование работы узла сопряжения безбалочного бескапитального перекрытия с колонной / Коровин Н.Н. – В кн. «Исследование железобетонных конструкций при статических, повторных и динамических воздействиях» – М.: НИИЖБ Госстроя СССР, 1984. – С. 36-47.

63. Коровин Н.Н., Голубев А.Ю. Продавливание толстых железобетонных плит / Коровин Н.Н., Голубев А.Ю. – Бетон и железобетон. – 1989, №11. – С. 20-23.

64. Корсун В.И. Расчет конструкций на температурные и силовые воздействия с учетом неоднородности свойств материалов: Дисс. Докт. техн. наук: 05.23.01 / Корсун Владимир Иванович. – Макеевка: 2004. – 370 с.

65. Круглов В.М. Нелинейные соотношения и критерий прочности бетона в трехосном напряженном состоянии / Круглов В.М. – Строительная механика и расчет сооружений. – 1987, №1. - С. 40 - 44.

66. Кукунаев В.С. Учет сил распора в железобетонных плитах в стадиях с трещинами / Кукунаев В.С. – Бетон и железобетон. – 1985, №8. – С.37-38.

67. Лейтес Е.С. К построению теории деформирования бетона, учитывающей нисходящую ветвь диаграммы деформирования материала / Лейтес Е.С. – Новые исследования элементов железобетонных конструкций. – М.: НИИЖБ, 1982. – С. 24 - 32.

68. Лейтес Е.С. К уточнению одного из условий прочности бетона / Лейтес Е.С. – Поведение бетонов и элементов железобетонных конструкций при воздействии различной длительности. - М.: НИИЖБ, 1980. – С. 37 - 40.

69. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / Лехницкий С.Г. – М.: Гостехиздат, 1950.

70. Максименко В.П. Применение нелинейного шагового процессора «Лири-Степ» для оценки реального состояния сооружений/ Максименко В.П. – Будівельні конструкції. – 2001, вып.54. – С. 439-446.

71. Митрофанов В.П. Расчет прочности нормальных сечений изгибаемых железобетонных элементов с учетом влияния поперечной силы / Митрофанов В.П., Воскобойник П.П. – «Совершенствование расчета прочности элементов бетонных, железобетонных и каменных конструкций», сб. научн. тр., посвященных 70-летию со дня рождения В.П.Митрофанова. – Полтава: ПолтНТУ, 2007. – С.81-92.

72. Молодченко Г.А. Практическая оценка жесткости железобетонных элементов с трещинами / Г.А. Молодченко, А.Н. Сиротинко – «Строительные конструкции», межвед.н.-т. сб., вып. 59 – Киев: НИИСК, 2003. – С.342-345.

73. Мурашев В.И. Трещиностойкость, жесткость и прочность железобетона / Мурашев В.И. – М.: Машстройиздат, 1958. – 268 с.

74. Мухамедиев Т.А. Совершенствование метода расчета изгибаемых в двух направлениях плит / Т.А. Мухамедиев, М.И. Леви, А.В. Мельник – Новые экспериментальные исследования и методы расчета железобетонных конструкций. – М., 1989. – С.153-161.

75. Немчинов Ю.И. Метод пространственных конечных элементов (С приложениями к расчету зданий и сооружений). – Киев: НИИ Строительных конструкций, 1995. – 367 с.

76. Перельмутер А.В. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа / А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер – Киев: Изд-во «Сталь», 2002. – 600 с.

77. Писаренко Г.С. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии / Г.С. Писаренко, А.А. Лебедев – Киев: Наукова думка, 1976. – 416 с.

78. Постнов В.А. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций / В.А. Постнов, И.Я. Хархурим – Л.:Судостроение, 1974.- 342 с.

79. Проценко А.М. Решение задач об изгибе железобетонных плит / А.М. Проценко, Н.А. Лосин / Строительная механика и расчет сооружений - 1979, №6. - С.35-38.

80. Ржаницын А.Р. Расчет железобетонных оболочек методом предельного равновесия / Ржаницын А.Р. – М.: Госстройиздат. – 1958.

