

Ковров А.В., Кушнир А.М., Ковтуненко А.В., Высочан Н.К.

**НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ
ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РАМНЫХ
КОНСТРУКЦИЙ**

**Одесса
2015**

УДК 624.074.1: 624.012.45
ББК 38.53
Д 69

Рекомендовано к изданию Ученым Советом Одесской государственной академии строительства и архитектуры. Протокол № 8 от 24 апреля 2014 г.

Рецензенты:

Т.Н.Азизов - заведующий кафедрой технологических дисциплин Уманского государственного педагогического университета им.Павла Тычины, доктор технических наук, профессор

А.А.Шкурупий - заведующий кафедрой строительной механики Полтавского национального технического университета имени Юрия Кондратюка, кандидат технических наук, доцент

Д694 Ковров Анатолий Владимирович

Д 69 Напряженно-деформированное состояние железобетонных пространственных рамных конструкций [Монография]/ А.В.Ковров, А.М.Кушнир, А.В.Ковтуненко, Н.К.Высочан. – Одесса: 2015. – 215с.

ISBN

Монография посвящена разработке методик определения напряженно-деформированного состояния железобетонных пространственных рамных конструкций с учетом трещинообразования.

Предназначена для студентов и аспирантов высших технических учебных заведений, научных и инженерно технических работников проектных и строительных организаций.

УДК 624.074.1: 624.012.45
ББК 38.53
Д 69

ISBN

© Ковров А.В.,
Кушнир А.М.,
Ковтуненко А.В.,
Высочан Н.К. 2014

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	6
1. СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЙ	7
1.1 Общие положения	7
1.2 Основные методы расчета статически неопределимых рамных конструкций	9
1.2.1 Аналитические методы	9
1.2.2 Практические методы	14
1.2.3 Численные методы	18
1.2.4 Численно-аналитические методы	22
1.3 Теоретические основы численно-аналитического метода граничных элементов	27
1.4 Определение координат центра изгиба и центра кручения	33
1.5 Зависимость касательные напряжения - угловые деформации	35
2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РАМНЫХ КОНСТРУКЦИЙ В УПРУГОЙ СТАДИИ ПРИ ПОМОЩИ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ	37
2.1 Формирование расчетной схемы численно-аналитического метода граничных элементов	37
2.2 Правила определения внутренних усилий и перемещений	41
2.2.1 Формирование уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние	41
2.2.2 Граничные условия	43
2.2.3 Уравнения равновесия	45
2.2.4 Уравнения совместности перемещений	48
2.2.5 Пример расчета пространственной рамной конструкции	51
2.3 Сравнение результатов расчетов	68
3. АВТОМАТИЗАЦИЯ ФОРМИРОВАНИЯ МАТРИЦ ЧИСЛЕННО-	

АНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ РАСЧЕТЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ УПРУГИХ РАМНЫХ КОНСТРУКЦИЙ	70
3.1 Система уравнений ЧА МГЭ	70
3.2 Формирование вектора неизвестных граничных параметров X^*	71
3.3 Формирование матрицы коэффициентов A_0^*	75
3.4 Формирование матрицы коэффициентов Z_0^*	87
3.5 Сравнение результатов расчетов	95
4. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В УПРУГОЙ СТАДИИ РАБОТЫ	99
4.1 Определение центра кручения сечений неоднородных элементов	99
4.2. Основные предпосылки модели деформирования при кручении железобетонных прямоугольных сечений	107
4.3 Построение диаграмм «крутящий момент – угол закручивания» с использованием шагово-итерационной методики для железобетонных элементов прямоугольного поперечного сечения	110
4.4 Анализ изменения усилий в элементах пространственной рамной конструкции при поэтапном нагружении	115
4.5 Системы уравнений для определения напряженно- деформированного состояния конструктивных элементов	122
4.6 Анализ напряженного состояния конструктивных элементов	125
5. РАСЧЕТ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РАМНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ ТРЕЩИНООБРАЗОВАНИЯ	129
5.1 Построение диаграмм «крутящий момент – угол закручивания» с использованием шагово-итерационной методики для железобетонных элементов прямоугольного поперечного сечения с нормальной трещиной	129
5.2 Учет трещинообразования в элементах пространственных рамных железобетонных конструкций	136

5.3 Расчет одноэтажной однопролетной одношаговой железобетонной пространственной рамной конструкции с учетом трещинообразования	142
5.4 Расчет девятиэтажной четырехшаговой и двухпролетной железобетонной рамной конструкции с учетом трещинообразования	151
ЛИТЕРАТУРА	159
ПРИЛОЖЕНИЯ	176
ПРИЛОЖЕНИЕ А	177
ПРИЛОЖЕНИЕ Б	183
ПРИЛОЖЕНИЕ В	189
ПРИЛОЖЕНИЕ Г	192
ПРИЛОЖЕНИЕ Д	212

ВВЕДЕНИЕ

Благодаря широким возможностям объемно-планировочных решений внутреннего пространства в последнее время в гражданском и промышленном строительстве получили распространение каркасные здания.

Особенностью работы конструкций, выполненных из железобетона, является наличие, образование и развитие трещин, которые существенно влияют на формирование их напряженно-деформированное состояния.

Большой вклад в изучение напряженно-деформированного состояния и деформативности железобетонных элементов внесли работы В.Н.Байкова, В.М.Бондаренка, А.А.Гвоздева, А.С.Залесова, Н.И.Карпенка, С.М.Крылова, Л.Л.Лемыша, Л.Л.Паныпина, Д.М.Подольского, А.Р.Ржаницына, В.В.Ханджи, Н.Н.Шапошников, П.П.Шагин и других ученых.

Применяемые методы расчета многоэтажных каркасов основываются на плоских или пространственных моделях, взаимодействие элементов которых характеризуются, как правило, фиксированными жесткостными характеристиками. Реальная картина работы многоэтажных каркасов зданий достаточно сложна и по многим параметрам отличается от принятых в существующей практике проектирования.

Для получения достоверных результатов необходимы методы, позволяющие учитывать в процессе расчета изменение жесткостей отдельных железобетонных элементов в результате процессов трещинообразования происходящих в них.

Численно-аналитический метод граничных элементов позволяет учитывать в процессе расчета железобетонных конструкций изменение жесткостей отдельных элементов. Разработка методик определения напряженно-деформированного состояния железобетонных конструкций в пространственных системах с учетом трещинообразования, при помощи данного метода является задачей актуальной и необходимой для развития теории расчета железобетонных конструкций.

1. СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

1.1. Общие положения

В последние годы в практике строительства многоэтажных жилых и общественных зданий широкое распространение получило применение монолитных железобетонных каркасов с плоскими перекрытиями. Такие здания по основным показателям (архитектурным, конструктивным, технологическим и экономическим), как правило, превосходят здания из сборных элементов, особо их преимущества проявляются в зданиях повышенной этажности, находящиеся под воздействием значительных горизонтальных и вертикальных нагрузок.

Монолитные многоэтажные здания имеют существенные особенности как с точки зрения расчёта и проектирования как конструктивной системы в целом, так и отдельных их элементов, среди которых:

- особенности расчёта здания, различными методами, как пространственной системы, с учётом физической и геометрической нелинейности;
- особенности расчёта пространственных рамных конструкций с комплексным учётом действующих на них силовых воздействий;
- особенности расчёта узловых сопряжений стоек с ригелями и плитами перекрытий;
- расчет конструкций с учетом трещинообразования и податливости узловых сопряжений;
- особенности конструирования монолитных элементов каркаса и их армирования.

Эти факторы комплексно не учитываются в существующих нормативных документах [28, 153] в практике проектирования и

строительства, что приводит либо к недостаточной надежности таких конструкций, либо к излишнему расходу материалов.

Несущая система многоэтажного каркасного здания является сложной многосвязной пространственной конструкцией, состоящей из отдельных податливых вертикальных и горизонтальных конструктивных подсистем, опирающихся на податливое грунтовое основание. За несущие подсистемы каркасного здания приняты плоские продольные или поперечные многоэтажные рамы, диски перекрытий, плоские или пространственные вертикальные элементы жесткости. Соотношение жесткостей этих подсистем и их сопряжений, наряду с нагрузками и воздействиями, определяет напряженно-деформированное состояние конструкций здания. Влияние жесткостных характеристик отдельных подсистем на распределение усилий в несущей системе изучалось многими авторами [1-16, 21, 38, 40, 45, 47, 52, 53, 58-62, 69-71, 106, 109, 124, 133, 142, 147, 154-156].

Горизонтальные несущие подсистемы (диски перекрытий) в многоэтажных зданиях, наряду с восприятием полезной нагрузки и передачей её на вертикальные элементы, деформируясь в своей плоскости, выполняют роль горизонтальных диафрагм, связывающих вертикальные подсистемы в единую пространственную систему, перераспределяя между ними внешние нагрузки [53, 56, 61]. Кроме того, при смещениях из плоскости вследствие неравных вертикальных перемещений различных точек элементов жесткости, перекрытия являются связями изгиба и кручения между вертикальными подсистемами [53, 56].

Вертикальные нагрузки распределены обычно неравномерно, поэтому их действие в каждой вертикальной подсистеме вызывает возникновение сжимающей силы и изгибающего момента [53, 108, 119]. Следовательно, в элементах жесткости возникают вертикальные и горизонтальные перемещения, которые для различных «столбов» здания в общем случае различны, так как «столбы» неодинаково нагружены и имеют неодинаковую податливость при

сжатии и изгибе. Кроме того, в деформированном состоянии возникает горизонтальная составляющая вертикальной нагрузки, которая также вызывает горизонтальные и вертикальные перемещения системы [18, 53, 71].

В создание и развитие методов расчета пространственных рамных конструкций большой вклад внесен работами таких известных ученых как В.Н. Байкова, А.Н. Бамбуры, В.Ю. Барданова, В.Я. Бачинского, В.М. Бондаренко, А.А. Гвоздева, А.Б. Голышева, В.С. Дорофеева, А.С. Залесова, Н.И. Карпенко, В.К. Егупова, И.Е. Лившиц, Л.Р. Маиляна, А.Р. Ржаницына, В.И. Мурашева, В.В. Ханджи, Л.Л. Панышина, И.Е. Прокоповича, Б.С. Расторгуева, С.И. Рогового, И.И. Темнова, И.А. Узуна, И.И. Улицкого, Н.Н. Шапошников, П.П. Шагин, А.Ф. Яременко и др.

На рис. А.1 в Приложении А приведена классификация методов определения напряженно-деформированного состояния многоэтажных зданий [78]. В ней выделено четыре основных группы методов: аналитические, практические, численные и численно-аналитические, которые рассмотрим ниже.

1.2. Основные методы расчета статически неопределимых рамных конструкций

1.2.1. Аналитические методы

Аналитические методы основываются на методах строительной механики стержневых систем, теории упругости и теории составных стержней для плоских и объемных конструкций [86, 115, 143]. Расчет сводится к составлению и решению систем уравнений – алгебраических или дифференциальных соответственно для стержневых и континуальных конструкций. В создание и развитие аналитических методов расчета многоэтажных каркасных конструкций большой вклад внесли такие известные

ученые как В.П.Ильин [68], Б.М.Жемочкин [63, 64, 65], П.П.Шагин [140, 141] и др.

Наиболее распространенными аналитическими методами являются: метод сил [25, 61], метод перемещений [49], смешанный метод и др.

В методе сил основная система принимается путем исключения “лишних” связей в исходной таким образом, чтобы она превращалась в статически определимую.

К основным недостаткам метода сил относят значительную трудоемкость, связанную как с построением единичных и грузовых эпюр (определение опорных реакций и ординат эпюр в характерных сечениях), так и с вычислением коэффициентов канонических уравнений путем перемножения эпюр.

В работе [61] В.К.Егупов, Т.А.Командрина, В.Н.Голобородько рассматривают уравнения метода сил для статически неопределимой пространственной рамной системы. Метод расчета основан на следующих допущениях:

- поперечные рамы моделируются условным сдвиговым стержнем, а сборные перекрытия – изгибо-сдвиговым либо (для протяженных зданий) изгибным стержнем;

- деформации кручения вертикальных и горизонтальных элементов не учитываются;

- дискретные связи, соединяющие перекрытия и вертикальные элементы, заменяют распределенными, континуальными;

- число поперечных рам не менее 4-5, а поэтому их жесткости принимаются равномерно распределенными по длине здания;

- все поперечные рамы одинаковы и расположены на равных расстояниях одна от другой;

- распределение ветровой нагрузки по длине здания принимается равномерной, а по высоте – по линейному закону, в форме трапеции.

Основную систему Егупов В.К. получил из заданной путем отделения вертикальных диафрагм жесткости от всех перекрытий. Оставшуюся часть здания назвал неполным пространственным каркасом, который состоит из поперечных рам и перекрытия.

Уравнения совместности перемещений вертикальных диафрагм жесткости и неполного пространственного рамного каркаса имеют следующий вид:

$$(D + K)R + K_q = 0 \quad (0.1)$$

Формулы для определения D, K, R, K_q представлены в Приложении А.

За счет оптимального выбора статически неопределимой основной системы число неизвестных значительно снижено. Для наиболее распространенных зданий повышенной этажности уравнение (0.1), по мнению Егупова В.К., можно выполнить расчет на компьютерах среднего класса.

Егупов В.К. считал, что уравнение (0.1) имеет два существенных недостатка:

- единичные перемещения каркаса определяются путем раскрытия статической неопределимости сложной пространственной системы;
- матрица уравнения (0.1) плохо обусловлена.

По сравнению с методом сил метод перемещений менее трудоемкий, особенно при расчетах рамных систем. Неизвестными в методе перемещений являются углы поворота жестких узлов и независимые линейные перемещения всех узлов системы, основная система создается наложением связей на исходную систему.

Рассматривая расчет пространственных рам методом перемещений [19, 49], следует отметить, что степень кинематической неопределимости пространственной рамы, т.е. степень подвижности ее узлов, как и в случае

$\Sigma M_{i\Delta}$ - момент от перемещений.

Для предварительного нахождения перемещения узлов, Юдин В.К., использовал уравнение

$$R_i = R_{ip} + \Sigma R_{i\Delta} \quad (0.4)$$

Уравнение (0.4) можно переписать в виде

$$R_i = r_{n1} Z_1 + r_{n2} Z_2 + \dots + r_{ni} Z_n + R_{np} + R_{nt} + R_{n\Delta} \quad (0.5)$$

В методе перемещений приняты такие предположения:

- расстояние между конечными точками стержня после нагрузки принимается равным длине стержня к нагрузке;
- система является линейно-упругой;
- имеет место принцип независимости как силовых, так и кинематических действий.

Одним из недостатков метода перемещений (деформаций), является значительная подвижность узлов рамных конструкций.

Вместе с этим метод перемещений, по сравнению с другими методами, наиболее практичный, так как увеличение числа стержней сходящихся в узле, не приводит к увеличению числа неизвестных.

Аналитический подход имеет большое методическое значение. При развитии аналитических методов был осуществлен настоящий прорыв в понимании и описании основ сопротивления несущих систем многоэтажных зданий нагрузкам и воздействиям. Если в начале XX столетия, здания рассматривались как набор независимых плоских элементов, то к концу – как сложные пространственные системы, свойства которых в той или иной степени зависят от свойств каждого элемента, а эти зависимости качественно и, в большинстве случаев, количественно описаны аналитически.

При совершенствовании и развитии аналитических методов расчета многоэтажных зданий, были накоплены уникальные экспериментальные и теоретические данные о свойствах несущих систем, подсистем, элементов и их сопряжений. Следует отметить, что основным достоинством аналитических методов, по сравнению с другими методами, является высокая точность полученных результатов. Аналитические методы являются одной из теоретических составляющих численных методов.

1.2.2. Практические методы

В развитии аналитических методов расчета многоэтажных зданий распространение получили практические методы, разработанные и впервые примененные для расчета многоэтажных зданий, такими известными учеными как А.Р.Ржаницын [115], М.Тихий, Й.Ракосник [132], А.А.Гвоздев [41], Н.С.Стрелецкий [125], В.В.Ханджи [136], Д.М.Подольский [111], И.Е.Лившиц [92], А.А.Дыховичный [57].

Большинство задач строительной механики, связанных с исследованием напряженно-деформированного состояния конструкций и их элементов, сводится, как правило, к одному или нескольким дифференциальным уравнениям.

Точные решения этих уравнений, или решения в замкнутом виде, удается получить не всегда. В некоторых случаях точные решения либо принципиально невозможны, либо приходится сталкиваться с таким объемом вычислений, что получение аналитических решений становится нецелесообразным. В связи с этим при решении многих практических задач давно используются приближенные методы расчета [42, 105, 112, 120].

Исторически первыми появились вариационные методы решения – методы Рэлея, Ритца, Бубнова-Галеркина, Власова-Канторовича и др. Эти методы чаще

всего приводят к решению систем двух, трех, реже четырех уравнений, однако их применение ограничено наличием сложных контуров или сложных законов распределения внешних нагрузок т.к. необходимо задавать, хотя и в приближенной форме, аналитические выражения внешних нагрузок, деформированной упругой поверхности элементов.

С помощью практических методов созданы расчетные таблицы, графики, формулы (например [32, 35, 43, 44, 74, 93, 99, 128, 129]), облегчающие определение напряженно-деформированного состояния отдельных конструкций и систем из них. На их основе разработаны указания, инструкции и рекомендации [39, 48, 114, 118] учитывающие особенности различных типов зданий и сооружений и до последнего времени применяемые для расчета.

К практическим методам относится известный метод предельного равновесия.

Расчет конструкций по методу предельного равновесия основывается на анализе процессов перехода конструкций в предельное состояние.

Большое значение для разработки метода предельного равновесия имели предложения Н.С.Стрелецкого [125] по выбору системы и обоснованию величин расчетных коэффициентов, работы А.А.Гвоздева [41] по расчету несущей способности конструкций методом предельного равновесия и по общей разработке метода применительно к бетонным и железобетонным конструкциям, а также работы других известных ученых – В.М.Келдыша, И.И.Гольденבלата, В.П.Митрофанова [97] А.Р.Ржаницына [116].

Теоретическое обоснование метода предельного равновесия, применяемого для расчета статически-неопределимых конструкций, сделано А.А.Гвоздевым [41]. Этот метод предполагает возможность появления пластических шарниров и учитывает фактическое (в соответствии с принятым армированием) перераспределение усилий вследствие пластических деформаций.

Конструкция в методе предельного равновесия рассматривается как система элементов, которые при определенных заранее известных усилиях или сочетаниях усилий достигают предельного состояния, т.е. разрушаются, или приобретают способность сильно деформироваться без изменения величины действующих на них сил. Если элемент в предельном состоянии сильно деформируется, то для полного решения задачи по методу предельного равновесия необходимо знать не только соотношение усилий, вызывающее предельное состояние, но еще и характер (вид) деформации элемента при этом сочетании усилий. Под характером (видом) деформаций Гвоздев А.А. принимает соотношение компонент приращения свободных деформаций элемента, т.е. деформаций, возникающих в предельном состоянии элемента, когда действующие на него силы остаются неизменными.

Для составления расчетного уравнения отыскиваются места возможного появления пластических шарниров (сечения или линии излома) и тем самым устанавливается схема разрушения конструкции. Затем, исходя из рационального распределения арматуры между опорными и пролетными сечениями, предварительно назначаются соотношение изгибающих моментов и записывается уравнение равновесия.

Согласно [41] чтобы применение метода предельного равновесия было обоснованным, необходимы следующие свойства системы:

– вплоть до исчерпания несущей способности системы ее деформации остаются настолько малыми, что можно пренебречь изменением всех геометрических величин, входящих в условия равновесия;

– сопротивление элементов системы действующим на них усилиям характеризуется неравенствами, нарушение которых (включая и обращение в равенство) есть необходимое и достаточное условие наступления предельного состояния.

Практические методы [62, 90, 117, 122] являются приближенными. Они направлены на упрощение расчетов, основанных на абстрагировании от параметров, которые не могут значительно влиять на основные результаты расчетов. Как правило, в основе практических методов лежит упрощение закономерностей, построенных на основе результатов экспериментальных исследований.

Основными преимуществами практических методов являются то, что они основываются на результатах исследований реальных конструкций и учитывают физическую работу зданий и сооружений.

Основные недостатки практических методов:

- ограниченность применения;
- возможный не учет важных факторов, влияющих на работу конструкции;
- отсутствие стимулирования развития точных аналитических методов.

Особое место в литературе по расчету пространственных рамных конструкций занимает решение их методом моторов [33, 87, 88, 146].

Мотором называется винтовая система векторов, состоящая из приведенных к началу координат главного вектора и главного момента. Кротов Ю.В. [88] ввел в методе понятие о моторах сил и моторах перемещений, являющихся пространственными векториальными образами, определяемыми шестью координатами:

$$M_i(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z, \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$$
$$M_c(N_x, N_y, N_z, M_x, M_y, M_z)$$

Ю.В.Кротов, Б.Н.Горбунов, Д.В.Вайнберг, В.Г.Чудновский [34, 87, 88] считали моторный метод расчета наиболее общим и совершенным из всех

других существующих методов, применяемых для расчета пространственных рамных конструкций.

В 50-60 гг. из-за отсутствия легких и достаточно точных методов расчета пространственных рамных конструкций, проектировщики применяли приближенные формулы для определения защемляющих и крутящих моментов.

К числу таких приближенных формул можно отнести формулу профессора Рудольфа Залигера [146] для определения защемляющего момента на опоре балки или плиты, заделанных в прогоне.

$$M_{i\bar{i}} = 2 / 3 m_0 \div 5 / 6 m_0 \quad (0.6)$$

где m_0 – защемляющий момент при полной заделке.

Сравнивая результаты, полученные по приближенным формулам с расчетом по методу перемещений, видно, что приближенные формулы дают большую погрешность вычислений, что приводит к увеличению расхода материалов, а в отдельных случаях и наоборот к снижению, что приводит к снижению надежности и недостаточной несущей способности конструкции.

Недостатком приближенных формул также является и то, что они не учитывают условий на опорах главных балок, жесткости стоек, в которые заделаны главные балки, не учитывают условий опирания второстепенных балок на опоры, например, когда с одной стороны прогон, а с другой – свободное опирание на кирпичную стену.

Учитывая низкие технико-экономические показатели применения одних приближенных формул и весьма грубую неточность других, нельзя рекомендовать их к практическому применению.

1.2.3. Численные методы

Прогресс компьютерной техники и вычислительной математики, обусловили изменение соотношения аналитических и численных подходов

при анализе сложных конструкций, зданий и сооружений. Практика выдвигает на передний план задачи многовариантных исследований двумерных и трехмерных систем, адекватное решение которых иногда возможно только численным путем. Как правило, найти замкнутое аналитическое решение для большинства задач не представляется возможным, а экспериментальные исследования часто оказываются весьма дорогостоящими, а порой и неполными. Этим, в частности, и объясняется превалирование численных методов, имеющее место, как в отечественной, так и в зарубежной расчетной практике.

Численные методы, применительно к пространственным расчетам зданий, развивались и обогащались результатами экспериментально-теоретических исследований в работах П.Ф.Дроздова, Б.А.Косицына, Л.Л.Паньшина Ю.И. Немчинова и др. [53, 86, 100, 107]. В результате была выработана теория для описания напряженно-деформированного состояния многоэтажных зданий, позволяющая учитывать факторы, которые влияют на пространственную работу несущей системы здания.

Наиболее распространенные следующие численные методы: матричный метод расчета стержневых систем, метод конечных разностей для расчета плоских и объемных конструкций, метод стержневой аппроксимации сплошных систем [115], метод конечных элементов [67, 143, 150, 151, 152].

Основные преимущества численных методов [68] заключаются в их универсальности, пригодности к расчетам любых конструкций, независимо от нагрузок, граничных условий, локальных и резких изменений жесткостных характеристик и др. Отсутствует принципиальная разница в расчетах плоских и пространственных систем.

Среди недостатков численных методов:

- приближенное решение задачи;
- ряд сложностей и условностей в части моделирования отдельных железобетонных элементов и др.

В настоящее время наиболее разработанным численным методом, является метод конечных элементов (МКЭ). Этот метод является мощным средством решения задач не только строительной механики, но и целого ряда других дисциплин – гидрогазодинамики, теплотехники, электротехники, машиностроения, судостроения и т.д. Основные концепции МКЭ были разработаны давно, однако по-настоящему реализовать все его возможности удалось относительно недавно, с появлением последних поколений компьютерной техники, обладающей большими объемами памяти для выполнения и хранения значительного количества вычислений и быстрой обработкой исходных данных.

Количество компьютерных программ, реализующих метод конечных элементов, в настоящее время, довольно много. Наиболее обширное практическое применение получили такие программные комплексы как: ЛИРА, SCAD Structure, ANSYS, Cosmos Works, ABAQUS, NASTRAN, Mechanical Desktop, NX Nastran, Impact, Temper-3D.

Основная идея метода конечных элементов [100, 127] состоит в том, что любая непрерывная величина (температура, давление, перемещение) аппроксимируется дискретной моделью, построение которой выполняется на множестве кусочно-непрерывных функций, определенных на конечном числе подобластей. Алгоритм построения дискретной модели изучаемой непрерывной величины заключается в следующем:

- в рассматриваемой области фиксируют конечное число точек. Эти точки в дальнейшем называют узлами.

- исследуемая непрерывная величина в каждом узле является переменной, подлежащей определению в процессе решения задачи.

- область изменения непрерывной величины разбивают на элементы. Эти элементы имеют между собой общие узлы и, в совокупности, аппроксимируют форму области в целом.

Непрерывную величину аппроксимируют в пределах каждого элемента полиномом, коэффициенты которого рассчитывают на основании значений этой величины в узлах. Каждый элемент аппроксимируют своим полиномом, а коэффициенты полиномов подбирают таким образом, чтобы сохранялась непрерывность величины вдоль границ соседних элементов.

Основная концепция МКЭ может быть наглядно проиллюстрирована на одномерном примере растяжения стержня длины L вдоль его оси, показанном на рис. 1.1. Рассматривается непрерывная величина $U(x)$ – перемещение точек стержня вдоль оси x . Область определения $U(x)$ – отрезок OL вдоль оси x .

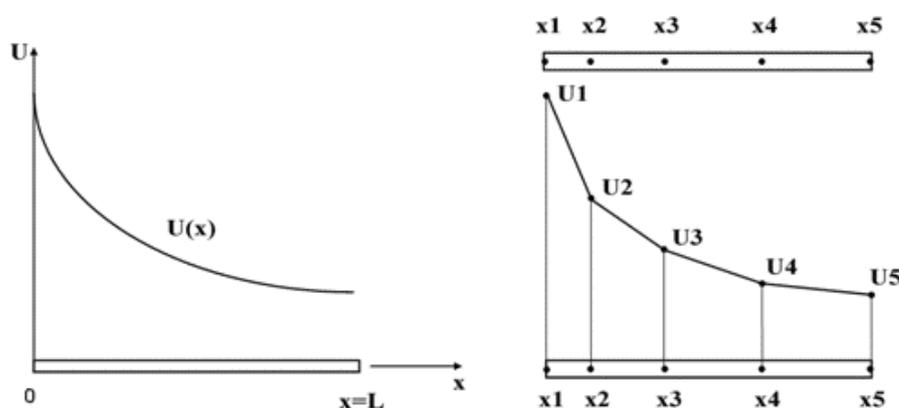


Рис. 1.1. Пример растяжения стержня вдоль его оси

Фиксируя на оси x пять точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 . Распределение перемещений $U(x)$ заранее неизвестно. В процессе решения задачи необходимо определить значения перемещения $U_1...U_5$ в каждой узловой точке. Для этого выполняются описанные выше этапы построения дискретной модели. Разбивая область на элементы, на каждом из которых определяется соответствующая функция элемента. Узловые значения $U_1...U_5$ функции $U(x)$ должны быть "отрегулированы" таким образом, чтобы обеспечивалось "наилучшее" приближение к истинному распределению перемещений. Это "регулирование" выполняется путем минимизации некоторой величины, связанной с физической сущностью задачи. В данном

случае рассматривается задача растяжения тела, а минимизируемый функционал связан с соответствующим дифференциальным уравнением. Процесс минимизации в конечном итоге сводится к решению систем линейных уравнений относительно узловых значений $U_1...U_5$ функции $U(x)$.

Метод конечных элементов является приближенным методом и чем мельче разбивка конструкции на конечные элементы, тем ближе аппроксимирующая модель к натурной конструкции и в то же время, как показывает практика, всякое усложнение расчетных схем не всегда может привести к увеличению точности результатов расчета. Поэтому в общем случае процесс дискретизации должен основываться на принципах максимального приближения к описанию реальной картины напряженно-деформированного состояния.

Наиболее серьезной проблемой МКЭ, многие известные ученые считают проблему сходимости полученного решения, оценку погрешности, связанной с дискретизацией исходной геометрической модели, искусственное ограничение области расчета, дискретизация окружающего пространства, выполнение новой дискретизации при изменении положения элементов [50, 138].

Анализ литературных источников [67, 75, 101, 119, 151], показывает, что к настоящему времени ресурсы совершенствования МКЭ практически исчерпаны. Это подчеркивает актуальность разработки новых, более эффективных методов расчета, чем МКЭ, а также реализующих их программных комплексов, позволяющих внедрять новые методы расчета в реальное проектирование.

1.2.4. Численно-аналитические методы

Как отмечено в работе Залесова А. С. [66], «...требуется развитие и совершенствование упрощенных моделей для расчета конструктивных систем, отражающих физический характер их работы».

Существующий инструментарий аналитических моделей, в сочетании с разнообразием численных методов дает возможность развивать численно-аналитические методы расчета, которые позволяют получать решения в аналитической форме, способствующей повышению качества исследования рассматриваемых объектов. Найденная с их помощью картина напряженно-деформированного состояния развивает интуицию расчетчика и понимание им работы конструкций, характера влияния на них различных локальных и глобальных факторов.

Численно-аналитические подходы особенно эффективны в зонах так называемого краевого эффекта, который возникает в результате сосредоточенных воздействий на краях конструкции или в промежуточных зонах, ибо при этом часть составляющих решения представляет собой быстроменяющиеся функции, скорость изменения которых не всегда может быть адекватно учтена при использовании традиционных численных методов. Кроме того, при численном решении сложных задач строительной механики предварительное аналитическое изучение отдельных локальных свойств конструкций может принести значительную пользу. Сравнение с аналитическими решениями сложной задачи в более простых и частных случаях позволяет дать оценку принятой расчетной схемы конструкции, используемого метода, алгоритма и полученного решения, в частности его точности.

Наиболее распространенными численно-аналитическими методами являются:

- метод начальных параметров;
- метод коллокаций;
- метод граничных элементов.

Метод коллокаций [22, 27] позволяет найти приближенное решение краевой задачи не в виде числового массива, а с помощью функций. В этом отношении метод коллокаций близок к вариационным методам.

Сущность метод начальных параметров [17] состоит в том, что для характерного набора частных нагрузок общий интеграл дифференциального уравнения линии прогибов строится как набор соответствующих частных решений, причем в качестве произвольных постоянных выбираются прогиб v_0 , угол поворота φ_0 , момент M_0 и поперечная сила Q_0 в начале общей системы координат, единой для всего стержня. Решение представляется в виде формулы общего вида для произвольного n -го участка стержня, которую Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. называют универсальной формулой.

$$v_n = v_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \Delta v_i = v_0 + \varphi_0 z - \frac{M_0 z^2}{2! EJ} - \frac{Q_0 z^3}{3! EJ} + \frac{q_0 z^4}{4! EJ} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(-\frac{\Delta M_i (z - a_i)^2}{2! EJ} - \frac{\Delta Q_i (z - a_i)^3}{3! EJ} + \frac{\Delta q_i (z - a_i)^4}{4! EJ} \right) \quad (0.7)$$

Для углов поворота функция φ_n получается дифференцированием $\varphi_n = dv_n / dz$:

$$\varphi_n = \varphi_0 - \frac{M_0 z}{1! EJ} - \frac{Q_0 z^2}{2! EJ} + \frac{q_0 z^3}{3! EJ} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(-\frac{\Delta M_i (z - a_i)}{1! EJ} - \frac{\Delta Q_i (z - a_i)^2}{2! EJ} + \frac{\Delta q_i (z - a_i)^3}{3! EJ} \right) \quad (0.8)$$

Величины v_0, φ_0, M_0, Q_0 называются начальными параметрами. В зависимости от закрепления балки и ее нагрузки часть из них – известна, а остальные находят из граничных условий.

Алгоритм метода начальных параметров позволяет получить дискретное решение в точках, разбивающих балку по ее длине на заданное число интервалов. Для получения решения в промежуточных точках следует уменьшать интервалы разбиения и снова строить уравнения переноса граничных условий для большего числа точек разбиения.

Если использовать возможности системы аналитических вычислений, раскладывая в ряды функции, то при помощи метода начальных параметров получаем аналитическое (в форме степенно ряда) решение, которое позволяет вычислять требуемые для расчета величины не на дискретном множестве точек, а в любой точке по длине балки.

По мнению Матросова А.В. [96], методом начальных параметров (численный подход) невозможно выполнить расчет длинной балки на упругом основании, так как алгоритм при определенных соотношениях длины и коэффициента постели основания становится, вычислительно неустойчив.

На достоверность результатов расчета по методу начальных параметров влияют два фактора:

- обеспечение сходимости рядов решения;
- длина мантиссы в представлении вещественных чисел.

Первым исследованием по методу граничных элементов считается работа Фредгольма, опубликована в 1905 году. Значительно позднее появились работы В.Д.Купрадзе, в наиболее известной из которых [91] рассматривается приложение метода потенциала к задачам теории упругости.

Значительный вклад в формирование современных основ различных вариантов методов граничных элементов внесли исследования русских ученых – А.Н.Крылова [89], который впервые предложил использовать фундаментальные ортонормированные функции для одномерного континуума-стержня, В.З.Власова [37], И.А.Биргера [30].

Несмотря на глубину исследований, выполненных в перечисленных работах, общий численный алгоритм решения для широкого класса задач предложен не был, что можно объяснить отсутствием на тот период соответствующей вычислительной техники.

Появление современной компьютерной техники дало новый толчок развитию идей, изложенных в работах [30, 37, 89, 91, 157], в результате

появились разные варианты методов граничных элементов. Разработке и обоснованию этих вариантов посвящены труды П.К.Бенерджи и Р.Баттерфилда [26, 160], К.Бреббиа, Д.Теллеса и Л.Вроубеля [158, 159], К.Бреббиа и С.Уокера [31], А.Г.Угодчикова и Н.М.Хуторянского [134] и целого ряда других ученых.

Согласно работе [26] методы граничных элементов условно делят на три разные, но взаимосвязанные варианты: прямой, полупрямой и непрямой.

В прямом варианте метода граничных элементов неизвестные функции, входящие в интегральные уравнения, которые описывают поведение объекта на его границе, являются реальными, имеющими физический смысл. Такой подход назван методом граничных интегральных уравнений [50].

В полупрямых вариантах метода граничных элементов составляются и решаются интегральные уравнения для неизвестных функций, аналогичных функциям напряжений в теории упругости. Дифференцирование полученных решений позволяет определить реальные физические величины, например, напряжение в теории упругости. Среди наиболее известных работ в этом направлении можно отметить работы Бенерджи П.К., Баттерфилд Р. [26, 160], Гузь А.Н., Бабич И. Ю. [46].

В непрямом варианте метода граничных элементов интегральные уравнения полностью выражаются через фундаментальное решение исходных дифференциальных уравнений, например, через функцию Грина для неограниченной области. После численного решения интегральных уравнений значения параметров внутри рассматриваемой области определяются обычным интегрированием. В этом направлении существенные результаты получены в работах Безухов Н.И. [23, 24], Лужин О.В., Бреббиа К., Теллес Д., Вроубел Л. [158], Васидзу К. [36].

Преимущества методов граничных элементов перед другими методами численного моделирования заключается в двукратном понижении размерности задачи, (поскольку дискретизации подвергается не вся

расчетная область, а только ее граница), в возможности проведения детального анализа отдельных зон, в упрощенном этапе подготовки данных, в алгоритмической простоте и высокой степени универсальности.

В.А.Баженов, А.Ф.Дащенко, Л.В.Коломиец, В.Ф.Оробей, Н.Г.Сурьянинов, А.В.Ковров, в своих работах [50, 76, 77, 81, 82, 104 126, 138, 139], рассматривают расчет различных конструкций при помощи численно-аналитического метода граничных элементов.

Как отмечено в работах [50, 138] метод строго обоснован математически, так как использует фундаментальные решения дифференциальных уравнений, а значит, в рамках принимаемых гипотез позволяет получить точные значения параметров задачи (усилий, перемещений, напряжений, частот собственных колебаний, критических сил потери устойчивости и т.д.) внутри области. Также авторы отмечают простоту логики алгоритма, хорошую сходимость решения, высокую устойчивость и малое накопление погрешностей при численных операциях.

Существующим пробелом в имеющейся литературе по методам граничных элементов, является недостаточное освещение задач строительной механики линейных систем, а также расчетов пространственных рамных конструкций имеющих важное практическое значение.

1.3. Теоретические основы численно-аналитического метода граничных элементов

Для описания механического воздействия на элемент и построения соотношений между граничными параметрами принимается левовинтовая система координат рис. А.1, Приложение А.

Элемент в общем случае испытывает четыре вида деформирования: растяжение-сжатие, сдвиг, кручение и изгиб.

Используя принцип независимости действия сил, справедливый при малых перемещениях и упругих деформациях, при расчете пространственных рамных конструкций рассматриваются совместно деформации изгиба, кручения, растяжения и сжатия.

Принятые положительные направления внешних воздействий и обозначения представлены рис. А.2...А.4, Приложение А.

При деформировании элемента рамной конструкции в его граничных точках $x = 0$ и $x = l$ возникают следующие кинематические и статические параметры:

а) растяжение-сжатие

$u(0)$; $u(l)$ – перемещения граничных точек в направлении оси стержня (оси x);

$N(0)$; $N(l)$ – продольные силы;

б) изгиб

$v(0)$; $v(l)$ – поперечные перемещения граничных точек (в направлении оси y);

$\varphi(0)$; $\varphi(l)$ – углы поворота сечений в граничных точках;

$M(0)$; $M(l)$ – изгибающие моменты;

$Q(0)$; $Q(l)$ – поперечные силы.

Граничные параметры напряженно-деформированного состояния элемента имеют положительные и отрицательные направления, зависящие от выбранной локальной системы координат. В принятой системе координат положительные линейные перемещения граничных точек считаются совпадающими с направлениями осей Ox , Oy , Oz . Углы поворота сечений в граничных точках считаются положительными, если они направлены по часовой стрелке со стороны положительного направления координатных осей [126].

Принятые положительные направления статических и кинематических граничных параметров представлены рис. А.5, А.6, Приложение А.

В граничных точках элемента испытывающего кручение ($x = 0$ и $x = \ell$) при деформировании возникают следующие кинематические и статические граничные параметры:

- $\theta(0), \theta(\ell)$ - углы закручивания граничных точек;
- $M_x(0), M_x(\ell)$ - крутящие моменты.

Принятые положительные направления статических и кинематических граничных параметров при кручении представлены рис. А.7, Приложение А.

Применение численно-аналитического метода граничных элементов для расчета статически определимых и статически неопределимых стержневых систем на статические нагрузки изложено в работах [54, 104, 126].

Деформирование изгибаемых элементов [126] описывает дифференциальное уравнение

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = q_y(x) \quad (0.9)$$

где: v – функция прогибов элемента;

EI – жесткость сечений, которая в упругой стадии работы элемента равна произведению модуля упругости материала на момент инерции поперечного сечения.

Интегрирование дифференциального уравнения изогнутой оси элемента (1.18) приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} EIv(x) &= EIv(0) + EI\varphi(0)x - \frac{M(0)}{2}x^2 - \frac{Q(0)}{6}x^3 - \int_0^x \int_0^x \int_0^x q_y(x) dx dx dx \\ EI\varphi(x) &= EI\varphi(0) - M(0)x - \frac{Q(0)}{2}x^2 - \int_0^x \int_0^x q_y(x) dx dx \\ M(x) &= M(0) + Q(0)x + \int_0^x q_y dx \\ Q(x) &= Q(0) + \int_0^x q_y dx \end{aligned} \quad (0.10)$$

где $v(x), \varphi(x), M(x), Q(x)$ – соответственно прогиб, угол поворота, изгибающий момент и поперечная сила в сечении на расстоянии x от начала координат;

$v(0), \varphi(0), M(0), Q(0)$ – соответственно прогиб, угол поворота, изгибающий момент и поперечная сила в начале координат ($x = 0$).

Систему уравнений (0.10) можно представить в матричном виде следующим образом:

$$Y(x) = \dot{A}(x) X(0) + B(x) \quad (0.11)$$

где $Y(x)$ – матрица усилий и перемещений в произвольном сечении;

$X(0)$ – матрица усилий и перемещений в начале координат;

$A(x)$ – матрица коэффициентов системы уравнений изгиба;

$B(x)$ – матрица внешней нагрузки.

Элементы матрицы внешней нагрузки формируются при помощи метода начальных параметров. Правила знаков при этом принимаются в соответствии с рис. А.5, Приложение А.

$$\begin{aligned} B_{11} &= \int_{x>a} M \frac{(x-a)^2}{2} + \int_{x>b} F_y \frac{(x-b)^3}{6} + \int_{x>c} q_y \frac{(x-c)^4}{24} - \int_{x>d} q_y \frac{(x-d)^4}{24}; \\ B_{21} &= \int_{x>a} M(x-a) + \int_{x>b} F_y \frac{(x-b)^2}{2} + \int_{x>c} q_y \frac{(x-c)^3}{6} - \int_{x>d} q_y \frac{(x-d)^3}{6}; \\ B_{31} &= \int_{x>a} M + \int_{x>b} F_y(x-b) + \int_{x>c} q_y \frac{(x-c)^2}{2} - \int_{x>d} q_y \frac{(x-d)^2}{2}; \\ B_{41} &= \int_{x>b} F_y + \int_{x>c} q_y(x-c) - \int_{x>d} q_y(x-d). \end{aligned} \quad (0.12)$$

Деформирование элементов [126] при растяжении-сжатии описывает дифференциальное уравнение:

$$EA \frac{d^2 u}{dx^2} = q_x(x) \quad (0.13)$$

где: u – функция перемещений направленных вдоль оси элемента;

EA – жесткость сечений, которая в упругой стадии работы элемента равна произведению модуля упругости материала на площадь поперечного сечения.

Интегрирование дифференциального уравнения (0.13) приводит к системе уравнений:

$$EAu(x) = EAu(0) + N(0)x - \int_0^x \int_0^x q_x(x) dx dx \quad (0.14)$$

$$N(x) = N(0) - \int_0^x q_x(x) dx$$

где $u(x)$, $N(x)$ – соответственно перемещение и продольная сила в сечении на расстоянии x от начала координат;

$u(0)$, $N(0)$ – соответственно перемещение и продольная сила в начале координат ($x = 0$).

Элементы матрицы внешней нагрузки также формируются при помощи метода начальных параметров. Правила знаков при этом принимаются в соответствии с рис. А.4, Приложение А.

$$B_{11} = \left\|_{x>b} F_x (x-b) + \left\|_{x>c} q_x \frac{(x-c)^2}{2} - \left\|_{x>d} q_x \frac{(x-d)^2}{2}; \quad (0.15)$$

$$B_{21} = \left\|_{x>b} F_x + \left\|_{x>c} q_x (x-c) - \left\|_{x>d} q_x (x-d).$$

Для системы, состоящей из нескольких элементов, можно составить матричное уравнение типа:

$$Y(l_i) = \dot{A}(l_i) X(0) + B(l_i) \quad (0.16)$$

где $Y(l_i)$ – матрица усилий и перемещений в конце элементов;

$X(0)$ – матрица усилий и перемещений в начале координат;

$A(l_i)$ – матрица коэффициентов, системы уравнений, напряженно-деформированного состояния элемента;

$B(l_i)$ – матрица внешней нагрузки.

Для уравнения (0.16) можно выполнить преобразования матриц по схеме:

$$Y(l_i) = \dot{A}(l_i) X(0) + B(l_i) \rightarrow \dot{A}(l_i) X(0) - Y(l_i) = -B(l_i) \rightarrow \dot{A}^* X^* = -B(l_i) \quad (0.17)$$

Деформирование элемента при кручении описывает дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{m(x)}{GI_p} \quad (0.18)$$

где: θ - угол закручивания;

$m(x)$ - интенсивность распределенных крутящих моментов, приложенных к элементу;

G - модуль сдвига, который определяется по формуле

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (0.19)$$

I_p - полярный момент инерции сечения элемента.