81. Сахаров А.С. Методика численного моделирования процесса разрушения железобетонных сосудов высокого давления при нестационарных

термосиловых воздействиях / А.С. Сахаров, А.Л. Козак. – Надежность и долговечность машин и сооружений. – Киев, 1988, №14. – С. 46 – 52.

82. СНиП 2.03.01-84*. Бетонные и железобетонные конструкции / Госстрой СССР – М: ЦИТП Госстроя СССР, 1989. – 70 с.

83. СНиП П-В. 1-62. Бетонные и железобетонные конструкции. Нормы проектирования. – М.: Стройиздат, 1962. – 94 с.

84. СП 52-101-2003. Свод правил по проектированию и строительству. Железобетонные и бетонные конструкции без предварительного напряжения арматуры. – М.: ФГУП. ЦПП. – 53 с.

85. Стороженко Л.И. Сталезалізобетонні часторебристі перекриття / Л.И.Стороженко, О.В.Нижник, О.А.Крупченко. – Полтава: «АСМІ», 2008. – 164 с.

86. Тимошенко С.П. Пластины и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Крюгер – М.: Наука, 1966. – 635 с.

87. Тимошенко С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер – М.: Наука, 1975 – 575 с.

88. Феодосьев В.И. Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов / Феодосьев В.И. – М.: Наука, 1975. – 173 с.

89. Чихладзе Э.Д. Теория деформирования сталебетонных плит / Э.Д. Чихладзе, А.Д. Арсланханов – Межвед. н.-т. сб. «Совершенствование методов расчета и проектирования конструкций и сооружений». – Харьков: ХарГАЖТ, 1996, вып. 27. – С.4-39.

90. Шеховцов В.И. К оценке работы плит на продавливание / Шеховцов В.И. – Вісник ОДАБА. – Одесса: «Внешрекламсервис», 2007 Вып. 25. – С.327-331.

91. Шеховцов И.В. Прочность и деформативность плит без поперечной арматуры при продавливании. Дисс. канд. техн. наук 05.23.01 / Шеховцов Игорь Владиславович – Одесса: 1992. – 188 с.

92. Шмуклер В.С. Учет полной диаграммы « $\sigma_b - \varepsilon_b$ » в алгоритме расчета железобетонных элементов / В.С. Шмуклер, И.Я. Лучковский – Строительные конструкции. Межвед.н.-т. сб., вып. 59 - Киев: НИИСК, 2003. – С.143-150.

93. Яременко А.Ф. Длительное деформирование железобетонных дисков с трещинами / А.Ф. Яременко, А.Я. Мельник. – Строительные конструкции. – Киев: Будивельник, 1979, вып. 35. – С. 40-44.

94. Яшин А.В. Рекомендации по определению прочностных и деформационных характеристик бетона при неодноосных напряженных состояниях / Яшин А.В. – НИИЖБ. - М., 1985. – 72 с.

95. Яшин А.В. Теория прочности и деформаций бетона с учетом его структурных изменений и длительности нагружения / Яшин А.В. – Новые

исследования элементов железобетонных конструкций при различных предельных состояниях. – М.: 1982. – С. 3 – 24.

96. ACI Committee 318, Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-05), American Concrete Institute, Farmington Hills, Michigan. – 2005. – 70 pp.

97. Alexander S.D.B, Simmonds S.H. / “Ultimate Strength of Slab-Column Connections”. – ACI Structural Journal, Vol. 84, No. 3, May-June. – 1987. – P. 255-261.

98. Alexander S.D.B. Simmonds, S.H. / “Bond Model for Concentric Punching Shear,” ACI Structural Journal, Vol. 89, No. 3, May-June. – 1992, P. 325-334.

99. Andra H.-P. / Zum Tragverhalten des Auflagerbereichs von Flachdecken. Thesis, Universitat Stuttgart, 1982. – P. 53-58.

100. Bach C., Graf O. Versuche mit allseitig auf liegenden, quadratischen und rechteckigen Eisenbetonplatten. “Deutscher Ausschus fur Eisenbeton (Berlin), N 30, 1915 – 513 pp.

101. Brastrup, M.W., Nielsen, M.P., Jensen, B.C., Bach, F. “Axisymmetric Punching of Plain and Reinforced Concrete” / Structural Research Laboratory, Technical University of Demark, 1976. – 167 pp.

102. CSA Technical Committee on Reinforced Concrete Design / A23.3-04 Design of Concrete Structures. – Canadian Standard Association, Rexdale, Ontario, 2004. – 82 pp.

103. De Borst R. and Vermeer P.A. Possibilities and limitations of finite elements for limit analysis / Geotechnique №34, 1984. – P. 199-210.

104. Dechka, D.C., (2001) “Response of Shear-Stud-Reinforced Continuous Slab-Column Frames to Seismic Loads / Ph.D. Dissertation. – University of Calgary, Alberta, Canada, 2001. – 230 pp.

105. Dilger W.H., Ghali A. (1981) Shear Reinforcement for Concrete Slabs / Journal of the Structural Division, Proceedings of the ASCE: Vol. 107, No. ST12, December, 1981. – P. 118-123.

106. Dilger, W.H. Flat Slab-Column Connections / Progress in Structural Engineering and Materials, John Wiley & Sons, Ltd., 2000. – Volume 2, Issue 3, P. 386-399.

107. Elstner R.C., Hognestad E. Shearing Strength of Reinforced Concrete Slabs / Journal ACI, V. 53, N1 July, 1956. – P. 37-44.

108. Elstner R.C., Hognestad E. An Investigation of Reinforced Concrete Slabs Falling in Shear / Mimeographed Report. – University of Illinois, Department of Theoretical and Applied Mechanics, N3, 1953. – 372 pp.

109. Emam, M., Marzouk, H., Hilal, M.S. Seismic Response of Slab-Column Connections Constructed with High-Strength Concrete / ACI Structural Journal, Vol. 94, No.2, 1997. – P. 197-205.

110. Eurocode 2: Design of Concrete Structures - Part 1-1: General Rules and Roles for Buildings, BS EN 1992-1-1, 2004, British Standard, CEN.

111. Forsell C., Holmberg A. Stampellast pa plattor beton / Betong (Stockholm), V.31, N 2, 1946. – P.23-29.
112. Gonzalez – Vidoza F, Kotsovos M.D., Pavlovic M.N. Symmetrical punching of reinforced concrete slabs: an analytical investigation based on nonlinear finite element modeling / *ACI Structural Journal*, 85(3), 1988. – P. 241-250.
113. Graf O. Versuche uber die Widerstandsfahigkeit von alseitigen aufliegenden dicken Eisenbetonplatten unter Einzellasten / *Deutscher Ausschus fur Eisenbeton*. – Berlin: N 88, 1938. – P. 87-93.
114. Graf O. Versuche uber die Widerstandsfahigkeit von Eisenbetonplatten unter Konzentrierter / Last nahe einem Auflader. *Deutscher Ausschus fur Eisenbeton*. – Berlin: N 73, 1933. – P.65-77.
115. Hawkins, N. M., Corley, W. G., (1974) "Moment Transfer to Columns in Slabs with Shearhead Reinforcement," *Shear in Reinforced Concrete (Volume 2)*, ACI Publication SP- 42, P. 847-879.
116. Hawkins, N.M. Shear Strength of Slabs With Shear Reinforcement / *Shear in Concrete (Volume 2)*. – ACI Publication SP-42, 1974. – P. 785-815.
117. Kinnunen, S. Punching of Concrete Slabs with Two-Way Reinforcement with Special Reference to Dowel Effect and Deviation of Reinforcement from Polar Symmetry / *Transactions*, No.198, Royal Institute of Technology. – Stockholm, Sweden: 1963. – P.22-34.
118. Kinnunen, S., Nylander, H. Punching of Concrete Slabs without Shear Reinforcement / *Transactions*, No.158. – Royal Institute of Technology. – Stockholm, Sweden: 1960. – P.38-43.
119. Kruger G., Burdet O., Favre R. Punching tests on RC flat slabs with eccentric loading / *Budapest: 2nd Int.Ph.D.Symposium in Civil Engineering*, 1998. – P. 1-8.
120. Loseth S., Slatto A. and G.Syversten Finite element analysis of punching shear failure of reinforced concrete slabs / *Nordic concrete research*, 82(1): 1982.- P. 1-17.
121. Melosh R.J. Structural Analysis in Solids / *Proc. ASCE., J.Struct.Div.* – Aug. -1963. –v.89. -№ ST-4. – P.205-223.
122. Menetrey P. Numerical Analysis of Punching Failure in Reinforced Concrete Structures / *Thesis for the degree of Doctor of Technician Science*. – Lausanne, EPFL, 1994. – 179 pp.
123. Moe J. Shearing Strength of Reinforced Concrete Slabs and Footings Under Concentrated Loads / *Portland Cement Association, Apr.*, 1961. – P. 117-124.
124. Nilsson L. Impact loading on concrete structures / *Thesis, Chalmers University of Technology*. – Goteborg: 1979. – P.13-17.
125. Report of ACI-ASCE Committee 326. Shear and Diagonal Tension. Chapter 8. "Slabs and Footings" *Journal ACI*, V.59. – 1962. – P.159-221.
126. Richart F. Reinforced Concrete Wall and Column Footings / *Journal ACI*, V.45, Oct. and Nov., N2 and 3. – 1948. – P. 33-41.