Деформирование элементов при кручении описывает дифференциальное уравнение

$$\frac{dM_x(x)}{dx} = -m(x) \quad (0.20)$$

где: $M_x(x)$ - крутящие моменты, возникающие в поперечных сечениях элемента.

Интегрирование дважды уравнения (0.18) с учетом уравнения (0.20) и интегрирования уравнения (0.20) приводит к выражениям:

$$GI_p \theta(x) = GI_p \theta(0) + M_x(0)x - \int_0^x \int_0^x m(x) dx dx \quad (0.21)$$

$$M_x(x) = M_x(0) - \int_0^x m(x) dx$$

где $\theta(x)$, $M_x(x)$ – соответственно угол закручивания и крутящий момент в сечении на расстоянии x от начала координат;

$\theta(0)$, $M_x(0)$ – соответственно угол закручивания и крутящий момент в начале координат ($x = 0$).

Интегрирование приложенной нагрузки при помощи метода начальных параметров позволяет определить элементы вектора внешней нагрузки:

$$B_{11} = \sum_{i=1}^n \left\|_{c_i} M_{x_i} (x - e_i) + \sum_{i=1}^n \left\|_{f_i} \frac{m(x - g_i)^2}{2} \right. \quad (0.22)$$

$$B_{21} = \sum_{i=1}^n \left\|_{e_i} M_{z_i} + \sum_{i=1}^n \left\|_{f_i} m(x - f_i) - \sum_{i=1}^n \left\|_{g_i} m(x - g_i)$$

Положительные направления внешних воздействий, входящих в уравнение (0.22), представлены на рис. А.7, Приложение А.

1.4. Определение координат центра изгиба и центра кручения

При образовании трещины в сечении железобетонной балки изменяется площадь бетонного сечения и соответственно смещается центр изгиба и кручения в поперечном сечении балки, относительно которого следует находить жесткостные характеристики балки.

В работах [145, 149] А.Ф.Яременко и Ю.А.Школа предлагают определять координаты центра изгиба приведенного по жесткости поперечного сечения балки с учетом изменения напряженного состояния арматуры в результате образования трещин следующим образом:

$$Y_c = \frac{\sum_i A_{bi} y_{bi} E_{bi} + \sum_j A_{sj} y_{sj} E_{sj} / \psi_{sj}}{\sum_i A_{bi} E_{bi} + \sum_j A_{sj} E_{sj} / \psi_{sj}} \quad (0.23)$$

$$X_c = \frac{\sum_i A_{bi} x_{bi} E_{bi} + \sum_j A_{sj} x_{sj} E_{sj} / \psi_{sj}}{\sum_i A_{bi} E_{bi} + \sum_j A_{sj} E_{sj} / \psi_{sj}} \quad (0.24)$$

Координаты центра кручения с учетом наличия поперечной арматуры:

$$Y_c = \frac{\sum_i A_{bi} y_{bi} G_{bi} + \sum_j A_{sj} y_{sj} G_{sj} / \psi_{sj} + \sum_j A_{swk} y_{swk} E_{swk}}{\sum_i A_{bi} G_{bi} + \sum_j A_{sj} G_{sj} / \psi_{sj} + \sum_k A_{swk} E_{swk}} \quad (0.25)$$

$$X_c = \frac{\sum_i A_{bi} x_{bi} G_{bi} + \sum_j A_{sj} x_{sj} G_{sj} / \psi_{sj} + \sum_j A_{swk} x_{swk} E_{swk}}{\sum_i A_{bi} G_{bi} + \sum_j A_{sj} G_{sj} / \psi_{sj} + \sum_k A_{swk} E_{swk}} \quad (0.26)$$

где A_{bi} - площадь бетона;

A_{sj} - площадь продольной арматуры;

A_{swk} - площадь поперечной арматуры;

x_{bi} , y_{bi} - координаты центров тяжести бетонных элементов относительно центра симметрии поперечного сечения;

x_{si} , y_{si} - координаты центров тяжести стержней продольной арматуры;

x_{swk} , y_{swk} - координаты центров тяжести элементов стержней поперечной арматуры;

ψ_{sj} - коэффициент В.И.Мурашева [98], определяемый по формуле

$$\psi_{sj} = 1 - 0,7 \frac{\sigma_{sj,crs}}{\sigma_{sj}} \quad (0.27)$$

где $\sigma_{sj,crs}$ - напряжения в j стержне в момент образования трещин;

σ_{sj} - напряжения в арматуре на рассматриваемом уровне нагружения.

1.5. Зависимость касательные напряжения - угловые деформации

Для построения диаграммы зависимости касательного напряжения от угловой деформации Малинин Н.Н. [94] использует третью гипотезу теории упруго-пластичных материалов, которая состоит в том, что интенсивность напряжений связана с интенсивностью деформаций одной и той же зависимостью для всех видов напряженных состояний. В связи с этим диаграмма сдвига бетона может быть построена по диаграмме растяжения бетона [72, 94].

Малинин Н.Н., Филин А.П., Терегулов И.Г. [94, 135, 130] и многие другие, связь между касательными и нормальными напряжениями представляют в виде:

$$\tau = \frac{\sigma}{\sqrt{3}}; \quad \gamma = \sqrt{3} \left(\varepsilon - \frac{1-2\mu}{3E} \sigma \right) \quad (0.28)$$

где τ - касательные напряжения;

σ - нормальные напряжения в бетоне;

γ - угловые деформации;

ε - относительные линейные деформации бетона;

E - модуль упругости бетона;

μ_b - коэффициент Пуассона для бетона.

Зависимость для диаграммы сдвига бетона А.Ф.Яременко и Ю.А.Школа записывают следующим образом [144, 145]:

$$\tau_b = \frac{E_b \nu_b}{2(1+\mu_b)} \gamma_b \quad (0.29)$$

где ν_b - коэффициент изменения секущего модуля упругости при сдвиге.

Для определения параметра ν_b через уровень деформации, используются формулы аналогичные соответствующим, для диаграммы одноосного растяжения бетона предложенные Н.И.Карпенко [72].

$$v_b = P + \sqrt{P^2 + S} \quad (0.30)$$

где

$$P = \frac{v_b \left[2\bar{v}_b^2 - \omega_1 \eta_d (v_0 - \bar{v}_b)^2 \right]}{2 \left[\bar{v}_b^2 + \omega_2 \eta_d^2 (v_0 - \bar{v}_b)^2 \right]}; \quad S = \frac{\bar{v}_b^2 (v_0^2 - 2v_0 \bar{v}_b)}{\bar{v}_b^2 + \omega_2 \eta_d^2 (v_0 - \bar{v}_b)^2} \quad (0.31)$$

$$\eta_d = \frac{\gamma_b}{\bar{\gamma}_b}; \quad \bar{\gamma}_b = \frac{2(1 + \mu_b) \bar{\tau}_b}{E_b^0 \bar{v}_b}; \quad \bar{\tau}_b = R_{b.sh} \quad (0.32)$$

Коэффициент изменения секущего модуля \bar{v}_b вычисляется по формуле

$$\bar{v}_b = (0,6 + 0,3 \times (1 + \mu_b) \times R_{b.sh} / 25) \quad (0.33)$$

где $R_{b.sh} = 0.7 \sqrt{R_{bt} R_b}$ - прочность бетона на сдвиг [21, 45].

Для восходящей ветви диаграммы

$$v_0 = 1; \quad \omega_1 = 2 - 2.5\bar{v}_b \quad (0.34)$$

Для нисходящей ветви диаграммы

$$v_0 = 2.05\bar{v}_b; \quad \omega_1 = 1.95\bar{v}_b - 0.138 \quad (0.35)$$

В работе [148] А.Ф.Яременко показывает возможность применения данных зависимостей для построения диаграммы сдвига бетона при расчете железобетонных элементов пространственных конструкций, подверженных воздействию изгибающих и крутящих моментов.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РАМНЫХ КОНСТРУКЦИЙ В УПРУГОЙ СТАДИИ ПРИ ПОМОЩИ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

2.1. Формирование расчетной схемы численно-аналитического метода граничных элементов

При определении напряженно-деформированного состояния пространственных рамных конструкций с жестким закреплением и жесткими узлами, с использованием численно-аналитического метода граничных элементов производится их разбиение на отдельные элементы [79]:

- стойки на этаж;
- ригеля на пролет.

При расчете пространственных рамных конструкций предлагается принять левовинтовую глобальную систему координат (рис. 2.1), которая расположена в левом ближнем углу пространственной рамной конструкции.

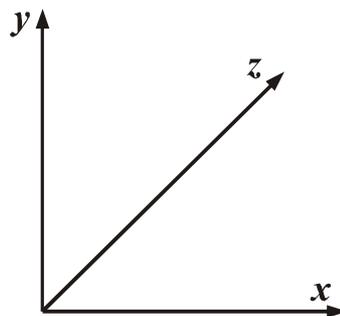


Рис. 2.1. Направление координатных осей глобальной системы координат для пространственной рамной конструкции

В соответствии с принятой глобальной системой координат формируется порядок нумерации узлов и элементов пространственной рамной конструкции.

Нумерация узлов производится от начала глобальной системы координат.

При нумерации элементов в первую очередь нумеруются стойки, по положительному направлению оси y , по принципу снизу вверх, слева направо.

Во вторую очередь производится нумерация продольных ригелей в положительном направлении оси x .

Затем производится нумерация поперечных ригелей по оси z .

Пример нумерации узлов приведен на рис. 2.2.

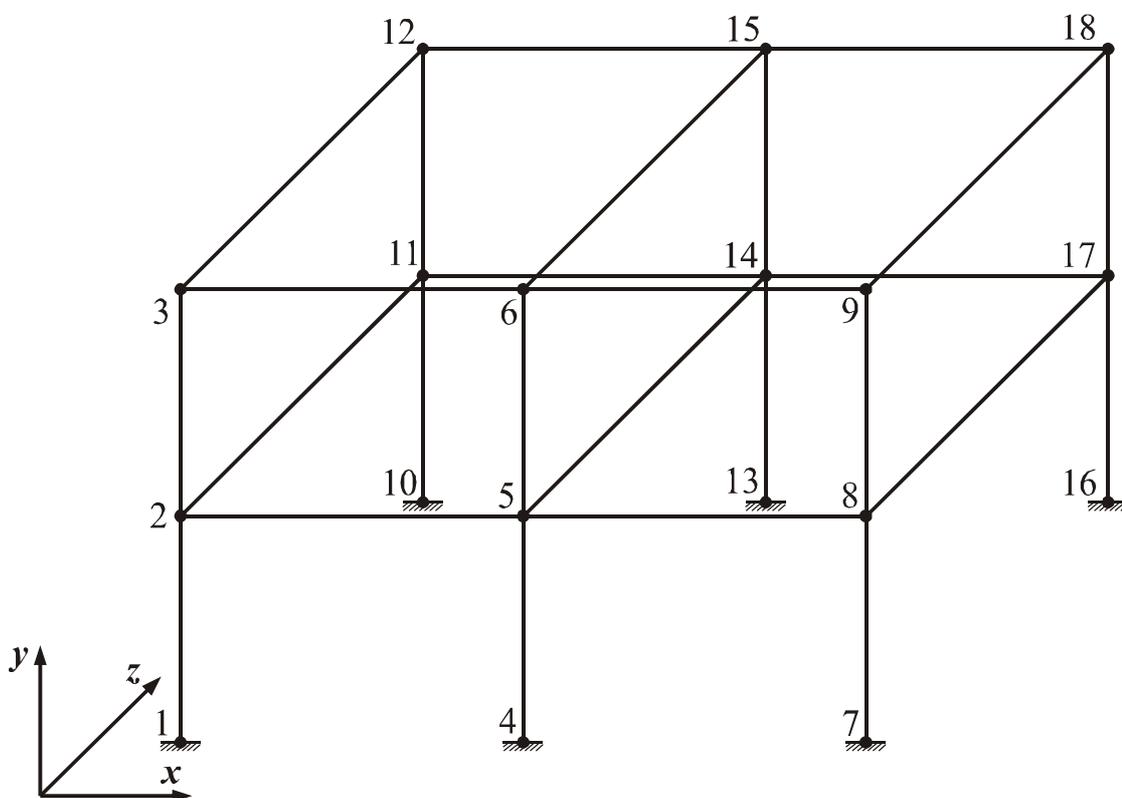


Рис. 2.2. Пример нумерация узлов

Нумерация элементов пространственных рамных конструкций производится аналогично нумерации узлов.

Пример нумерации элементов приведен на рис. 2.3.

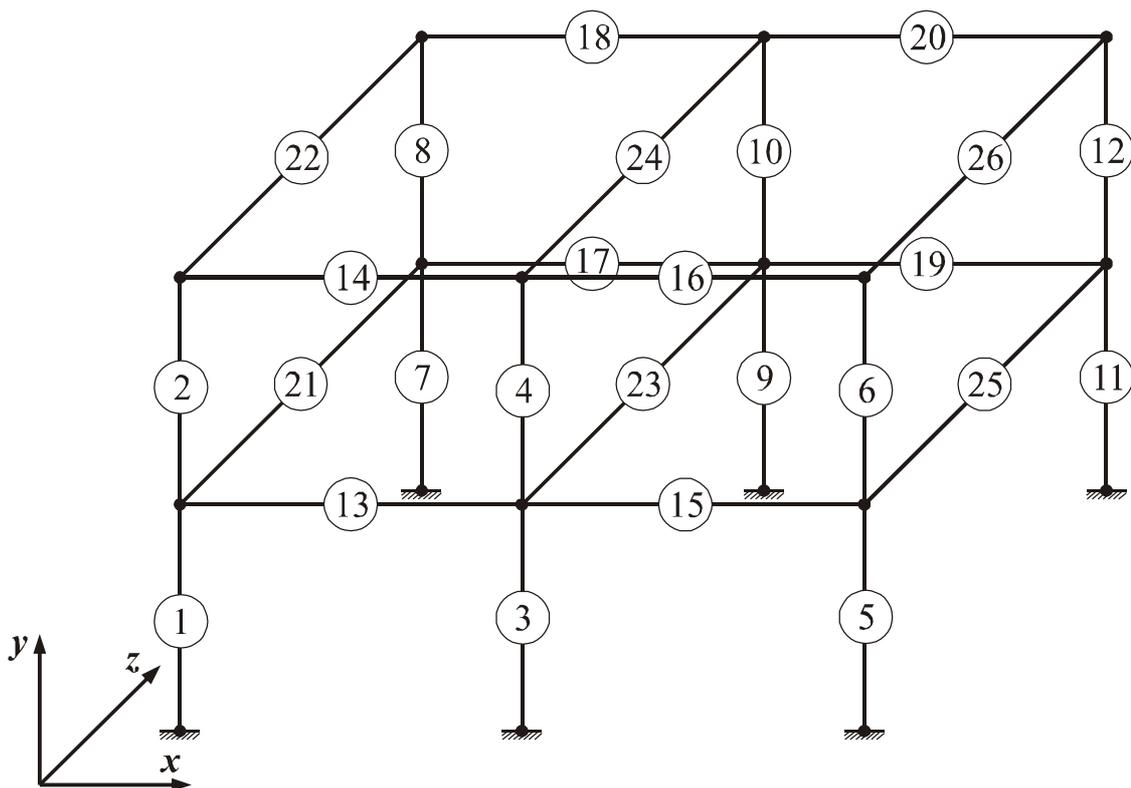


Рис. 2.3. Пример нумерация элементов

Для каждого отдельного элемента пространственной рамной конструкции принимается локальная левовинтовая система координат.

В принятой системе координат линейные перемещения отдельного элемента принимаем положительными, если они происходят в положительных направлениях осей x , y , z .

Углы поворота сечений отдельного элемента принимаем положительными, если они направлены по часовой стрелки при взгляде со стороны положительных направлений координатных осей.

Направления координатных осей для элементов стоек представлены на рис. 2.4.

Направления координатных осей для продольных и поперечных ригелей на рис. 2.5 и 2.6.

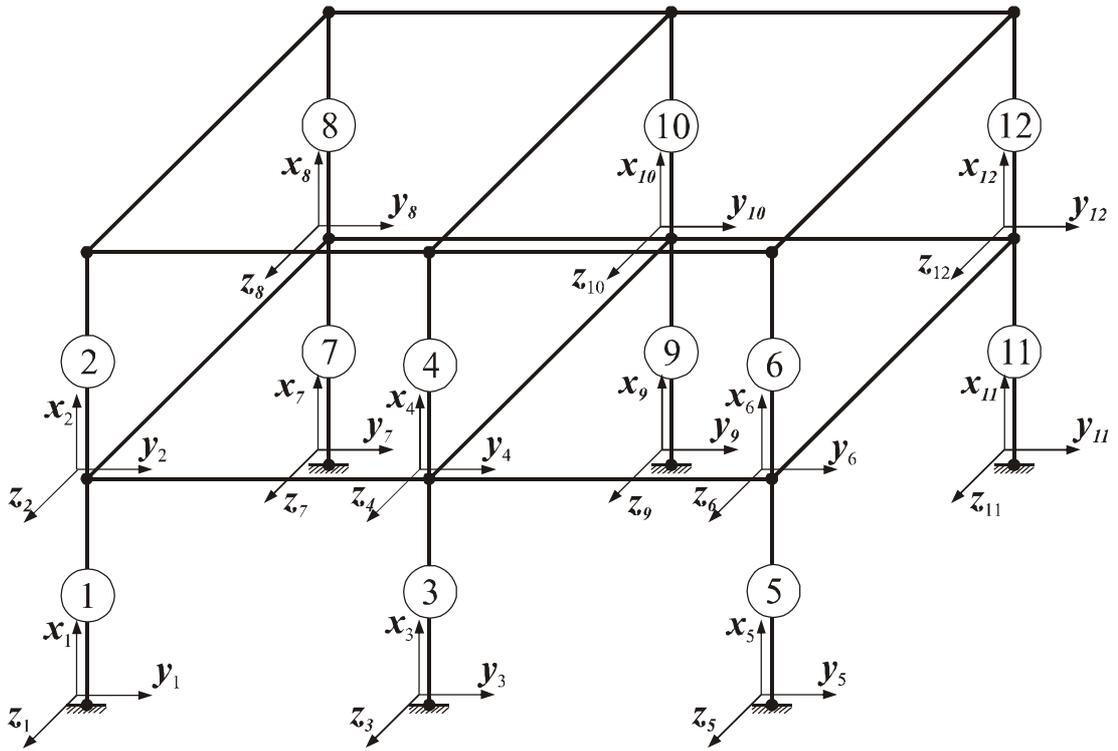


Рис. 2.4. Направление координатных осей локальных систем координат для элементов стоек

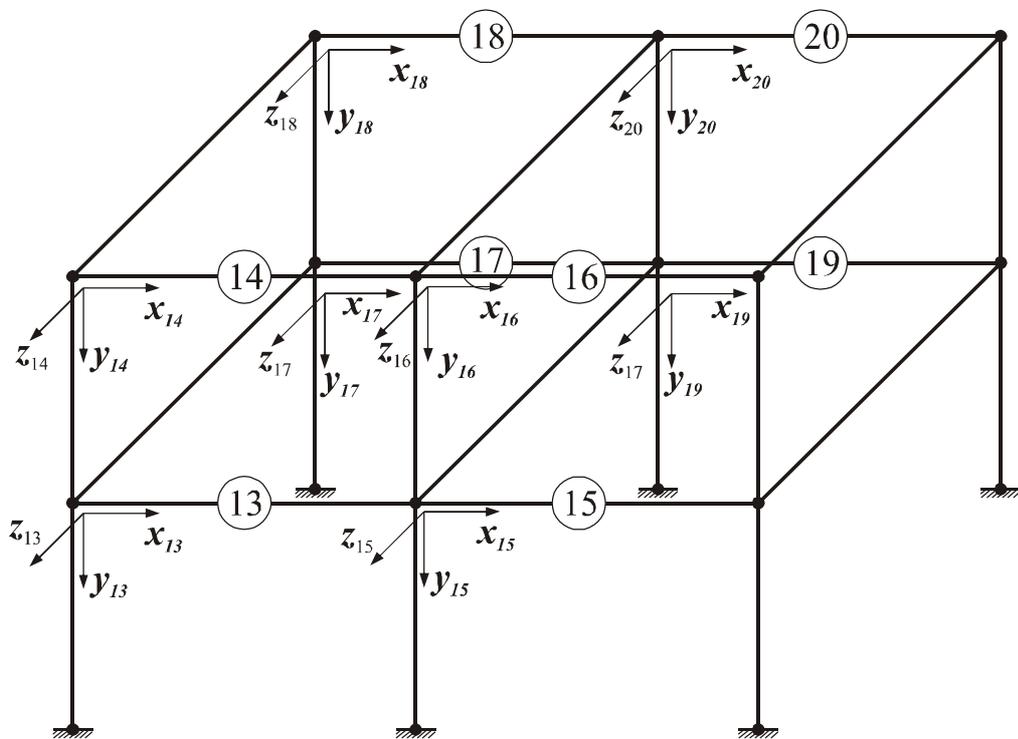


Рис. 2.5. Направление координатных осей локальных систем координат для элементов продольных ригелей

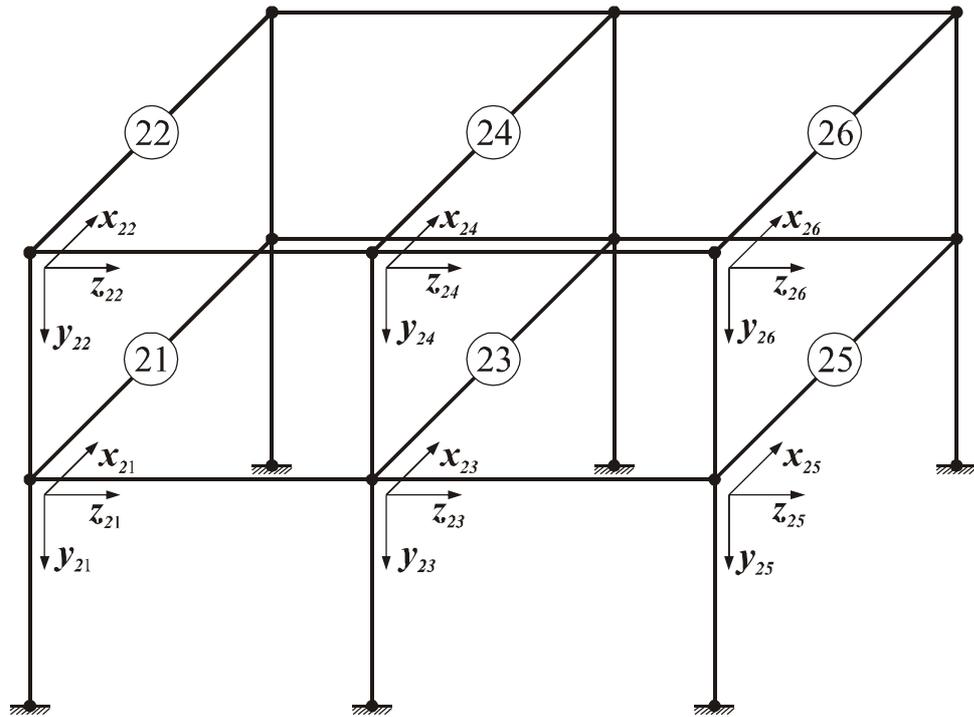


Рис. 2.6. Направление координатных осей локальных систем координат для элементов поперечных ригелей

2.2. Правила определения внутренних усилий и перемещений

2.2.1. Формирование уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние

Система уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние отдельного элемента пространственной рамной конструкции, в матричной форме (1.19) имеет вид

$$Y(l_i) = \dot{A}(l_i) X(0) + B(l_i) \quad (2.1)$$

Входящие в нее вектора $Y(l_i)$, $X(0)$, $B(l_i)$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
Y(l_i) = & \begin{pmatrix} EI_z v_y(l_i) \\ EI_z \varphi_z(l_i) \\ M_z(l_i) \\ Q_y(l_i) \\ EI_y v_z(l_i) \\ EI_y \varphi_y(l_i) \\ M_y(l_i) \\ Q_z(l_i) \\ EAu(l_i) \\ N(l_i) \\ GI_k \theta(l_i) \\ M_x(l_i) \end{pmatrix} & X(0) = & \begin{pmatrix} EI_z v_y(0) \\ EI_z \varphi_z(0) \\ M_z(0) \\ Q_y(0) \\ EI_y v_z(0) \\ EI_y \varphi_y(0) \\ M_y(0) \\ Q_z(0) \\ EAu(0) \\ N(0) \\ GI_k \theta(0) \\ M_x(0) \end{pmatrix} & B(l_i) = & \begin{pmatrix} B_1(l_i) \\ B_2(l_i) \\ B_3(l_i) \\ B_4(l_i) \\ B_5(l_i) \\ B_6(l_i) \\ B_7(l_i) \\ B_8(l_i) \\ B_9(l_i) \\ B_{10}(l_i) \\ B_{11}(l_i) \\ B_{12}(l_i) \end{pmatrix} & (2.2)
\end{aligned}$$

Элементы матрицы внешней нагрузки $B(l_i)$ могут быть сформированы при помощи метода начальных параметров в соответствии с уравнениями (1.21), (1.24), (1.30).

Матрица коэффициентов отдельного элемента пространственной рамной конструкции A^* имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & l_i & -l_i^2/2 & -l_i^3/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -l_i & -l_i^2/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l_i & l_i^2/2 & l_i^3/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l_i & l_i^2/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & (2.3)$$

Для пространственной рамной конструкции, состоящей из m элементов, формируется система из $12m$ уравнений.

Ниже приведены векторы $Y(l_i)$, $X(0)$, $B(l_i)$ и матрица коэффициентов $A(l_i)$, системы уравнений, (2.1) состоящие из блоков, которые формируются в соответствии с выражениями (2.2) и (2.3).

$$Y(l_i) = \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_i \\ \dots \\ Y_m \end{Bmatrix} \quad X(0) = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_i \\ \dots \\ X_m \end{Bmatrix} \quad B(l_i) = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \dots \\ B_i \\ \dots \\ B_m \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

$$A(l_i) = \begin{Bmatrix} A_1 & & & & & \\ & A_2 & & & & \\ & & \dots & & & \\ & & & A_i & & \\ & & & & \dots & \\ & & & & & A_m \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

Неизвестные граничные параметры определяются из разрешающего уравнения (1.26) численно-аналитического метода граничных элементов:

$$\dot{A}^* X^* = -B \quad (2.6)$$

Матрица коэффициентов A^* и вектор неизвестных граничных параметров X^* , входящие в уравнение (2.6), получены в результате характерной цепочки преобразований в соответствии со схемой (1.26).

2.2.2. Граничные условия

При выполнении преобразований в первую очередь рассматриваются граничные условия элементов конструкции, определяемые из условий закрепления.

При жестком закреплении стоек в сечении элемента, смежном с закреплением, возникают изгибающие и крутящие моменты, поперечные и продольные силы, перемещения сечения отсутствуют (рис. 2.7).

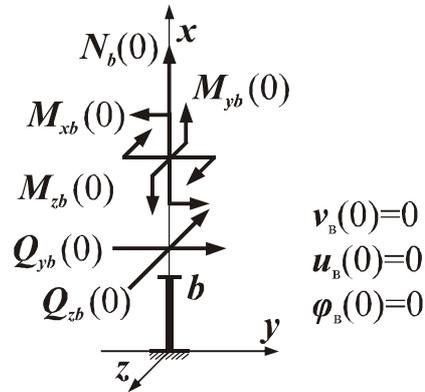


Рис. 2.7. Граничные условия в сечении, смежном с жестким закреплением

В соответствии с граничными условиями в векторе начальных параметров $X(0)$ обнуляются граничные параметры перемещений, а в матрице коэффициентов $A(l_i)$ обнуляются столбцы, номера которых соответствуют номерам обнуляемых параметров (2.7) и (2.8).

$$X(0) = \begin{pmatrix} EI_z v_y(0) = 0 \\ EI_z \varphi_z(0) = 0 \\ M_z(0) \\ Q_y(0) \\ EI_y v_z(0) = 0 \\ EI_y \varphi_y(0) = 0 \\ M_y(0) \\ Q_z(0) \\ EAu(0) = 0 \\ N(0) \\ GI_k \theta(0) \\ M_x(0) \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & -l_i^2/2 & -l_i^3/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -l_i & -l_i^2/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & l_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_i^2/2 & l_i^3/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_i & l_i^2/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_i & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l_i \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix} \quad (2.8)$$

2.2.3. Уравнения равновесия

Для формирования матриц, входящих в уравнение (2.1) необходимо сформировать граничные условия для основных типов узлов пространственной рамы, принимая во внимание, что условия нагружения неизвестны.

При равновесии всей системы элементов, объединенных в линейную систему, будут находиться в равновесии и отдельные узлы. При этом статические граничные параметры будут удовлетворять уравнениям равновесия узлов.

Продольные и поперечные силы, возникающие в сечениях, примыкающих к жесткому узлу, в котором сходятся 6 элементов пространственной рамной конструкции, приведены на рис. 2.8.

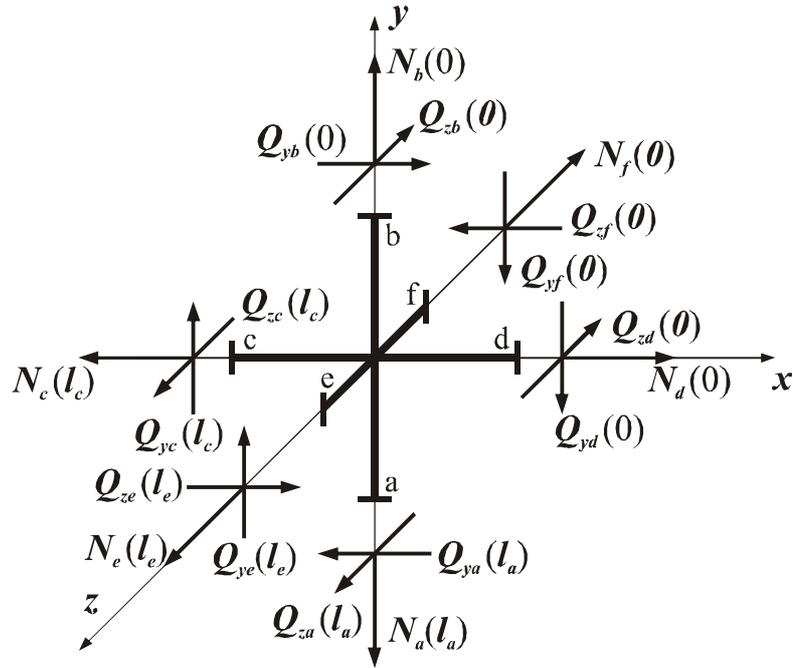


Рис. 2.8. Поперечные и продольные усилия, возникающие в сечениях элементов, примыкающих к жесткому узлу пространственной рамы

Соотношения между силами, возникающими в сечениях примыкающих к жесткому узлу в котором сходятся шесть элементов, изображенного на рис. 2.8, могут быть получены из уравнений равновесия составленных в глобальной системе координат, которые имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 & \sum x = 0; \\
 & -Q_{ya}(l_a) + Q_{yb}(0) - N_c(l_c) + N_d(0) + Q_{ze}(l_e) - Q_{zf}(0) = 0; \\
 & Q_{ya}(l_a) = Q_{yb}(0) - N_c(l_c) + N_d(0) + Q_{ze}(l_e) - Q_{zf}(0); \\
 & \sum y = 0; \\
 & N_a(l_a) - N_b(0) - Q_{yc}(l_c) + Q_{yd}(0) - Q_{ye}(l_e) + Q_{yf}(0) = 0; \\
 & N_a(l_a) = N_b(0) + Q_{yc}(l_c) - Q_{yd}(0) + Q_{ye}(l_e) - Q_{yf}(0); \\
 & \sum z = 0; \\
 & Q_{za}(l_a) - Q_{zb}(0) + Q_{zc}(l_c) - Q_{zd}(0) + N_e(l_e) - N_f(0) = 0; \\
 & Q_{za}(l_a) = Q_{zb}(0) - Q_{zc}(l_c) + Q_{zd}(0) - N_e(l_e) + N_f(0).
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Изгибающие и крутящие моменты, возникающие в сечениях, примыкающих к жесткому узлу, приведены на рис. 2.9.

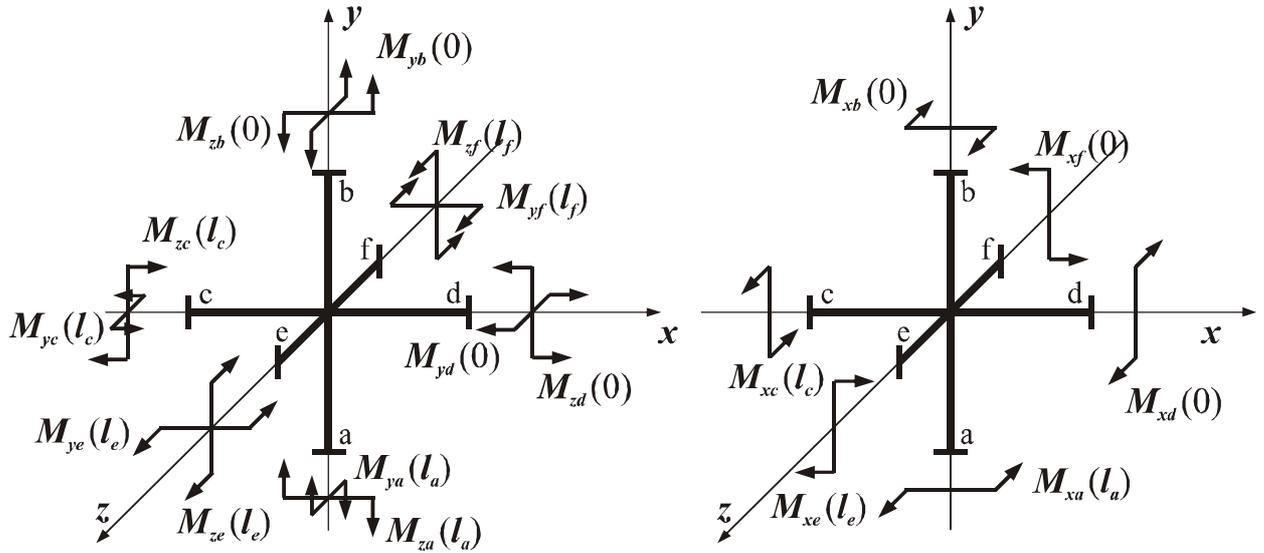


Рис. 2.9. Крутящие и изгибающие моменты, возникающие в сечениях элементов, примыкающих к жесткому узлу пространственной рамы

Соотношение между моментами, возникающими в сечениях, примыкающих к узлу можно получить из уравнений равновесия узла относительно осей глобальной системы координат:

$$\begin{aligned}
 \sum m_x &= 0; \\
 M_{ya}(l_a) - M_{yb}(0) - M_{xc}(l_c) + M_{xd}(0) + M_{ze}(l_e) - M_{zf}(0) &= 0; \\
 M_{ya}(l_a) &= M_{yb}(0) + M_{xc}(l_c) - M_{xd}(0) - M_{ze}(l_e) + M_{zf}(0); \\
 \sum m_y &= 0; \\
 M_{xa}(l_a) - M_{xb}(0) + M_{yc}(l_c) - M_{yd}(0) + M_{ye}(l_e) - M_{yf}(0) &= 0; \quad (2.10) \\
 M_{xa}(l_a) &= M_{xb}(0) - M_{yc}(l_c) + M_{yd}(0) - M_{ye}(l_e) + M_{yf}(0); \\
 \sum m_z &= 0; \\
 M_{za}(l_a) - M_{zb}(0) + M_{zc}(l_c) - M_{zd}(0) + M_{xe}(l_e) - M_{xf}(0) &= 0; \\
 M_{za}(l_a) &= M_{zb}(0) - M_{zc}(l_c) + M_{zd}(0) - M_{xe}(l_e) + M_{xf}(0).
 \end{aligned}$$

Независимые конечные параметры внутренних усилий переносятся в ячейки матрицы начальных параметров $X(0)$, освободившиеся при

рассмотрении граничных условий и уравнений совместности перемещений начальных точек элементов. При этом в матрицу коэффициентов $A(l_i)$ вводятся компенсирующие элементы.

Для зависимых конечных параметров внутренних усилий в матрицу коэффициентов $A(l_i)$ в соответствии с выражениями (2.10) вводятся компенсирующие элементы.

В результате решения системы уравнений (2.6) определяются граничные параметры, входящие в вектор X^* , являющиеся неизвестными внутренними усилиями и перемещениями элементов рамной конструкции.

2.2.4. Уравнения совместности перемещений

При деформировании стержневой системы узлы получают линейные, а стержни, примыкающие к ним угловые перемещения, при этом кинематические граничные параметры будут связаны в этих узлах уравнениями совместности перемещений. Для установления связи между кинематическими параметрами необходимо получить картину деформированного состояния элементов примыкающих к узлу.

Для жесткого узла, в котором сходятся шесть элементов, картина деформирования представлена на рис. 2.10.

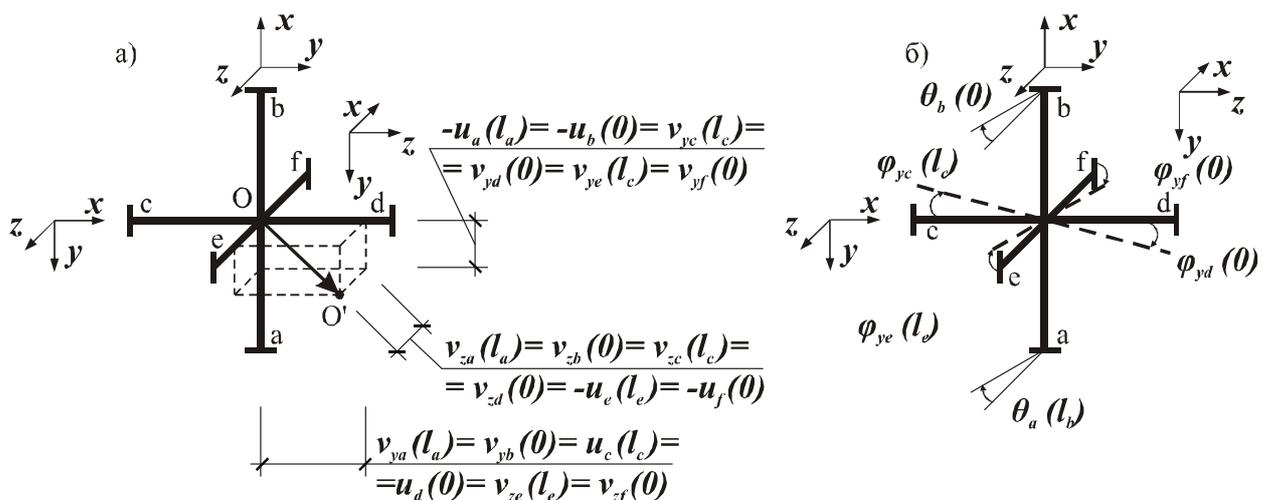


Рис. 2.10. Картина деформирования жесткого узла пространственной рамы:

а) линейные перемещения жесткого узла и примыкающих сечений;

б) угловые перемещения сечений элементов при повороте элемента **a-b**.

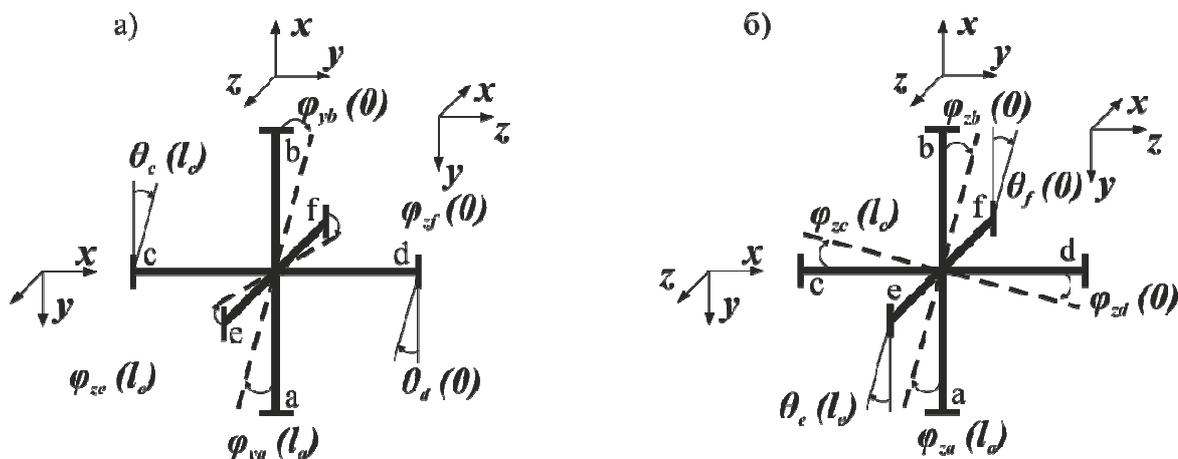


Рис. 2.11. Картина деформирования жесткого узла пространственной рамы:

а) угловые перемещения сечений элементов, при повороте элемента **c-d**;

б) угловые перемещения сечений элементов при повороте элемента **e-f**.

В соответствии с рис. 2.10, 2.11 между линейными перемещениями элементов, сходящихся в узле, устанавливаются следующие зависимости:

$$\begin{aligned}
 -u_a(l_a) &= -u_b(0) = v_{yc}(l_c) = v_{yd}(0) = v_{ye}(l_e) = v_{yf}(0); \\
 v_{za}(l_a) &= v_{zb}(0) = v_{zc}(l_c) = v_{zd}(0) = -u_e(l_e) = -u_f(0); \\
 v_{ya}(l_a) &= v_{yb}(0) = u_c(l_c) = u_d(0) = v_{ze}(l_e) = v_{zf}(0).
 \end{aligned}
 \tag{2.11}$$

Между угловыми перемещениями сечений элементов, сходящихся в узле, устанавливаются следующие зависимости:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{za}(l_a) &= \varphi_{zb}(0) = \varphi_{zc}(l_c) = \varphi_{zd}(0) = -\theta_e(l_e) = -\theta_f(0); \\
 -\varphi_{ya}(l_a) &= -\varphi_{yb}(0) = \theta_c(l_c) = \theta_d(0) = \varphi_{ze}(l_e) = \varphi_{zf}(0); \\
 \theta_a(l_a) &= \theta_b(0) = \varphi_{yc}(l_c) = \varphi_{yd}(0) = \varphi_{ye}(l_e) = \varphi_{yf}(0).
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

Если в узле сходятся несколько начальных точек элементов, то в качестве основных выбираются начальные параметры элемента с меньшим порядковым номером, а начальные параметры остальных элементов связываются с основными при помощи уравнений совместности перемещений(2.11), (2.12).

При этом в матрице начальных параметров $X(0)$ освобождаются ячейки, соответствующие начальным параметрам, зависящим от основных, а в матрицу коэффициентов $A(l_i)$ вводятся компенсирующие элементы.

Конечные параметры элементов в векторе $Y(l_i)$, сходящихся в узле, связываются с основными начальными параметрами в векторе $X(0)$ при помощи уравнений совместности перемещений. При этом в матрицу коэффициентов $A(l_i)$ вводятся компенсирующие элементы.

При формировании матриц неизвестных, следует учитывать следующее необходимое условие: количество нулевых параметров в векторе $X(0)$ должно строго соответствовать количеству неизвестных граничных условий в векторе $Y(l_i)$.

Так как в уравнениях деформирования элементов перемещения умножаются на жесткости, то для составления уравнений совместности перемещений предлагается ввести следующие коэффициенты их отношений:

$$\begin{aligned}
 N_{ij} &= \frac{E_i I_i}{E_j I_j}; & K_{ij} &= \frac{E_i A_i}{E_j A_j}; \\
 R_{ij} &= \frac{G_i I_{pi}}{G_j I_{pj}}; & C_{ij} &= \frac{E_i A_i}{E_j I_j}; & D_{ij} &= \frac{E_i I_i}{E_j A_j}; \\
 S_{ij} &= \frac{G_i I_{pi}}{E_j I_j}; & T_{ij} &= \frac{E_i I_i}{G_j I_{pj}}.
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

где: i – номер элемента, для граничных параметров которого составляются уравнения совместности перемещений;

j – номер элемента, с граничными параметрами которого связываются граничные параметры текущего элемента.

2.2.5. Пример расчета пространственной рамной конструкции

В качестве примера рассмотрим порядок расчета пространственной рамной конструкции [84], имеющей один этаж, один пролет и один шаг, расчетная схема, которой представлена на рис. 2.12.