127. Richart F., Kluge R.W. Tests of Reinforced Concrete Slabs Subjected to Concentrated Loads / *Bulletin N 314, University of Illinois Engineering Experiment Station*, June 1939.- P. 4-11.

128. Talbot A.N. Reinforced concrete wall footing and column footings. / *Bulletin N 446, University of Illinois Eng. Experiment Station*, Mar. 1913. – P. 21-27.

129. Wensheng Bu. Punching Shear Retrofit Method Using Shear Bolts for Reinforced Concrete Slabs under Seismic Loading / *A thesis for the degree of Doctor of Philosophy in Civil Engineering*. – Waterloo, Ontario, Canada, 2008. – 217 pp.

130. Whitney C.S. Ultimate Shear Strength of Reinforced Concrete Flat Slabs / *Journal ACI*, V.54. N4 Oct. 1957. – P. 57-63.

131. Yitzhaki, D. Punching shear Strength of Reinforced Concrete Slabs / *Proceedings of ACI*, Vol.63, May, 1966. – P. 527-542.

132. Zimmermann Th., Rodriguez C. Nonlinear analysis of a reactor building for airplane impact loadings / *In 6th international conference on structural mechanics in reactor technology*, Paris: 1981. – P.23-41.

133. Zienkiewicz O.C., Taylor R.I. *The Finite Element Method*. Fifth edition. Volume 1: *The Basis*. – Oxford: Butterworth – Heinemann, 2000. – 306 pp.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Основные положения нормативных документов некоторых стран, по расчету плит на продавливание

Нормативные документы, действующие на территории Украины. СНиП 2.03.01-84* «Бетонные и железобетонные конструкции» [82]

Расчет на продавливание плитных конструкций (без поперечной арматуры) от действия сил, равномерно распределенных на ограниченной площади, должен производиться из следующего условия

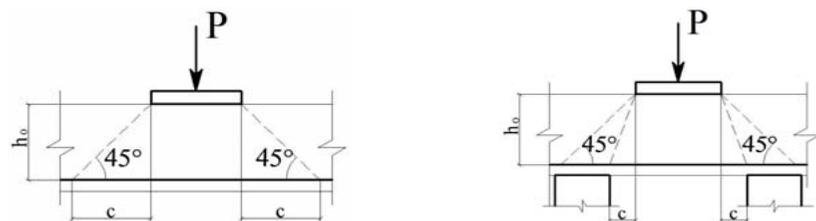
$$F \leq \alpha R_{bt} u_m h_0, \quad (\text{П.1.1})$$

где F - продавливающая сила;

α - коэффициент, принимаемый для бетона: тяжелого - 1,0; мелкозернистого - 0,85; легкого - 0,80;

u_m - среднearифметическое значений периметров верхнего и нижнего оснований пирамиды, образующейся при продавливании в пределах рабочей высоты сечения.

При определении u_m и F предполагается, что продавливание происходит по боковой поверхности пирамиды, меньшим основанием которой служит площадь действия продавливающей силы, а боковые грани наклонены под углом 45° к горизонтали (рис.П.1а).



а) наклон боковых граней пирамиды продавливания под углом 45°

б) наклон боковых граней пирамиды продавливания $>45^\circ$

Рис. П.1 Формы пирамиды продавливания.

Продавливающая сила F принимается равной силе, действующей на пирамиду продавливания, за вычетом нагрузок, приложенных к большему основанию пирамиды продавливания (считая по плоскости расположения растянутой арматуры) и сопротивляющихся продавливанию.

Если схема опирания такова, что продавливание может происходить только по поверхности пирамиды с углом наклона боковых граней более 45° (например, в свайных ростверках, рис.П.1б), правая часть условия (П.1.1)

определяется для фактической пирамиды продавливания с умножением на h_0/c . При этом значение несущей способности принимается не более значения, соответствующего пирамиде при $c = 0,4h_0$, где c - длина горизонтальной проекции боковой грани пирамиды продавливания.

Нормативные документы Российской Федерации СП 52-101-2003 [84].

Рассматривается поперечное сечение, расположенное вокруг зоны передачи усилий на элемент на расстоянии $\frac{h_0}{2}$ нормально к его продольной оси, по поверхности которого действуют усилия от сосредоточенных сил и изгибающего момента. Действующие касательные усилия по площади расчетного поперечного сечения должны быть восприняты бетоном и поперечной арматурой. Предполагается, что при действии только сосредоточенной силы, касательные усилия равномерно распределены по всей площади расчетного поперечного сечения. Расчет на продавливание при действии сосредоточенной силы и отсутствии поперечной арматуры предложено вычислять по зависимости

$$F \leq F_{b,ult}, \quad (\text{П.1.2})$$

где F - сосредоточенная сила от внешней нагрузки;

$F_{b,ult}$ - предельное усилие, воспринимаемое бетоном, которое определяется по формуле:

$$F_{b,ult} = R_{bt} A_b, \quad (\text{П.1.3})$$

где A_b - площадь расчетного поперечного сечения, расположенного на расстоянии $\frac{h_0}{2}$ от границы площади приложения сосредоточенной силы F с рабочей высотой сечения h_0 (рис. П.2), определяемая по формуле

$$A_b = u h_0, \quad (\text{П.1.4})$$

В этой формуле:

u - периметр контура расчетного поперечного сечения;

h_0 - приведенная рабочая высота сечения, которая вычисляется:

$h_0 = 0,5(h_{0x} + h_{0y})$, здесь h_{0x} и h_{0y} - рабочая высота сечения продольной арматуры, расположенной в направлении осей X и Y .

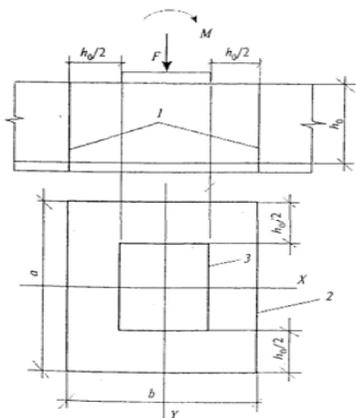


Рис. П.2 – расчетное поперечное сечение; 2 – контур расчетного поперечного сечения; 3 – контур площадки приложения нагрузки;

Также российские нормы дают рекомендации для учета сосредоточенного момента в разных направлениях (в зависимости от расположения колонны в плане).

Нормативные документы Канады CSA A23.3-04 [102]

Согласно Канадским нормам CSA A23.3-04 [102] для узла сопряжения колонны с плитой перекрытия расчетные касательные напряжения v_f в критическом сечении (периметр на расстоянии $\frac{d}{2}$ от грани колонны, рис.П.3) должны быть не большими, чем расчетные напряжения v_r ,

$$v_f \leq v_r = v_c + v_s, \quad (\text{П.1.5})$$

где v_c - расчетные касательные напряжения в бетоне;

v_s - расчетные касательные напряжения в поперечной арматуре.