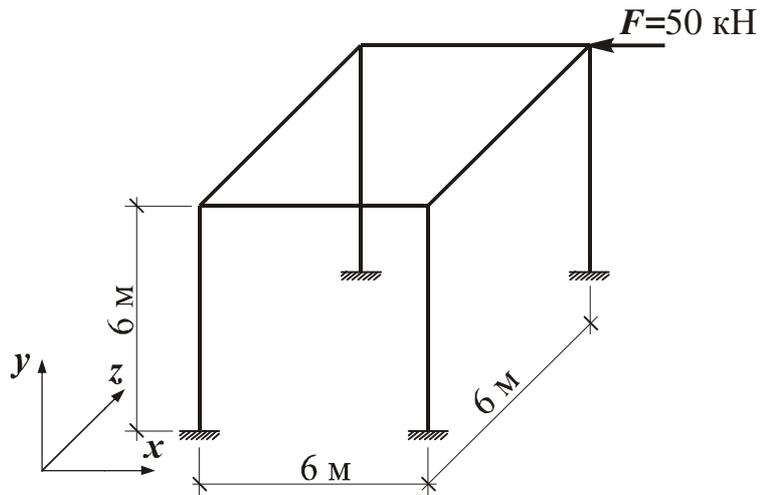


Рис. 2.12. Расчетная схема пространственной рамной конструкции

Порядок нумерации узлов и элементов пространственной рамной конструкции представлен на рис. 2.13.

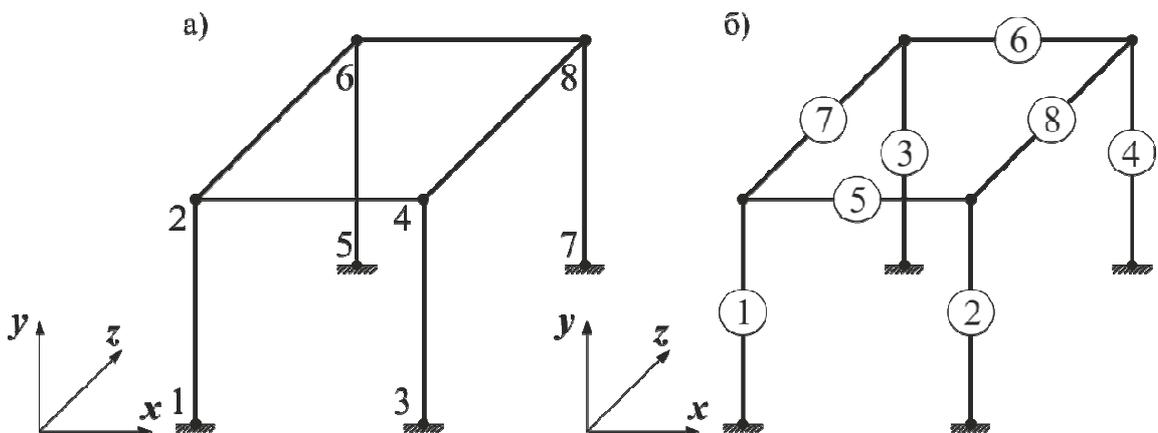


Рис. 2.13. а) - нумерация узлов пространственной рамной конструкции;
 б) - нумерация элементов пространственной рамной конструкции.

Система уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние отдельного элемента пространственной рамной конструкции, в матричной форме имеет вид:

$$Y(l) = \dot{A}(l)X(0) + B(l) \quad (2.14)$$

Входящие в нее векторы $Y(l)$, $X(0)$, $B(l)$ до преобразований имеют следующий вид:

$$Y(l) = \begin{pmatrix} Y_{01} \\ Y_{02} \\ Y_{03} \\ Y_{04} \\ Y_{05} \\ Y_{06} \\ Y_{07} \\ Y_{08} \end{pmatrix} \quad X(0) = \begin{pmatrix} X_{01} \\ X_{02} \\ X_{03} \\ X_{04} \\ X_{05} \\ X_{06} \\ X_{07} \\ X_{08} \end{pmatrix} \quad B(l_i) = \begin{pmatrix} B_{01} \\ B_{02} \\ B_{03} \\ B_{04} \\ B_{05} \\ B_{06} \\ B_{07} \\ B_{08} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

где

$$Y_{0i} = \begin{pmatrix} EI_z v_y(l_i) \\ EI_z \varphi_z(l_i) \\ M_z(l_i) \\ Q_y(l_i) \\ EI_y v_z(l_i) \\ EI_y \varphi_y(l_i) \\ M_y(l_i) \\ Q_z(l_i) \\ EAu(l_i) \\ N(l_i) \\ GI_k \theta(l_i) \\ M_x(l_i) \end{pmatrix} \quad X_{0i} = \begin{pmatrix} EI_z v_y(0) \\ EI_z \varphi_z(0) \\ M_z(0) \\ Q_y(0) \\ EI_y v_z(0) \\ EI_y \varphi_y(0) \\ M_y(0) \\ Q_z(0) \\ EAu(0) \\ N(0) \\ GI_k \theta(0) \\ M_x(0) \end{pmatrix} \quad B_{0i} = \begin{pmatrix} B_1(l_i) \\ B_2(l_i) \\ B_3(l_i) \\ B_4(l_i) \\ B_5(l_i) \\ B_6(l_i) \\ B_7(l_i) \\ B_8(l_i) \\ B_9(l_i) \\ B_{10}(l_i) \\ B_{11}(l_i) \\ B_{12}(l_i) \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

где, i изменяется от 1 до 8.

Матрица коэффициентов $A(l)$ до преобразований имеет вид:

$$A(l) = \begin{pmatrix} A_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{02} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{03} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{04} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{05} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{06} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{07} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{08} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

где

$$A_{0i} = \begin{pmatrix} 1 & l_i & -l_i^2/2 & -l_i^3/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -l_i & -l_i^2/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l_i & l_i^2/2 & l_i^3/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l_i & l_i^2/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

здесь, i изменяется от 1 до 8.

Рассмотрим граничные условия для заданной пространственной рамной конструкции.

В узлах 1, 3, 5, 7 жестко защемлены стойки 1, 2, 3, 4. При этом в соответствии с принятыми локальными системами координат, перечисленные узлы расположены в начале систем координат, соответствующих элементов.

Таким образом, все линейные и угловые перемещения в блоках вектора начальных параметров, данных элементов, равны нулю.

В узле 2 сходятся элементы 1, 5, 7. При этом узел является конечным для 1-го элемента и начальным для элементов 5-го и 7-го. Таким образом, конечные параметры первого элемента, соответствующие внутренним усилиям, связываются с начальными параметрами 5-го и 7-го элемента, при помощи уравнений равновесия:

$$\begin{aligned}
 Q_{y1}(l_1) &= N_5(0) - Q_{z7}(0); \\
 Q_{z1}(l_1) &= Q_{z5}(0) + N_7(0); \\
 N_1(l_1) &= -Q_{y5}(0) - Q_{y7}(0). \\
 M_{y1}(l_1) &= -M_{x5}(0) + M_{z7}(0); \\
 M_{x1}(l_1) &= M_{y5}(0) + M_{y7}(0); \\
 M_{z1}(l_1) &= M_{z5}(0) + M_{x7}(0).
 \end{aligned}
 \tag{2.19}$$

Конечные параметры 1-го элемента, соответствующие линейным и угловым перемещениям, приравниваются к начальным параметрам 5-го элемента, соответствующим перемещениям.

$$\begin{aligned}
 u_1(l_1) &= -v_{y5}(0); \quad v_{z1}(l_1) = v_{z5}(0); \quad v_{y1}(l_1) = u_5(0). \\
 \varphi_{z1}(l_1) &= \varphi_{z5}(0); \quad \varphi_{y1}(l_1) = -\theta_5(0); \quad \theta_1(l_1) = \varphi_{y5}(0).
 \end{aligned}
 \tag{2.20}$$

Начальные параметры 7-го элемента, соответствующие линейным и угловым перемещениям, приравниваются к начальным параметрам 5-го элемента.

$$\begin{aligned}
 v_{y7}(0) &= v_{y5}(0); \quad u_7(0) = -v_{z5}(0); \quad v_{z7}(0) = u_5(0); \\
 \varphi_{z5}(0) &= -\theta_7(0); \quad \theta_5(0) = \varphi_{z7}(0); \quad \varphi_{y5}(0) = \varphi_{y7}(0).
 \end{aligned}
 \tag{2.21}$$

В узле 4 сходятся элементы 2, 5, 8. При этом узел является конечным для 2-го и 5-го элемента, и начальным для 8-го элемента. Таким образом, конечные параметры второго элемента, соответствующие внутренним усилиям, связываются с начальными параметрами 8-го элемента и конечными параметрами 5-го элемента, при помощи уравнений равновесия.

$$\begin{aligned}
Q_{y2}(l_2) &= -N_5(l_5) - Q_{z8}(0); \\
Q_{z2}(l_2) &= -Q_{z5}(l_5) + N_8(0); \\
N_2(l_2) &= Q_{y5}(l_5) - Q_{y8}(0). \\
M_{y2}(l_2) &= M_{x5}(l_5) + M_{z8}(0); \\
M_{x2}(l_2) &= -M_{y5}(l_5) + M_{y8}(0); \\
M_{z2}(l_2) &= -M_{z5}(l_5) + M_{x8}(0).
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Конечные параметры 2-го и 5-го элемента, соответствующие линейным и угловым перемещениям, приравниваются к начальным параметрам 8-го элемента, соответствующим перемещениям.

$$\begin{aligned}
-u_2(l_2) &= v_{y5}(l_5) = v_{y8}(0); \\
v_{z2}(l_2) &= v_{z5}(l_5) = -u_8(0); \\
v_{y2}(l_2) &= u_5(l_5) = v_{z8}(0). \\
\varphi_{z2}(l_2) &= \varphi_{z5}(l_5) = -\theta_8(0); \\
-\varphi_{y2}(l_2) &= \theta_5(l_5) = \varphi_{z8}(0); \\
\theta_2(l_2) &= \varphi_{y5}(l_5) = \varphi_{y8}(0).
\end{aligned} \tag{2.23}$$

В узле 7 сходятся элементы 3, 6, 7. При этом, узел является конечным для 3-го и 7-го элемента, и начальным для 6-го элемента. Таким образом, конечные параметры 3-го элемента, соответствующие внутренним усилиям, связываются с начальными параметрами 6-го элемента и конечными параметрами 7-го элемента, при помощи уравнений равновесия.

$$\begin{aligned}
Q_{y3}(l_3) &= N_6(0) + Q_{z7}(l_7); \\
N_3(l_3) &= -Q_{y6}(0) + Q_{y7}(l_7); \\
Q_{z3}(l_3) &= Q_{z6}(0) - N_7(l_7). \\
M_{y3}(l_3) &= -M_{x6}(0) - M_{z7}(l_7); \\
M_{x3}(l_3) &= M_{y6}(0) - M_{y7}(l_7); \\
M_{z3}(l_3) &= M_{z6}(0) - M_{x7}(l_7).
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Конечные параметры 3-го и 7-го элемента, соответствующие линейным и угловым перемещениям, приравниваются к начальным параметрам 6-го элемента, соответствующим перемещениям.

$$\begin{aligned}
 -u_3(l_3) &= v_{y6}(0) = v_{y7}(l_7); \\
 v_{z3}(l_3) &= v_{z6}(0) = -u_7(l_7); \\
 v_{y3}(l_3) &= u_6(0) = v_{z7}(l_7). \\
 \varphi_{z3}(l_3) &= \varphi_{z6}(0) = -\theta_7(l_7); \\
 -\varphi_{y3}(l_3) &= \theta_6(0) = \varphi_{z7}(l_7); \\
 \theta_3(l_3) &= \varphi_{y6}(0) = \varphi_{y7}(l_7).
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

В узле 8 сходятся элементы 4, 6, 8. При этом узел является конечным для 4-го, 6-го элемента и 8-го элемента. Таким образом, конечные параметры 4-го элемента, соответствующие внутренним усилиям, связываются с конечными параметрами 6-го элемента и конечными параметрами 8-го элемента, при помощи уравнений равновесия.

$$\begin{aligned}
 Q_{y4}(l_4) &= -N_6(l_6) + Q_{z8}(l_8); \\
 N_4(l_4) &= Q_{y6}(l_6) + Q_{y8}(l_8); \\
 Q_{z4}(l_4) &= -Q_{z6}(l_6) - N_8(l_8). \\
 M_{y4}(l_4) &= M_{x6}(l_6) - M_{z8}(l_8); \\
 M_{x4}(l_4) &= M_{y6}(l_6) - M_{y8}(l_8); \\
 M_{z4}(l_4) &= M_{z6}(l_6) - M_{x8}(l_8).
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Конечные параметры 4-го и 6-го элемента, соответствующие линейным и угловым перемещениям, приравниваются к конечным параметрам 8-го элемента, соответствующим перемещениям.

$$\begin{aligned}
-u_4(l_4) &= v_{y6}(l_6) = v_{y8}(l_8); \\
v_{z4}(l_4) &= v_{z6}(l_6) = -u_8(l_8); \\
v_{y4}(l_4) &= u_6(l_6) = v_{z8}(l_8). \\
\varphi_{z4}(l_4) &= \varphi_{z6}(l_6) = -\theta_8(l_8); \\
-\varphi_{y4}(l_4) &= \theta_6(l_6) = \varphi_{z8}(l_8); \\
\theta_4(l_4) &= \varphi_{y6}(l_6) = \varphi_{y8}(l_8).
\end{aligned}
\tag{2.27}$$

В результате рассмотрения граничных условий в векторе начальных параметров $X(0)$ образовывается 30 нулевых строк, а в векторе конечных параметров $Y(l)$ осталось 30 независимых элементов.

После переноса из вектора $Y(l)$ независимых конечных параметров в нулевые строки вектора $X(0)$ получим вектор неизвестных граничных параметров X^* , который имеет вид

$$X^* = \begin{pmatrix} X_{11} \\ X_{12} \\ X_{13} \\ X_{24} \\ X_{05} \\ X_{06} \\ X_{37} \\ X_{08} \end{pmatrix}
\tag{2.28}$$

Блоки X_{li} , X_{24} , относятся к элементам, которые имеют нулевые начальные параметры, учитывающие граничные условия конструкции.

Блок X_{li} состоит из неизвестных начальных параметров для i -го элемента и независимых конечных параметров k -го элемента и формируется в соответствии с выражением

$$X_{li} = \begin{pmatrix} M_{zk}(l) \\ Q_{yk}(l) \\ M_{zi}(0) \\ Q_{yi}(0) \\ M_{yk}(l) \\ Q_{zk}(l) \\ M_{yi}(0) \\ Q_{zi}(0) \\ N_k(l) \\ N_i(0) \\ M_{xk}(l) \\ M_{xi}(0) \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

где, i изменяется от 1 до 3, k - изменяется от 5 до 7.

Блок X_{24} , состоит из неизвестных начальных параметров для 4-го элемента и независимых конечных параметров 8-го элемента и формируется в соответствии с выражением

$$X_{24} = \begin{pmatrix} E_8 I_z v_y(l) \\ E_8 I_z \varphi_z(l) \\ M_{z4}(0) \\ Q_{y4}(0) \\ M_{z8}(l) \\ Q_{y8}(l) \\ M_{y4}(0) \\ Q_{z4}(0) \\ E_8 I_y v_z(l) \\ N_4(0) \\ E_8 I_y \varphi_y(l) \\ M_{x4}(0) \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Блок X_{0i} относится к элементам, все начальные параметры которых являются неизвестными и не связаны с граничными параметрами других элементов, и формируются в соответствии с выражением

$$X_{0i} = \begin{pmatrix} E_i I_z v_y(0) \\ E_i I_z \varphi_z(0) \\ M_{zi}(0) \\ Q_{yi}(0) \\ E_i I_y v_z(0) \\ E_i I_y \varphi_y(0) \\ M_{yi}(0) \\ Q_{zi}(0) \\ EAu_i(0) \\ N_i(0) \\ G_i I_k \theta(0) \\ M_{xi}(0) \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

где, i принимает значения 5,6,8.

Блок X_{37} состоит из неизвестных начальных параметров для 7-го элемента и независимых конечных параметров 8-го элемента и формируется в соответствии с выражением

$$X_{37} = \begin{pmatrix} M_{y8}(l) \\ Q_{z8}(l) \\ M_{z7}(0) \\ Q_{y7}(0) \\ EAu_8(l) \\ N_8(l) \\ M_{y7}(0) \\ Q_{z7}(0) \\ G_8 I_k \theta(l) \\ N_7(0) \\ M_{x8}(l) \\ M_{x7}(0) \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

Матрица коэффициентов A^* , для пространственной рамной конструкции, приведенной на рис. 2.12, сформированная в результате цепочки равносильных преобразований имеет вид

$$A^* = \begin{vmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & A_5 & 0 & A_6 & 0 \\ A_{11} & A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_7 \\ 0 & 0 & A_3 & 0 & 0 & A_5 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & 0 & A_4 & 0 & 0 & A_8 & 0 \\ A_{15} & 0 & 0 & 0 & A_2 & 0 & 0 & A_9 \\ 0 & A_{15} & 0 & A_{12} & 0 & A_2 & A_{13} & 0 \\ 0 & 0 & A_{15} & 0 & A_{10} & A_{14} & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{16} & 0 & 0 & A_{17} & A_2 \end{vmatrix} \quad (2.33)$$

Блоки A_1 относятся к элементам, которые имеют нулевые начальные параметры, учитывающие граничные условия конструкции, и формируются в соответствии с выражением

$$A_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -l_1^2/2 & -l_1^3/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -l_1 & -l_1^2/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_1^2/2 & l_1^3/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_1 & l_1^2/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (2.34)$$

Блоки A_2 относятся к элементам, все начальные параметры которых являются неизвестными и не связаны с граничными параметрами других элементов, и формируются в соответствии с выражением

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & l_i & -l_i^2/2 & -l_i^3/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -l_i & -l_i^2/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l_i & l_i^2/2 & l_i^3/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l_i & l_i^2/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

Блоки A_3 , A_4 относятся к элементам, которые имеют нулевые начальные параметры, учитывающие граничные условия конструкции и содержат компенсирующие элементы, которые вводятся исходя из уравнений равновесия и совместности перемещений для конечных параметров элементов стойки и конечных параметров элементов продольного ригеля, сходящихся в одном узле, и формируются в соответствии с выражениями:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -l_1^2/2 & -l_1^3/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -l_1 & -l_1^2/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_1^2/2 & l_1^3/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_1 & l_1^2/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -l_1^2/2 & -l_1^3/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -l_1 & -l_1^2/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_1^2/2 & l_1^3/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 & 0 & 0 & 0 & l_1 & l_1^2/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & l_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{C} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

Блок \mathbf{A}_5 состоит из компенсирующих элементов, которые вводятся исходя из уравнений равновесия и совместности перемещений для конечных параметров элементов стойки и начальных параметров элементов поперечного ригеля, сходящихся в одном узле, и формируется в соответствии с выражением

$$\mathbf{A}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -D_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{C}_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

Блоки A_6 , A_7 состоят из компенсирующих элементов, которые вводятся исходя из уравнений равновесия и совместности перемещений для конечных параметров элементов стоек и начальных параметров элементов продольных ригелей, сходящихся в одном узле, и формируются в соответствии с выражениями:

$$A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ C_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

Блок A_8 состоит из компенсирующих элементов, которые вводятся исходя из уравнений равновесия и совместности перемещений для конечных параметров элементов стойки и конечных параметров элементов

продольного ригеля, сходящихся в одном узле, и формируется в соответствии с выражением

$$A_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

Блок A_9 состоит из компенсирующих элементов, которые вводятся исходя из совместности перемещений для конечных параметров элементов поперечного ригеля и начальных параметров элементов продольного ригеля, сходящихся в одном узле и формируется в соответствии с выражением

$$A_9 = \begin{pmatrix} -N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -C_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -S_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

Блок A_{10} состоит из компенсирующих элементов, которые вводятся исходя из уравнений равновесия и совместности перемещений для

начальных параметров элементов продольного ригеля и начальных параметров поперечного ригеля, сходящихся в одном узле, и формируется в соответствии с выражением

$$A_{10} = \begin{pmatrix} N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & lT_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & lN_{ij} & 0 & 0 & D_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -C_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -S_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

Блоки A_{11} , A_{12} , A_{13} состоят из компенсирующих элементов, которые вводятся в связи с участием независимых конечных параметров в уравнениях равновесия и совместности перемещений, и формируются в соответствии с выражениями:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

$$\mathbf{A}_{12} = \begin{pmatrix} -N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -N_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -S_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

$$\mathbf{A}_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

Блок \mathbf{A}_{14} состоит из компенсирующих элементов, которые вводятся исходя из совместности перемещений для конечных параметров элементов продольного ригеля и начальных параметров элементов поперечного ригеля, сходящихся в одном узле, и формируется в соответствии с выражением

$$A_{14} = \begin{pmatrix} -N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -D_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

Блоки A_{15} , A_{16} и A_{17} состоят из компенсирующих элементов, которые вводятся в связи с переносом независимых конечных параметров в матрицу начальных параметров, и формируются в соответствии с выражениями:

$$A_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

$$A_{16} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

$$A_{17} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

2.3. Сравнение результатов расчетов

В соответствии с произведенными исследованиями формирования матриц разрешающего уравнения численно-аналитического метода граничных элементов составлена программа в системе компьютерной математики MATLAB, позволяющая определять внутренние усилия и

перемещения в простейшей пространственной рамной конструкции, расчетная схема которой приведена на рис. 2.12.

Структура матрицы A^* сформированной в системе компьютерной математики MatLab представлена на рис. Б.1. в Приложении Б.

В результате работы программы определены внутренние усилия, для простейшей пространственной рамной конструкции, которые приведены в Приложении Б в таблицах Б.1 и Б.2, для сравнения результатов рама была рассчитана при помощи проектно-вычислительного комплекса SCAD.

По значениям изгибающих моментов M_z , M_y , и крутящих моментов M_x , определенных для пространственной рамы при помощи численно-аналитического метода граничных элементов, построены соответствующие эпюры, представленные на рис. Б.2, Б.3, Б.4 Приложение Б.

По значениям определенных поперечных сил Q_y , Q_z , продольных сил N , построены соответствующие эпюры, представленные на рис. Б.5, Б.6, Б.7 Приложение Б.

3. АВТОМАТИЗАЦИЯ ФОРМИРОВАНИЯ МАТРИЦ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ РАСЧЕТЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ УПРУГИХ РАМНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

3.1. Система уравнений ЧА МГЭ

Принцип автоматизации формирования матриц ЧА МГЭ рассмотрим на примере пространственной рамной конструкции, представленной на рис. 3.1.

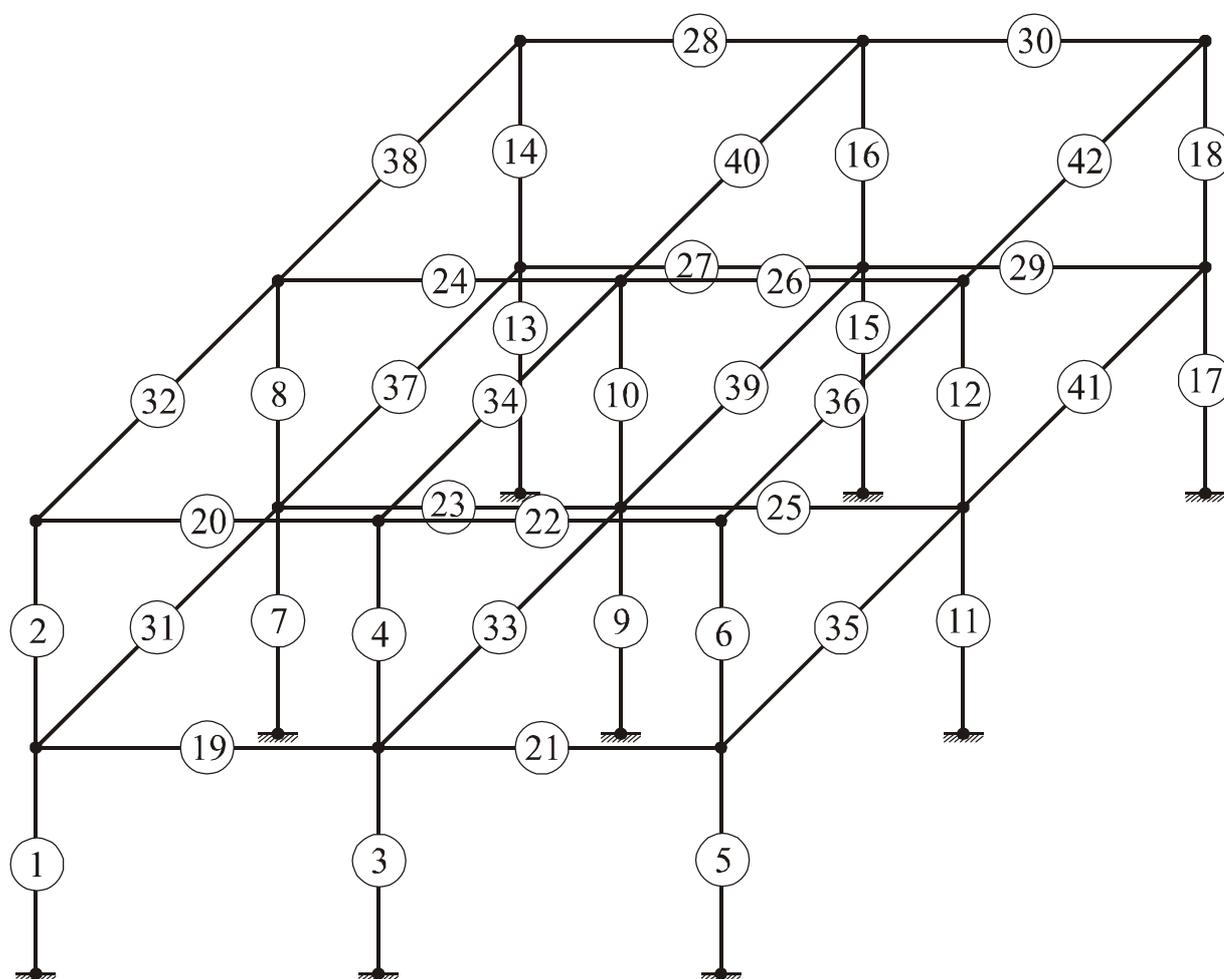


Рис. 3.1. Нумерация элементов пространственной рамной конструкции

В результате произведенных исследований для пространственных рамных конструкций, были выявлены общие закономерности формирования вектора неизвестных граничных параметров X^* и матрицы коэффициентов A^* .

Количество элементов в пространственных рамных конструкциях можно определить по формуле

$$K = (N + 1)(M + 1)P + (M + 1)NP + (N + 1)MP \quad (3.1)$$

где

K – количество элементов;

N – количество шагов;

M – количество пролетов;

P – количество этажей;

$(N+1)(M+1)P$ – количество стоек;

$(M+1)NP$ – количество продольных ригелей;

$(N+1)MP$ – количество поперечных ригелей.

Количество элементов пространственной рамной конструкции имеющей два этажа, два пролета и два шага, по формуле (3.1) составило 42 (рис. 3.1).

Система уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние отдельного элемента пространственной рамной конструкции представленной на рис. 3.1, в матричной форме (3.2) имеет вид

$$Y(l_i) = \dot{A}(l_i) X(0) + B(l_i) \quad (3.2)$$

Система уравнений после преобразований имеет следующий вид

$$\dot{A}^* X^* = -B \quad (3.3)$$

3.2. Формирование вектора неизвестных граничных параметров X^*

Вектор неизвестных параметров, X^* составленный для пространственной рамной конструкции, представленной на рис. 3.1 имеет вид

$$X^* = \begin{pmatrix} X_{1.1} \\ X_{0.2} \\ \dots \\ X_{0.30} \\ X_{1.31} \\ X_{1.32} \\ \dots \\ X_{1.35} \\ X_{0.36} \\ X_{1.37} \\ X_{1.38} \\ X_{1.39} \\ X_{2.40} \\ X_{3.41} \\ X_{0.42} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

В результате исследования топологии вектора неизвестных граничных параметров (3.4) разрешающего уравнения численно-аналитического метода граничных элементов, для пространственных рамных конструкций, имеющих P этажей, M пролетов, N шагов и состоящих из K элементов выявлены закономерности расположения неизвестных.

Блок X_{0i} относится к элементам, все начальные параметры которых являются неизвестными и не связаны с граничными параметрами других элементов, и формируются в соответствии с выражением

$$X_{0i} = \begin{pmatrix} E_i I_{zi} v_{yi}(0) \\ E_i I_{zi} \varphi_{zi}(0) \\ M_{zi}(0) \\ Q_{yi}(0) \\ E_i I_{yi} v_{zi}(0) \\ E_i I_{yi} \varphi_{yi}(0) \\ M_{yi}(0) \\ Q_{zi}(0) \\ E_i A u_i(0) \\ N_i(0) \\ G_i I_{ki} \theta(0) \\ M_{xi}(0) \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Блоки X_{1i} , X_{2i} , X_{3i} , относятся к элементам, которые имеют нулевые начальные параметры, учитывающие граничные условия конструкции.

Блок X_{li} состоит из неизвестных начальных параметров для i -го элемента и независимых конечных параметров k -го элемента и формируется в соответствии с выражением

$$X_{li} = \begin{pmatrix} M_{zk}(l) \\ Q_{yk}(l) \\ M_{zi}(0) \\ Q_{yi}(0) \\ M_{yk}(l) \\ Q_{zk}(l) \\ M_{yi}(0) \\ Q_{zi}(0) \\ N_k(l) \\ N_i(0) \\ M_{xk}(l) \\ M_{xi}(0) \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Номера k -го элемента, конечные параметры которого являются независимыми, изменяются от

$$(N+1)(M+1)P+1 \quad (3.7)$$

до

$$K = [(N+1)(M+1) + N(M+1) + (N+1)M]P \quad (3.8)$$

Блоки X_{li} совмещаются с элементами, номера строк которых определяются по формулам:

$$\begin{aligned}
i &= (m_1 - 1)(N + 1)P + (n_1 - 1)P + 1 \\
i &= (N + 1)(M + 1)P + (m_1 - 1)NP + (n_2 - 1)P + p_1 \\
i &= (N + 1)(M + 1)P + (M + 1)NP + (m_2 - 1)(N + 1)P + p_2 \\
i &= (N + 1)(M + 1)P + (M + 1)NP + (M - 1)(N + 1)P + p_3
\end{aligned} \tag{3.9}$$

где

- m_1 – изменяется от 1 до $M + 1$;
- m_2 – изменяется от 1 до $M - 1$;
- n_1 – изменяется от 1 до $N + 1$;
- n_2 – изменяется от 1 до N ;
- p_1 – изменяется от 1 до $P - 1$;
- p_2 – изменяется от 1 до $(N + 1)P - 1$;
- p_3 – изменяется от 1 до $(N + 1)P - 3$.

Блок X_{2i} состоит из начальных неизвестных параметров для i -го элемента и независимых конечных параметров элемента, имеющего номер K , и формируется в соответствии со следующим выражением

$$X_{2i} = \begin{pmatrix} E_{ki} I_{zi} v_{yi}(l) \\ E_{ki} I_{zi} \varphi_{zi}(l) \\ M_{zi}(0) \\ Q_{yi}(0) \\ M_{zk}(l) \\ Q_{yk}(l) \\ M_{yi}(0) \\ Q_{zi}(0) \\ E_{ki} I_{yi} v_{zi}(l) \\ N_i(0) \\ E_{ki} I_{yi} \varphi_{yi}(l) \\ M_{xi}(0) \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

Блок X_{2i} совмещается с элементом, номер строки которого определяется по формуле

$$i = K - 2 \quad (3.11)$$

Блок X_{3i} состоит из начальных неизвестных параметров для i -го элемента и независимых конечных параметров элемента, имеющего номер K , и формируется в соответствии со следующим выражением

$$X_{3i} = \begin{pmatrix} M_{yk}(l) \\ Q_{zk}(l) \\ M_{zi}(0) \\ Q_{yi}(0) \\ EAu_k(l) \\ N_k(l) \\ M_{yi}(0) \\ Q_{zi}(0) \\ G_k I_k \theta(l) \\ N_i(0) \\ M_{xk}(l) \\ M_{xi}(0) \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Блок X_{3i} совмещается с элементом, номер строки которого определяется по формуле

$$i = K - 1 \quad (3.13)$$

3.3. Формирование матрицы коэффициентов A_0^*

В результате исследования топологии матрицы коэффициентов разрешающего уравнения численно-аналитического метода граничных элементов, для пространственных рамных конструкций, имеющих P этажей,

M пролетов, N шагов и состоящих из K элементов, ниже предлагается методика ее формирования.

Преобразованную матрицу A^* предлагается создать путем суммирования матрицы A_0^* с матрицей Z^* .

$$A^* = A_0^* + Z^* \quad (3.14)$$

где A_0^* - матрица коэффициентов, состоящая из компенсирующих элементов, которые появляются в связи с участием зависимых конечных параметров в уравнения равновесия и совместности перемещений;

Z^* - матрица коэффициентов, состоящая из компенсирующих элементов, которые появляются в связи с участием независимых конечных параметров в уравнения равновесия и совместности перемещений.

Разложение матрицы коэффициентов A^* на две составляющие принято в связи с возможностью совпадения блоков матрицы Z^* с блоками матрицы A_0^* , лежащими на главной диагонали.

Порядок матрицы в пространственных рамных конструкциях можно определить по формуле

$$P_m = [(N + 1)(M + 1)P + (M + 1)NP + (N + 1)MP] \times 12 \quad (3.15)$$

Порядок матрицы A^* для пространственной рамной конструкции имеющей два этажа, два пролета и два шага, составил 504x504.

Матрица коэффициентов A_0^* , для пространственной рамной конструкции, сформированная в результате цепочки равносильных преобразований приведенная на рис. В.1 Приложение В.

Блоки A_{0i} относятся к элементам, все начальные параметры которых являются неизвестными и не связаны с граничными параметрами других элементов, и формируются в соответствии с выражением

$$A_{0i} = \begin{pmatrix} 1 & l_i & -l_i^2/2 & -l_i^3/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -l_i & -l_i^2/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l_i & l_i^2/2 & l_i^3/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l_i & l_i^2/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Блоки A_{1i} относятся к элементам, которые имеют нулевые начальные параметры, учитывающие граничные условия конструкции, и формируются в соответствии с выражением

$$A_{1i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -l_i^2/2 & -l_i^3/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -l_i & -l_i^2/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_i^2/2 & l_i^3/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_i & l_i^2/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Блоки A_{1i} совмещаются с элементами, номера строк (i) и столбцов (j) которых определяется по формулам:

$$\begin{aligned}
 i = j &= (m_1 - 1)(N + 1)P + (n_1 - 1)P + 1 \\
 i = j &= (N + 1)(M + 1)P + (m_1 - 1)NP + (n_2 - 1)P + p_1 \\
 i = j &= (N + 1)(M + 1)P + (M + 1)NP + (m_3 - 1)(N + 1)P + p_2
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

где m_3 – изменяется от 1 до M ;

Блоки A_{2i} состоят из компенсирующих элементов, которые вводятся исходя из уравнений равновесия и совместности перемещений для элементов стоек сходящихся в одном узле, и формируются в соответствии с выражением

$$A_{2i} = \begin{pmatrix} -N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

Блоки A_{2i} совмещаются с элементами, номера строк и столбцов которых определяется по формулам:

$$\begin{aligned}
i &= (m_1 - 1)(N + 1)P + (n_1 - 1)P + p_1 \\
j &= i + 1
\end{aligned}
\tag{3.20}$$

Блоки A_{3i} состоят из компенсирующих элементов, которые вводятся исходя из уравнений совместности перемещений для элементов верхних продольных ригелей, сходящихся в одном узле, и формируются в соответствии с выражением

$$A_{3i} = \begin{pmatrix} -N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\tag{3.21}$$

Блоки A_{3i} совмещаются с элементами, номера строк и столбцов которых определяется по формулам:

$$\begin{aligned}
i &= (N + 1)(M + 1)P + (m_1 - 1)NP + n_3P \\
j &= i + (N + 1)P \\
i &= (N + 1)(M + 1)P + (M + 1)NP + (N + 1)m_2P \\
j &= i + P
\end{aligned}
\tag{3.22}$$

где n_3 – изменяется от 1 до $N - 1$.

Блок A_{4i} состоит из компенсирующих элементов, которые вводятся исходя из уравнений равновесия для конечных параметров элементов стоек и

начальных параметров элементов продольных ригелей, сходящихся в одном узле, и формируется в соответствии с выражением

$$A_{4i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Блоки A_{4i} совмещаются с элементами, номера строк и столбцов которых определяется по формулам:

$$\begin{aligned} i &= (m_1 - 1)(N + 1)P + (n_2 - 1)P + p_1 \\ j &= (N + 1)(M + 1)P + (m_1 - 1)NP + (n_2 - 1)P + p_1 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Блок A_{5i} состоит из компенсирующих элементов, которые вводятся исходя из уравнений равновесия и совместности перемещений для конечных параметров элементов стоек и начальных параметров элементов верхних продольных ригелей, сходящихся в одном узле, и формируются в соответствии с выражением

$$A_{5i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -D_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Блоки A_{5i} совмещаются с элементами, номера строк и столбцов которых определяется по формулам:

$$\begin{aligned} i &= (m_1 - 1)(N + 1)P + (n_2 - 1)P + P \\ j &= (N + 1)(M + 1)P + (m_1 - 1)NP + (n_2 - 1)P + P \end{aligned} \quad (3.26)$$

Блок A_{6i} , состоят из компенсирующих элементов, которые вводятся исходя из уравнений равновесия для конечных параметров элементов стоек и начальных параметров элементов поперечных ригелей, сходящихся в одном узле, и формируется в соответствии с выражением

$$A_{6i} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (3.27)$$

Блоки A_{6i} совмещаются с элементами, номера строк и столбцов которых определяется по формулам:

$$\begin{aligned} i &= (m_3 - 1)(N + 1)P + p_2 \\ j &= (N + 1)(M + 1)P + (M + 1)NP + (m_3 - 1)(N + 1)P + p_2 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Блок A_{7i} состоят из компенсирующих элементов, которые вводятся исходя из уравнений равновесия и совместности перемещений для конечных параметров элементов стоек и начальных параметров элементов верхних поперечных ригелей, сходящихся в одном узле, и формируются в соответствии с выражением

$$A_{7i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ C_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Блоки A_{7i} совмещаются с элементами, номера строк и столбцов которых определяется по формулам:

$$\begin{aligned} i &= (m_3 - 1)(N + 1)P + (N + 1)P \\ j &= (N + 1)(M + 1)P + (M + 1)NP + (m_3 - 1)(N + 1)P + (N + 1)P \end{aligned} \quad (3.30)$$

Блок A_{8i} состоит из компенсирующих элементов, которые вводятся исходя из совместности перемещений для конечных параметров элементов верхнего продольного ригеля и начальных параметров элементов верхнего поперечного ригеля, сходящихся в одном узле и формируется в соответствии с выражением

$$A_{8i} = \begin{pmatrix} -N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -C_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -S_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Блоки A_{8i} совмещаются с элементами, номера строк и столбцов которых определяется по формулам:

$$\begin{aligned} i &= (N+1)(M+1)P + (m_3-1)NP + NP \\ j &= (N+1)(M+1)P + (M+1)NP + (m_3-1)(N+1)P + (N+1)P \end{aligned} \quad (3.32)$$

Блоки A_{9i} состоят из компенсирующих элементов, которые вводятся исходя из совместности перемещений для начальных параметров продольных ригелей и начальных параметров элементов стоек, сходящихся в одном узле, и формируются в соответствии с выражением

$$A_{9i} = \begin{pmatrix} 0 & l_i N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -D_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_i T_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

Блоки A_{9i} совмещаются с элементами, номера строк и столбцов которых определяется по формулам:

$$\begin{aligned} i &= (N+1)(M+1)P + (m_1-1)NP + (n_2-1)P + p_1 \\ j &= (m_1-1)(N+1)P + (n_2-1)P + p_1 + 1 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Блоки A_{10i} состоят из компенсирующих элементов, которые вводятся исходя из совместности перемещений для конечных параметров продольных ригелей и начальных параметров элементов стоек, сходящихся в одном узле, и формируются в соответствии с выражением

$$A_{10i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

Блоки A_{10i} совмещаются с элементами, номера строк и столбцов которых определяется по формулам:

$$\begin{aligned} i &= (N+1)(M+1)P + (m_1-1)NP + (n_2-1)P + p_1 \\ j &= (m_1-1)(N+1)P + n_2P + p_1 + 1 \end{aligned} \quad (3.36)$$

Блоки A_{11i} состоят из компенсирующих элементов, которые вводятся исходя из совместности перемещений для начальных параметров поперечных ригелей и начальных параметров элементов стоек, сходящихся в одном узле, и формируются в соответствии с выражением

$$A_{11i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -l_i N_{ij} & 0 & 0 & -D_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_i T_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -C_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -S_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

Блоки A_{11i} совмещаются с элементами, номера строк и столбцов которых определяется по формулам:

$$\begin{aligned} i &= (N+1)(M+1)P + (M+1)NP + (m_3-1)(N+1)P + (n_1-1)P + p_1 \\ j &= (m_3-1)(N+1)P + (n_1-1)P + (p_1+1) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Блоки A_{12i} состоят из компенсирующих элементов, которые вводятся исходя из совместности перемещений для конечных параметров поперечных ригелей и начальных параметров элементов стоек, сходящихся в одном узле, и формируются в соответствии с выражением

$$A_{12i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

Блоки A_{12i} совмещаются с элементами, номера строк и столбцов которых определяется по формулам:

$$\begin{aligned} i &= (N+1)(M+1)P + (M+1)NP + (m_3-1)(N+1)P + (n_1-1)P + p_1 \\ j &= m_3(N+1)P + (n_1-1)P + (p_1+1) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Блок A_{13} состоит из компенсирующих элементов, которые вводятся исходя из совместности перемещений для начальных параметров элементов верхнего поперечного ригеля и начальных параметров элементов верхнего

продольного ригеля, сходящихся в одном узле, и формируется в соответствии с выражением

$$A_{13i} = \begin{pmatrix} N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_i T_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_i N_{ij} & 0 & 0 & D_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -C_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -S_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

Блоки A_{13i} совмещаются с элементами, номера строк и столбцов которых определяется по формулам:

$$\begin{aligned} i &= (N+1)(M+1)P + (M+1)NP + (m_3-1)(N+1)P + (n_2-1)P + P \\ j &= (N+1)(M+1)P + (m_3-1)NP + (n_2-1)P + P \end{aligned} \quad (3.42)$$

Блок A_{4i} состоит из компенсирующих элементов, которые вводятся исходя из совместности перемещений для конечных параметров элементов верхнего поперечного ригеля и начальных параметров элементов верхнего продольного ригеля, сходящихся в одном узле, и формируется в соответствии с выражением

$$A_{14i} = \begin{pmatrix} -N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -D_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

Блоки A_{14i} совмещаются с элементами, номера строк и столбцов которых определяется по формулам:

$$\begin{aligned} i &= (N+1)(M+1)P + (M+1)NP + (m_3-1)(N+1)P + (n_2-1)P + P \\ j &= (N+1)(M+1)P + m_3NP + (n_2-1)P + P \end{aligned} \quad (3.44)$$

3.4. Формирование матрицы коэффициентов Z_0^*

Матрица коэффициентов Z^* , для пространственной рамной конструкции, сформированная в результате цепочки равносильных преобразований приведенная на рис. В.2 Приложение В.

Блок $Z_1 \dots Z_6$ состоит из компенсирующих элементов, которые вводятся в связи с участием независимых конечных параметров в уравнениях равновесия и совместности перемещений.

Блок Z_{1i} , состоит из компенсирующих элементов, которые вводятся исходя из уравнений равновесия для конечных параметров элементов стоек и конечных параметров элементов продольных ригелей, сходящихся в одном узле, и формируется в соответствии с выражением

$$Z_{1i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

На первом этапе формируется вектор-столбец, содержащих номера столбцов основной матрицы, в которой находятся блоки A_{1i} . Номера этих столбцов, определяются по формуле (3.18).

Количество блоков Z_{1i} определяется по формуле

$$c_{z1} = (M + 1)NP \quad (3.46)$$

На втором этапе формируется вектор-столбец, содержащий номера строк, которые вычисляются по формуле

$$i = (m_1 - 1)(N + 1)P + (n_2 - 1)P + p_5 \quad (3.47)$$

На третьем этапе формируется вектор-столбец, содержащий номера столбцов, в которых находятся блоки Z_{1i} , выбирая элементы с 1 по c_{z1} из вектора, содержащие номера столбцов в которых находятся блоки A_{1i} .