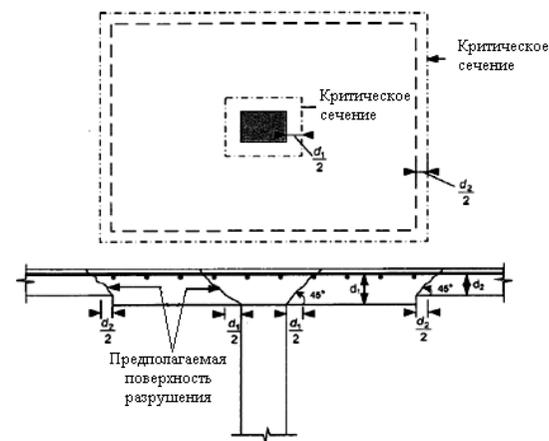


Рис. П.3 Критическое сечение определяемое по канадским нормам CSA A23.3-04 (Cement Association of Canada, 2006) [102].

Расчетное сопротивление срезу критического сечения без поперечной арматуры

$$v_c = \min \left\{ \begin{array}{l} 0,38\lambda\varphi_c\sqrt{f'_c} \\ 0,19\lambda\varphi_c\sqrt{f'_c}\left(1 + \frac{2}{\beta_c}\right) = 0,124\sqrt{f'_c}\left(1 + \frac{2}{\beta_c}\right) \\ \lambda\varphi_c\sqrt{f'_c}\left(0,19 + \frac{a_s d}{b_0}\right) = 0,65\sqrt{f'_c}\left(0,19 + \frac{a_s d}{b_0}\right) \end{array} \right\} (\text{МПа}), \quad (\text{П.1.6})$$

где $\lambda = 1$ для тяжелого бетона;

$\varphi_c = 0,65$ - понижающий коэффициент для прочности бетона;

β_c - коэффициент отношения большей стороны колонны к меньшей;

b_0 - периметр критического сечения,

$a_s = 4,3,2$ для внутренней, крайней и угловой колонны соответственно.

В американских нормах ACI 318-05 [96] формула для определения расчетных напряжений v_r аналогична (П.1.6).

Для вычисления касательных напряжений v_f в критическом сечении, вызванных сосредоточенной нагрузкой и моментом используется следующая формула:

$$v_f = \frac{V_f}{b_0 d} + \left[\frac{\gamma_v M_f e}{J} \right]_x + \left[\frac{\gamma_v M_f e}{J} \right]_y, \quad (\text{П.1.7})$$

где V_f - вертикальная поперечная сила;

M_f - сосредоточенный момент в направлении x и y ;

$$\gamma_v - \text{доля момента от среза } \gamma_v = 1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{b_1}{b_2}}};$$

b_1 - ширина критического сечения, перпендикулярная моменту вектора;

b_2 - длина другой стороны;

e - расстояния от центра тяжести критического сечения к точке, где вычисляются напряжения;

J - аналог полярного момента инерции критического сечения относительно осей центра тяжести.

При вычислении V_f и M_f используются коэффициенты к нагрузкам:

1,25 – к собственному весу и 1,5 для других нагрузок.

Нормы, распространяющиеся на страны Европейского Союза Eurocode 2 (2004) [110]

В европейских нормах [110] применяется базовый контрольный периметр на расстоянии $2d$ от загруженного участка. Аналогично, касательные напряжения v_f на контрольном сечении должны быть не более, чем сопротивление срезу (v_r): $v_f \leq v_r$,

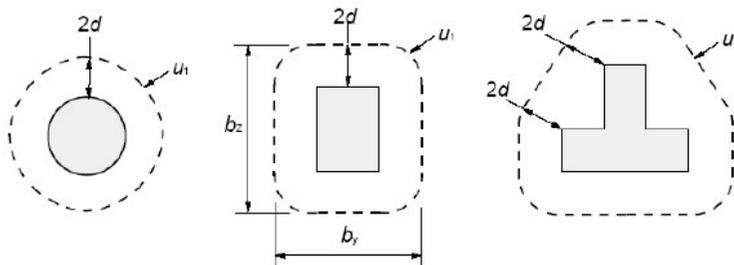


Рис. П.4 Базовые контрольные периметры, применяемые в [110]