В результате получаем два вектора-столбца, в которых содержатся номера строк и соответствующие им номера столбцов, в которых и содержатся блоки Z_{1i} .

Блоки Z_{2i} , состоят из компенсирующих элементов, которые вводятся исходя из уравнений равновесия для конечных параметров элементов стоек и конечных параметров элементов поперечных ригелей, сходящихся в одном узле, и формируются в соответствии с выражением

$$Z_{2i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

На первом этапе формируется вектор-столбец, содержащих номера столбцов основной матрицы, в которой находятся блоки A_{1i} . Номера этих столбцов определяются по формуле (3.18).

Количество блоков Z_{2i} определяется по формуле

$$c_{z_2} = (M + 1)NP - 2 \quad (3.49)$$

На втором этапе формируется вектор-столбец, содержащий номера строк, которые вычисляются по формуле

$$i = (m_1 - 1)(N + 1)P + n_2P + p_5 \quad (3.50)$$

На третьем этапе формируется вектор-столбец, содержащий номера столбцов, в которых находятся блоки Z_{2i} , выбирая элементы с $c_{z_1} + 1$ по $c_{z_1} + c_{z_2}$ из вектора, содержащие номера столбцов блоков A_{1i} .

В результате получаем два вектора-столбца, в которых содержатся номера строк и соответствующие им номера столбцов, в которых и содержатся блоки Z_{2i} .

Блоки Z_{3i} , Z_{4i} состоят из компенсирующих элементов, которые вводятся исходя из уравнений равновесия для конечных параметров элементов стоек и конечных параметров элементов верхних поперечных ригелей, сходящихся в одном узле, и формируются в соответствии с выражениями:

$$Z_{3i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -N_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

Блоки Z_{3i} совмещаются с элементами, номера строк и столбцов которых определяется по формулам:

$$\begin{aligned} i &= (N + 1)(M + 1)P \\ j &= K - 2 \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$Z_{4i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

Блоки Z_{4i} совмещаются с элементами, номера строк и столбцов которых определяется по формулам:

$$\begin{aligned} i &= (N + 1)(M + 1)P \\ j &= K - 1 \end{aligned} \quad (3.54)$$

Блоки Z_{5i} , Z_{6i} , состоят из компенсирующих элементов, которые вводятся исходя из уравнений равновесия для конечных параметров элементов верхних продольных ригелей и конечных параметров элементов верхних поперечных ригелей, сходящихся в одном узле, и формируются в соответствии с выражениями:

$$\mathbf{Z}_{5i} = \left\| \begin{array}{cccccccccccc}
-N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -N_{ij} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_{ij} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -S_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array} \right\| \quad (3.55)$$

Блоки \mathbf{Z}_{5i} совмещаются с элементами, номера строк и столбцов которых определяется по формулам:

$$\begin{aligned}
i &= (N + 1)(M + 1)P + (M + 1)NP \\
j &= K - 2
\end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\mathbf{Z}_{6i} = \left\| \begin{array}{cccccccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{ij} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & D_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array} \right\| \quad (3.57)$$

Блоки Z_{6i} совмещаются с элементами, номера строк и столбцов которых определяется по формулам:

$$\begin{aligned} i &= (N + 1)(M + 1)P + (M + 1)NP \\ j &= K - 1 \end{aligned} \quad (3.58)$$

Блоки Z_{7i} , Z_{8i} , и Z_{9i} состоят из компенсирующих элементов, которые вводятся в связи с переносом независимых конечных параметров в матрицу начальных параметров, и формируются в соответствии с выражениями:

$$Z_{7i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

Блоки Z_{7i} совмещаются с элементами, номера строк и столбцов которых определяется по формулам:

$$\begin{aligned} i &= (N + 1)(M + 1)P + (m_1 - 1)(N + 1) + n_1 \\ j &= (m_1 - 1)(N + 1)P + (n_1 - 1)P + 1 \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} i &= (N + 1)(M + 1)P + (N + 1)(M + 1) + (m_1 - 1)N(P - 1) + \\ &\quad + (n_2 - 1)(P - 1) + p_1 \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$j = (N + 1)(M + 1)P + (m_1 - 1)NP + (n_2 - 1)P + p_1$$

$$i = (N+1)(M+1)P + (N+1)(M+1) + (M+1)N(P-1) + (m_2-1)((N+1)P-1) + p_2 \quad (3.62)$$

$$j = (N+1)(M+1)P + (M+1)NP + (m_2-1)(N+1)P + p_2$$

$$i = (N+1)(M+1)P + (N+1)(M+1) + (M+1)N(P-1) + (M-1)(NP+P-1) + p_3 \quad (3.63)$$

$$j = (N+1)(M+1)P + (M+1)NP + (M-1)(N+1)P + p_3$$

$$Z_{8i} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

Блоки Z_{8i} совмещаются с элементами, номера строк и столбцов которых определяется по формулам:

$$\begin{aligned} i &= K \\ j &= K-2 \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$Z_{9i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.66)$$

Блоки Z_{9i} совмещаются с элементами, номера строк и столбцов которых определяется по формулам:

$$\begin{aligned} i &= K \\ j &= K - 1 \end{aligned} \tag{3.67}$$

Структура матрицы A^* сформированной в системе компьютерной математики MatLab представлена на рис. 3.2.

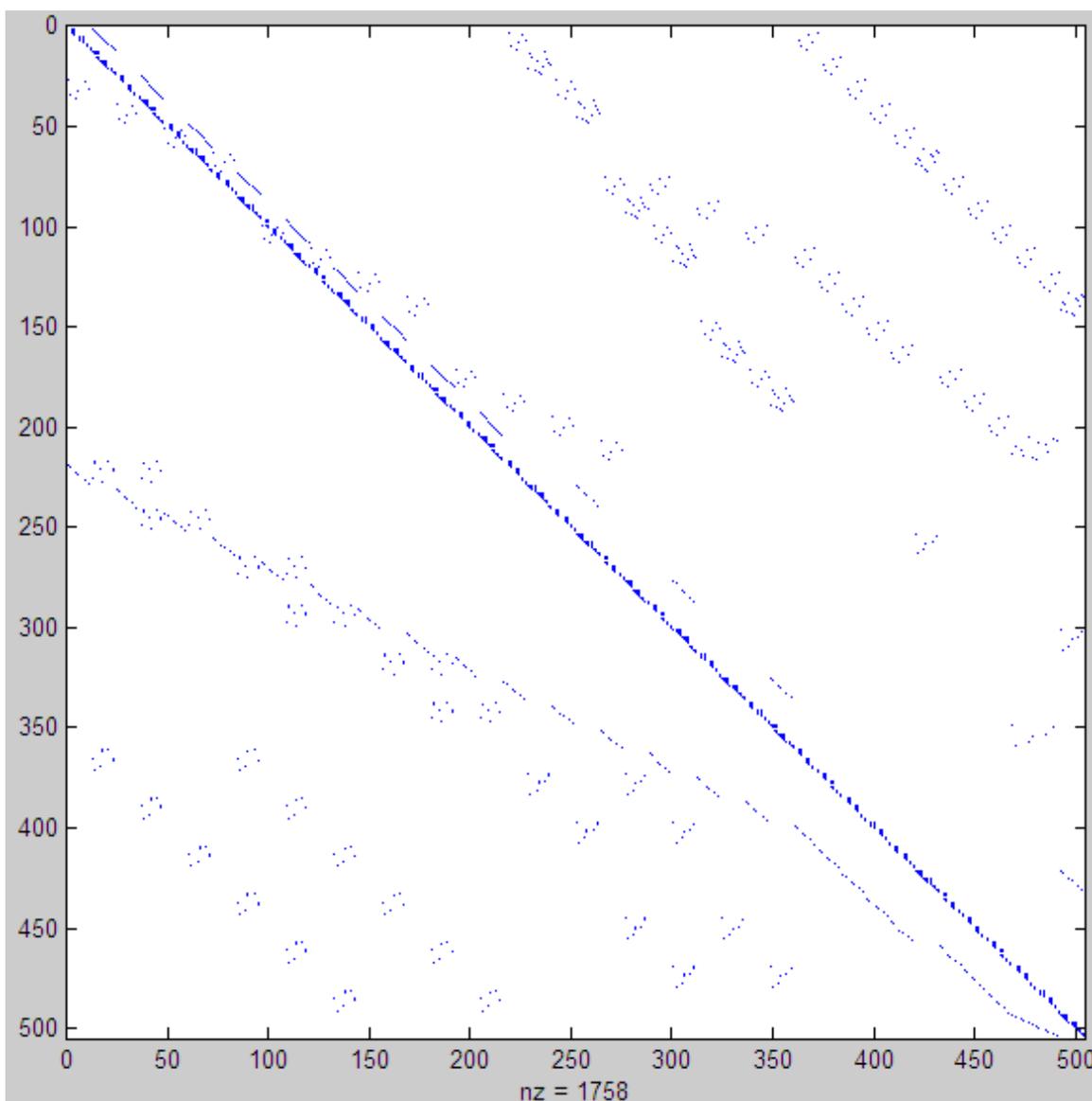


Рис. 3.2. Структура матрицы A^* сформированной в системе компьютерной математики MatLab

3.5. Сравнение результатов расчетов

В соответствии с предложенной методикой формирования матриц разрешающего уравнения численно-аналитического метода граничных элементов составлена программа в системе компьютерной математики MATLAB, позволяющая определять внутренние усилия и перемещения в пространственных рамных конструкциях с неограниченным числом этажей, пролетов и шагов.

При помощи составленной программы рассчитана пространственная рама, имеющая два этажа, два пролета и два шага, на действие равномерно-распределенной нагрузки рис. 3.3.

Согласно ДБН В.1.2-2:2006 Нагрузки и воздействия [51] для г. Одесса производится сбор нагрузок. Сбор нагрузок приведен в Приложение Г.

Нагрузки на продольные ригели принимаются по таблице Г.1. Нагрузка на поперечные ригели принимаются по таблице Г.2.

В расчете использовались следующие геометрические характеристики стоек сечением 300x300 мм:

- коэффициент Пуассона $\mu = 0,17$;
- модуль упругости $E_{cd} = 26977500 \text{ kH} / \text{ì}^2$;
- изгибная жесткость $E_{cd} I_y = 18209,81 \text{ kHì}^2$;
- изгибная жесткость $E_{cd} I_z = 18209,81 \text{ kHì}^2$;
- крутильная жесткость $GI_k = 12236,99 \text{ kHì}^2$
- продольная жесткость $E_{cd} A = 2427974,9 \text{ kH}$.

Геометрические характеристики продольных и поперечных ригелей сечением 300x400 (h) мм:

- коэффициент Пуассона $\mu = 0,17$;
- модуль упругости $E_{cd} = 26977500 \text{ kH} / \text{ì}^2$;
- изгибная жесткость $E_{cd} I_y = 24279,75 \text{ kHì}^2$;

- изгибная жесткость $E_{cd}I_z = 43164,0 \text{ кНм}^2$;
- крутильная жесткость $GI_k = 21884,15 \text{ кНм}^2$
- продольная жесткость $E_{cd}A = 3237299,93 \text{ кН}$.

Расчетная схема двухэтажной, двух шаговой и двух пролетной пространственной рамной конструкции приведена на рис. 3.3.

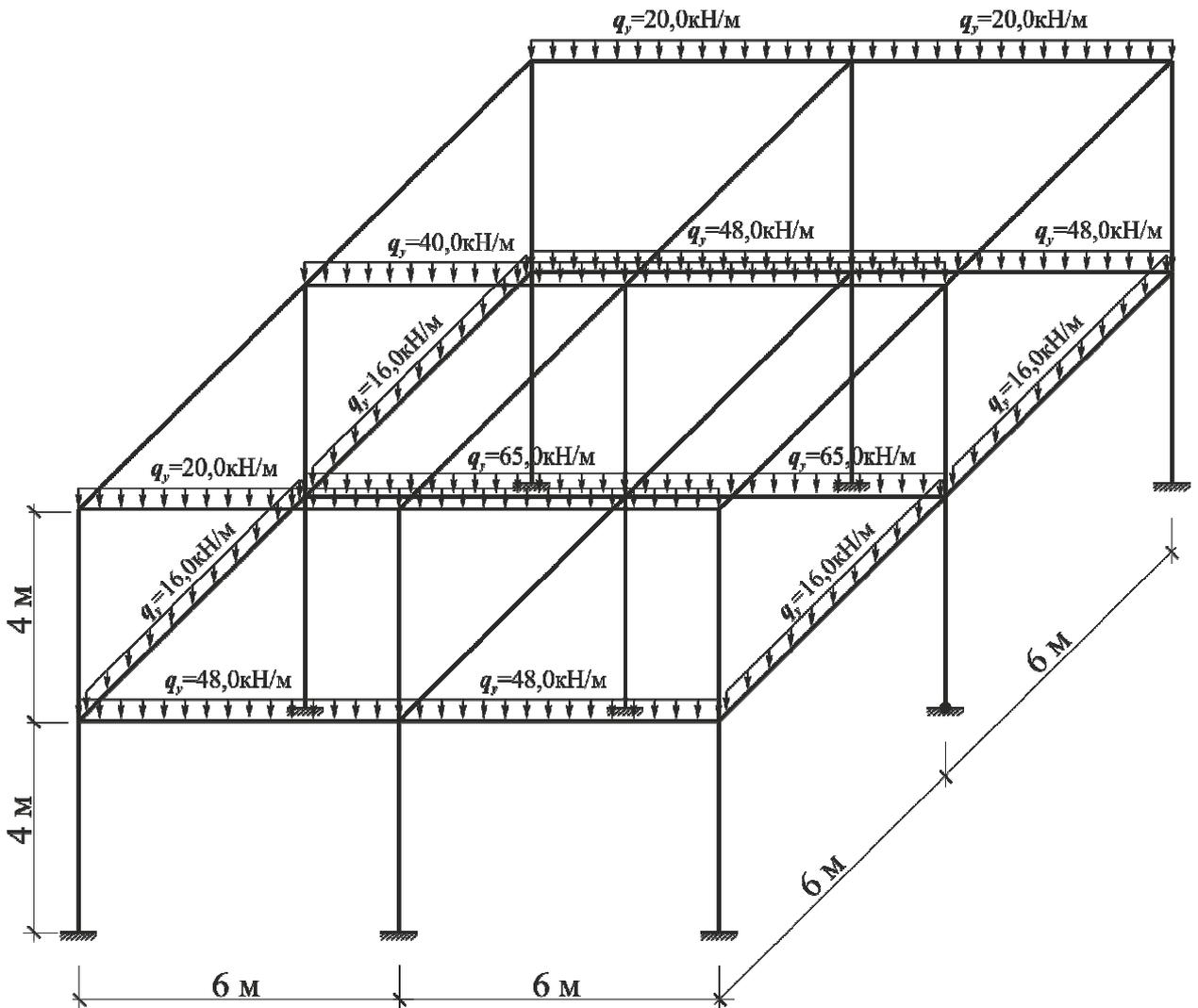


Рис. 3.3. Расчетная схема пространственной рамной конструкции

В результате работы программы определены внутренние усилия и перемещения, для простейшей пространственной рамной конструкции, внутренние усилия приведены в таблицах 3.1 и 3.2, для сравнения результатов рама была рассчитана при помощи проектно-вычислительного комплекса SCAD.

Сравнение результатов расчетов представлено в таблицах 3.1 и 3.2.

Таблица 3.1

Сравнение значений изгибающих и крутящих моментов

Номер элемента	Номер сечения	Изгибающий момент M_z , кНм			Изгибающий момент M_y , кНм			Крутящий момент M_x , кНм		
		ЧА МГЭ	ПК SCAD	Δ %	ЧА МГЭ	ПК SCAD	Δ %	ЧА МГЭ	ПК SCAD	Δ %
1	1	-19,591	-19,591	0	-6,745	-6,745	0	0,002	0,002	0
	2	9,753	9,753	0	3,376	3,376	0	0,002	0,002	0
	3	39,098	39,098	0	13,498	13,498	0	0,002	0,002	0
2	1	-47,957	-47,957	0	-12,727	-12,727	0	0,011	0,011	0
	2	-5,102	-5,102	0	-3,740	-3,740	0	0,011	0,011	0
	3	37,752	37,752	0	5,247	5,247	0	0,011	0,011	0
7	1	-24,831	-24,831	0	0	0	0	0	0	0
	2	12,331	12,331	0	0	0	0	0	0	0
	3	49,495	49,495	0	0	0	0	0	0	0
8	1	-67,009	-67,009	0	0	0	0	0	0	0
	2	-3,204	-3,204	0	0	0	0	0	0	0
	3	60,599	60,599	0	0	0	0	0	0	0
19	1	-84,989	-84,989	0	0,020	0,020	0	-2,313	-2,313	0
	2	87,412	87,412	0	0,003	0,003	0	-2,313	-2,313	0
	3	-172,185	-172,185	0	0,013	0,013	0	-2,313	-2,313	0
20	1	-34,166	-34,166	0	0,02	0,02	0	0,481	0,481	0
	2	37,349	37,349	0	0,011	0,011	0	0,481	0,481	0
	3	-71,134	-71,134	0	0,002	0,002	0	0,481	0,481	0
29	1	172,185	172,185	0	0,011	0,011	0	-2,313	-2,313	0
	2	87,412	87,412	0	0,002	0,002	0	-2,313	-2,313	0
	3	-84,989	-84,989	0	0,013	0,013	0	-2,313	-2,313	0
30	1	-71,134	-71,134	0	0,003	0,003	0	0,481	0,481	0
	2	37,349	37,349	0	0,020	0,020	0	0,481	0,481	0
	3	-34,166	-34,166	0	0,002	0,002	0	0,481	0,481	0
31	1	-28,539	-28,539	0	0,011	0,011	0	-2,065	-2,065	0
	2	29,335	29,335	0	0,020	0,020	0	-2,065	-2,065	0
	3	-56,789	-56,789	0	0,034	0,034	0	-2,065	-2,065	0
32	1	-4,766	-4,766	0	0,003	0,003	0	-3,586	-3,586	0
	2	-0,574	-0,574	0	0,041	0,041	0	-3,586	-3,586	0
	3	3,616	3,616	0	0,031	0,031	0	-3,586	-3,586	0
40	1	3,616	3,616	0	0	0	0	0	0	0
	2	0,374	0,374	0	0	0	0	0	0	0
	3	-2,868	-2,868	0	0	0	0	0	0	0
41	1	-56,789	-56,789	0	0,041	0,041	0	-2,065	-2,065	0
	2	29,335	29,335	0	0,003	0,003	0	-2,065	-2,065	0
	3	-28,539	-28,539	0	0,034	0,034	0	-2,065	-2,065	0
42	1	3,616	3,616	0	0,055	0,055	0	-3,586	-3,586	0
	2	-0,574	-0,574	0	0,011	0,011	0	-3,586	-3,586	0
	3	-4,766	-4,766	0	0,031	0,031	0	-3,586	-3,586	0

Таблица 3.2

Сравнение значений поперечных и продольных сил

Номер элемента	Номер сечения	Поперечная сила Q_y , кН			Поперечная сила Q_z , кН			Продольная сила N , кН		
		ЧА МГЭ	ПК SCAD	Δ %	ЧА МГЭ	ПК SCAD	Δ %	ЧА МГЭ	ПК SCAD	Δ %
1	1	14,672	14,672	0	-5,061	-5,061	0	227,994	227,994	0
	2	14,672	14,672	0	-5,061	-5,061	0	227,994	227,994	0
	3	14,672	14,672	0	-5,061	-5,061	0	227,994	227,994	0
2	1	21,427	21,427	0	-4,493	-4,493	0	-55,235	-55,235	0
	2	21,427	21,427	0	-4,493	-4,493	0	-55,235	-55,235	0
	3	21,427	21,427	0	-4,493	-4,493	0	-55,235	-55,235	0
7	1	18,581	18,581	0	0	0	0	-386,728	-386,728	0
	2	18,581	18,581	0	0	0	0	-386,728	-386,728	0
	3	18,581	18,581	0	0	0	0	-386,728	-386,728	0
8	1	31,902	31,902	0	0	0	0	104,604	104,604	0
	2	31,902	31,902	0	0	0	0	104,604	104,604	0
	3	31,902	31,902	0	0	0	0	104,604	104,604	0
19	1	129,467	129,467	0	0,005	0,005	0	6,767	6,767	0
	2	-14,532	-14,532	0	0,005	0,005	0	6,767	6,767	0
	3	-158,532	-158,532	0	0,005	0,005	0	6,767	6,767	0
20	1	53,838	53,838	0	0,003	0,003	0	-21,442	-21,442	0
	2	-6,161	-6,161	0	0,003	0,003	0	-21,442	-21,442	0
	3	-66,161	-66,161	0	0,003	0,003	0	-21,442	-21,442	0
29	1	-158,532	-158,532	0	0,005	0,005	0	6,767	6,767	0
	2	-14,532	-14,532	0	0,005	0,005	0	6,767	6,767	0
	3	129,467	129,467	0	0,005	0,005	0	6,767	6,767	0
30	1	-66,161	-66,161	0	0,003	0,003	0	-21,442	-21,442	0
	2	-6,161	-6,161	0	0,003	0,003	0	-21,442	-21,442	0
	3	-53,838	-53,838	0	0,003	0,003	0	-21,442	-21,442	0
31	1	43,291	43,291	0	0,012	0,012	0	-0,561	-0,561	0
	2	-4,708	-4,708	0	0,012	0,012	0	-0,561	-0,561	0
	3	-52,708	-52,708	0	0,012	0,012	0	-0,561	-0,561	0
32	1	1,397	1,397	0	0,014	0,014	0	-4,496	-4,496	0
	2	1,397	1,397	0	0,014	0,014	0	-4,496	-4,496	0
	3	1,397	1,397	0	0,014	0,014	0	-4,496	-4,496	0
40	1	-1,0808	-1,0808	0	0	0	0	-1,072	-1,072	0
	2	-1,0808	-1,0808	0	0	0	0	-1,072	-1,072	0
	3	-1,0808	-1,0808	0	0	0	0	-1,072	-1,072	0
41	1	52,708	52,708	0	0,012	0,012	0	-0,561	-0,561	0
	2	4,708	4,708	0	0,012	0,012	0	-0,561	-0,561	0
	3	-43,291	-43,291	0	0,012	0,012	0	-0,561	-0,561	0
42	1	1,397	1,397	0	0,014	0,014	0	-4,496	-4,496	0
	2	1,397	1,397	0	0,014	0,014	0	-4,496	-4,496	0
	3	1,397	1,397	0	0,014	0,014	0	-4,496	-4,496	0

4. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В УПРУГОЙ СТАДИИ РАБОТЫ

4.1. Определение центра кручения сечений неоднородных элементов

Центр кручения поперечного сечения элемента это точка, относительно которой происходит кручение. Касательные напряжения в центре кручения равны нулю. Относительно центра кручения определяется значение крутящего момента, возникающего в рассматриваемом поперечном сечении.

При кручении однородных призматических элементов, имеющих прямоугольное поперечное сечение, центр кручения O совпадает с центром тяжести сечения C (рис 1) и находится на пересечении осей симметрии – главных центральных осей сечения.

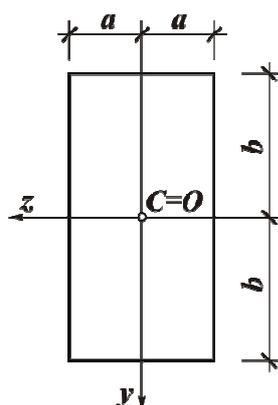


Рис.4.1. Центры тяжести и кручения прямоугольного поперечного сечения

Напряжения, возникающие в точках симметричного прямоугольного поперечного сечения, можно определить по формулам Прандтля [131, 135]:

$$\tau_{xz} = G\theta \frac{8b}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} \frac{sh \frac{(2n-1)\pi y}{b}}{ch \frac{(2n-1)\pi a}{2b}} \cdot \cos \frac{(2n-1)\pi z}{b}; \quad (4.1)$$

$$\tau_{xy} = -G\theta \frac{8b}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} \frac{ch \frac{(2n-1)\pi y}{b}}{ch \frac{(2n-1)\pi a}{2b}} \cdot \cos \frac{(2n-1)\pi z}{b}, \quad (4.2)$$

где G – модуль сдвига материала;

μ – коэффициент Пуассона;

b – половина высоты прямоугольного сечения;

a – половина ширины прямоугольного сечения;

θ – относительный угол закручивания.

Рассмотрим кручение призматического элемента имеющего прямоугольное сечение, приведенное на рис. 4.2.

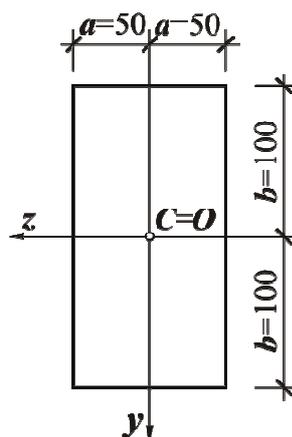


Рис.4.2. Размеры прямоугольного поперечного сечения

Зададимся следующими значениями физических постоянных и значением относительной угловой деформации:

$$E_{\text{дк}} = 3276 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}; \mu_b = 0,17; \theta = 0,0000132.$$

Для определения значений касательных напряжений воспользуемся формулами (4.1), (4.2) разбив сечение на 10 полос по высоте и ширине поперечного сечения (рис 4.3):

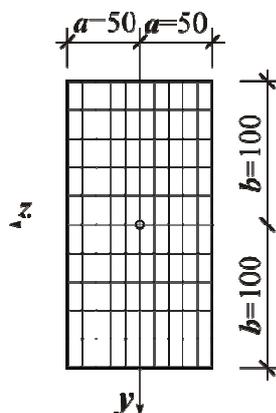


Рис.4.3. Разбиение прямоугольного поперечного сечения

С помощью разработанной программы, в системе компьютерной математики MATLAB, в центре каждого из полученных элементов определены касательные напряжения τ_{xz} , которые принимаются равномерно распределенными по площади элемента.

Касательные напряжения τ_{xz} приведены в таблице Г.1, Приложение Г.

Проверим соблюдение равновесия касательных напряжений, возникающих в направлении оси z при заданной относительной угловой деформации в соответствии с условиями:

$$\Sigma z = 0; \quad \Sigma \tau_{xz}^+ + \Sigma \tau_{xz}^- = 0. \quad \Sigma \tau_{xz}^+ + \Sigma \tau_{xz}^- = 2,465 - 2,465 = 0 \quad (4.3)$$

Равновесие касательных напряжений возникающих в направлении оси z обеспечено.

Рассмотрим кручение неоднородного сечения прямоугольного железобетонного элемента, приведенного на рис.4.4.

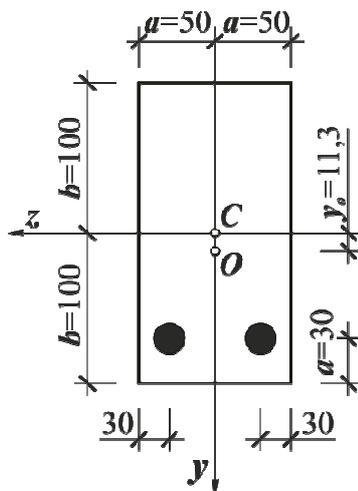


Рис.4.4. Неоднородное железобетонное прямоугольное поперечное сечение

При кручении неоднородных призматических элементов, имеющих прямоугольное поперечное сечение, центр кручения O не совпадает с центром тяжести сечения C .

Центр кручения приведенного сечения в работе Ю.А.Школы [145] предлагается определять по формулам (0.25), (0.26).

$$Y_0 = \frac{200 \times 0 \times 1260 + 2(3,14 \times 7 \times 7700)}{200 \times 1260 + 2(3,14 \times 7700)} = 1,13 \text{ см};$$

$$Z_0 = 0.$$

При кручении прямоугольных сечений, в соответствии с мембранной аналогией, предложенной Л.Прандтлем, задача сводится к нахождению прогибов равномерно нагруженной прямоугольной мембраны, при этом ее прогибы должны удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = -\frac{p}{q}, \quad (4.4)$$

где p - давление на единицу площади мембраны;

q - равномерное растяжение на единицу длины контура мембраны.

Условие симметрии относительно оси y прямоугольного поперечного сечения будут удовлетворены, если принять прогиб x в виде ряда

$$x = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} b_n Y_n \cos \frac{n\pi z}{2a}, \quad (4.5)$$

где b_n - постоянные коэффициенты;

Y_n - функции зависящие от координаты y .

Подставив ряд (4.5) в уравнение (4.4) и после преобразований, получим

$$Y_n = A \cdot \sinh \frac{n\pi y}{2b} + B \cdot \cosh \frac{n\pi y}{2b} + \frac{16pb^2}{qn^3 \pi^3 b_n} (-1)^{\frac{n-1}{2}}, \quad (4.6)$$

где A, B – постоянные интегрирования, которые должны удовлетворять граничным условиям.

Для несимметричного прямоугольного поперечного сечения должны выполняться следующие граничные условия

$$(Y_n)_{y=h_1} = 0; \quad (Y_n)_{y=h_2} = 0. \quad (4.7)$$

где, h_1, h_2 – расстояния от центра кручения до граней поперечного сечения по оси y .

Исходя из граничных условий (4.7) определяем постоянные интегрирования:

$$\begin{cases} A \sinh \frac{n\pi h_1}{2b} + B \cosh \frac{n\pi h_1}{2b} + \frac{16pb^2}{qn^3\pi^3 b_n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} = 0; \\ A \sinh \left(-\frac{n\pi h_2}{2b} \right) + B \cosh \left(-\frac{n\pi h_2}{2b} \right) + \frac{16pb^2}{qn^3\pi^3 b_n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} = 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

$$\begin{cases} A \sinh \frac{n\pi h_1}{2b} + B \cosh \frac{n\pi h_1}{2b} + \frac{16pb^2}{qn^3\pi^3 b_n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} = 0 \left| \frac{\sinh \frac{n\pi h_2}{2b}}{\sinh \frac{n\pi h_1}{2b}} \right.; \\ -A \sinh \frac{n\pi h_2}{2b} + B \cosh \frac{n\pi h_2}{2b} + \frac{16pb^2}{qn^3\pi^3 b_n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} = 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

Вывод формул представлен в Приложении Г.

Подставив полученные выражения постоянных интегрирования A, B в уравнение (4.6) получим функцию Y_n в виде

$$\begin{aligned} Y_n = & \frac{16pb^2}{qn^3\pi^3 b_n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\left(\cosh \frac{n\pi h_1}{2b} - \cosh \frac{n\pi h_2}{2b} \right) \sinh \frac{n\pi y}{2b}}{\sinh \frac{n\pi h}{2b}} - \\ & - \frac{16pb^2}{qn^3\pi^3 b_n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\left(\sinh \frac{n\pi h_2}{2b} + \sinh \frac{n\pi h_1}{2b} \right) \cosh \frac{n\pi y}{2b}}{\sinh \frac{n\pi h}{2b}} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{16pb^2}{qn^3\pi^3 b_n}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

После преобразований

$$Y_n = \frac{16pb^2}{qn^3\pi^3b_n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \times \left(1 + \frac{\left(\cosh \frac{n\pi h_1}{2b} - \cosh \frac{n\pi h_2}{2b} \right) \sinh \frac{n\pi y}{2b} - \left(\sinh \frac{n\pi h_2}{2b} + \sinh \frac{n\pi h_1}{2b} \right) \cosh \frac{n\pi y}{2b}}{\sinh \frac{n\pi h}{2b}} \right) \quad (4.11)$$

Общее выражение для изогнутой поверхности мембраны, согласно (4.5) можно представить в виде

$$x = \frac{16pb^2}{q\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cosh \frac{n\pi z}{2b} \times \left(1 + \frac{\left(\cosh \frac{n\pi h_1}{2b} - \cosh \frac{n\pi h_2}{2b} \right) \sinh \frac{n\pi y}{2b} - \left(\sinh \frac{n\pi h_2}{2b} + \sinh \frac{n\pi h_1}{2b} \right) \cosh \frac{n\pi y}{2b}}{\sinh \frac{n\pi h}{2b}} \right) \quad (4.12)$$

Заменяя p/q на $2G\theta$ получим выражение для функции напряжений

$$\varphi = \frac{32G\theta b^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cosh \frac{n\pi z}{2b} \times \left(1 + \frac{\left(\cosh \frac{n\pi h_1}{2b} - \cosh \frac{n\pi h_2}{2b} \right) \sinh \frac{n\pi y}{2b} - \left(\sinh \frac{n\pi h_2}{2b} + \sinh \frac{n\pi h_1}{2b} \right) \cosh \frac{n\pi y}{2b}}{\sinh \frac{n\pi h}{2b}} \right) \quad (4.13)$$

В результате дифференцирования получим формулы для определения касательных напряжений для несимметричного прямоугольного сечения:

$$\tau_{xy} = \frac{16G\theta b}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sinh \frac{n\pi z}{2b} \times \left(1 + \frac{\left(\cosh \frac{n\pi h_1}{2b} - \cosh \frac{n\pi h_2}{2b} \right) \sinh \frac{n\pi y}{2b} - \left(\sinh \frac{n\pi h_1}{2b} + \sinh \frac{n\pi h_2}{2b} \right) \cosh \frac{n\pi y}{2b}}{\sinh \frac{n\pi h}{2b}} \right); \quad (4.14)$$

$$\tau_{xz} = \frac{16G\theta b}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cosh \frac{n\pi z}{2b} \times$$

$$\times \frac{(\cosh \frac{n\pi h_1}{2b} - \cosh \frac{n\pi h_2}{2b}) \cosh \frac{n\pi y}{2b} - (\sinh \frac{n\pi h_1}{2b} + \sinh \frac{n\pi h_2}{2b}) \sinh \frac{n\pi y}{2b}}{\sinh \frac{n\pi h}{2b}}. \quad (4.15)$$

С использованием разработанной программы для сечения, представленного на рис. 4.4, в центре каждого из полученных элементов определены касательные напряжения, возникающие в направлении оси z , по формулам (4.14), (4.15).

Касательные напряжения τ_{xz} приведены в таблице Г.2, Приложение Г.

Проверим соблюдение равновесия касательных напряжений, возникающих в направлении оси z

$$\Sigma \tau_{xzb}^+ + \Sigma \tau_{xzb}^- + \Sigma \tau_{xzs}^+ + \Sigma \tau_{xzs}^- = 2,813 - 2,155 - 0,82 = 0,147 \neq 0$$

Равновесие касательных напряжений, возникающих в направлении оси z не обеспечено. В связи с этим необходимо уточнить положение центра кручения.

В соответствии с алгоритмом, блок-схема которого представлена в Приложении Г рис. Г.1...Г.4, разработана программа определения центра кручения, методом последовательных приближений.

В результате получены следующие значения координат центра кручения

$$Y_0 = 0,37 \tilde{m} ; Z_0 = 0.$$

Значения касательных напряжений τ_{xz} определим по формулам (4.14), (4.15), с использованием разработанной программы, с учетом уточненного положения центра кручения приведены в таблице Г.3, Приложение Г.

Проверим соблюдение равновесия касательных напряжений, возникающих в направлении оси z

$$\Sigma \tau_{xzb}^+ + \Sigma \tau_{xzb}^- + \Sigma \tau_{xzs}^+ + \Sigma \tau_{xzs}^- = 2,303 - 2,638 + 0,335 = 0$$

Равновесие касательных напряжений возникающих в направлении оси z обеспечено.

С помощью разработанной программы по формулам (4.14), (4.15) определения касательных напряжений для неоднородного железобетонного прямоугольного сечения (рис.4.4) построим поверхности распределения касательных напряжений рис. 4.5...4.7:

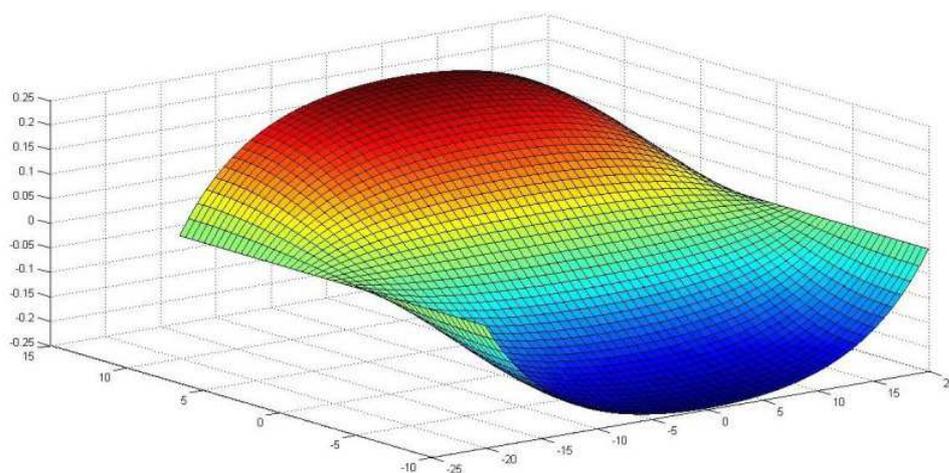


Рис.4.5. Поверхность распределения касательных напряжений τ_{xy} по площади поперечного сечения железобетонного элемента при кручении

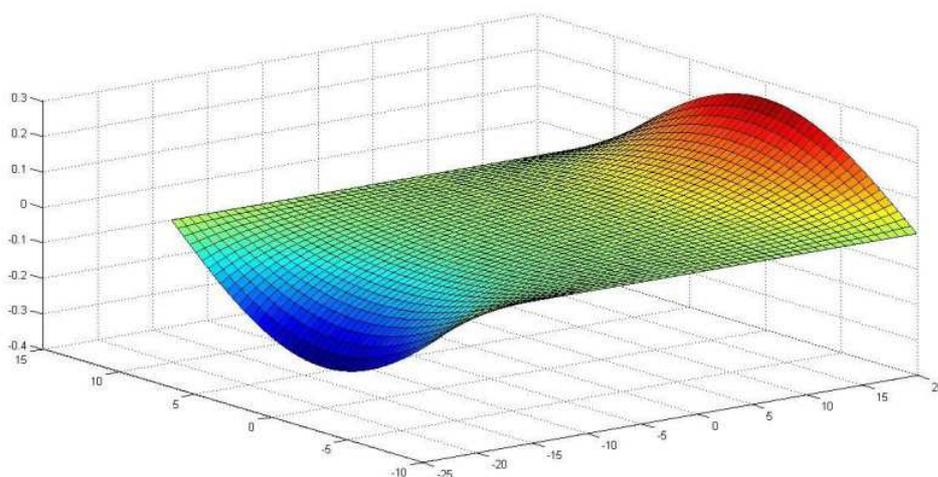


Рис.4.6. Поверхность распределения касательных напряжений τ_{xz} по площади поперечного сечения железобетонного элемента при кручении

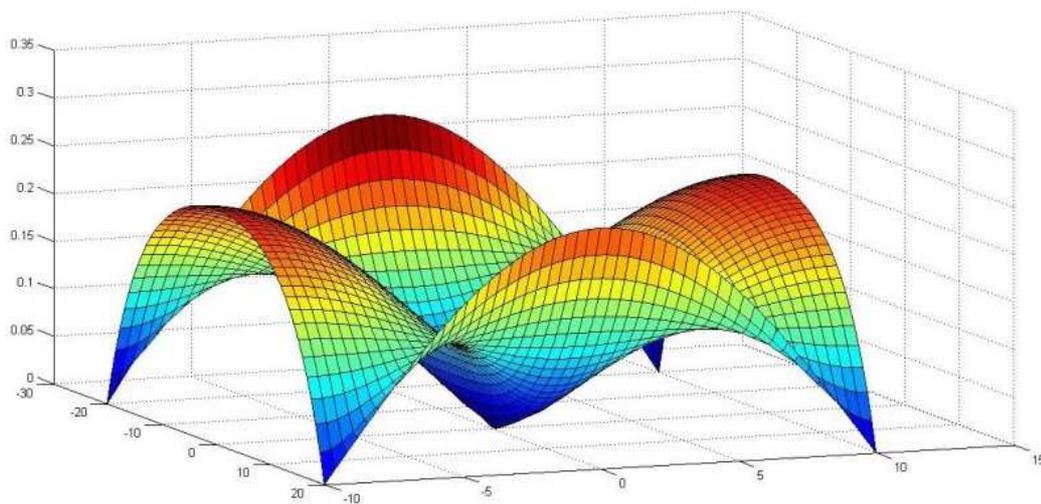


Рис.4.7. Суммарная поверхность распределения касательных напряжений по площади поперечного сечения железобетонного элемента при кручении

4.2. Основные предпосылки модели деформирования при кручении железобетонных прямоугольных сечений

Для построения диаграмм «крутящий момент – угол закручивания» сечений железобетонных элементов подверженных кручению, в работе принимаются следующие предпосылки:

1. Считается справедливой гипотеза Бернулли (гипотеза плоских сечений).
2. Связь между напряжениями и деформациями бетона и арматуры принимаются в виде диаграмм, приведенных на рис. 4.8, 4.11.
3. Принимается линейное распределение угловых деформаций по площади поперечного сечения.

Диаграмма сдвига бетона [72, 144, 145] представлена на рис. 4.8.

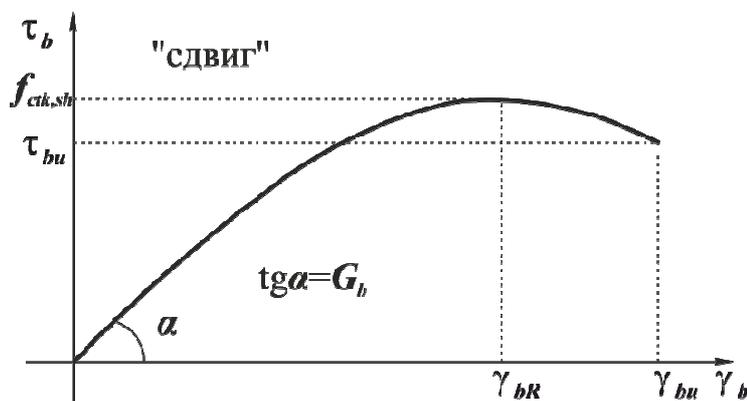


Рис. 4.8. Диаграмма деформирования бетона при сдвиге

где, $f_{ctk,sh}$ - расчетное сопротивление бетона на сдвиг $f_{ctk,sh} = 0.7\sqrt{f_{ct}f_{ctk}}$;
 γ_{br} - угловая деформация $\gamma_{br} = 2(1 + \mu_b)f_{ctk,sh} / (E_b v_b)$;
 γ_{bu} - предельная угловая деформация.

В соответствии с методикой построения диаграммы сдвига бетона с учетом нелинейных свойств, предлагаемой Ю.А.Школой [144, 145] приведенной в Разделе 1 составлен алгоритм, блок-схема которого представлена на рис. 4.9.

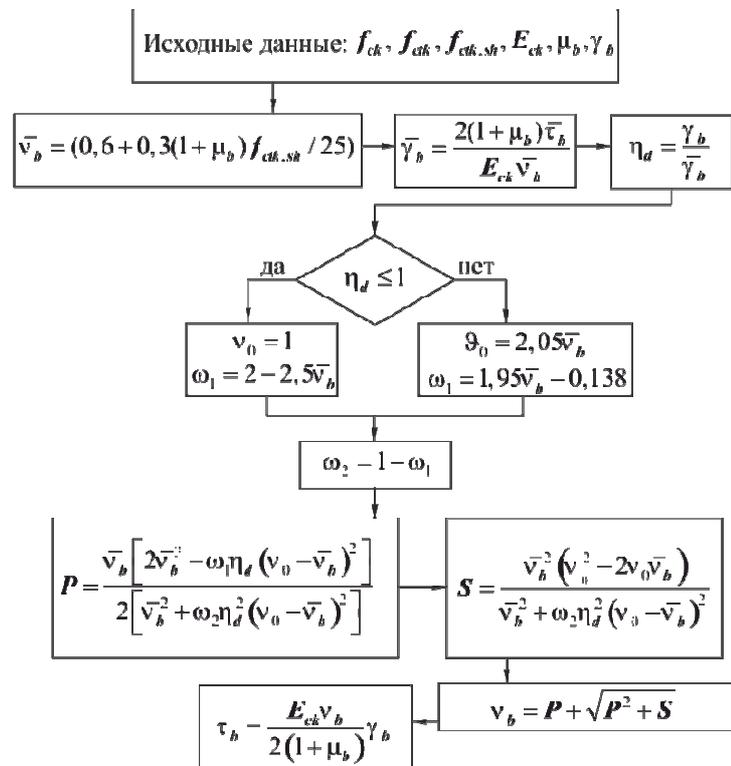


Рис. 4.9. Блок-схема построения диаграммы сдвига бетона

В соответствии с приведенной блок-схемой в системе компьютерной математики MATLAB разработана программа для построения диаграмм «касательные напряжения – угловая деформация» для бетонов разных классов.

Диаграммы «касательные напряжения – угловая деформация» полученные при помощи разработанной программы для бетонов разных классов, приведены на рис. 4.10.

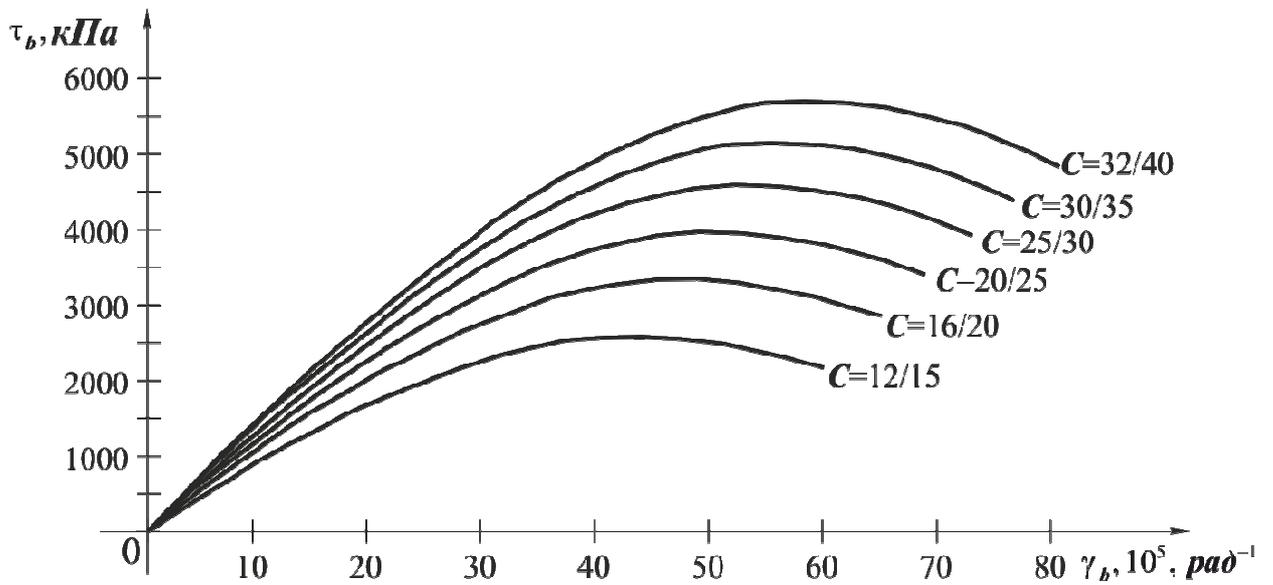


Рис. 4.10. Диаграммы «касательные напряжения – угловая деформация»

Диаграмма сдвига арматуры представлена на рис. 4.11.

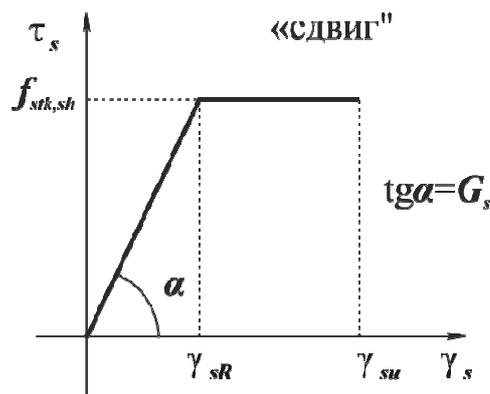


Рис. 4.11. Диаграмма сдвига арматуры

где, $f_{stk,sh}$ - расчетное сопротивление арматуры на сдвиг $f_{stk,sh} = \gamma_{sR} G$;

γ_{sR} - угловая деформация $\gamma_{sR} = \left(f_{stk} / E_s - (1 - 2\mu_s) f_{stk} / (3E_s) \right)^{1/3}$;

γ_{su} - предельная угловая деформации

$$\gamma_{su} = \left(1,8 f_{stk} / E_s - (1 - 2\mu_s) f_{stk} / (3E_s) \right)^{1/3}.$$

Зависимость «напряжение-деформация» при сдвиге арматуры описывается при помощи линейной функции, имеющей вид:

$$\tau_{xy,s}^i = \begin{cases} G_s \gamma_{xy,s}, & \text{if } 0 < \gamma_{xy,s} < \gamma_{xy,sR}; \\ f_{stk,sh}, & \text{if } \gamma_{xy,sR} \leq \gamma_{xy,s} < \gamma_{xy,su}. \end{cases}$$

$$\tau_{xz,s}^i = \begin{cases} G_s \gamma_{xz,s}, & \text{if } 0 < \gamma_{xz,s} < \gamma_{xz,sR}; \\ f_{stk,sh}, & \text{if } \gamma_{xz,sR} \leq \gamma_{xz,s} < \gamma_{xz,su}. \end{cases} \quad (4.16)$$

4.3. Построение диаграмм «крутящий момент – угол закручивания» с использованием шагово-итерационной методики для железобетонных элементов прямоугольного поперечного сечения

Предлагается следующий алгоритм построения диаграммы «крутящий момент – угол закручивания» с использованием шагово-итерационной методики.

1. Исходными данными являются:
 - прочность бетона на сжатие f_{ck} , растяжение f_{ctk} и срез $f_{ctk,sh}$;
 - начальный модуль упругости бетона E_{ck} ;
 - прочность арматурной стали f_{tk} ;
 - модуль упругости арматурной стали E_s ;
 - размеры сечения h и b ;
 - площади арматурных стержней A_s и A_s' ;
 - координаты центров тяжести арматурных стержней Y_s и Z_s ;
 - приращение угла закручивания $\Delta\theta$.
2. Определяются характеристики приведенного сечения A_{red} , $S_{red,y}$.
3. Определяется предельный крутящий момент [73]:

$$T_u = (0,88 + 0,08h / b) (f_{ctk} W_{T,pl}), \quad W_{T,pl} = \sqrt{2bh^2} / (Th^2).$$
4. Определяется центр тяжести приведенного сечения:

$$Y_{kr} = \frac{S_{z,red}}{A_{red}}; Z_{kr} = \frac{S_{y,red}}{A_{red}}.$$

На первом этапе принимается, что центр кручения совпадает с центром тяжести приведенного сечения.

5. Поперечное сечение разбивается на n^2 прямоугольных элементов с размерами: $db = \frac{b}{n}$; $dh = \frac{h}{n}$.

6. На первом этапе принимается угол закручивания сечения равным $\theta_1 = \Delta\theta$, на последующих этапах - $\theta_i = \theta_{i-1} + \Delta\theta$.

7. В центре тяжести каждого прямоугольного элемента определяются значения угловых деформаций по формулам (4.17), (4.18):

$$\gamma_{xy,b}^i = \frac{8\theta b}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sinh \frac{n\pi z}{b} \times \left(1 + \frac{(\cosh \frac{n\pi h_1}{b} - \cosh \frac{n\pi h_2}{b}) \sinh \frac{n\pi y}{b} - (\sinh \frac{n\pi h_1}{b} + \sinh \frac{n\pi h_2}{b}) \cosh \frac{n\pi y}{b}}{\sinh \frac{n\pi h}{b}} \right); \quad (4.17)$$

$$\gamma_{xz,b}^i = \frac{8\theta b}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cosh \frac{n\pi z}{b} \times \frac{(\cosh \frac{n\pi h_1}{b} - \cosh \frac{n\pi h_2}{b}) \cosh \frac{n\pi y}{b} - (\sinh \frac{n\pi h_1}{b} + \sinh \frac{n\pi h_2}{b}) \sinh \frac{n\pi y}{b}}{\sinh \frac{n\pi h}{b}}. \quad (4.18)$$

8. В соответствии с блок-схемой, приведенной на рис. 4.9 в центре тяжести каждого прямоугольного элемента определяются значения касательных напряжений $\tau_{xy,b}^i$, $\tau_{xz,b}^i$.

9. В центре тяжести арматурных стержней определяются значения угловых деформаций $\gamma_{xy,s}^i$, $\gamma_{xz,s}^i$ по формулам (4.17), (4.18).

10. В центре тяжести арматурных стержней определяются значения касательных напряжений (4.16).

11. Проверяется выполнение условия равновесия касательных напряжений

$$\sum \tau_{xy,b}^i A_b^i + \sum \tau_{xy,s}^i A_s^i = 0.$$

При выполнении условия переходим к п. 13.

12. Если условие не выполняется, то необходимо уточнить положение центра кручения и повторить расчет по пп. 7 ... 11 до достижения заданной точности, в соответствии с предложениями В.Е.Бабича [20]:

– если сумма касательных напряжений больше нуля, то центр кручения на последующей итерации принимается $Y_{kr}^k = 0,98Y_{kr}^{k-1}$.

– если сумма касательных напряжений меньше нуля, то центр кручения на последующей итерации принимается $Y_{kr}^k = 1,02Y_{kr}^{k-1}$.

13. Определяется значение крутящего момента воспринимаемого бетонным сечением

$$T_b^i = \left(\sum \tau_{xy,b}^i z_b^i - \sum \tau_{xz,b}^i y_b^i \right) A_b^i.$$

14. Определяется значение крутящего момента, воспринимаемого арматурными стержнями

$$T_s^i = \left(\sum \tau_{xy,s}^i z_s^i - \sum \tau_{xz,s}^i y_s^i \right) A_s^i.$$

15. Определяется крутящий момент, воспринимаемый приведенным поперечным сечением

$$T = T_b + T_s.$$

16. Расчет по пп. 6...15 повторяется до тех пор, пока значения крутящих моментов не достигнут предельных $T > T_u$.

На рис. 4.12, приведена блок-схема описанного выше алгоритма построения диаграммы «крутящий момент – угол закручивания» с использованием шагово-итерационной методики.

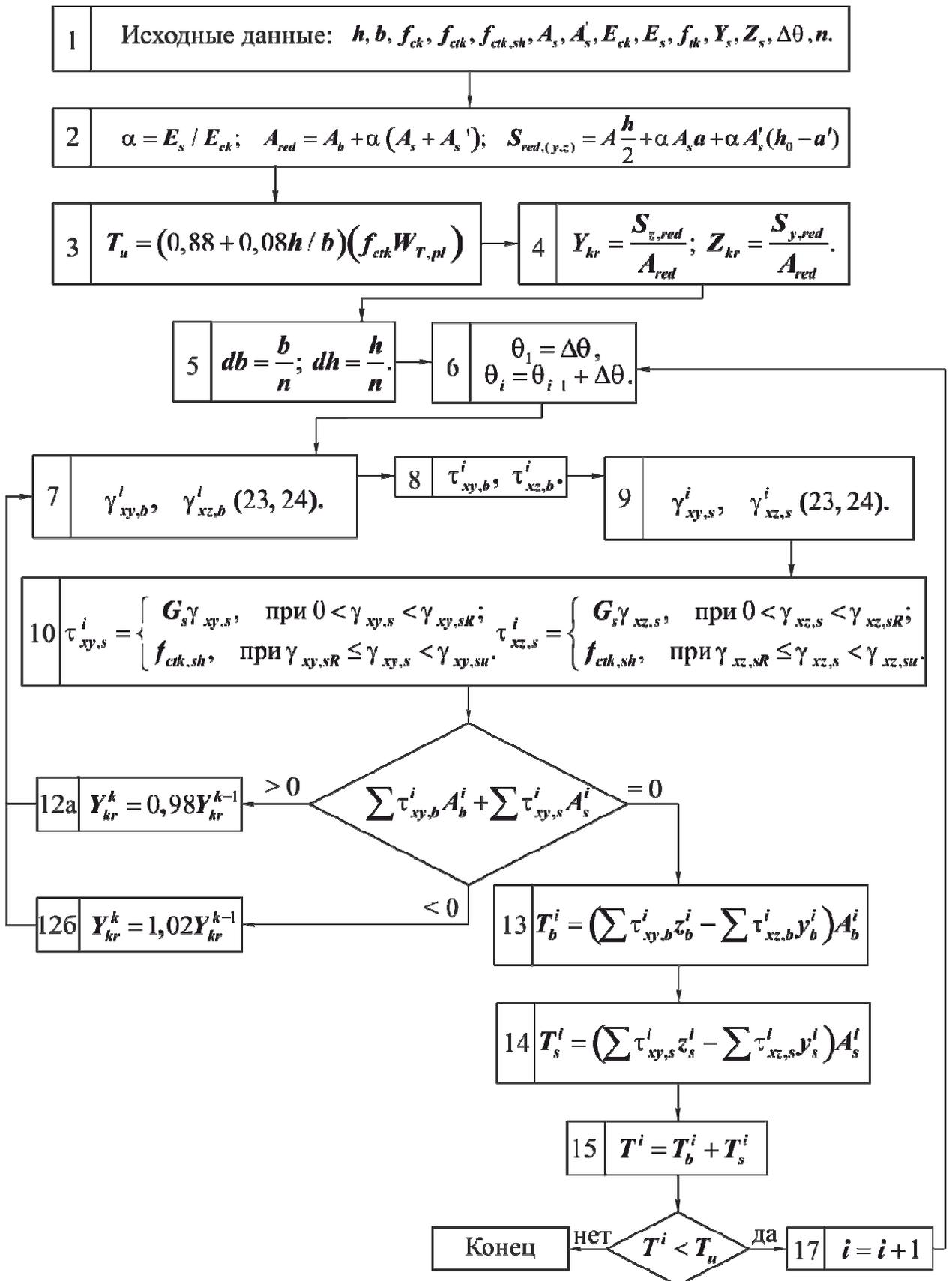


Рис. 4.12. Блок-схема построения диаграммы «крутящий момент – угол закручивания»

В соответствии с приведенной блок-схемой, в системе компьютерной математики MATLAB разработана программа для построения диаграмм «крутящий момент – угол закручивания» для прямоугольных сечений железобетонных элементов подверженных кручению.

В экспериментах Ю.В.Чиненкова [137] проводились исследования железобетонной балки, на кручение со следующими размерами и характеристиками материалов: $b \times h = 20 \times 30,5$ см, прочность бетона $f_{ck} = 9$ МПа, $f_{ck} = 10,8$ МПа, $f_{ck} = 24,5$ МПа, $f_{ck} = 38$ МПа армирование растянутой и сжатой зоны $2\varnothing 20$ класса А-400С с площадью $A_s = 6,28$ см², коэффициент армирования $\rho_I = 2,05$ %.

Предельное значение крутящего момента $T_u = 4,5$ кНм при прочности бетона $f_{ck} = 10,8$ МПа и $T_u = 8,5$ кНм при прочности бетона $f_{ck} = 24,5$ МПа.

Диаграммы «крутящий момент – угол закручивания», построенные по предлагаемой методике и экспериментальным значениям показаны на рис. 4.13, 4.14.

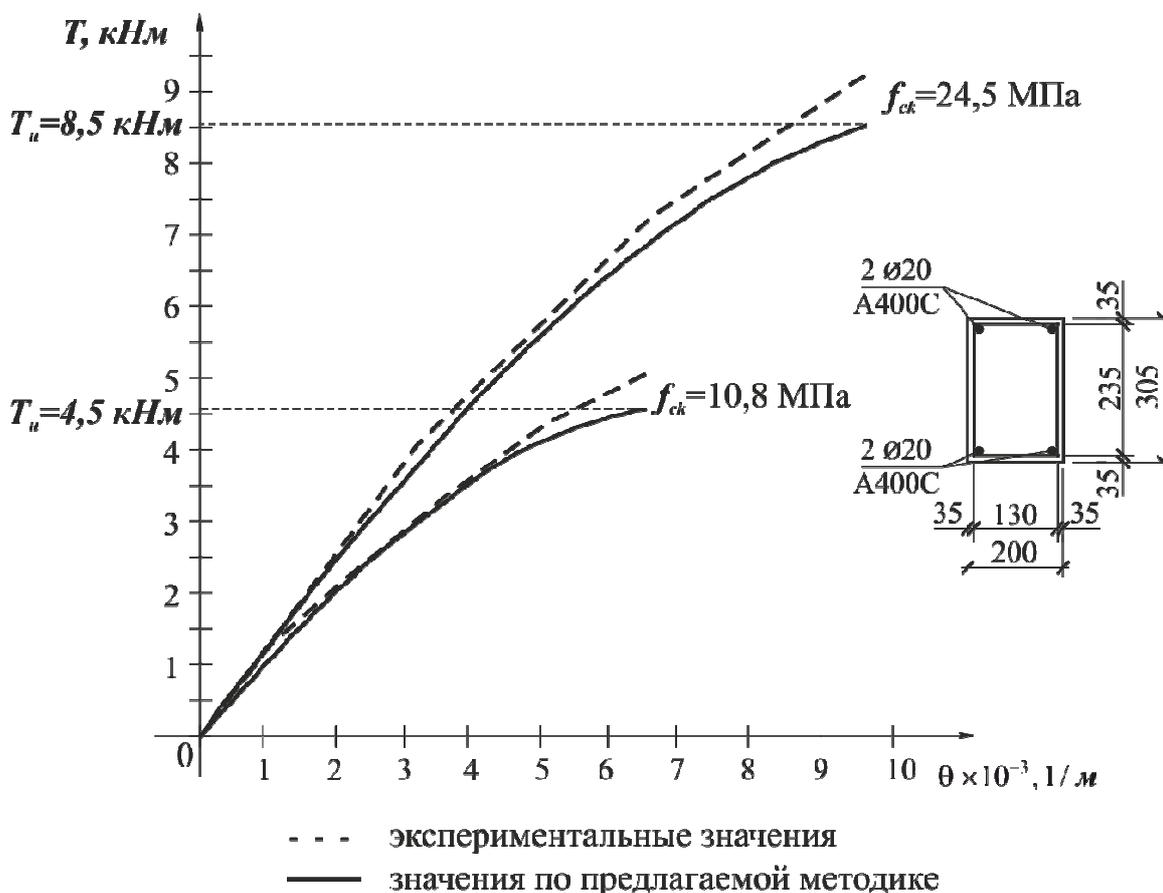


Рис. 4.13. Диаграммы «крутящий момент – угол закручивания»

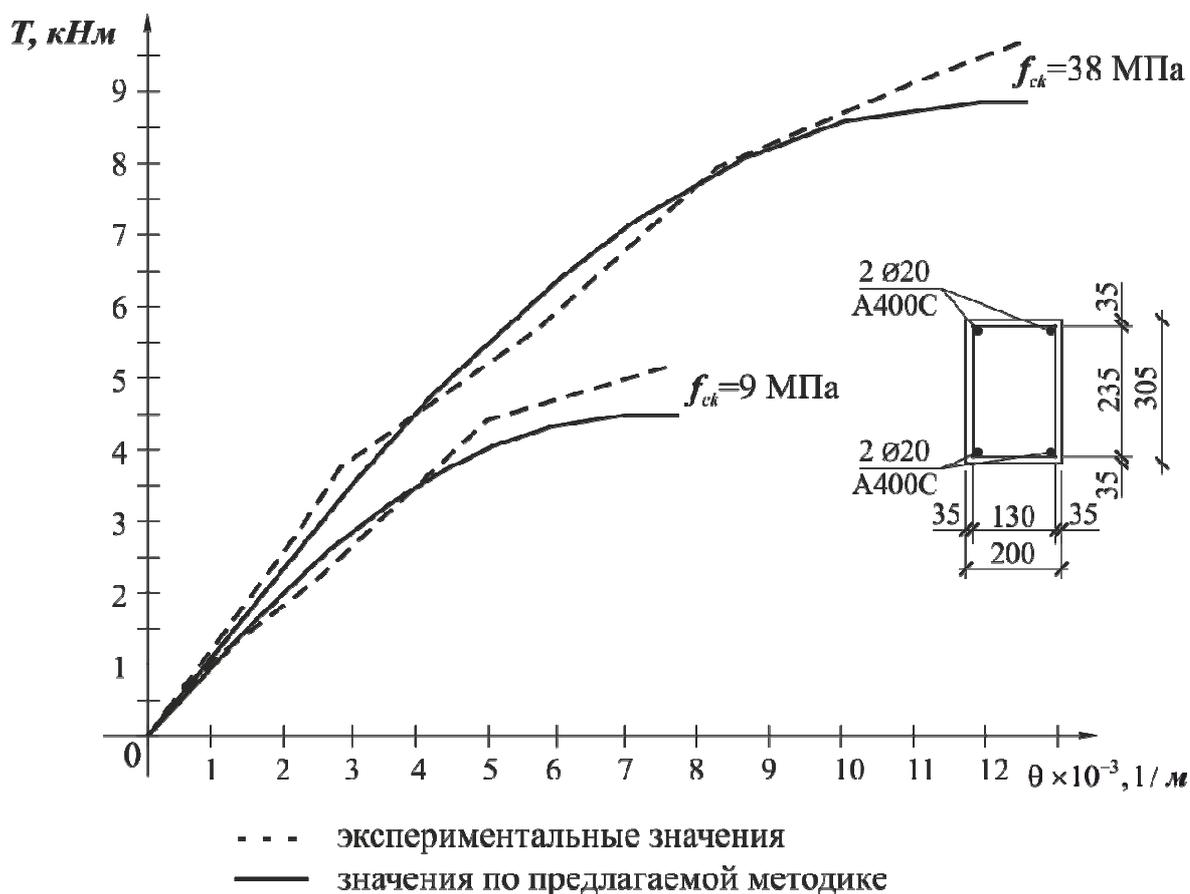


Рис. 4.14. Диаграммы «крутящий момент – угол закручивания»

В таблицах Г.4 и Г.5 (Приложение Г) приведено сравнение теоретических значений полученных по предлагаемой методике с экспериментальными значениями, статистическая оценка распределения отношения теоретических и экспериментальных крутящих моментов T_{exp}/T_{teor} .

4.4. Анализ изменения усилий в элементах пространственной рамной конструкции при поэтапном нагружении

Рассмотрим монолитный железобетонный пространственный каркас пятиэтажного четырехшагового и двухпролетного жилого здания с плоской кровлей на действие вертикальной нагрузки при поэтапном нагружении, без

учета ветровых нагрузок. Перекрытие предусматривается сборное железобетонное из многопустотных плит.

Высота этажа составляет 3,0 м, длина пролета – 6,0 м, шаг – 6,0 м. Размеры здания в осях 24,0×12,0. Общая высота здания 54 м.

Армирование всех элементов каркаса принимается из стержневой арматуры класса А400С с расчетным сопротивлением $f_t = 365$ МПа и модулем упругости $E_s = 210000$ МПа.

Для стоек принимается бетон класса С25/30 с призменной прочностью $f_{cd} = 17$ МПа, для ригелей – бетон класса С25/30 с призменной прочностью $f_{cd} = 17$ МПа.

Подбор арматуры в элементах пространственной рамной конструкции выполнен по результатам предварительного расчета, по расчетным сочетаниям нагрузок в предположении работы элементов в упругой стадии.

Принимаем следующие размеры сечения продольных и поперечных ригелей: высота $h_p = 50$ см, ширина $b_p = 40$ см.

Сечение стоек принимается с размерами $h_c \times b_c = 40 \times 40$ см.

Согласно ДБН В.1.2-2:2006 Нагрузки и воздействия [51] для г. Одесса производится сбор нагрузок. Сбор нагрузок приведен в Приложение Г.

Нагрузки на продольные ригели принимаются по таблице Г.6. (Приложение Г).

Нагрузка на поперечные ригели принимаются по таблице Г.7.

Нагрузка на ригели покрытия принимается по таблице Г.8. Ветровые нагрузки не учитываются.

Расчетная схема монолитного железобетонного каркаса девятиэтажного четырехшагового и двухпролетного жилого здания с плоской кровлей для расчета на действие вертикальной нагрузки, без учета ветровых нагрузок представлена на рис. 4.15.

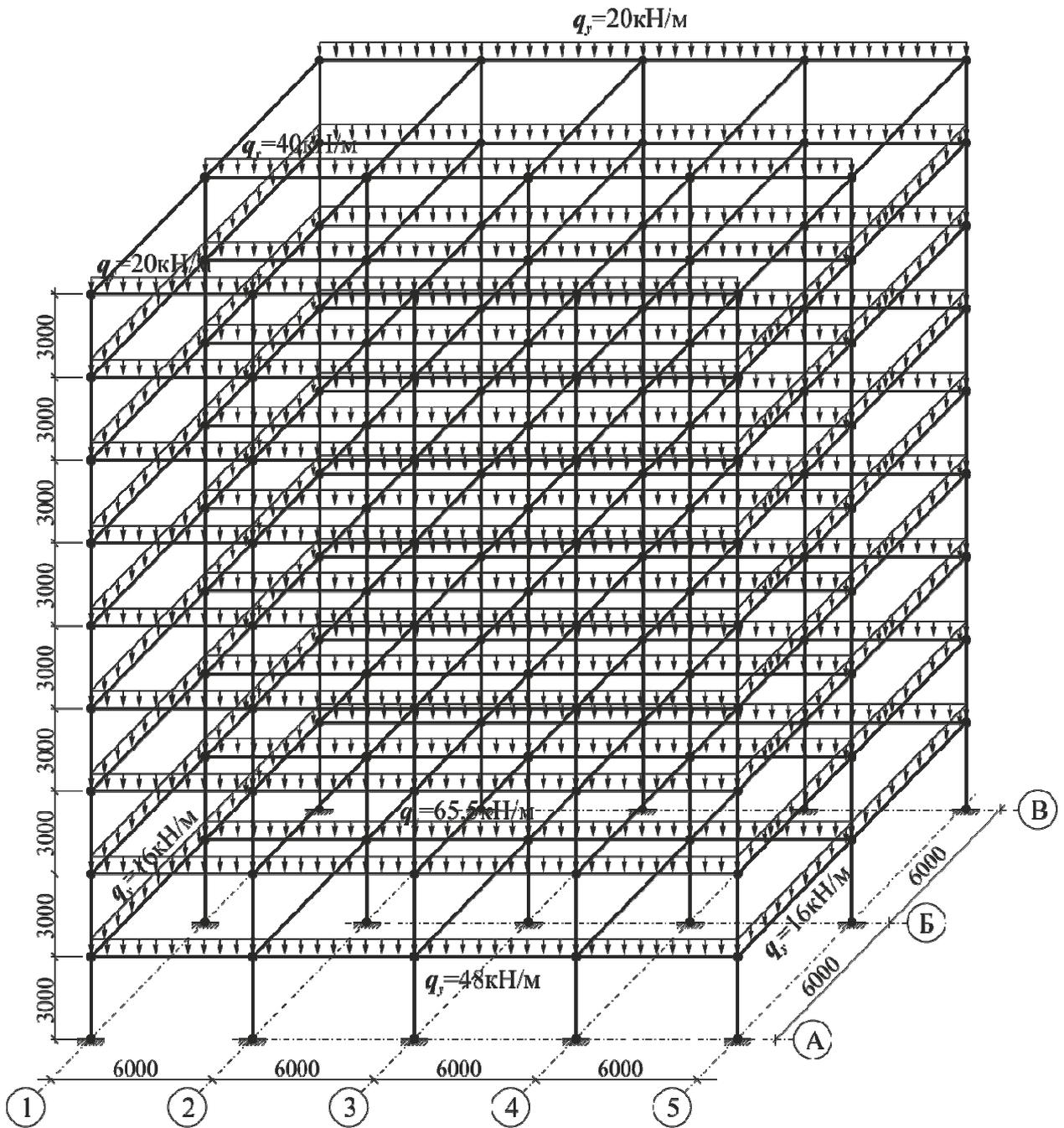


Рис. 4.15. Расчетная схема девятиэтажного четырехшагового и двухпролетного железобетонного каркаса на действие постоянной и полезной нагрузки

По значениям внутренних усилий, полученным в результате предварительного расчета, принимается следующее армирование (рис. 4.16).

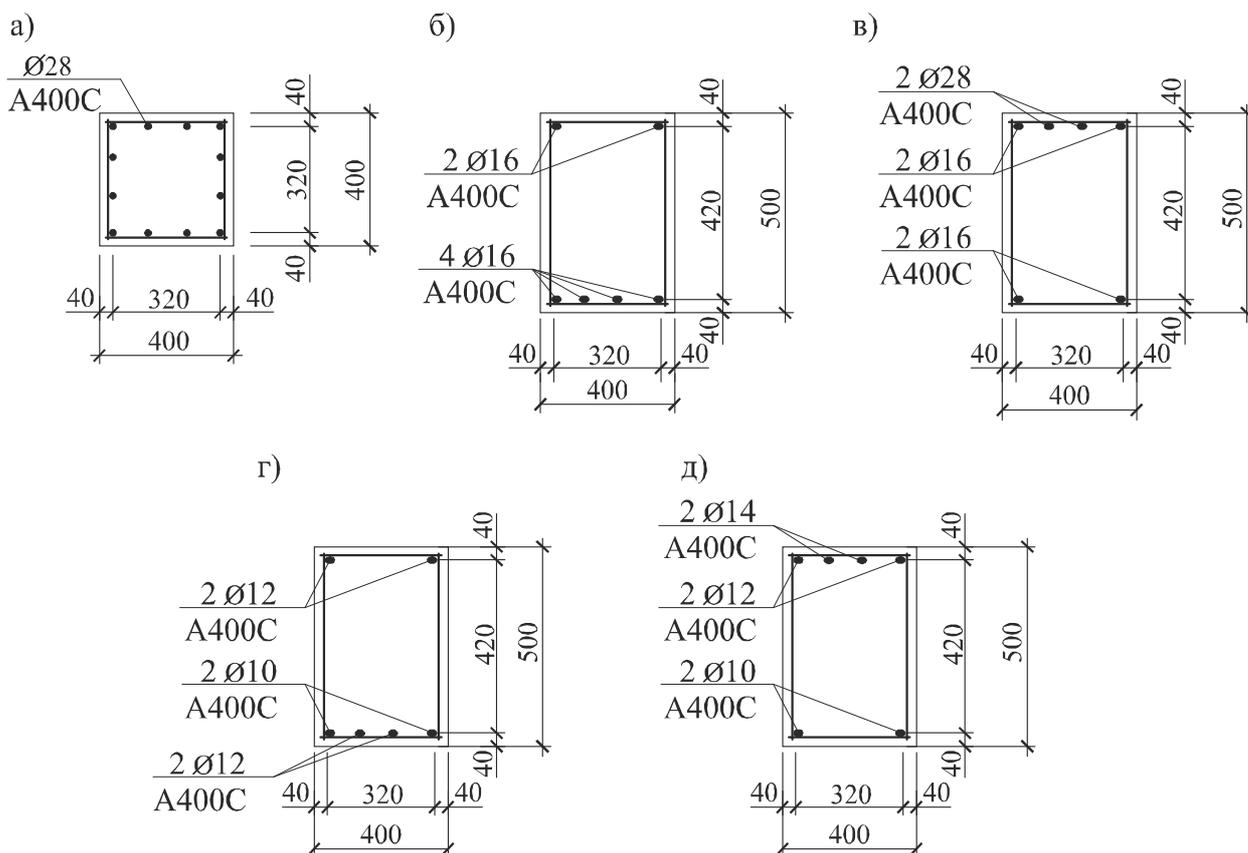


Рис. 4.16. Армирование элементов железобетонного пространственного рамного каркаса:

а) – стоек; б) – продольных ригелей в пролете; в) – продольных ригелей в опорных зонах; г) – поперечных ригелей в пролете; д) – поперечных ригелей в опорных зонах.

– армирование стоек принимается симметричным (4x4) Ø28 А400С с площадью $A_s = A_s' = 24,63 \text{ см}^2$;

– продольный ригель в пролете армируется рабочей арматурой 4Ø16 А400С с площадью $A_s = 8,04 \text{ см}^2$ и конструктивной арматурой 2Ø16 А400С с площадью $A_s = 4,02 \text{ см}^2$;

– продольный ригель в опорных зонах на расстоянии $l/4$ от узлов армируется рабочей арматурой 2Ø16 и 2Ø28 А400С с общей площадью $A_s = 16,34 \text{ см}^2$ и конструктивной арматурой 2Ø16 А400С с площадью $A_s = 4,02 \text{ см}^2$;

– поперечный ригель в пролете армируется рабочей арматурой 2Ø10 и 2Ø12 А400С с площадью $A_s = 3,83 \text{ см}^2$ и конструктивной арматурой 2Ø12 А400С с площадью $A_s = 2,26 \text{ см}^2$;

– поперечный ригель в опорных зонах на расстоянии $l/4$ от узлов армируется рабочей арматурой 2Ø12 и 2Ø14 А400С с общей площадью $A_s = 5,34 \text{ см}^2$ и конструктивной арматурой 2Ø10 А400С с площадью $A_s = 1,57 \text{ см}^2$.

Рассмотрим изменение напряженно-деформированного состояния элементов фрагмента девятиэтажного железобетонного пространственного каркаса в осях 1-3, А-В, рис. 4.17, при поэтапном нагружении.

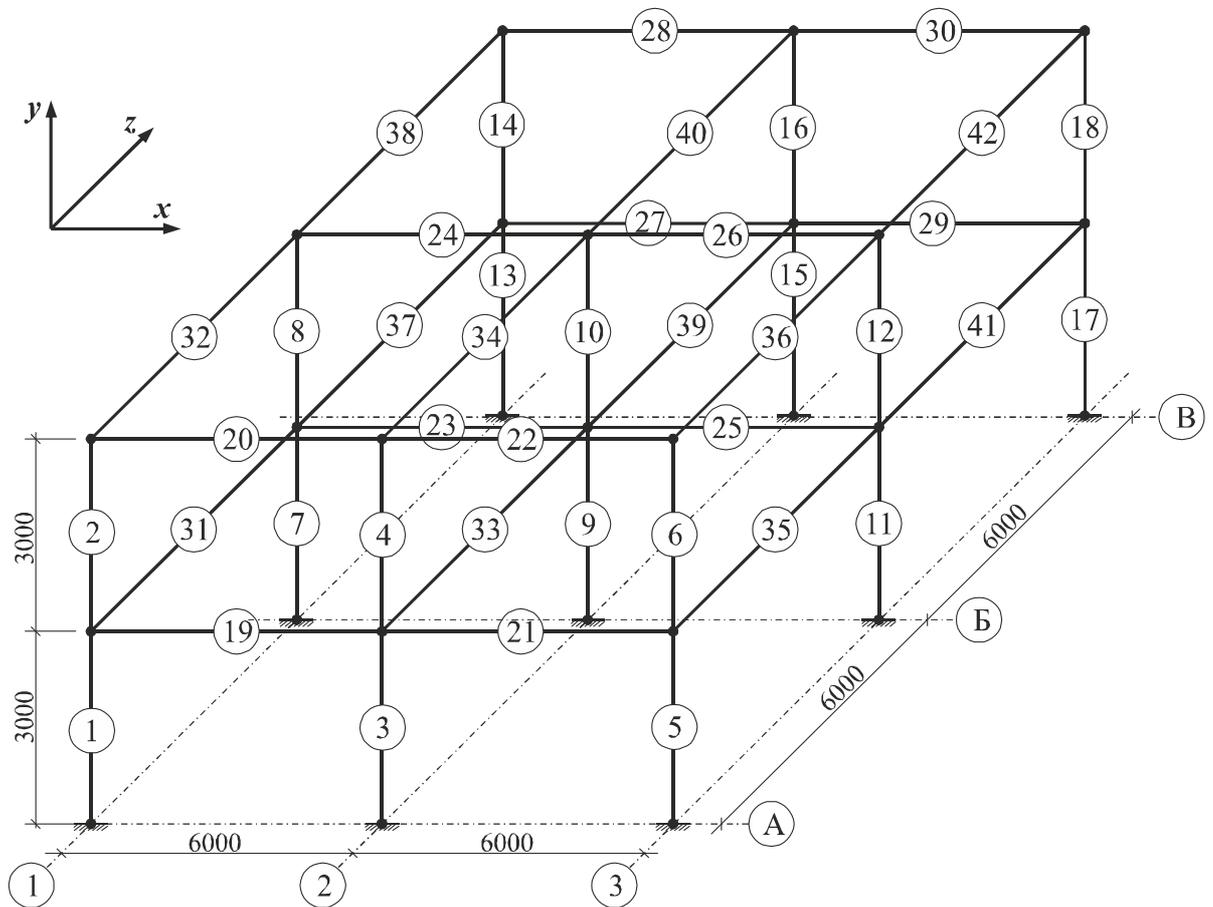


Рис. 4.17. Фрагмент девятиэтажного железобетонного пространственного рамного каркаса

Этапы нагружения пространственной рамы и значения изгибающих, крутящих моментов, возникающих на каждом этапе нагружения в продольном ригели 23 представлены в таблице Г.9, Приложение Г.

Момент трещинообразования для продольных ригелей в пролете – $M_{crc} = 49 \text{ кНм}$, в опорных зонах – $M_{crc} = 55 \text{ кНм}$.

Предельный изгибающий момент для продольных ригелей в пролете – $M_u = 121 \text{ кНм}$, в опорных зонах – $M_{cr} = 235 \text{ кНм}$.

Диаграмма изменения изгибающих и крутящих моментов при поэтапном нагружении в продольном ригели 23 представлена на рис. 4.18.

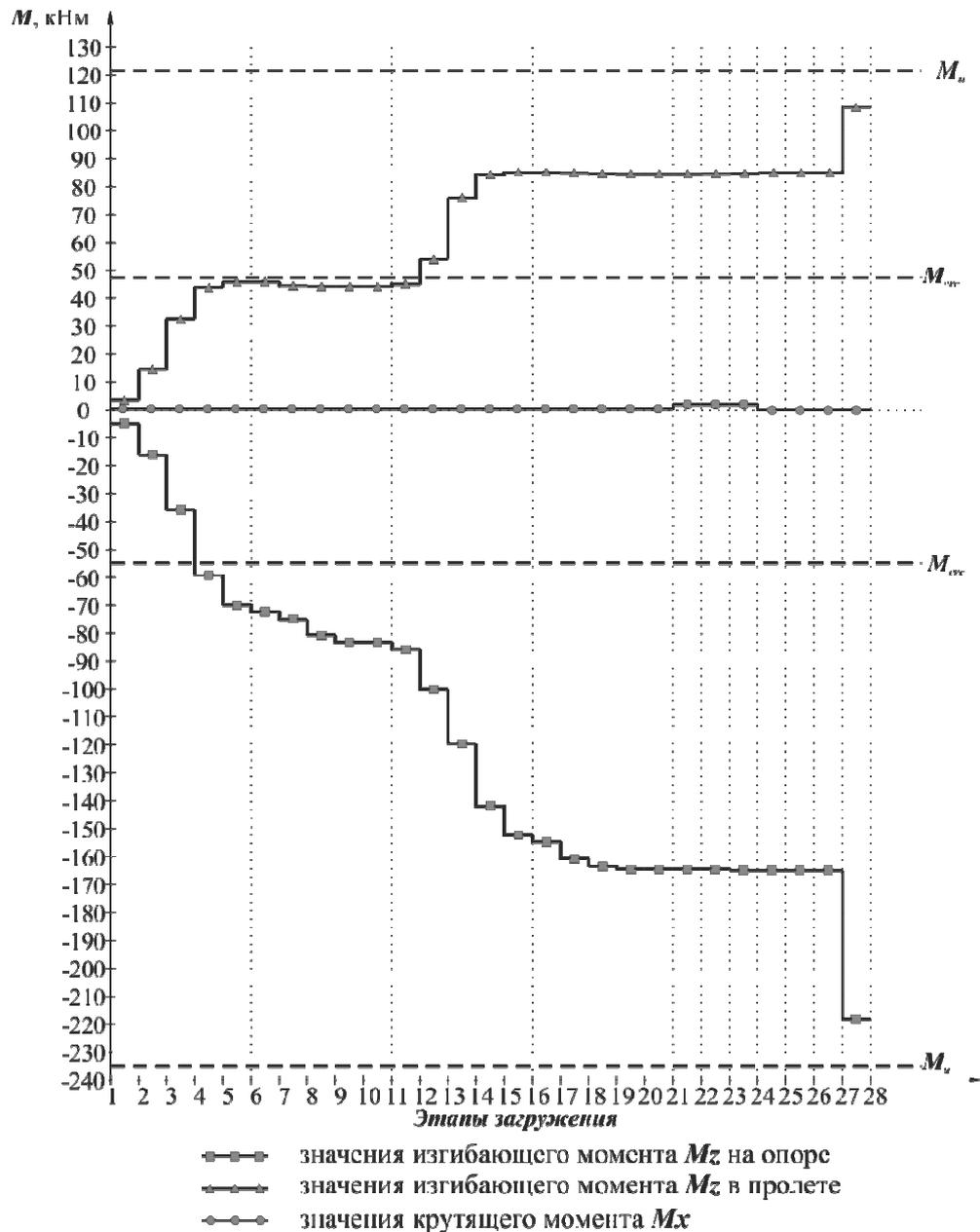


Рис. 4.18. Диаграмма изменений изгибающих и крутящих моментов в опорном и пролетном сечениях продольного ригеля 23

Значения изгибающих и крутящих моментов, возникающих на каждом этапе загрузки в поперечном ригели 37 представлены в таблице Г.10, Приложение Г.

Момент трещинообразования для поперечных ригелей в пролете – $M_{crc} = 43 \text{ кНм}$, в опорных зонах – $M_{crc} = 47 \text{ кНм}$.

Предельный изгибающий момент для поперечных ригелей в пролете – $M_u = 61 \text{ кНм}$, в опорных зонах – $M_{crc} = 83 \text{ кНм}$.

Диаграмма изменения изгибающих и крутящих моментов при поэтапном загрузении в поперечном ригели 37 представлена на рис. 4.19.

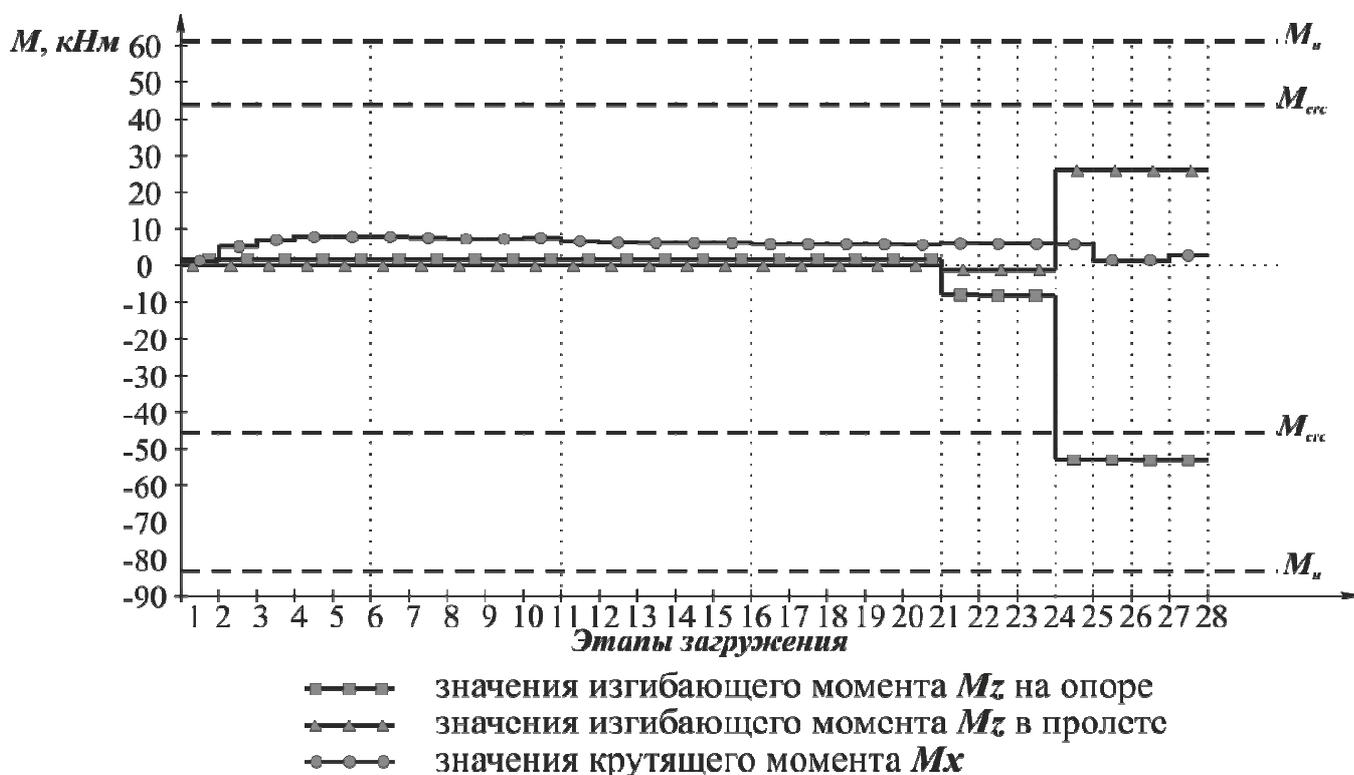


Рис. 4.19. Диаграмма изменения изгибающих и крутящих моментов в опорном и пролетном сечениях поперечного ригеля 37

При анализе изменения усилий в элементах многоэтажной многопролетной пространственной рамной конструкции при поэтапном загрузении можно выделить три характерные группы элементов:

1. Стойки, где наибольшее значение имеет продольная сила N . Изгибающие моменты M_z , M_y и крутящий момент M_x незначительны.