Как показано на рис. П.4, для прямоугольных колон базовый контрольный периметр включает скругленные углы (нормы ACI [96] и CSA [102] допускают прямые углы). Нормы также рекомендуют проверять зоны

возле грани колонны и в сечении за поперечным армированием. Для случая с внутренней колонной, при отсутствии поперечного армирования сопротивление срезу v_r вычисляется как

$$v_r = v_c = \frac{0,18}{\gamma_c} k (100 \rho f_{ck})^{\frac{1}{3}} \geq v_{\min}, \quad (\text{П.1.8})$$

Здесь $k = 1 + \left(\frac{200}{d} \right)^{0,5} < 2,0$;

d - расстояние от грани колонны до границы контрольного периметра (в мм);

f_{ck} - характеристическая прочность бетона МПа;

ρ - коэффициент армирования, $\rho = (\rho_z \rho_y)^{\frac{1}{2}} \leq 0,02$;

ρ_z, ρ_y - коэффициенты армирования в направлении z, y для плит, длина которых равна длине колонны плюс $3d$ с каждой стороны;

$\gamma_c = 1,5$;

$$v_{\min} = 0,035 k^{\frac{3}{2}} f_{ck}^{\frac{1}{2}};$$

Касательные напряжения v_f около базового контрольного периметра из-за распределенной на участке концентрированной нагрузки V_f и сосредоточенного момента находятся из следующего выражения

$$v_f = \frac{V_f}{u_1 d} \beta, \quad (\text{П.1.9})$$

здесь

$$\beta = \left(1 + \frac{\gamma M_f u_1}{V_f W_1} \right) - \text{для момента в одном направлении}$$

$$\beta = 1 + 1,8 \sqrt{\left(\frac{e_y}{b_z} \right)^2 + \left(\frac{e_z}{b_y} \right)^2} - \text{для момента в двух направлениях}$$

$$W_1 = \int_0^{u_1} |e| dl,$$

где u_1 - длина базовый контрольный периметр;

γ - доля влияния момента M_f (для прямоугольных колон $\gamma = 0,6$);

b_y, b_z - размеры базового контрольного периметра (рис.П.4);

e_y, e_z - эксцентриситеты $\frac{M_f}{V_f}$ по осям y, z соответственно;

e - расстояние dl от оси момента.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Вычисление главных напряжений в бетоне

Главные напряжения $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ определяются через значения напряжений в общей системе координат $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ по следующему алгоритму с использованием стандартных приемов теории упругости.

1. Определяются октаэдрические напряжения σ_o и τ_o

$$\sigma_o = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z); \quad (\text{П.2.1})$$

$$\tau_o = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)} \quad (\text{П.2.2})$$

2. Вычисляется 3-ий инвариант девиатора напряжений I_{D3}

$$S_x = \sigma_x - \sigma_o; S_y = \sigma_y - \sigma_o; S_z = \sigma_z - \sigma_o; \quad (\text{П.2.3})$$

$$I_{D3} = S_x S_y S_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{xz} - \tau_{xz}^2 S_y - \tau_{yz}^2 S_x - \tau_{xy}^2 S_z$$

3. Определяются параметры Лодэ-Надаи μ_σ

$$\psi = \frac{1}{3} \arccos \left(\sqrt{2} \frac{I_{D3}}{\tau_o^3} \right); \quad (\text{П.2.4})$$

$$\mu_\sigma = -\sqrt{3} \operatorname{ctg} \left(\psi + \frac{4}{3} \pi \right).$$