2. Ригели, где наибольшее значение имеет изгибающий момент M_z . Продольная сила N , изгибающий момент M_y и крутящий момент незначительны. Соотношение крутящего момента M_x к изгибающему M_z , при максимальных значениях внутренних усилий составляет 1/55.

3. Ригели, где наибольшее значение имеет крутящий момент M_x . Продольная сила N и изгибающие моменты M_z , M_y и незначительны.

Соотношение крутящего момента M_x к изгибающему моменту M_z , при максимальных значениях внутренних усилий составляет - 1/10.

4.5. Системы уравнений для определения напряженно-деформированного состояния конструктивных элементов

В общем случае напряженного состояния при произвольной ориентации элементарного параллелепипеда, выделенного в окрестности точки нагруженного элемента, на его гранях действуют шесть независимых компонентов тензора напряжений - σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{zx} , τ_{yz} [121].

Кубическое уравнение главных нормальных напряжений

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0; \quad (4.19)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_x; \\ I_2 &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = -\tau_{xy}^2 - \tau_{zx}^2; \\ I_3 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 = 0; \end{aligned} \quad (4.20)$$

Принимая напряжения - σ_y , σ_z , τ_{yz} равными нулю, уравнение главных нормальных напряжений запишем виде

$$\sigma^3 - \sigma_x \sigma^2 - (\tau_{xy}^2 + \tau_{zx}^2) \sigma = 0; \quad (4.21)$$

После преобразований получим уравнение главных нормальных напряжений

$$\sigma(\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma - (\tau_{xy}^2 + \tau_{zx}^2)) = 0; \quad (4.22)$$

Корни уравнения:

$$\begin{aligned} \sigma_{1,3} &= \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{\sigma_x \pm \sqrt{\sigma_x^2 + 4(\tau_{xy}^2 + \tau_{zx}^2)}}{2} = \\ &= \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + (\tau_{xy}^2 + \tau_{zx}^2)}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\sigma_2 = 0$$

Полученное уравнение (4.23), позволяет определять главные нормальные напряжения с учетом касательных напряжений в характерных сечениях железобетонных элементов.

Рассмотрим систему уравнений с тремя неизвестными направляющими косинусами $l_{1,3}$, $m_{1,3}$, $n_{1,3}$, которые определяют положение главных площадок [121]

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_{1,3})l_{1,3} + \tau_{yx}m_{1,3} + \tau_{zx}n_{1,3} = 0 \\ \tau_{xy}l_{1,3} + (\sigma_y - \sigma_{1,3})m_{1,3} + \tau_{zy}n_{1,3} = 0; \\ \tau_{xz}l_{1,3} + \tau_{yz}m_{1,3} + (\sigma_z - \sigma_{1,3})n_{1,3} = 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

Нулевые решения системы уравнений (4.24) невозможны в силу известного соотношения между направляющими косинусами

$$l_{1,3}^2 + m_{1,3}^2 + n_{1,3}^2 = 1 \quad (4.25)$$

Принимая напряжения - σ_y , σ_z , τ_{yz} равными нулю, систему уравнений (4.24) запишем в виде

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_{1,3})l_{1,3} + \tau_{yx}m_{1,3} + \tau_{zx}n_{1,3} = 0 \\ \tau_{xy}l_{1,3} - \sigma_{1,3}m_{1,3} = 0 \\ \tau_{xz}l_{1,3} - \sigma_{1,3}n_{1,3} = 0 \end{cases}; \quad (4.26)$$

Из последних уравнений системы уравнений (4.26) выразим неизвестные $m_{1,3}$, $n_{1,3}$ в виде:

$$m_{1,3} = \frac{\tau_{xy}l_{1,3}}{\sigma_{1,3}}; \quad n_{1,3} = \frac{\tau_{xz}l_{1,3}}{\sigma_{1,3}}; \quad (4.27)$$

Подставляя уравнения (4.27) в уравнение (4.25) получим

$$l_{1,3}^2 + \frac{\tau_{xy}^2}{\sigma_{1,3}^2} l_{1,3}^2 + \frac{\tau_{xz}^2}{\sigma_{1,3}^2} l_{1,3}^2 = 1; \quad (4.28)$$

Решая уравнение (4.28) найдем $l_{1,3}$

$$\begin{aligned} l_{1,3} &= \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\tau_{xy}^2}{\sigma_{1,3}^2} + \frac{\tau_{xz}^2}{\sigma_{1,3}^2}}} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}{\sigma_{1,3}^2}}} = \\ &= \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma_{1,3}^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}{\sigma_{1,3}^2}}} = \pm \frac{\sigma_{1,3}}{\sqrt{\sigma_{1,3}^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}}; \end{aligned} \quad (4.29)$$

Подставляем уравнение (4.29) в уравнение (4.27):

$$m_{1,3} = \pm \frac{\tau_{xy}}{\sigma_{1,3}} \frac{\sigma_{1,3}}{\sqrt{\sigma_{1,3}^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}} = \pm \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{\sigma_{1,3}^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}}; \quad (4.30)$$

$$n_{1,3} = \pm \frac{\tau_{xz}}{\sigma_{1,3}} \frac{\sigma_{1,3}}{\sqrt{\sigma_{1,3}^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}} = \pm \frac{\tau_{xz}}{\sqrt{\sigma_{1,3}^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}}. \quad (4.31)$$

Полученные уравнения (4.29), (4.30), (4.31) позволяют находить углы наклона главных площадок в характерных сечениях железобетонных элементов.

4.6. Анализ напряженного состояния конструктивных элементов

Рассмотрим распределение нормальных напряжений в характерных сечениях (опорные, пролетные и $1/4$ длины) продольного ригеля 23 в предельном состоянии в предположении его упругой работы.

Эпюры нормальных напряжений σ_x^N (МПа), представлены на рис.4.20.

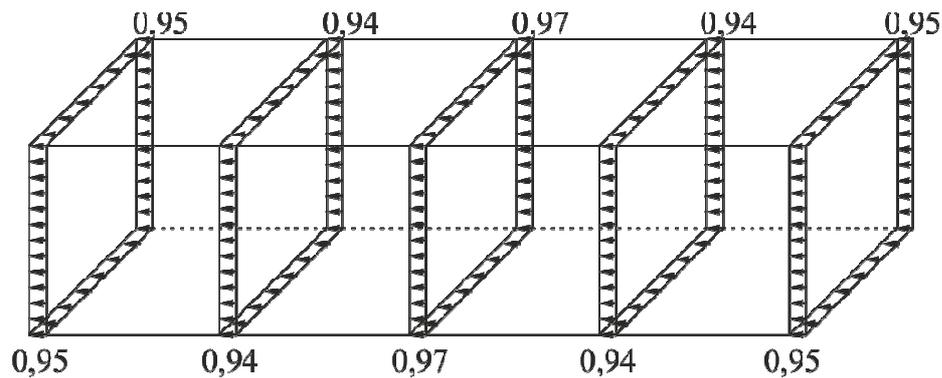


Рис. 4.20. Эпюры нормальных напряжений σ_x^N (МПа)

Эпюры нормальных напряжений σ_x^z (МПа), представлены на рис.4.21.

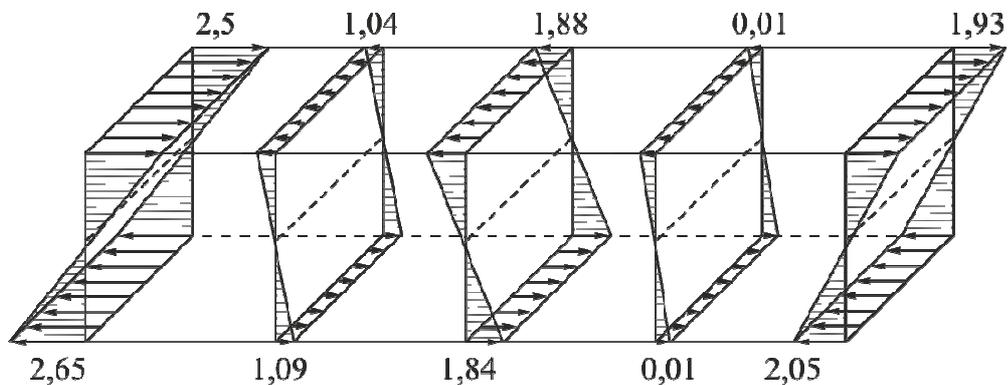


Рис. 4.21. Эпюры нормальных напряжений σ_x^z (МПа)

Эпюры нормальных напряжений σ_x^y (МПа), представлены на рис.4.22.

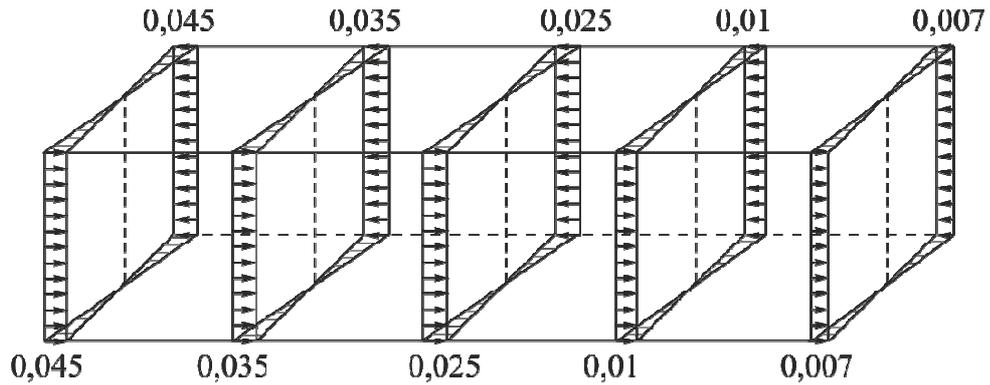


Рис. 4.22. Эпюры нормальных напряжений σ_x^y (МПа)

Суммарные эпюры нормальных напряжений σ_x (МПа), представлены на рис.4.23.

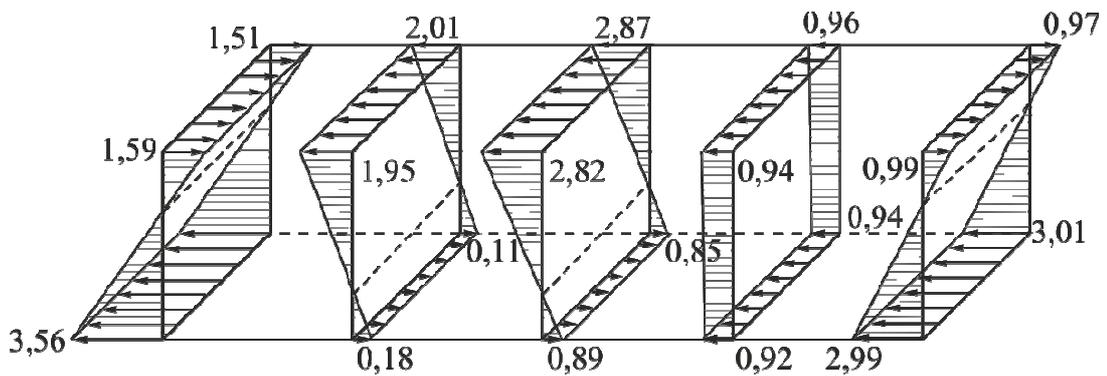


Рис. 4.23. Суммарные эпюры нормальных напряжений σ_x (МПа)

Рассмотрим распределение касательных напряжений в характерных сечениях продольного ригеля 23 в предположении упругой работы в предельном состоянии.

Эпюры касательных напряжений τ_{xz} (МПа), представлены на рис.4.24.

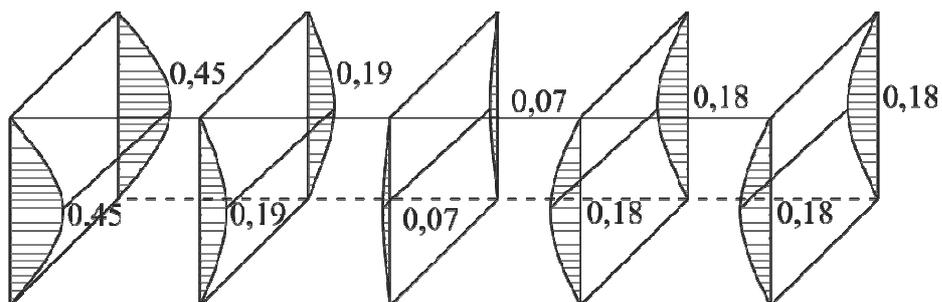


Рис. 4.24. Эпюры касательных напряжений τ_{xz} (МПа)

Эпюры касательных напряжений τ_{xy} (МПа), представлены на рис.4.25.

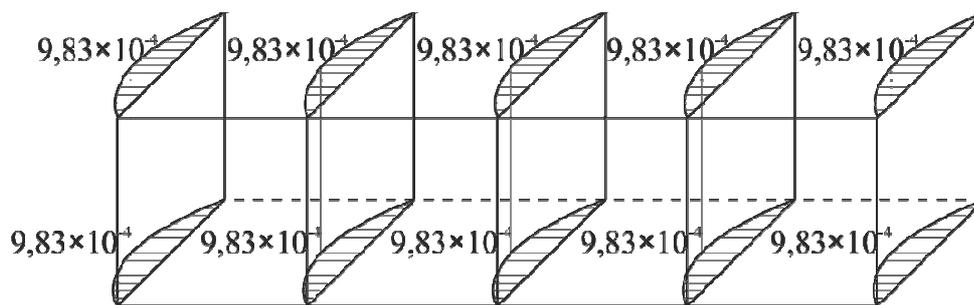


Рис. 4.25. Эпюры касательных напряжений τ_{xy} (МПа)

Эпюры касательных напряжений τ_x (МПа), представлены на рис.4.26.

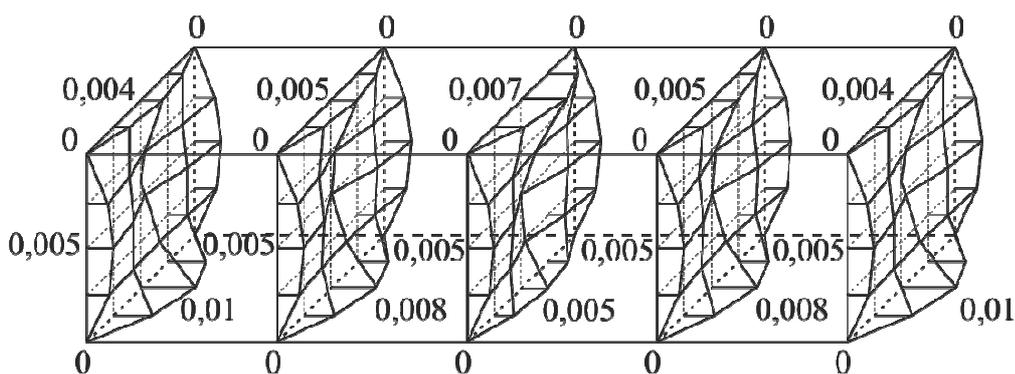


Рис. 4.26. Эпюры касательных напряжений τ_x (МПа)

Суммарные эпюры касательных напряжений τ (МПа), представлены на рис.4.27.

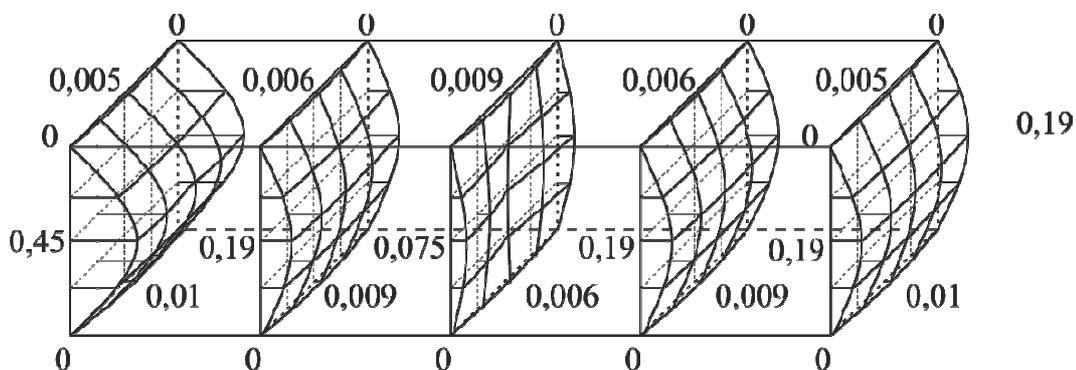


Рис. 4.27. Суммарные эпюры касательных напряжений τ (МПа)

Эпюры главных напряжений σ_1 (МПа) представлены на рис.4.28.

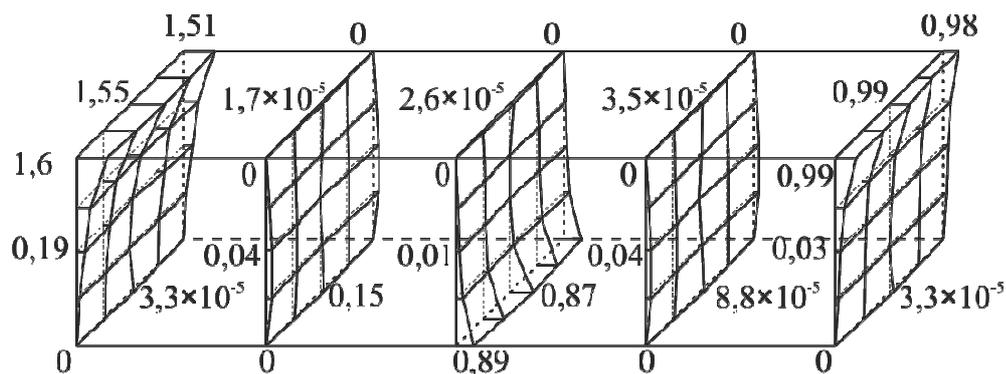


Рис. 4.28. Эпюры главных напряжений σ_1 (МПа)

Эпюры главных напряжений σ_3 (МПа) представлены на рис.4.29.

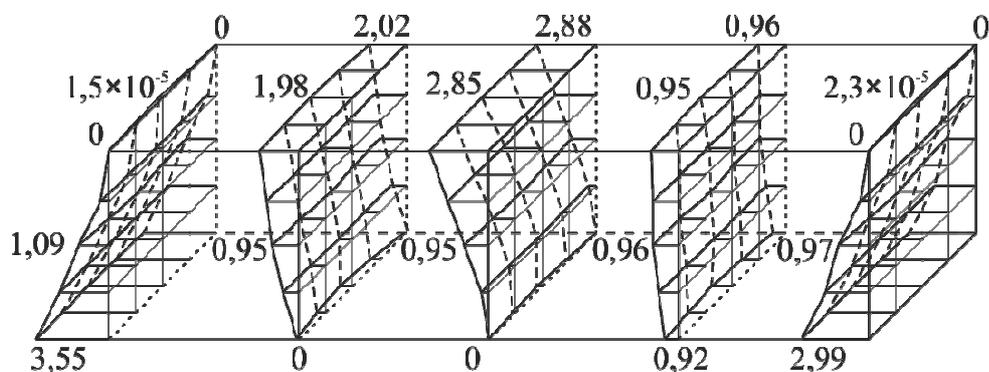


Рис. 4.29. Эпюры главных напряжений σ_3 (МПа)

Рассмотрим распределение нормальных напряжений в характерных сечениях поперечного ригеля 37 в предельном состоянии в предположении его упругой работы.

Эпюры напряжений, представлены в Приложении Г рис.Г.5...Г.14.

Анализ распределения напряжений в конструктивных элементах фрагмента пространственного каркаса, при поэтапном нагружении и максимальных внутренних усилий, свидетельствует о незначительном влиянии крутящего момента на напряженно-деформируемое состояние конструкций.

5. РАСЧЕТ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РАМНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ ТРЕЩИНООБРАЗОВАНИЯ

5.1. Построение диаграмм «крутящий момент – угол закручивания» с использованием шагово-итерационной методики для железобетонных элементов прямоугольного поперечного сечения с трещиной

Для построения диаграмм «крутящий момент – угол закручивания» сечений железобетонных элементов с нормальной трещиной, подверженных кручению, в работе принимаются следующие предпосылки:

1. Считается справедливой гипотеза Бернулли (гипотеза плоских сечений).
2. Связь между напряжениями и деформациями бетона и арматуры принимаются в виде диаграмм, приведенных в Разделе 4 на рис. 4.8, 4.11.
3. Зависимость «напряжение-деформация» при сдвиге арматуры описывается при помощи линейной функции (4.16) приведенной в Разделе 4.
4. Принимается линейное распределение угловых деформаций по площади поперечного сечения.

Предлагается следующий алгоритм, построения диаграммы «крутящий момент – угол закручивания» с использованием шагово-итерационной методики для сечений железобетонных элементов с нормальной трещиной.

1. Исходными данными являются:
 - прочность бетона на сжатие f_{ck} , растяжение f_{ctk} и срез $f_{ctk,sh}$;
 - начальный модуль упругости бетона E_{ck} ;
 - прочность арматурной стали f_{tk} ;
 - модуль упругости арматурной стали E_s ;
 - размеры сечения h, h_b, b ;
 - площади арматурных стержней A_s и A_s' ;
 - координаты центров тяжести арматурных стержней Y_s и Z_s ;

- приращение угла закручивания $\Delta\theta$.
- 2. Определяются характеристики приведенного сечения A_{red} , $S_{red,y}$.
- 3. Определяем предельный крутящий момент [73]

$$T_u = (0,88 + 0,08h / b) (f_{ctk} W_{T,pl}), \quad W_{T,pl} = \sqrt{2bh^2} / (Th^2).$$

- 4. Определяется центр тяжести приведенного сечения:

$$Y_{kr} = \frac{S_{z,red}}{A_{red}}; \quad Z_{kr} = \frac{S_{y,red}}{A_{red}}.$$

На первом этапе принимается, что центр кручения совпадает с центром тяжести приведенного сечения.

- 5. Поперечное сечение разбивается на n^2 прямоугольных элементов с размерами:

$$db = \frac{b}{n}; \quad dh = \frac{h}{n}.$$

- 6. На первом этапе принимается угол закручивания сечения равным $\theta_1 = \Delta\theta$, на последующих этапах - $\theta_i = \theta_{i-1} + \Delta\theta$.

- 7. В центре тяжести каждого прямоугольного элемента определяются значения угловых деформаций $\gamma_{xy,b}^i$, $\gamma_{xz,b}^i$ по формулам (4.17), (4.18).

- 8. В соответствии с блок-схемой, приведенной в Разделе 4 на рис. 4.9 в центре тяжести каждого прямоугольного элемента определяются значения касательных напряжений $\tau_{xy,b}^i$, $\tau_{xz,b}^i$.

- 9. Если условие $Y_s > h_b$ выполняется, переходим к п.12, если условие не выполняется, переходим к п.10.

- 10. Определяем деформации в бетоне $\gamma_{xy,b}^{(Z_b, Y_b)}$, $\gamma_{xz,b}^{(Z_b, Y_b)}$ с координатами:

$$Z_b^y = 0, \quad Y_b^y = h_0 - Y_{kr}.$$

- 11. По найденным значениям деформаций в бетоне, находим значения деформаций в арматурных стержнях (рис.5.1):

$$\gamma_{xy,s}^i = \left(\gamma_{xy,b}^{(Z_b, Y_b)} \times Z_s \right) / b / 2; \quad \gamma_{xz,s}^i = \left(\gamma_{xz,b}^{(Z_b, Y_b)} \times Y_b \right) / Y_{kr}$$

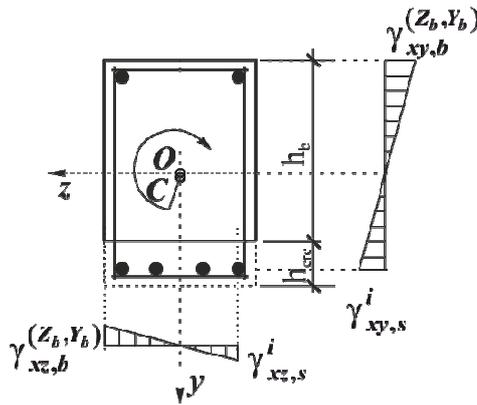


Рис. 5.1. Определение деформаций в арматурных стержнях

Переходим к п. 13.

12. В центре тяжести арматурных стержней определяются значения угловых деформаций $\gamma_{xy,s}^i$, $\gamma_{xz,s}^i$ по формулам (4.17), (4.18).

13. В центре тяжести арматурных стержней определяются значения касательных напряжений (4.16).

14. Проверяется выполнение условия равновесия касательных напряжений

$$\sum \tau_{xy,b}^i A_b^i + \sum \tau_{xy,s}^i A_s^i = 0.$$

При выполнении условия переходим к п. 16.

15. Если условие не выполняется, то необходимо уточнить положение центра кручения и повторить расчет по пп. 7 ... 14 до достижения заданной точности, в соответствии с предложениями В.Е.Бабича [20]:

- если сумма касательных напряжений больше нуля, то центр кручения на последующей итерации принимается

$$Y_{kr}^k = 0,98 Y_{kr}^{k-1}.$$

- если сумма касательных напряжений меньше нуля, то центр кручения на последующей итерации принимается

$$Y_{kr}^k = 1,02 Y_{kr}^{k-1}.$$

16. Определяется значение крутящего момента воспринимаемого бетонным сечением

$$T_b^i = \left(\sum \tau_{xy,b}^i z_b^i - \sum \tau_{xz,b}^i y_b^i \right) A_b^i.$$

17. Определяется значение крутящего момента, воспринимаемого арматурными стержнями

$$T_s^i = \left(\sum \tau_{xy,s}^i z_s^i - \sum \tau_{xz,s}^i y_s^i \right) A_s^i.$$

18. Определяется крутящий момент, воспринимаемый приведенным поперечным сечением

$$T = T_b + T_s.$$

19. Расчет по пп. 6...18 повторяется до тех пор, пока значения крутящих моментов не достигнут предельных

$$T > T_u.$$

На рис. 5.2, приведена блок-схема описанного выше алгоритма построения диаграммы «крутящий момент – угол закручивания» с использованием шагово-итерационной методики для сечений железобетонных элементов с трещиной.

В соответствии с приведенной блок-схемой, в системе компьютерной математики MATLAB разработана программа для построения диаграмм «крутящий момент – угол закручивания» для сечений железобетонных элементов с трещиной подверженных кручению.

В экспериментах Н.Н.Срибняк [123] проводились исследования сечений железобетонных элементов с искусственными нормальными трещинами, на кручение со следующими размерами и характеристиками материалов: $b \times h = 12 \times 20$ см, прочность бетона $f_{ck} = 21,63$ МПа, армирование растянутой зоны 1Ø18 класса А-400С с площадью $A_s = 2,55$ см² и 1Ø14 класса А-400С с площадью $A_s = 1,54$ см². Трещины имитировались вставками пластинок из древесноволокнистой плиты толщиной 2мм.

В экспериментах Д.Ю.Парамонова [110] проводились исследования сечений железобетонных балок с искусственными нормальными трещинами, на кручение со следующими размерами и характеристиками материалов: $b \times h = 10 \times 16$ см, прочность бетона $f_{ck} = 25,05$ МПа, армирование растянутой зоны 1Ø12 класса А-400С с площадью $A_s = 1,13$ см² и 1Ø10 класса

А-400С с площадью $A_s = 0,785 \text{ см}^2$. Трещины имитированы вставками пластинок из оргстекла толщиной 3мм.

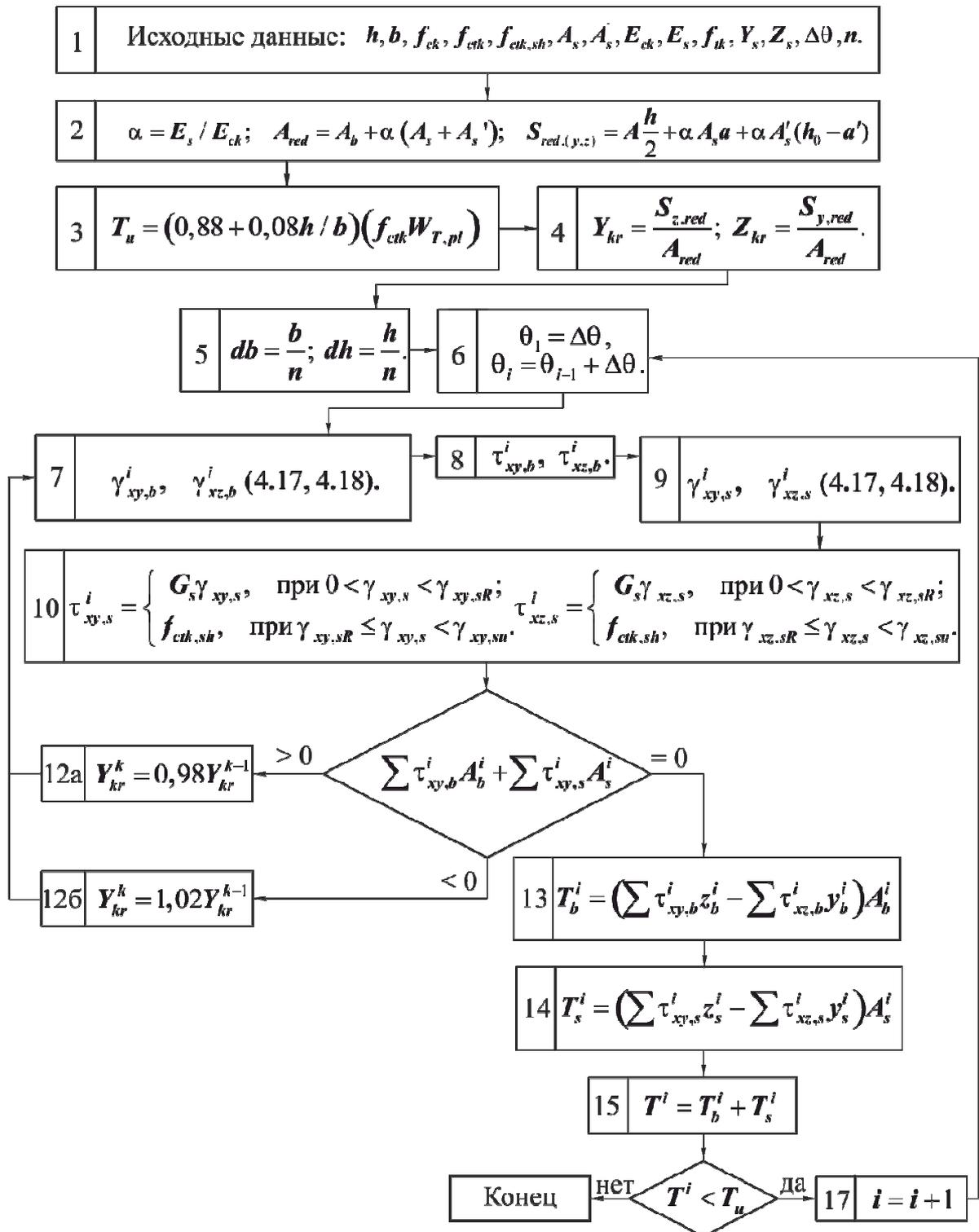


Рис. 5.2. Блок-схема построения диаграммы «крутящий момент – угол закручивания»

Диаграммы «крутящий момент – угол закручивания» построенные по предлагаемой методике и экспериментальным значениям показаны на рис. 5.3.

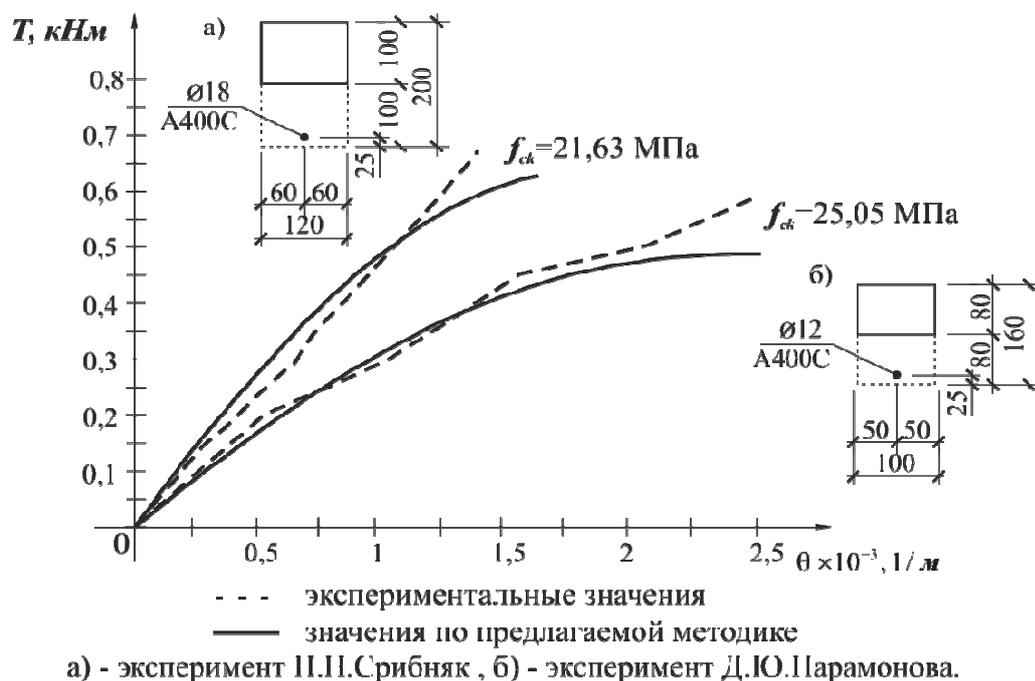


Рис. 5.3. Диаграммы «крутящий момент – угол закручивания»

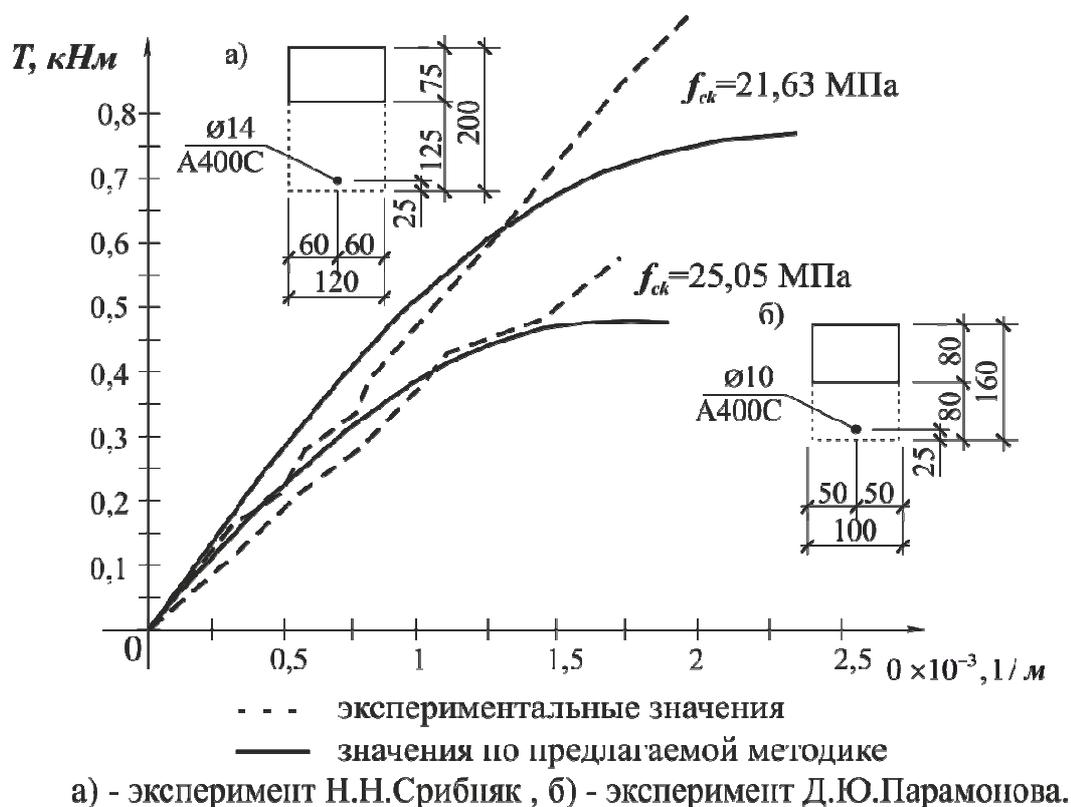


Рис. 5.4. Диаграммы «крутящий момент – угол закручивания»

В таблице 5.1 приведено сравнение теоретических значений полученных по предлагаемой методике с экспериментальными, статистическая оценка распределения отношения теоретических и экспериментальных крутящих моментов T_{exp}/T_{teor} .

Таблица 5.1

Сравнение экспериментальных данных Н.Н.Срибняк и Д.Ю.Парамонова с теоретическими значениями, полученными по предлагаемой методике

Экспериментальные значения				Теоретические значения по предлагаемой методике								
Н.Н.Срибняк $f_{ck} = 21,63$ МПа		Д.Ю.Парамонов в $f_{ck} = 25,05$ МПа		$f_{ck} = 21,63$ МПа				$f_{ck} = 25,05$ МПа				
T , кНм	$\Theta, 10^{-3}$, 1/м	T , кНм	$\Theta, 10^{-3}$, 1/м	T , кН м	Θ , 10^{-3} , 1/м	%	$\frac{T_{exp}}{T_{teor}}$	T , кН м	$\Theta, 10^{-3}$, 1/м	%	$\frac{T_{exp}}{T_{teor}}$	
0,12	0,25	0,08	0,25	0,13	0,25	8	0,92	0,08	0,25	0	1	
0,24	0,5	0,19	0,5	0,26	0,5	8	0,92	0,17	0,5	12	1,12	
0,35	0,75	0,24	0,75	0,39	0,75	10	0,9	0,24	0,75	0	1	
0,46	1	0,29	1	0,47	1	2	0,98	0,3	1	3	0,97	
0,58	1,25	0,36	1,25	0,57	1,25	2	1,02	0,37	1,25	3	0,97	
		0,43	1,5					0,41	1,5	5	1,05	
		0,46	1,75					0,46	1,75	0	1	
		0,5	2					0,47	2	6	1,06	
		0,52	2,25					0,49	2,25	6	1,06	
		0,58	2,5					0,5	2,5	16	1,16	
Выборочное среднее								0,948				
Выборочная дисперсия, S_x								0,050				
Выборочный коэффициент вариации, C_v								0,053				
Доверительный интервал	Нижний предел							0,968				
	Верхний предел							0,928				

В таблице 5.2 приведено сравнение теоретических значений полученных по предлагаемой методике с экспериментальными, статистическая оценка распределения отношения теоретических и экспериментальных крутящих моментов T_{exp}/T_{teor} .

**Сравнение экспериментальных данных Н.Н.Срибняк и
Д.Ю.Парамонова с теоретическими значениями, полученными по
предлагаемой методике**

Экспериментальные значения				Теоретические значения по предлагаемой методике								
Н.Н.Срибняк $f_{ck} = 21,63$ МПа		Д.Ю.Парамонов в $f_{ck} = 25,05$ МПа		$f_{ck} = 21,63$ МПа				$f_{ck} = 25,05$ МПа				
T , кНм	$\Theta, 10^{-3}$, 1/м	T , кНм	$\Theta, 10^{-3}$, 1/м	T , кН м	Θ , 10^{-3} , 1/м	%	$\frac{T_{exp}}{T_{teor}}$	T , кН м	$\Theta, 10^{-3}$, 1/м	%	$\frac{T_{exp}}{T_{teor}}$	
0,12	0,25	0,09	0,25	0,13	0,25	8	0,92	0,1	0,25	10	0,9	
0,23	0,5	0,2	0,5	0,29	0,5	21	0,79	0,22	0,5	9	0,91	
0,35	0,75	0,27	0,75	0,4	0,75	13	0,88	0,31	0,75	13	0,87	
0,47	1	0,37	1	0,5	1	6	0,94	0,38	1	3	0,97	
0,6	1,25	0,46	1,25	0,61	1,25	2	0,98	0,45	1,25	2	1,02	
0,71	1,5	0,5	1,5	0,68	1,5	5	1,04	0,47	1,5	6	1,06	
0,84	1,75	0,56	1,75	0,74	1,75	14	1,14	0,49	1,75	14	1,14	
0,9	2		2	0,8	2	13	1,13		2			
Выборочное среднее								0,978				
Выборочная дисперсия, S_x								0,121				
Выборочный коэффициент вариации, C_v								0,124				
Доверительный интервал		Нижний предел						1,007				
		Верхний предел						0,948				

5.2. Учет трещинообразования в элементах пространственных рамных железобетонных конструкций

Распределение внутренних усилий в статически неопределимых конструкциях зависит от жесткостей составляющих ее элементов. В свою очередь, в связи с трещинообразованием, жесткость железобетонных элементов переменная по их длине и зависит от уровня возникающих в них внутренних усилий.

В диссертационной работе определение напряженно-деформированного состояния железобетонных пространственных рамных конструкций основывается на модели деформирования изгибаемых железобетонных элементов с использованием деформационной теории [28, 85].

В связи с этим задачу определения напряженно-деформированного состояния железобетонных пространственных рамных конструкций с учетом изменения жесткостей предлагается решать методом последовательного уточнения жесткостей [85].

Влиянием процессов трещинообразования на изменение продольной жесткости элементов пренебрегаем, так как образование трещин происходит не по всей длине элемента, а лишь на отдельных его участках. При этом в соответствии с выводами А.В.Геммерлинга [42], принимается, что при сравнительно небольших деформациях рамных конструкций влиянием деформаций сжатия на искривление оси можно пренебречь.

Для определения напряженно-деформированного состояния железобетонных пространственных рамных конструкций элементы исходной расчетной схемы разбиваются на участки с кусочно-постоянной жесткостью.

Пример разбиения пространственной конструкции на участки и порядок нумерации приведен на рис. 5.5.

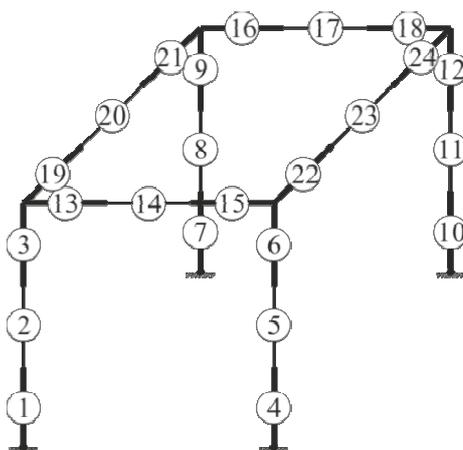


Рис. 5.5. Пример разбиения и нумерации участков пространственной рамной конструкции

Физический закон деформирования сечений железобетонной рамы

$$M = B\chi \quad (5.1)$$

где M – изгибающий момент;

B – изгибная жесткость сечения;

χ – кривизна сечения.

Для каждого участка конструкции, с постоянной изгибной жесткостью, в соответствии с предложениями изложенными в работе А.В.Ковтуненко [85], строится линеаризованная диаграмма «кривизна – изгибающий момент», а также в соответствии с блок схемой приведенной в Разделе 4 строится диаграмма «угол закручивания – крутящий момент».

На первом этапе расчета изгибная и крутильная жесткость всех элементов принимается равной в упругой стадии и определяется на основе формул:

$$B_i^{(1)} = \frac{M_{crc,i}}{\chi_{crc,1,i}}; \quad B_i^{(s)} = \frac{T_i^s(\theta_i^s)}{\theta_i^s}. \quad (5.2)$$

где - M_{crc} – изгибающий момент трещинообразования;

T_i^s - крутящий момент;

θ_i^s - угол закручивания.

В результате расчета заданной конструкции определяются значения изгибающих моментов, возникающих в элементах конструкции. По принятым значениям жесткостей и полученным значениями изгибающих моментов, определяются значения кривизн

$$\chi_i^{(s)} = \frac{M_i^{(s)}}{B_i^{(s)}}. \quad (5.3)$$

На последующих этапах расчета, в соответствии с полученными на предыдущей итерации значениями кривизн, по диаграммам «кривизна – изгибающий момент» для каждого участка уточняется значение изгибной жесткости

$$B_i^{(s)} = \frac{M_i^{(s-1)}(x_i^{(s-1)})}{x_i^{(s-1)}}. \quad (5.4)$$

Проверяется условие образования нормальных трещин при достижении деформации крайнего растянутого волокна бетона предельного значения $\varepsilon_{bt} > \varepsilon_{btu}$.

В том случае если нормальная трещина не образуется, назначается упруго-пластичная крутильная жесткость

$$B_{iT}^{(s)} = \frac{T_i^s(\theta_i^s)}{\theta_i^s}. \quad (5.5)$$

При образовании нормальной трещины, определяется высота бетона над трещиной

$$h_{bi}^{(s-1)}(x_i) = \frac{h_{b,u} - h_{b,crc,2}}{x_u - x_{crc,2}}(x - x_{crc,2}). \quad (5.6)$$

Определяется крутильная жесткость сечения с нормальной трещиной.

Алгоритм, определения крутильной жесткость железобетонных сечений с учетом трещинообразования с использованием шагово-итерационной методики.

1. Исходными данными являются: прочность бетона на сжатие f_{ck} , растяжение f_{ctk} и срез $f_{ctk,sh}$; начальный модуль упругости бетона E_{ck} ; прочность арматурной стали f_{tk} ; модуль упругости арматурной стали E_s ; размеры сечения h и b ; площади арматурных стержней A_s и A_s' ; координаты центров тяжести арматурных стержней Y_s и Z_s ; угол закручивания θ ; крутящий момент T_i^s .

2. Определяется центр кручения приведенного сечения.

3. Определяется крутящий момент воспринимаемый сечением $T(\theta_i^s)$.

4. Проверяется выполнение условия

$$\left| \frac{T(\theta_i^{s-1}) - T_i^s}{T_i^s} \right| \leq \xi.$$

При выполнении условия переходим к п. 6

5. Если условие не выполняется, то необходимо уточнить значение угла закручивания θ_i и повторить расчет по пп. 2 ... 4 до достижения заданной точности:

- если крутящий момент $T(\theta_i^{s-1})$ больше T_i^s , то угол закручивания на последующей итерации принимается $\theta_{i+1} = \theta_i \times 0,98$.

- если крутящий момент $T(\theta_i^{s-1})$ меньше T_i^s , то угол закручивания на последующей итерации принимается $\theta_{i+1} = \theta_i \times 1,02$.

6. Определяется крутильная жесткость железобетонного сечения с трещиной $B_i^{s-1} T = \frac{T_i(\theta_i^{s-1})}{\theta_i}$

На рис. Д.1, (Приложение Д) приведена блок-схема описанного выше алгоритма определения крутильной жесткость железобетонных сечений с учетом трещинообразования с использованием шагово-итерационной методики.

Значения изгибающих и крутящих моментов, полученные в результате расчета, сравниваются со значениями, полученными на предыдущей итерации. Расчет продолжается до тех пор, пока разница между значениями на текущей и предыдущей итерации не окажется меньше заданной величины ξ , характеризующей точность расчета:

$$\left| \frac{M^{(s)} - M^{(s-1)}}{M^{(s)}} \right| \leq \xi \quad \left| \frac{T_i^s - T_i^{s-1}}{T_i^{s-1}} \right| \leq \xi \quad (5.7)$$

Блок-схема, иллюстрирующая алгоритм расчета железобетонных пространственных рамных конструкций, приведена на рис. 5.6.

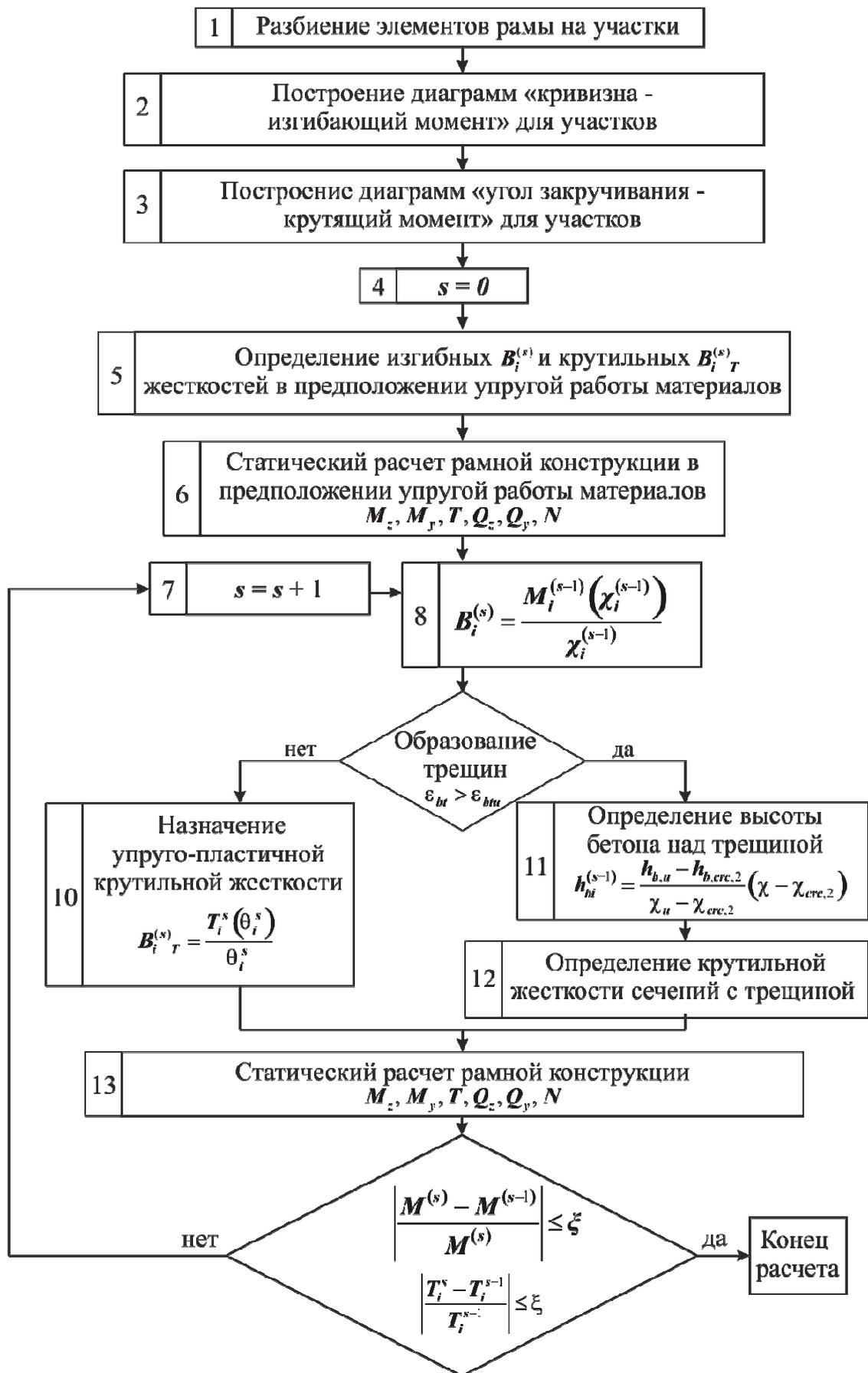


Рис. 5.6. Блок-схема расчета пространственных железобетонных рам с учетом процессов трещинообразования сечений

В соответствии с алгоритмом представленным на рис.5.6, в системе компьютерной математики MATLAB составлена программа для определения напряженно-деформированного состояния железобетонных пространственных рамных конструкций с произвольным количеством этажей, шагов и пролетов.

5.3. Расчет одноэтажной однопролетной одношаговой железобетонной пространственной рамной конструкции с учетом трещинообразования

Рассмотрим расчет одноэтажной однопролетной одношаговой железобетонной пространственной рамной конструкции на действие вертикальной нагрузки с учетом процессов трещинообразования.

Пролет рамы равен 6,0 м, высота – 6,0 м, шаг – 6,0 м.

Нагрузки принимаются согласно таблице Г.1, Г.2, Г.3 (Приложение Г). Сечение и армирование всех элементов рамы принимается согласно рис. 4.16 (Раздел 4).

Расчетная схема железобетонной одноэтажной однопролетной одношаговой пространственной рамной конструкции для расчета на действие постоянной и полезной нагрузки представлена на рис. 5.7.

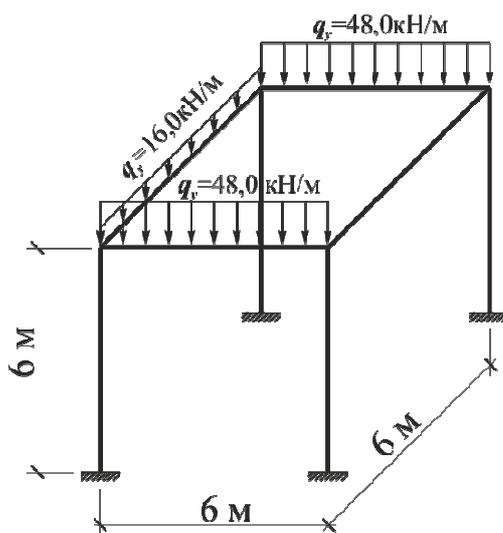


Рис. 5.7. Расчетная схема одноэтажной однопролетной одношаговой пространственной рамной конструкции

Конструкция была рассчитана при помощи программы, составленной в системе компьютерной математики MATLAB, в упругой стадии и с учетом трещинообразования.

По принятому армированию для сечений стоек, продольных и поперечных ригелей рамной конструкции строятся линеаризованные диаграммы «изгибающий момент – кривизна».

При построении линеаризованной диаграммы «изгибающий момент – кривизна» для изгибаемых железобетонных элементов необходимо определить значения изгибающих моментов и соответствующих им кривизн в ключевых точках диаграммы.

Линеаризованная диаграмма «изгибающий момент – кривизна» для сечения стоек приведена на рис. 5.8.

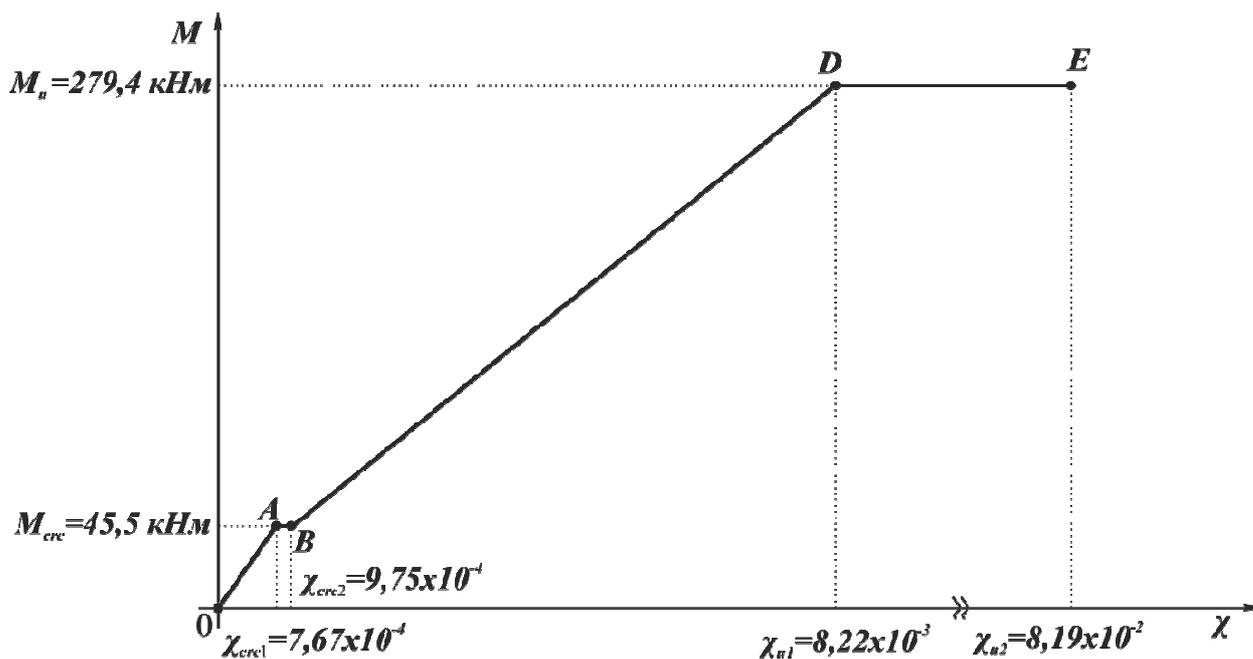


Рис. 5.8. Диаграмма «изгибающий момент – кривизна»
для сечения стоек

Линеаризованные диаграммы «изгибающий момент – кривизна» для пролетного и опорного сечений продольного ригеля приведены на рис. 5.9.

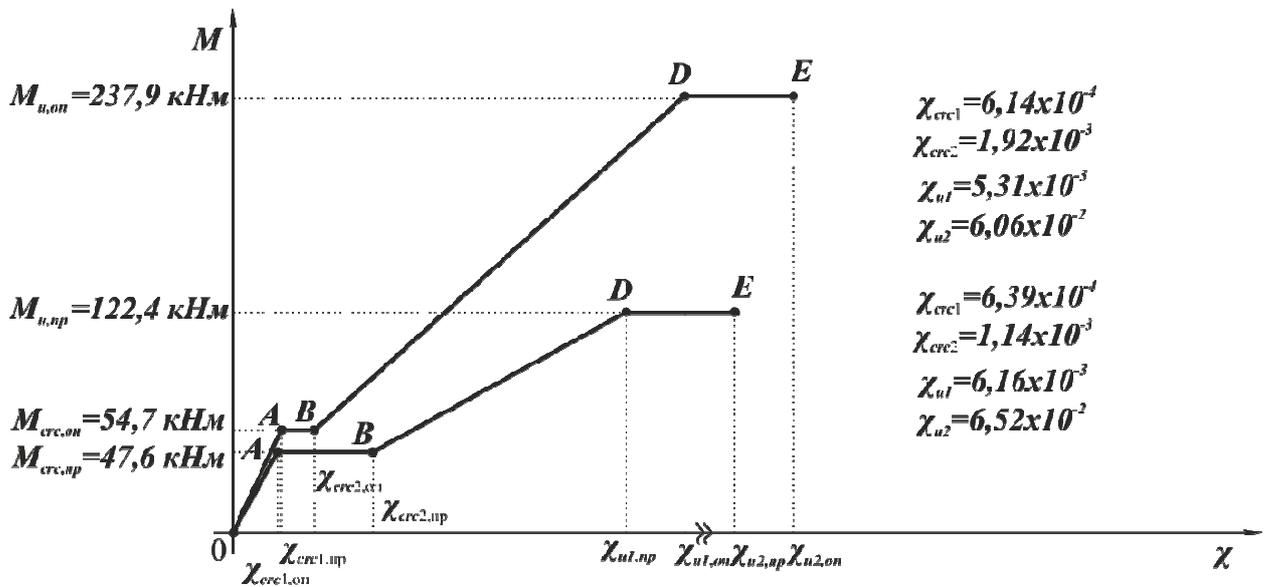


Рис. 5.9. Диаграмма «изгибающий момент – кривизна» для пролетного и опорного сечений продольного ригеля

Линеаризованные диаграммы «изгибающий момент – кривизна» для пролетного и опорного сечений поперечного ригеля приведены на рис. 5.10.

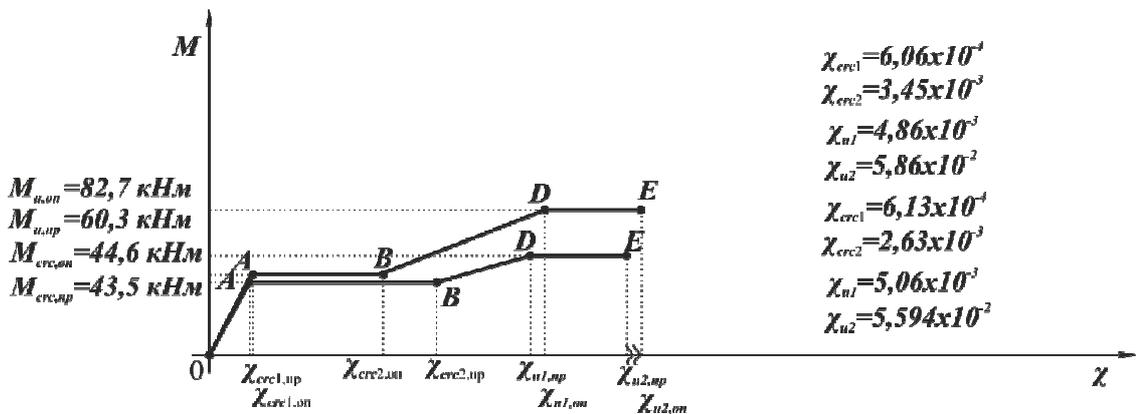


Рис. 5.10. Диаграмма «изгибающий момент – кривизна» для пролетного и опорного сечений поперечного ригеля

По принятому армированию продольных и поперечных ригелей рамной конструкции строятся диаграммы «крутящий момент – угол закручивания».

Диаграммы «крутящий момент – угол закручивания» для опорного сечения поперечного и продольного ригелей приведены на рис. 5.11.

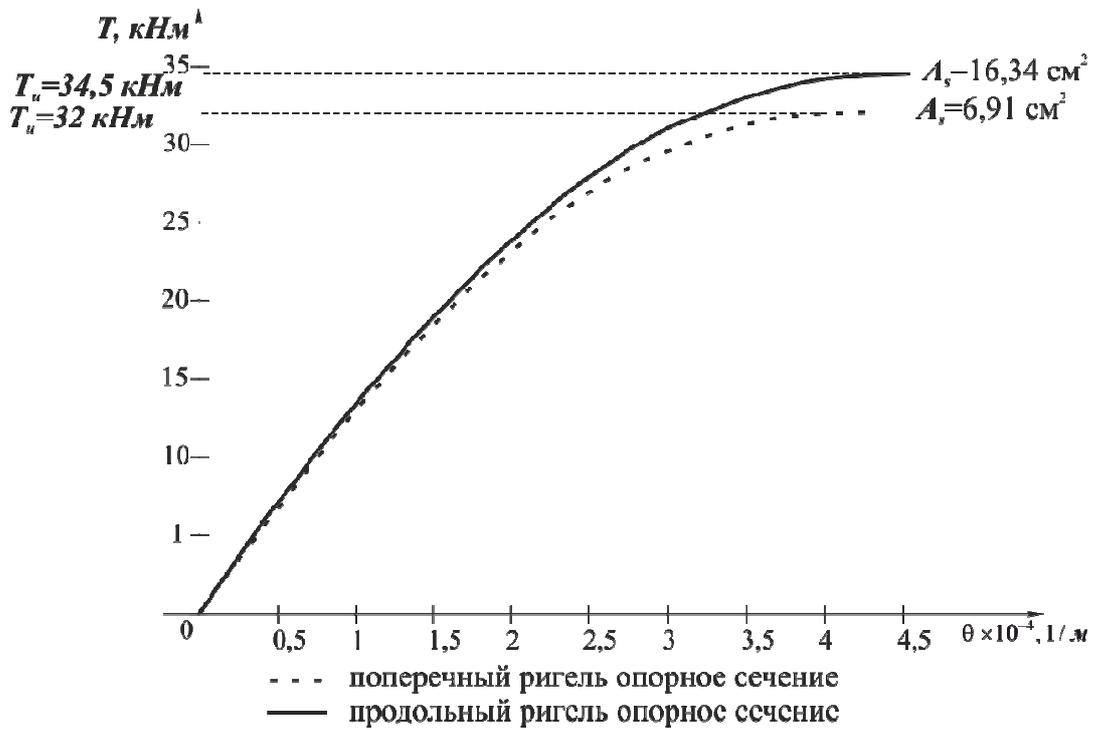


Рис. 5.11. Диаграмма «крутящий момент – угол закручивания»

Диаграммы «крутящий момент – угол закручивания» для пролетного сечения поперечного и продольного ригелей приведены на рис. 5.12.

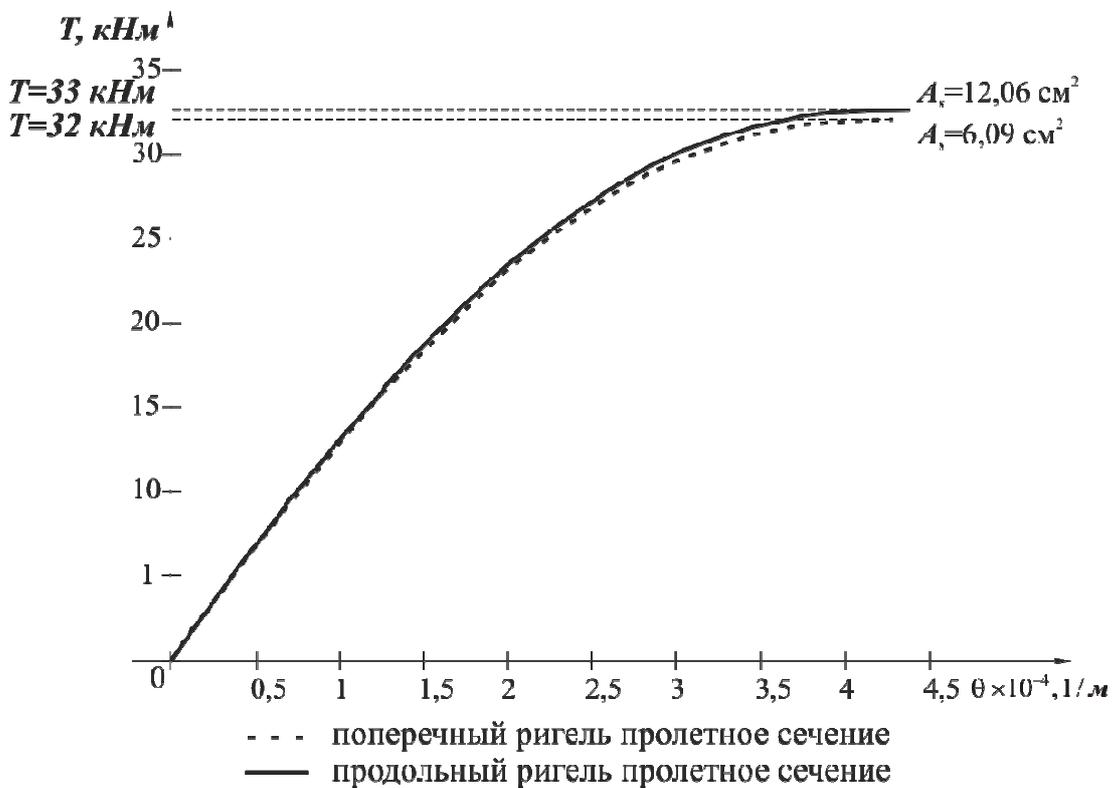
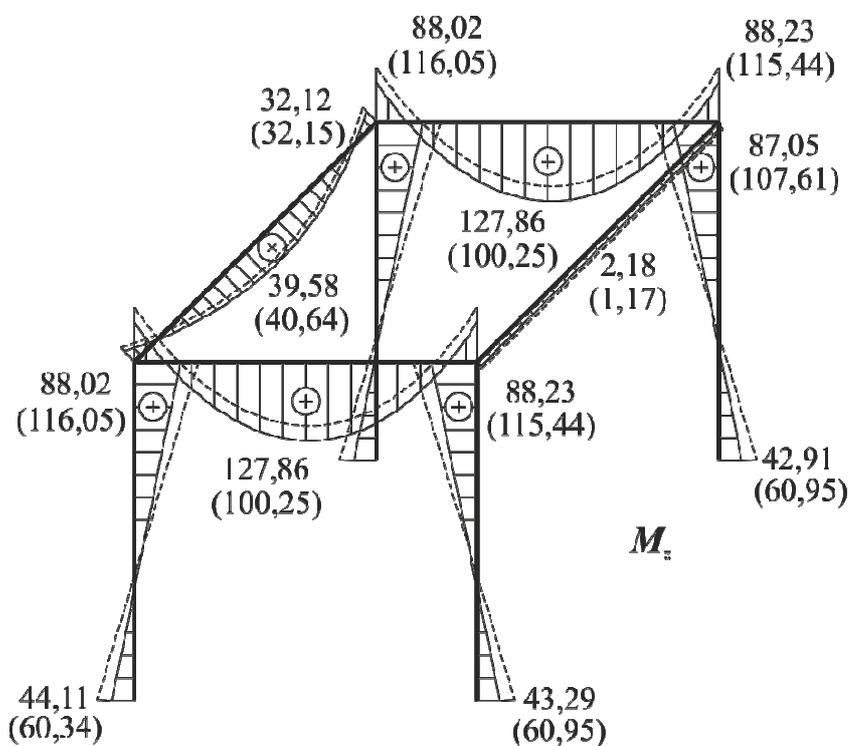


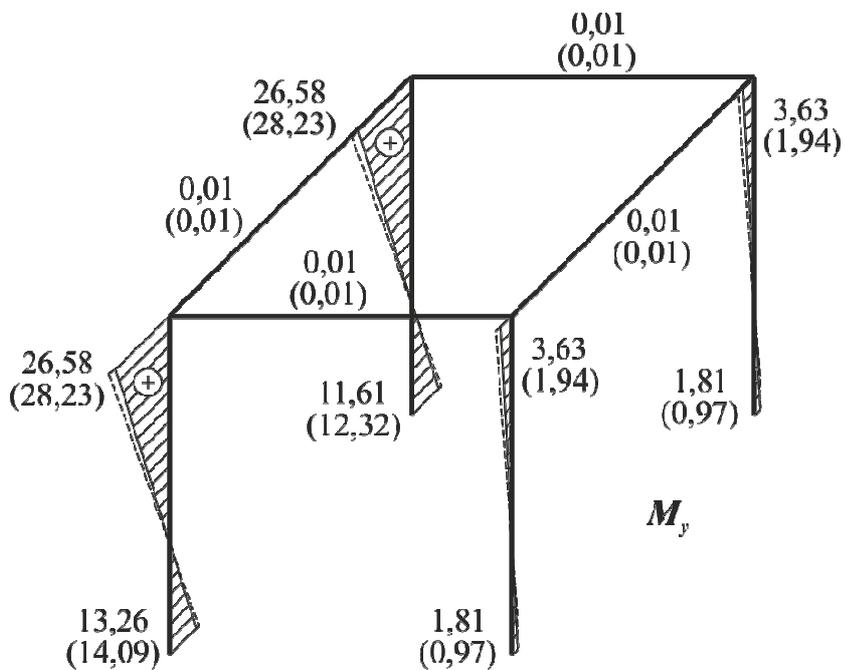
Рис. 5.12. Диаграмма «крутящий момент – угол закручивания»

По определенным значениям изгибающих моментов M_z , M_y , и крутящих моментов M_x , определенных для простейшей пространственной рамы при помощи численно-аналитического метода граничных элементов, построены соответствующие эпюры, представленные на рис. 5.13, 5.14, 5.15.



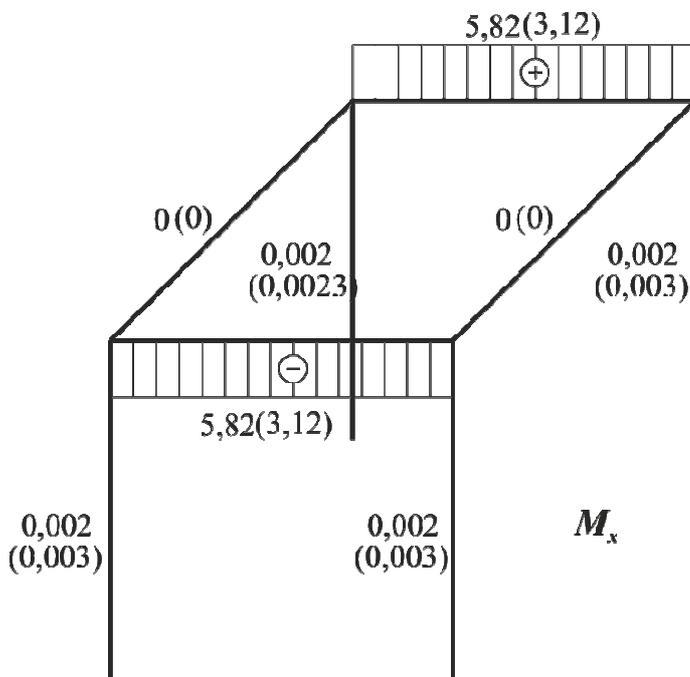
44,1 — При расчете в упругой стадии
 (60,34) - - - При расчете с учетом процесса трещинообразования

Рис. 5.13. Эпюра изгибающих моментов M_z (кНм)



13,26 — При расчете в упругой стадии
 (14,09) - - - При расчете с учетом процесса трещинообразования

Рис. 5.14. Эпюра изгибающих моментов M_y (кНм)



5,82 — При расчете в упругой стадии
 (3,12) - - - При расчете с учетом процесса трещинообразования

Рис. 5.15. Эпюра крутящих моментов M_x (кНм)

Сравнение результатов расчета в упругой стадии и с учетом трещинообразования представлено в табл. 5.3, 5.4, 5.5.

Таблица 5.3

Сравнение значений изгибающих моментов M_z (кНм), возникающих в элементах простейшей рамной конструкции, при расчете в упругой стадии и с учетом трещинообразования

№ элемента	№ сечений	Упругий расчет	Расчет с учетом трещинообразования	$\Delta, \%$
1	1	44,09	60,34	37
	2	21,96	27,87	27
	3	88,02	116,06	32
2	1	43,87	60,95	39
	2	22,18	27,24	23
	3	88,23	115,44	31
3	1	44,09	60,34	37
	2	21,96	27,85	27
	3	88,02	116,05	32
4	1	42,87	60,95	42
	2	22,18	27,24	23
	3	88,23	115,44	31
5	1	88,02	116,05	32
	2	127,86	100,25	-22
	3	88,23	115,44	31
6	1	88,02	116,05	32
	2	127,87	100,25	-22
	3	88,23	115,44	31
7	1	32,41	31,35	-3,3
	2	39,58	40,64	2,7
	3	34,4	31,35	-8,9
8	1	2,18	1,17	-46
	2	2,18	1,17	-46
	3	2,18	1,17	-46
Примечание: Сечение 1 находится в начале элемента, 2 – в середине элемента, 3 – в конце элемента				

Сравнение значений изгибающих моментов M_y (кНм), возникающих в элементах простейшей рамной конструкции, при расчете в упругой стадии и с учетом трещинообразования

№ элемента	№ сечений	Упругий расчет	Расчет с учетом трещинообразования	$\Delta, \%$
1	1	13,26	14,09	6
	2	6,65	7,072	6
	3	26,58	28,23	6
2	1	1,813	0,972	46
	2	0,91	0,488	46
	3	3,63	1,949	46
3	1	11,6	12,33	6
	2	6,65	7,072	6
	3	26,58	28,23	6
4	1	1,81	0,972	46
	2	0,91	0,488	46
	3	3,63	1,949	46
5	1	0,01	0,012	19
	2	0,002	0,002	25
	3	0,01	0,012	19
6	1	0,01	0,012	19
	2	0,002	0,002	25
	3	0,0076	0,012	19
7	1	0,0076	0,009	13
	2	0,0076	0,009	13
	3	0,0076	0,009	13
8	1	0,0076	0,009	13
	2	0,0076	0,009	13
	3	0,0076	0,009	13
Примечание: Сечение 1 находится в начале элемента, 2 – в середине элемента, 3 – в конце элемента				

Сравнение значений изгибающих моментов M_x (кНм), возникающих в элементах простейшей рамной конструкции, при расчете в упругой стадии и с учетом трещинообразования

№ элемента	№ сечений	Упругий расчет	Расчет с учетом трещинообразования	$\Delta, \%$
1	1	0,002	0,003	45
	2	0,002	0,003	45
	3	0,002	0,003	45
2	1	0,002	0,003	45
	2	0,002	0,003	45
	3	0,002	0,003	45
3	1	0,002	0,003	45
	2	0,002	0,003	45
	3	0,002	0,003	45
4	1	0,002	0,003	45
	2	0,002	0,003	45
	3	0,002	0,003	45
5	1	5,82	3,12	46
	2	5,82	3,12	46
	3	5,82	3,12	46
6	1	5,82	3,12	46
	2	5,82	3,12	46
	3	5,82	3,12	46
7	1	0	0	0
	2	0	0	0
	3	0	0	0
8	1	0	0	0
	2	0	0	0
	3	0	0	0
Примечание: Сечение 1 находится в начале элемента, 2 – в середине элемента, 3 – в конце элемента				

Как видно из таблиц 5.3, 5.4, 5.5 трещинообразование в элементах одноэтажной однопролетной одношаговой железобетонной

пространственной рамной конструкции при заданной нагрузке оказывает существенное влияние на перераспределение изгибающих моментов M_z .

Разница значений изгибающих моментов M_z при расчете в предположении упругой работы конструкции и с учетом трещинообразования в стойках изменяется в пределах от 23% до 42%.

В продольных ригелях разница значений изгибающих моментов при расчете в предположении упругой работы конструкции и с учетом трещинообразования в опорных сечениях изменяется до 32%, а в пролетных сечениях до 22%.

Перераспределение изгибающих моментов M_z в поперечных ригелях в результате трещинообразования не превышает 9%.

Перераспределение изгибающих моментов M_y в результате трещинообразования не превышает 6%.

Перераспределение крутящих моментов M_x в стойках, продольных и поперечных ригелях в результате трещинообразования не превышает 46%.

5.4. Расчет девятиэтажной четырехшаговой и двухпролетной железобетонной рамной конструкции с учетом трещинообразования

Рассмотрим расчет девятиэтажной четырехшаговой и двухпролетной железобетонной рамной конструкции на действие вертикальной нагрузки с учетом процессов трещинообразования.

Нагрузки принимаются согласно таблиц Г.1, Г.2, Г.3 (Приложение Г). Сечение и армирование всех элементов рамы принимается согласно рис. 4.16 (Раздел 4).

Расчетная схема пространственной рамной конструкции для расчета на действие постоянной и полезной нагрузки представлена на рис. 4.15 (Раздел 4).

Расчет девятиэтажной четырехшаговой и двухпролетной железобетонной рамной конструкции выполнен при помощи программы,

составленной в системе компьютерной математики MATLAB, в упругой стадии и с учетом трещинообразования.

Сравнение результатов расчета в упругой стадии и с учетом трещинообразования при расчетной нагрузке представлено в табл. 5.6...5.11.

Таблица 5.6

Сравнение значений изгибающих моментов M_z (кНм), возникающих в стойках девятиэтажной железобетонной рамной конструкции, в осях А-В, 1, и А-В, 5 при расчете в упругой стадии и с учетом трещинообразования

№ элемента	№ сечений	Упругий расчет	Расчет с учетом трещинообразования	$\Delta, \%$
5	1	-66,9806	-79,7069	19
	2	0,39257	0,471084	20
	3	67,7657	80,64118	19
10	1	-69,2843	-84,5268	22
	2	0,35916	0,430992	20
	3	70,0026	83,30309	19
79	1	-72,9343	-87,5212	20
	2	0,41504	0,506349	22
	3	73,7644	89,25492	21
126	1	-90,4202	-108,504	20
	2	-1,82887	-2,17636	19
	3	86,7625	104,9826	21
158	1	-83,8962	-100,675	20
	2	12,69	15,4818	22
	3	109,272	131,1264	20
311	1	83,89	100,67	20
	2	12,69	15,48	22
	3	103,27	131,12	27
Примечание: Сечение 1 находится в начале элемента, 2 – в середине элемента, 3 – в конце элемента				

Таблица 5.7

Сравнение значений крутящих моментов M_x (кНм), возникающих в стойках девятиэтажной железобетонной рамной конструкции, в осях А-В, 1, и А-В, 5 при расчете в упругой стадии и с учетом трещинообразования

№ элемента	№ сечений	Упругий расчет	Расчет с учетом трещинообразования	$\Delta, \%$
5	1	0	0	0
	2	0	0	0
	3	0	0	0
10	1	0,019397	0,019008	0,04
	2	0,019397	0,019008	0,04
	3	0,019397	0,019008	0,04
79	1	0	0	0
	2	0	0	0
	3	0	0	0
126	1	0,000175	0,000175	0,04
	2	0,000175	0,000175	0,04
	3	0,000175	0,000175	0,04
158	1	0	0	0
	2	0	0	0
	3	0	0	0
232	1	-0,00064	-0,00064	0,04
	2	-0,00064	-0,00064	0,04
	3	-0,00064	-0,00064	0,04
264	1	0	0	0
	2	0	0	0
	3	0	0	0
311	1	0,064131	0,064157	0,04
	2	0,064131	0,064157	0,04
	3	0,064131	0,064157	0,04
Примечание: Сечение 1 находится в начале элемента, 2 – в середине элемента, 3 – в конце элемента				

Сравнение значений изгибающих моментов M_z (кНм), возникающих в продольных ригелях девятиэтажной железобетонной рамной конструкции, в осях А-В, 1-5 при расчете в упругой стадии и с учетом трещинообразования

№ элемента	№ сечений	Упругий расчет	Расчет с учетом трещинообразования	$\Delta, \%$
16	1	-111,7	-134,04	20
	2	84,042	97,4884	16
	3	-152,2	-185,7	22
17	1	-147	-174,94	19
	2	71,282	81,2609	14
	3	-142,4	-168,06	18
20	1	-150,1	-184,64	23
	2	113,22	131,335	16
	3	-208,4	-254,3	22
21	1	-199,2	-237	19
	2	96,423	110,886	15
	3	-193	-225,8	17
201	1	-143,1	-174,58	22
	2	82,424	97,2606	18
	3	-124,00	-152,58	23
202	1	-140,1	-168,17	20
	2	73,337	85,8045	17
	3	-145,2	-175,68	21
205	1	-183,1	-219,73	20
	2	111,11	127,779	15
	3	-179,7	-217,4	21
206	1	-191,3	-229,51	20
	2	98,518	112,31	14
	3	-196,7	-236,05	20
Примечание: Сечение 1 находится в начале элемента, 2 – в середине элемента, 3 – в конце элемента				

Таблица 5.9

Сравнение значений крутящих моментов M_x (кНм), возникающих в продольных ригелях девятиэтажной железобетонной рамной конструкции, в осях А-В, 1-5 при расчете в упругой стадии и с учетом трещинообразования

№ элемента	№ сечений	Упругий расчет	Расчет с учетом трещинообразования	$\Delta, \%$
16	1	-1,75404	-1,75404	0
	2	-1,75404	-1,75404	0
	3	-1,75404	-1,75404	0
17	1	-0,07207	-0,07209	0,03
	2	-0,07207	-0,07209	0,03
	3	-0,07207	-0,07209	0,03
20	1	0	0	0
	2	0	0	0
	3	0	0	0
21	1	0	0	0,03
	2	0	0	0,03
	3	0	0	0,03
201	1	-1,51737	-1,51783	0,03
	2	-1,51737	-1,51783	0,03
	3	-1,51737	-1,51783	0,03
202	1	-0,081382	-0,08141	0,03
	2	-0,081382	-0,08141	0,03
	3	-0,081382	-0,08141	0,03
205	1	0	0	0
	2	0	0	0
	3	0	0	0
206	1	0	0	0
	2	0	0	0
	3	0	0	0

Примечание: Сечение 1 находится в начале элемента, 2 – в середине элемента, 3 – в конце элемента

Сравнение значений изгибающих моментов M_z (кНм), возникающих в поперечных ригелях девятиэтажной железобетонной рамной конструкции, в осях А-В, 1-5 при расчете в упругой стадии и с учетом трещинообразования

№ элемента	№ сечений	Упругий расчет	Расчет с учетом трещинообразования	$\Delta, \%$
102	1	-54,9886	-60,487	10
	2	28,3743	30,3605	7
	3	-32,2625	-35,166	9
104	1	-18,0125	-19,454	8
	2	1,59853	1,67846	5
	3	21,2096	23,1185	9
139	1	-59,4316	-62,997	6
	2	28,7241	29,5858	3
	3	-27,12	-29,018	7
178	1	-26,0063	-28,607	10
	2	2,24672	2,44892	9
	3	30,4997	34,1597	12
250	1	-67,7357	-73,155	8
	2	29,5109	30,6913	4
	3	-17,2424	-18,449	7
252	1	-30,7863	-34,173	11
	2	2,70207	2,94526	9
	3	36,1904	39,8094	10
287	1	-72,1431	-80,8	12
	2	28,89	30,9123	7
	3	-14,0767	-15,344	9
289	1	-33,9571	-37,353	10
	2	2,38415	2,5272	6
	3	38,7255	43,3726	12
Примечание: Сечение 1 находится в начале элемента, 2 – в середине элемента, 3 – в конце элемента				

Сравнение значений крутящих моментов M_x (кНм), возникающих в поперечных ригелях девятиэтажной железобетонной рамной конструкции, в осях А-В, 1-5 при расчете в упругой стадии и с учетом трещинообразования

№ элемента	№ сечений	Упругий расчет	Расчет с учетом трещинообразования	$\Delta, \%$
102	1	-1,57536	-1,57599	0,04
	2	-1,57536	-1,57599	0,04
	3	-1,57536	-1,57599	0,04
104	1	0,1659	0,1659	0,04
	2	0,1659	0,1659	0,04
	3	0,1659	0,1659	0,04
139	1	-1,5725	-1,57313	0,04
	2	-1,5725	-1,57313	0,04
	3	-1,5725	-1,57313	0,04
178	1	0,173	0,17306	0,04
	2	0,173	0,17306	0,04
	3	0,173	0,17306	0,04
250	1	-1,58521	-1,58584	0,04
	2	-1,58521	-1,58584	0,04
	3	-1,58521	-1,58584	0,04
252	1	0,19022	0,19029	0,04
	2	0,19022	0,19029	0,04
	3	0,19022	0,19029	0,04
Примечание: Сечение 1 находится в начале элемента, 2 – в середине элемента, 3 – в конце элемента				

Сравнение значений изгибающих моментов M_y (кНм), при расчете в упругой стадии и с учетом трещинообразования приведено в Приложении Д, таблица Д.1, Д.2, Д.3.

Как видно из таблиц 5.6...5.11 трещинообразование в элементах девятиэтажной четырехшаговой и двухпролетной железобетонной пространственной рамной конструкции при заданной нагрузке оказывает существенное влияние на перераспределение изгибающих моментов M_z .

Разница значений изгибающих моментов M_z при расчете в предположении упругой работы конструкции и с учетом трещинообразования в стойках изменяется в пределах от 19% до 27%.

В продольных ригелях разница значений изгибающих моментов при расчете в предположении упругой работы конструкции и с учетом трещинообразования в опорных сечениях изменяется до 26%, а в пролетных сечениях до 14%.

Перераспределение изгибающих моментов M_z в поперечных ригелях при расчете в предположении упругой работы конструкции и с учетом трещинообразования для опорных сечений изменяется до 10%, а в пролетных сечениях до 6%.

Перераспределение изгибающих моментов M_y в результате трещинообразования не превышает: 0,5% в стойках и 0,04% продольных и поперечных ригелях.