4. Вычисляются главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_o + \frac{3 - \mu_\sigma}{\sqrt{2} \sqrt{3 + \mu_\sigma^2}} \tau_o \\ \sigma_2 &= \sigma_o + \frac{\sqrt{2} \mu_\sigma}{\sqrt{3 + \mu_\sigma^2}} \tau_o \\ \sigma_3 &= \sigma_o - \frac{3 + \mu_\sigma}{\sqrt{2} \sqrt{3 + \mu_\sigma^2}} \tau_o \end{aligned} \right\}. \quad (\text{П.2.5})$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	4
ГЛАВА 1. ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЧНОСТИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПЛИТ ПРИ ПРОДАВЛИВАНИИ	6
1.1. Экспериментальные основы. Метод предельного равновесия	5
1.2. Аналитические и численные исследования.	8
ГЛАВА 2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЛИТ ПРИ ПРОДАВЛИВАНИИ ШТАМПАМИ РАЗЛИЧНОЙ ГЕОМЕТРИИ.	15
2.1. Характеристика опытных образцов и методика проведения экспериментов.....	15
2.2. Результаты экспериментальных исследований железобетонных плит на продавливание.....	19
2.2.1. Квадратный штамп (плиты ПЛ1Кв, ПЛ2Кв).....	19
2.2.2. Штамп Г-образной формы (плиты ПЛ1У, ПЛ2У).....	24
2.2.3. Штамп крестообразной формы (плиты ПЛ1К, ПЛ2К).....	28
2.3. Сопоставление данных экспериментальных исследований с результатами расчетов по действующим нормативным документам.....	33
2.4. Формы разрушения. Проверка гипотезы о пирамиде продавливания.	36
ГЛАВА 3 МОДЕЛЬ ЖЕЛЕЗОБЕТОНА С ТРЕЩИНАМИ... ..	40
3.1. Общие предпосылки.....	40
3.2. Прочность бетона. Схемы образования трещин.....	42
3.3. Определяющие соотношения для железобетона без трещин.	46
3.3.1. Бетон.....	46
3.3.2. Арматура.	50
3.4. Определяющие соотношения для железобетона с трещинами.	52
ГЛАВА 4. РЕАЛИЗАЦИЯ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ	62
4.1. Решение физически нелинейных задач МКЭ.....	63
4.2. Конечные элементы для решения трехмерных задач.....	69

4.2.1. Элемент в виде параллелепипеда.....	69
4.2.2. Криволинейные элементы	74
ГЛАВА 5. РАСЧЕТЫ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ... ..	78
5.1. Решение тестовой задачи.....	78
5.2. Расчеты экспериментальных образцов	81
5.2.1. Плита ПЛ1Кв. Квадратный штамп.....	82
5.2.2. Плита ПЛ2У. Штамп Г-образного сечения.	86
5.2.3. Плита ПЛ2К. Штамп крестообразной формы.....	91
5.3. Расчет фрагмента монолитной плиты перекрытия.....	95
ЛИТЕРАТУРА.....	101
ПРИЛОЖЕНИЕ А.....	111
ПРИЛОЖЕНИЕ Б.....	111

В книге представлены экспериментально-теоретические исследования влияния геометрии продавливающего штампа на работу плит при продавливании. Результаты испытаний опытных образцов сравнивались с их расчетами методом конечных элементов с использованием модели бетона и железобетона Н.И. Карпенко

Об авторах



Клованич Сергей Федорович, д.т.н., профессор. Научные интересы - моделирование работы бетона и железобетона при сложном напряженном состоянии, численные исследования железобетонных конструкций, теоретические и прикладные аспекты метода конечных элементов, нелинейные расчеты на основе МКЭ. Заведующий кафедрой Одесского национального морского университета (Украина). Ординарный профессор Варминско-Мазурского университета в г. Ольштын (Польша). Иностраный член Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН).

E-Mail: scotch@te.ne.ua
<http://klovaniich.se-ua.net>



Шеховцов Владислав Игоревич, к.т.н. Научные интересы - экспериментальные исследования работы различных железобетонных конструкций, продавливание плоских плит штампами различной геометрии, численные исследования железобетонных конструкций с помощью современных программных комплексов на основе метода конечных элементов, нелинейные расчеты на основе МКЭ. Ассистент кафедры "Строительные конструкции" Одесской государственной академии строительства и архитектуры. Ассистент кафедры "Инженерные