Перераспределение крутящих моментов M_x в стойках, продольных и поперечных ригелях в результате трещинообразования не превышает 0,1%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Азизов Т.Н. Деформации железобетонных элементов с трещинами при кручении / Т.Н.Азизов, Н.Н. Срибняк // Дороги і мости. Зб. наук. праць. – К.: ДерждорНДІ, 2008. – Вип.9 – С.5-11.
2. Азизов Т.Н. Жесткость железобетонных элементов на кручение с нормальными и наклонными трещинами / Т.Н.Азизов // Будівельні конструкції. Міжвідомчий науково-технічний збірник. Вип. 63. – Київ: НДІБК, 2005. – С. 31-36.
3. Азизов Т.Н. Крутильная жесткость тавровых железобетонных элементов с нормальными трещинами / Т.Н.Азизов, В.И.Стадник // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. Вип. 33. – Одеса: Зовнішрекламсервіс, 2009. – С. 4-11.
4. Азизов Т.Н. НДС железобетонного элемента с нормальными трещинами при кручении / Т.Н.Азизов // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. Вип. 36. – Одеса: Зовнішрекламсервіс, 2009. – С. 10-16.
5. Азизов Т.Н. НДС железобетонных балок прямоугольного сечения с нормальными трещинами при изгибе с кручением / Т.Н.Азизов, Д.Ю.Парамонов // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. Вип. 38. – Одеса: Зовнішрекламсервіс, 2010. – С. 3-8.
6. Азизов Т.Н. Общий подход к определению крутильной жесткости железобетонных элементов с трещинами / Т.Н.Азизов // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. Вип. 17. – Рівне: Нац. ун-т водного господарства та природокористування, 2008. – С. 92-99.
7. Азизов Т.Н. Определение крутильной жесткости железобетонных элементов с трещинами / Т.Н.Азизов // Дороги і мости. Зб. наук. праць. – К.: ДерждорНДІ, 2007. – Вип.7, том1. – С. 3-8.
8. Азизов Т.Н. Прочность при кручении железобетонных элементов прямоугольного сечения с нормальными трещинами / Т.Н.Азизов,

- Н.Н. Срибняк // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. Збірник наукових праць. – Рівне, 2008. – Вип. 17 – С. 100-104.
9. Азизов Т.Н. Разрушение железобетонных элементов с нормальными трещинами в результате действия крутящих моментов / Т.Н.Азизов, В.И.Стадник, Д.Ю.Парамонов // Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. – Кременчук: КНУ, 2010. – Випуск 6 (65), частина 1. – С. 125-128.
 10. Азизов Т.Н. Розрахунок Залізобетонних коробчатих балок при крученні / Т.Н.Азизов, О.С.Мельник, О.В.Мельник // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. Вип. 20., – Рівне: Нац. ун-т водного господарства та природокористування, 2010. – С. 120-124.
 11. Азизов Т.Н. Экспериментальные исследования крутильной жесткости и прочности тавровых железобетонных элементов с нормальными трещинами при кручении / Т.Н.Азизов, В.И.Стадник // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. Вип. 37 – Одеса: Зовнішрекламсервіс, 2010. – С. 9-16.
 12. Азизов Т.Н. До питання визначення крутильної жорсткості залізобетонного елементу з нормальними тріщинами / Т.Н.Азизов, Н.М.Голодкова // Строительство, материаловедение, машиностроение. Сб. научн. трудов. – Днепропетровск, ПГАСА, 2007–Вип.43. – С 20-30.
 13. Азизов Т.Н. Экспериментальна методика визначення крутильної жорсткості елементів збірного залізобетонного перекриття з нормальними тріщинами / Т.Н.Азизов, Н.М.Голодкова // Бетон и железобетон в Украине, 2008 – №6. – С. 16-18.
 14. Азизов Т.Н. Экспериментальні дослідження крутильної жорсткості та міцності залізобетонних елементів з нормальними тріщинами при крученні / Т.Н.Азизов, Н.М.Срибняк // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. Вип. 34. – Одеса: Зовнішрекламсервіс, 2009. – С. 4-14.
 15. Азизов Т.Н. НДС залізобетонних коробчатих балок з нормальними

- тріщинами при крученні з врахуванням не лінійності / Т.Н.Азізов, О.В.Мельник, О.Я.Червинський // Вісник Донбаської національної академії будівництва та архітектури. Вип. №2011-4(90). – Макіївка: Донбаська національна академія будівництва та архітектури, 2011. – С.18 – 23.
16. Азізов Т.Н. Просторова робота залізобетонних перекриттів. Теорія та методи розрахунку: дис. ... доктора техн. наук: 05.23.01 / Азізов Талят Нурединович. – Полтава, 2006. – 406 с.
 17. Александров А.В. Сопротивление материалов / А.В.Александров, В.Д.Потапов, Б.П.Державин; Учеб. для вузов. – М.: Высшая школа, 1995. – 560 с.
 18. Андреев В.В. Пространственная работа связевых каркасов многоэтажных производственных зданий, включающих ядро жесткости и плоские сквозные связевые элементы, с учетом геометрической нелинейности: дис. ... кандидата техн. наук: 05.23.01 / Андреев В.В. – Москва, МИСИ, 1986. – 182 с.
 19. Артамонов М.И. Расчет рам методом сил и перемещений. Консультация для студентов IV курса / Артамонов М.И. – М.: 1976. – 48 с.
 20. Бабич В.Є. Напружено-деформований стан і міцність нерозрізних залізобетонних балок при одноразових та повторних навантаженнях: дис. ... кандидата техн. наук: 25.23.01./ Бабич Владимир Евгеньевич. – Рівне, 2005. – 176 с.
 21. Байков В.Н. Железобетонные конструкции. Общий курс / В.Н.Байков, Э.Е.Сигалов. 5-е изд. – М.: 1991. – 767 с.
 22. Бахвалов Н.С. Численные методы / Бахвалов Н.С. – М.: Наука, 1973. – 632 с.
 23. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести / Безухов Н.И. – М.: Высшая школа, 1968. – 512 с.
 24. Безухов Н.И. Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач / Н.И.Безухов, О.В.Лужин – М.: Высшая школа, 1974. – 200 с.
 25. Беклемищев Д.П. Теория перемещений и расчет статически неопределенных балок и рам методом сил / Д.П.Беклемищев,

- В.А.Щуцкий – Л., 1957. – 57 с.
26. Бенерджи П.К. Методы граничных элементов в прикладных науках / П.К.Бенерджи, Р.Баттерфилд. Под ред. Р.В.Гольдшейна. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
 27. Березин И.С. Методы вычислений. Т. 1, 2. / И.С.Березин, Н.П.Жидков – М.: Физматгиз, 1959. – 280 с.
 28. Бетонні та залізобетонні конструкції з важкого бетону. Правила проектування: ДСТУ В.2.6-156:2011. – Офіц. изд. Київ: Міністерство регіонального розвитку та будівництва України, 2010. – 162с. (Нормативний документ Мінрегіонбуд України).
 29. Бетонні та залізобетонні конструкції. Основні положення: ДБН В.2.6-98:2009. – Офіц. изд. Київ: Міністерство регіонального розвитку та будівництва України, 2011. – 71с. – (Нормативний документ Мінрегіонбуд України).
 30. Биргер И.А. Некоторые математические методы решения инженерных задач / Биргер И.А. – М.: Оборонгиз, 1956. – 152 с.
 31. Бреббиа К. Применение метода граничных элементов в технике / К.Бреббиа, С.Уокер. Под ред. Э.И.Григолюка. – М.: Мир, 1982. – 248 с.
 32. Бычков Д.В. Формулы и графики для расчета рам / Бычков Д.В. – М.: Госстройиздат, 1957. – 193 с.
 33. Вайнберг Д.В. Пространственные рамные каркасы инженерных сооружений / Д.В.Вайнберг, В.Г.Чудновский – К., 1948. – 237 с.
 34. Вайнберг Д.В. Расчет пространственных рам / Д.В.Вайнберг, В.Г.Чудновский – К.: Госстройиздат УССР, 1964. – 308 с.
 35. Валишвили Н.В. Формулы для расчета рам со стойками переменного сечения. Справочное пособие / Валишвили Н.В. – М.: «Машиностроение», 1965.
 36. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / Васидзу К. – М.: Мир, 1987. – 544 с.
 37. Власов В.З. Тонкостенные пространственные системы / Власов В.З. –

- М.: Стройиздат, 1958. – 502 с.
38. Вольфсон Б.П. Вопросы развития методов расчета зданий как пространственных систем. Исследование зданий как пространственных систем, вып.49 / Вольфсон Б.П. – М.: Труды ЦНИИСК, 1975. – С. 5–12.
 39. Гвоздев А.А. Инструкция по расчету железобетонных рам и каркасов / А.А.Гвоздев, В.И.Мурашов – М.: изд. Наркомата и тяжелой промышленности, 1932. – 48 с.
 40. Гвоздев А.А. О перераспределении усилий в статически неопределимых железобетонных обычных и предварительно напряженных конструкциях / Гвоздев А.А. – М.: Госстройиздат, 1955. – 29 с.
 41. Гвоздев А.А. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия / Гвоздев А.А. – М.: Стройиздат, 1949. – 280 с.
 42. Геммерлинг А.В. Расчет стержневых систем / Геммерлинг А.В. – М.: «Стройиздат», 1974. – 203 с.
 43. Глушков Г.С. Формулы для расчета неразрезных балок и рам / Г.С.Глушков, И.Р.Егоров, В.В.Ермолов – М.: Машгиз, 1963. – 343 с.
 44. Глушков Г.С. Формулы для расчета сложных рам / Г.С.Глушков, И.Р.Егоров, В.В.Ермолов – М.: Машиностроение, 1966. – 352 с.
 45. Гольшев А.Б. Теория железобетона на экспериментальной основе / А.Б.Гольшев, П.И.Кривошеев, А.Н.Бамбура – К.: Гамма-Принт, 2009. – 397 с.
 46. Гузь А.Н. Трехмерная теория устойчивости стержней, пластин и оболочек / А.Н.Гузь, И. Ю.Бабич. – К.: Вища школа, 1980. – 168 с.
 47. Гурьев Г.Г. Деформационный расчет многоэтажных зданий связевой системы. Сб. Трудов №90 «Пространственная работа конструкций» / Г.Г.Гурьев, Л.Л.Паньшин – М.: МИСИ, 1971.
 48. Данилов В.Д. Номограммы для расчета балок и рам / Данилов В.Д. – Л., 1960. – 27 с.
 49. Дарков А.В. Строительная механика, учеб. для строит. спец. вузов. 8-е изд. / А.В.Дарков, Н.Н.Шапошников – М.: Высш. шк., 1986. – 607 с.
 50. Дащенко А.Ф. Численно – аналитический метод граничных элементов.

Том 1 / А.Ф.Дашченко, Л.В.Коломиец, В.Ф.Оробей, Н.Г.Сурьянинов – О.: ВМВ, 2010. – 451 с.

51. ДБН В.1.2-2:2006 «Нагрузки и воздействия» / Київ: Міністерство регіонального розвитку та будівництва України, 2006. – 71с. (Нормативний документ Мінрегіонбуд України).
52. Дорофеев В.С. К построению диаграмм «крутящий момент – угол закручивания» с использованием шагово-итерационной методики для железобетонных элементов прямоугольного сечения с трещиной/ В.С.Дорофеев, А.В.Ковров, А.В.Ковтуненко, А.М.Кушнир // «Проблемы теории и практики строительных конструкций» Одеса, ОДАБА, 2013. – С. 73-79.
53. Дорофеев В.С. О необходимости и постановке системных экспериментальных исследований прочности и, трещиностойкости и деформативности приопорных участков изгибаемых железобетонных элементов, испытывающих сложные деформации, с целью уточнения и развития методов их расчета / В.С.Дорофеев, В.М.Карпюк и др. // Будівельні конструкції. Міжвідомчий науково-технічний збірник. Вип. 62. Том 2. – К.: НДІБК, 2005. – С. 160-167.
54. Дорофеев В.С. Определение напряженно-деформированного состояния железобетонных рамных конструкций с учетом процессов трещинообразования / В.С.Дорофеев, А.В.Ковров, А.В.Ковтуненко, А.М.Кушнир // Вісник Національного університету «Львівська політехніка», №662. – Львів, НУ «Львівська політехніка», 2010. – С.169-174.
55. Дроздов П.Ф. Конструирование и расчет несущих систем многоэтажных зданий и их элементов / Дроздов П.Ф. – М.: Стройиздат, 1977. – 223 с.
56. Дроздов П.Ф. Проектирование и расчет многоэтажных гражданских зданий / П.Ф.Дроздов, М.И.Додонов, Л.Л.Паньшин, Р.Л.Саруханян // Стройиздат. – М.:, 1986. – 351 с.
57. Дыховичный А.А. Статически неопределимые железобетонные конструкции / Дыховичный А.А. – К.: Будівельник, 1978. – 108 с.

58. Дыховичный Ю.А. Конструирование и расчет жилых и общественных зданий повышенной этажности / Дыховичный Ю.А. – М, Стройиздат, 1970. – 248с.
59. Дыховичный Ю.А. О методике расчета многоэтажных каркасных и о методике расчета многоэтажных каркасных и панельных зданий, №4 / Дыховичный Ю.А., Строительная механика и расчет сооружений, 1975.
60. Егерев К.Е. Теория и практика расчета рам по способу угловых деформаций / Егерев К.Е. – Ашхабад: АН Туркменской ССР, 1953. – 113 с.
61. Егупов В.К. Пространственные расчеты зданий. Пособие по проектированию / Егупов В.К., Командрина Т.А., Голобородько В.Н. – К.: Будівельник, 1976. – 264 с.
62. Елагин Э.Г. Сопротивление железобетонных стержней совместному действию изгиба с кручением на стадиях работы с трещинами: дис. ...доктора техн. наук: 05.23.01 / Елагин Эдуард Гореевич. – М.,1994. – 462 с.
63. Жемочкин Б.Н. Расчет рам / Жемочкин Б.Н. – М.: Стройиздат, 1965. – 406 с.
64. Жемочкин Б.Н. Расчет статически неопределимых рамных систем. Способ угловых фокусов / Жемочкин Б.Н. – М. – Л.: Госстройиздат, 1932. – 128 с.
65. Жемочкин Б.Н. Расчет статически неопределимых рамных систем. Способ угловых деформаций / Жемочкин Б.Н.– М. – Л.: Гостехиздат, 1931. – 250 с.
66. Залесов А.С. Настоящее и будущее расчета железобетона / А.С.Залесов, Т. А.Мухамедиев // Бетон и железобетон. – 2005. – № 4. – С. 3 - 5.
67. Зенкевич О. К. Метод конечных элементов в технике / Зенкевич О.К. – М.: Стройиздат, 1975. – 541 с.
68. Ильин В.П. Численные методы решения задач строительной механики. Справочное пособие / Ильин В.П. – Минск: Вышэйшая школа, 1990. – 349 с.
69. Калманок А.С. Практические методы расчета многоэтажных зданий на горизонтальные нагрузки. Вопросы расчета и конструирования жилых и общественных зданий со сборными элементами / Калманок А.С. – М.:

- Госстройиздат, 1948. – 192 с.
70. Калманок Пространственная работа сборных многоэтажных зданий / Калманок А.С. – М.: Госстройиздат, 1956. – 88 с.
 71. Карабанов Б.В. Учет геометрической нелинейности при проектировании железобетонных рам / Карабанов Б.В// Бетон и железобетон № 1. – 1993. – С. 17–19.
 72. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона / Карпенко Н.И. – М.: Стройиздат, 1996. – 416 с.
 73. Касаев Д.Х. Прочность элементов железобетонных конструкций при кручении и изгибе с кручением / Касаев Д.Х. – Ростов н/Д.: Изд-во Рост. ун-та, 2001. – 176 с.
 74. Клейногель А.О. Формулы для расчета сложных рам / А.О.Клейногель, А.Хазельман. – М.: Стройиздат, 1968. – 232 с.
 75. Клованич С.Ф. Метод конечных элементов в нелинейных расчетах пространственных железобетонных конструкций / С.Ф.Клованич Д.И.Безушко. – О.: ОНМУ, 2009. – 89 с.
 76. Ковров А.В. Автоматизация формирования матриц численно-аналитического метода граничных элементов при расчете многопролетных нерарезных балок переменной жесткости / А.В.Ковров, А.В.Ковтуненко // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури, № 26. – Одеса: ОДАБА, 2007. – С. 184-189.
 77. Ковров А.В. Автоматизация формирования матриц численно-аналитического варианта метода граничных элементов при статическом расчете плоских многопролетных одноэтажных рам / А.В.Ковров, Т.А.Синюкина, Т.С.Цатуров, А.В.Ковтуненко // Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури, № 5. – Дніпропетровськ: ПДАБА, 2011. – С.36-43.
 78. Ковров А.В. Задачи совершенствования расчета пространственных рамных конструкций/ А.В.Ковров, А.М.Кушнир // Збірник наукових праць. Реставрація, реконструкція, урбоекотолія RUR-2010 №7-8.

ICOMOS. – Одесса, 2010. – С.225-230.

79. Ковров А.В. К применению численно-аналитического метода граничных элементов для расчёта пространственных рамных конструкций / А.В.Ковров, А.В.Ковтуненко, А.М.Кушнир // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. Вип. №40, О.: ОДАБА, 2010. – С.117-123.
80. Ковров А.В. Методика определения крутильной жесткости сечений бетонных элементов / А.В.Ковров, А.М.Кушнир // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. №45 – Одеса, ОДАБА, 2012. – С.330-334.
81. Ковров А.В. Напряженно-деформированное состояние неразрезных железобетонных балок: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01 / Ковров Анатолий Владимирович. – О.: ОДАБА, 2007. – 216 с.
82. Ковров А.В. О закономерностях формирования матриц численно-аналитического варианта МГЭ при расчете железобетонных рамных конструкций / А.В.Ковров, А.В.Ковтуненко // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури, № 34. – О.: ОДАБА, 2009. – С.360-366.
83. Ковров А.В. Определение центра кручения сечений железобетонных балок в упругой стадии работы / А.В.Ковров, А.В.Ковтуненко, А.М.Кушнир // Современные строительные конструкции из металла и древесины. №16, часть 1. – О.: ОДАБА, 2012. – С.130-137.
84. Ковров А.В. Расчет простейшей пространственной рамной конструкции численно-аналитическим методом граничных элементов / А.В.Ковров, А.В.Ковтуненко, А.М.Кушнир // Сборник научных трудов. Современные строительные конструкции из металла и древесины. Вип. №15, Часть 2. – О.: ОДАБА, 2011. – С.122-129.
85. Ковтуненко А.В. Расчет статически неопределимых железобетонных рамных конструкций с учетом трещинообразования: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01 / Ковтуненко Алексей Владимирович. – О.: ОДАБА, 2012. – 162 с.

86. Косицын Б.А. Статический расчет крупнопанельных и каркасных зданий / Косицын Б.А. – М.: Стройиздат, 1971. – 110 с
87. Кротов Ю.В. Основы расчета пространственных рам / Ю.В.Кротов, Б.Н.Горбунов –М.–Л., 1936. – 140 с.
88. Кротов Ю.В. Расчет пространственных рам / Кротов Ю.В. – Москва, 1971. – 60 с.
89. Крылов А.Н. Избранные труды / Крылов А.Н. – М. – Л.: АН СССР, 1958. – 804 с.
90. Кузнецов Н.В. Практический расчет рам и каркасов / Кузнецов Н.В. – К.: «Будівельник», 1970. – 214 с.
91. Купрадзе В.Д. Трехмерные задачи теории упругости / Купрадзе В.Д. – Тбилиси: Тбилисск. Ун – та, 1968. – 627 с.
92. Лившиц И.Е. Особенности расчета стержневых пространственных конструкций / Лившиц И.Е. – Ленинград, 1968. – 240 с.
93. Линецкий В.Д. Жесткие рамы. Расчетные формулы для линейных нагрузок / Линецкий В.Д. – М.–Л.: КУБУЧ, 1934. – 248 с.
94. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Малинин Н.Н. – М.: Машиностроение, 1968. – 400 с.
95. МАТЛАБ в научных и инженерных расчетах / Дащенко А.Ф., Кириллов В.Х., Коломиец Л.В., Оробей В.Ф. – Одесса: Астропринт, 2003. – 216с.
96. Матросов А.В. Метод начальных параметров. Аналитический подход / Матросов А.В. – Санкт-Петербург, 2007. – 6 с.
97. Митрофанов В.П. Оптимизационная теория прочности железобетонных элементов и совершенствование метода предельного равновесия для расчета статически неопределимых балок и рам / В.П.Митрофанов, С.И.Арцев, М.Шабан // Научно – практические проблемы современного железобетона: Сб. тезисов. – К., 1996.
98. Мурашев В.И. Трещиностойкость, прочность и жесткость железобетона / Мурашев В.И. – М.: Машстройиздат, 1950. – 268 с.

99. Нейшильд В.Ч. Таблицы для расчета многопролетных, многоэтажных рам и неразрезных балок / Нейшильд В.Ч. – М.–Л.: Госстройиздат, 1933. – 319 с.
100. Немчинов Ю.И. Метод пространственных конечных элементов (с приложениями к расчету зданий и сооружений) / Немчинов Ю.И. – К.: НИИСК, 1995. – 367 с.
101. Немчинов Ю.И. Расчет пространственных конструкций (метод конечных элементов) / Немчинов Ю.И. – К.: Будівельник, 1980. – 232 с.
102. Никитин И.К. Каркасы многоэтажных зданий с шарнирными и жесткими узлами. Конструкции многоэтажных производственных зданий / Никитин И.К. – М.: Сб. научн. трудов. ЦНИИпромзданий, 1988. – С 5–15.
103. Никитин И.К. Уточнение статического расчета железобетонных рамных каркасов с учетом физической нелинейности на действие эксплуатационных нагрузок / Никитин И.К. – М.: Железобетонные конструкции промышленных зданий, ЦНИИпромзданий, 1984.
104. Оробей В. Ф. Решение задач статики, динамики и устойчивости стержневых систем. Применение метода граничных элементов. Учебное пособие / В.Ф.Оробей, А.В.Ковров – О., 2004. – 122 с.
105. Остроменцкий Ю.Ц. Приближенные и сокращенные способы расчета статически неопределимых систем / Ю.Ц.Остроменцкий, Л.П.Портаев. – М.: Стройиздат, 1964. – 176 с.
106. Панышин Л.Л. О работе несущих систем зданий повышенной этажности с нелинейно деформируемыми связями сдвига / Панышин Л.Л. – Строительная механика и расчет сооружений. – 1969. – № 6. – С. 16 – 18.
107. Панышин Л.Л. Перераспределение усилий между элементами несущей системы каркасно–панельного здания / Панышин Л.Л. // Бетон и железобетон №7. – 1981. С.30 – 31.
108. Панышин Л.Л. Пространственная работа несущих конструкций многоэтажных зданий / Панышин Л.Л. – М.: Пространственная работа железобетонных

конструкций. Сб. тр. № 72. МИСИ – 1969.

109. Панышин Л.Л. Расчёт многоэтажных зданий как пространственной системы с учётом нелинейной деформации связей / Панышин Л.Л. – М.: Работа конструкций жилых зданий из крупноразмерных элементов. Стройиздат. – 1971.
110. Парамонов Д.Ю. Жесткость и прочность железобетонных элементов с нормальными трещинами при изгибе с кручением дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01 / Парамонов Денис Юрьевич. – Одесса, 2012. – 289 с.
111. Подольский Д.М. Пространственный расчет зданий повышенной этажности / Подольский Д.М. – М.: Стройиздат, 1975. – 158 с.
112. Притыкин И.Г. Расчет многопролетных многоярусных рам. Упрощенные и приближенные методы расчета / Притыкин И.Г. – Минск, 1936. – 117 с.
113. Расчет и проектирование конструкций высотных зданий из монолитного железобетона / [Городецкий А.С., Батрак Л.Г., Городецкий Д.А., Лазнюк М.В., Юсипенко С.В.] – К.: Факт, 2004. – 104 с.
114. Рекомендации по расчету прочности и жесткости железобетонных рам с нелинейными диаграммами деформации узлов и элементов на горизонтальные нагрузки. – М.: Центр науч.–исслед. и проектный институт типового и экспериментального проектирования жилища. ЦНИИЭП. – 1976. – 35 с.
115. Ржаницын А. Р. Составные стержни и пластинки / Ржаницын А.Р. – М.: Стройиздат, 1986. – 316 с.
116. Ржаницын А.Р. Строительная механика / Ржаницын А.Р. – М.: Высшая школа, 1991. – 440 с.
117. Рогицкий С.А. Расчет плоских и пространственных рам методом последовательного уравнивания узлов / Рогицкий С.А. – М.: ОНТИ, 1939. – 151 с.
118. Серия 7–02Р Расчет многоэтажных рам состоящих из элементов переменного сечения. – М.: Гипротис, 1959. – 59 с.

119. Сеницын С.Б. Строительная механика в методе конечных элементов стержневых систем. Учебное пособие для технических вузов / Сеницын С.Б. – М.: АСВ, 2002. – 320 с.
120. Снитко И.К. Расчет рамных сооружений итерационными методами на прочность и устойчивость / Снитко И.К. – Л.–М.: Госстройиздат, 1964. – 234 с.
121. Соппротивление материалов / [Писаренко Г.С., Агарев В.А., Квитка А.Л., Попков В.Г., Уманский Э.С.] – К.: «Вища школа», 1986. – С. 186-196.
122. Сосис П.М. Расчет рам способом перераспределения начальных значений неизвестных / Сосис П.М. – К.: Гостехиздат УССР, 1956. – 167 с.
123. Срібняк Н.М. Крутильна жорсткість залізобетонних елементів перекриттів з нормальними тріщинами: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01 / Срібняк Наталія Миколаївна. – Одеса., 2009. – 257 с.
124. Стадник В.И. Жесткость и прочность при кручении железобетонных тавровых элементов с нормальными трещинами: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01 / Стадник Валентин Игоревич. – Одесса:, 2011. – 206с.
125. Стрелецкий Н.С. К вопросу о значении рабочих методов в расчете конструкций / Стрелецкий Н.С. // Известия Высших учебных заведений. Строительство и архитектура. – Новосибирск. – 1960. – С. 3-8.
126. Строительная механика. Специальный курс. Применение метода граничных элементов / В.А.Баженов, А.Ф.Дашченко, Л.В.Коломиец, В.Ф.Оробей // Учебное пособие. Одесса, «Астропринт». 2001. – 288 с.
127. Сызранцев В.Н. Расчет напряженно – деформированного состояния деталей методами конечных и граничных элементов: Монография / В.Н.Сызранцев, К.В.Сызранцева – Курган: Курганского гос. ун – та, 2000. –111с.
128. Такабея Ф. Расчет рамных систем. Рамные таблицы. Пособие для проектирования / Такабея Ф. – М.–Л.: Госстройиздат, 1932. – 119 с.
129. Такабея Ф. Таблицы для расчета рам / Такабея Ф. – Х.: ОНТВУ, 1932. – 128 с.
130. Терегулов И.Г. Соппротивление материалов и основы теории упругости и пластичности / Терегулов И.Г. – М.: Высшая школа, 1984. – 472 с.

131. Тимошенко С.П., Теория упругости / С.П.Тимошенко, Д.Гудьер – М., 1975. – 576 с.
132. Тихий М. Расчет железобетонных рамных конструкций в пластической стадии. Перераспределение усилий. Пер. с чешского Сергеенко Б.М. / М.Тихий, Й.Ракосник – М.: Стройиздат, 1976. – 198 с.
133. Трекин Н.Н. Пространственная работа несущих элементов каркасной системы с учетом нелинейности и податливости узловых соединений: дис...доктора техн. наук: 05.23.01 / Трекин Николай Николаевич.– М., 2003. –421 с.
134. Угодчиков А.Г. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела / А.Г.Угодчиков, Н.М.Хуторянский – Казань: Казанск, 1986. – 296 с.
135. Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. Том 1, 2. / Филин А.П. – М.: Наука, 1975. – 831 с.
136. Ханджи В.В. Расчет многоэтажных зданий со связевым каркасом / Ханджи В.В. – М.: Стройиздат, 1977. – 187 с.
137. Чиненков Ю.В. Исследование работы железобетонных элементов прямоугольного сечения, работающих на изгиб с кручением / Чиненков Ю.В. // Исследование прочности железобетонных конструкций. –НИИЖБ. – Вып. 5 – М., 1959. – С. 29-52.
138. Численно – аналитический метод граничных элементов. Том 2 / А.Ф.Дашченко, Л.В.Коломиец, В.Ф.Оробей, Н.Г.Сурьянинов – О.: ВМВ, 2010. – 510 с.
139. Численные методы в механике / В.А.Баженов, А.Ф.Дашченко, Л.В.Коломиец, В.Ф.Оробей, Н.Г.Сурьянинов – О.: «Стандартъ», 2005. – 564 с.
140. Шагин П.П. Расчет многоярусных рам способом последовательного сопряжения / Шагин П.П. – Л.–М.: Гос. изд. лит. по стр. и арх., 1954. – 84 с.
141. Шагин П.П. Сокращенные методы расчета рам / Шагин П.П. Госстройиздат, 1951.
142. Шапошников Н.Н. О построении автоматизированной системы по

- расчету зданий как пространственной системы / Шапошников Н.Н., Мадмаров М., Ожерельев В.А. // Строительная механика и расчет сооружений, 1984. – № 3. – С.13-17.
143. Швехман М. Пространственная работа многоэтажных зданий / Швехман М. – М.: Строительство и архитектура Москвы № 1, 1967.
144. Школа Ю. О. Диаграмма сдвига бетона / Школа Ю.О. // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. Збірник наукових праць міжнародного симпозиуму «ДОМ ЕКСПО – 2000». Вып. 2. – О.: «Місто майстрів», 2000. – С. 154 – 156.
145. Школа Ю. О. Несуча здатність та деформативність залізобетонних стержневих елементів при складному напруженому стані: дис... канд. техн. наук: 05.23.01/ Школа Юлия Александровна. – О.: ОДАБА, 2002. – 196 с.
146. Юдин В.К. Расчет пространственных рам / Юдин В.К. – К., 1961. – 141 с.
147. Яременко А.Ф. Инженерная методика определения крутильной жесткости железобетонных балок с нормальными трещинами / Яременко А.Ф., Чучмай А.М., Яременко Н.А. // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. Вып. 33 – О.: Зовнішрекламсервіс, 2009. – с. 146-151.
148. Яременко А.Ф. Расчет железобетонных балок прямоугольного поперечного сечения при действии продольной силы, изгиба и кручения / А.Ф.Яременко, Ю.А.Школа // Збірник наукових праць. Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. Вып. 3. – Рівне: Нац. ун-т водного господарства та природокористування, 1999. – С. 301-305.
149. Яременко О.Ф. Несуча здатність та деформативність залізобетонних стержневих елементів в складному напруженому стані / О.Ф. Яременко, Ю.О. Школа. – Одеса: ОДАБА, Евен, 2010. – 136с.
150. Bathe K.J. Finite element procedures in engineering analysis. Prentice-Hal. Englewood Cliffs. New Jersey, 1982.
151. Larry J. Segerlind Applied Finite Element Analysis. New York, London, Sydney, Toronto. 1976 – 392с.
152. Zienkiewicz O.C. Cheung Y.K. The finite element method for analysis of

elastic isotropic and orthotropic slabs. – Proc. I.C.E., №28, 1964.

153. BS EN 1992, Eurocode 2: Design of concrete structures.
154. Ernst G.G., Smith G.M., Riveland A.R. und Pierce D. N. Basic reinforced concrete frame performance under vertical and lateral loads. ACI Journal 70 (1973).- No. 4.- S. 261 – 269.
155. Goszczyński S., Włodarczyk M. Intensywność procesu zarysowania belek żelbetonowych w funkcji momentu zginającego // Pięćdziesiąta pierwsza konferencja naukowa Komitetu inżynierii lądowej i wodnej PAN i Komitetu nauki PZITB. – Gdańsk-Krynica, 2005. – s.65-72.
156. Foster S., Marti P., Mojsilovic N. Desing of Reinforced Concrete Solids Using Stress Analysis // ACI Structural Journal. – 2003. - Vol. 100, No. 6.- P.758-764.
157. W. T. Ang, A Beginner's Course in Boundary Element Methods, Universal Publishers,ISBN 978-1-58112-974-8 (2007)
158. Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C. Boundary Element Techniques. Berlin etc.: Springer, 1984 = Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. 524 с.
159. Nardini D. A New Approach to Free Vibration Analysis using Boundary Elements / D. Nardini, C. A. Brebbia // Boundary Element Methods in Engineering / ed. C. A. Brebbia. – Springer-Verlag, Berlin and New York, 1982.
160. Banerjee, P.K. and R. Butterfield, 1979. Developments in boundary element methods-1, Applied Science Publishers Ltd, London.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ А

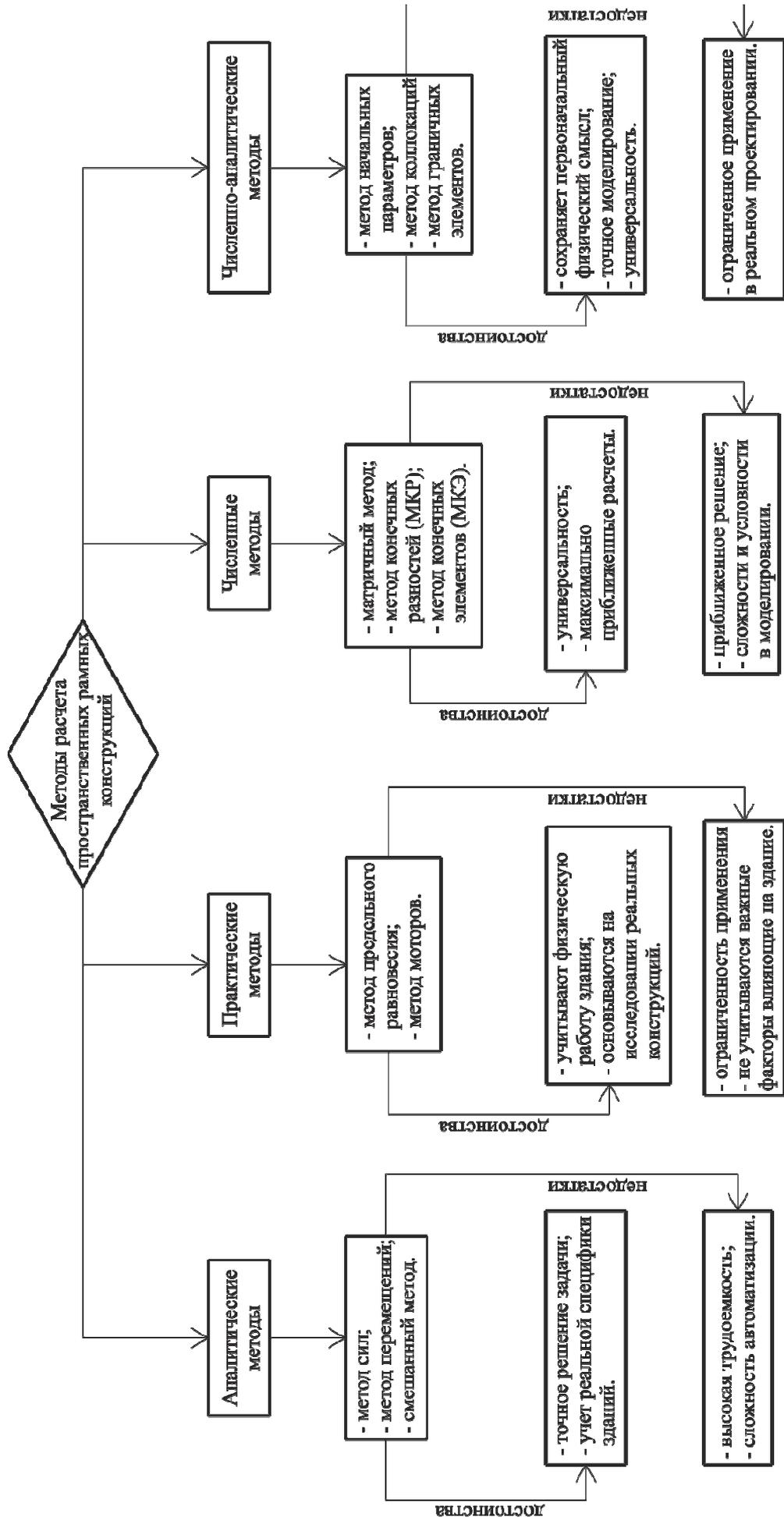


Рис. А.1 Классификация основных методов расчета пространственных рамных конструкций

$$R = \left\| \begin{array}{c} \overrightarrow{R_1} \\ \overrightarrow{R_2} \\ \vdots \\ \overrightarrow{R_{t_1}} \end{array} \right\|; \overrightarrow{R_1} = \left\| \begin{array}{c} R_1(x_1) \\ R_1(x_2) \\ \vdots \\ R_1(x_n) \end{array} \right\|; \dots \overrightarrow{R_{t_1}} = \left\| \begin{array}{c} R_{t_1}(x_1) \\ R_{t_1}(x_2) \\ \vdots \\ R_{t_1}(x_n) \end{array} \right\|;$$

$$D = \left\| \begin{array}{cccc} D_1 & & & \\ & D_2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & & D_s \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & D_{t_1} \end{array} \right\|; K = \left\| \begin{array}{cccc} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1t_1} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2t_1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ K_{t_1 1} & K_{t_1 2} & \dots & K_{t_1 t_1} \end{array} \right\|;$$

$$K_q = \left\| \begin{array}{c} \overrightarrow{\Delta_{q1}} \\ \overrightarrow{\Delta_{q2}} \\ \vdots \\ \overrightarrow{\Delta_{qt_1}} \end{array} \right\|; \overrightarrow{\Delta_{q1}} = \dots = \overrightarrow{\Delta_{qt_1}} = \left\| \begin{array}{c} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{array} \right\|;$$

$$K_{is} = \left\| \begin{array}{cccc} K(x_1, y_i; x_1, y_s) & K(x_1, y_i; x_2, y_s) & \dots & K(x_1, y_i; x_n, y_s) \\ K(x_2, y_i; x_1, y_s) & K(x_2, y_i; x_2, y_s) & \dots & K(x_2, y_i; x_n, y_s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(x_n, y_i; x_1, y_s) & K(x_n, y_i; x_2, y_s) & \dots & K(x_n, y_i; x_n, y_s) \end{array} \right\|;$$

$$D_s = \left\| \begin{array}{cccc} \delta_s(x_1, x_1) & \delta_s(x_1, x_2) & \dots & \delta_s(x_1, x_n) \\ \delta_s(x_2, x_1) & \delta_s(x_2, x_2) & \dots & \delta_s(x_2, x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_s(x_n, x_1) & \delta_s(x_n, x_2) & \dots & \delta_s(x_n, x_n) \end{array} \right\|;$$

$$s = 1, 2 \dots t_1,$$

где n – число этажей;

y_i, y_s – расстояние от левой торцевой диафрагмы до диафрагмы с номерами i, s ;

x_k – расстояние от основания здания до перекрытия с номером k ;

$\delta_s(x_k, x_r)$ – единичные перемещения диафрагмы с номером s ;

$K(x_k, y_i, x_r, y_s)$ – единичные перемещения неполного пространственного рамного каркаса;

Δ_k – перемещения в уровне k -го перекрытия неполного каркаса относительно вертикальных диафрагм от ветровой равномерно распределенной по длине здания нагрузки.

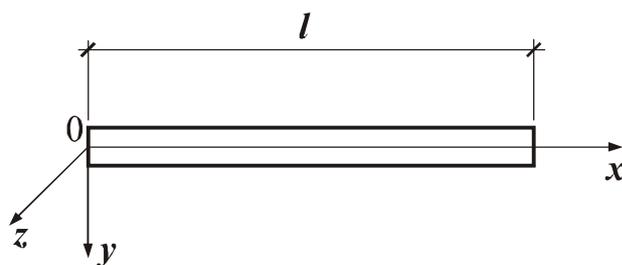


Рис.А.1. Принятая система координат

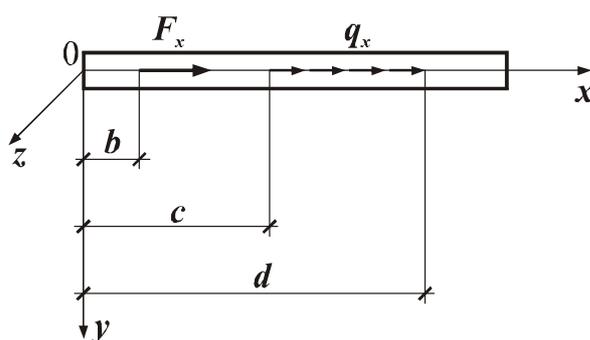


Рис. А.2. Принятые обозначения для нагрузки при растяжении-сжатии

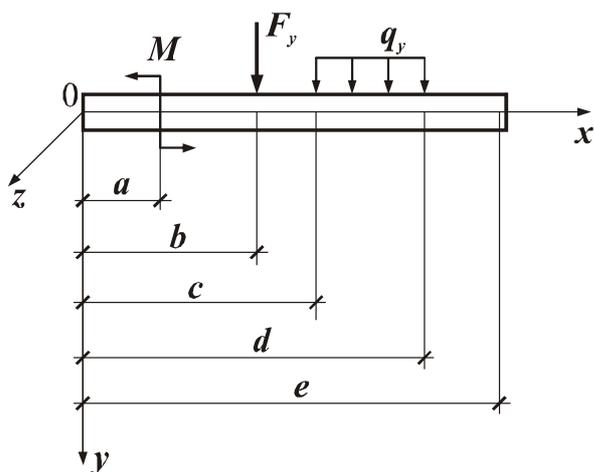


Рис. А.3. Принятые обозначения для нагрузки при изгибе

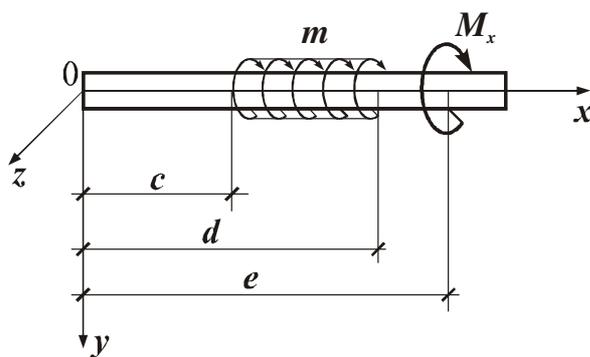


Рис. А.4. Принятые обозначения для нагрузки при кручении

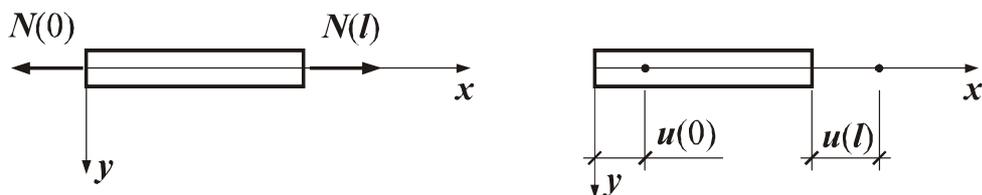


Рис. А.5. Принятые положительные направления граничных параметров при растяжении-сжатии

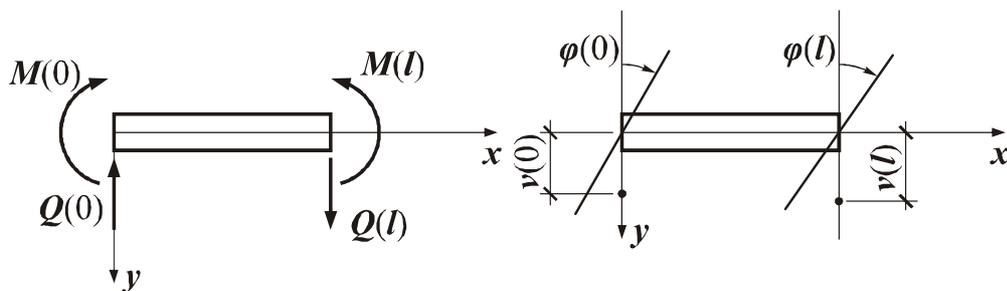


Рис. А.6. Принятые положительные направления граничных параметров при изгибе

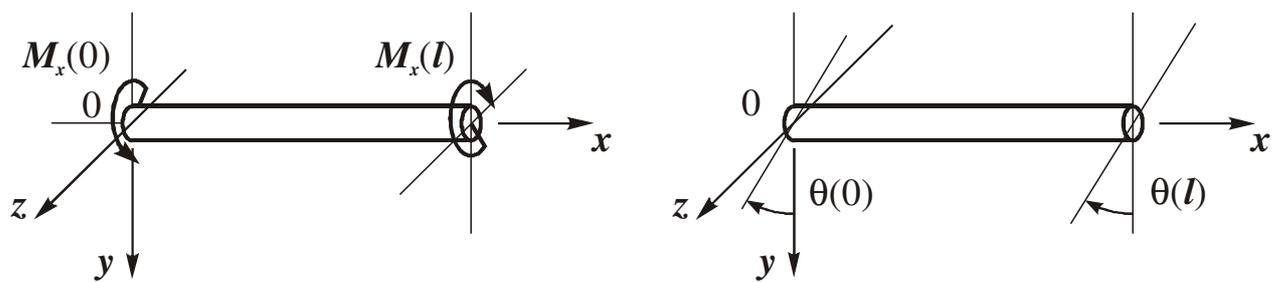


Рис. А.7. Положительные направления граничных параметров при кручении

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

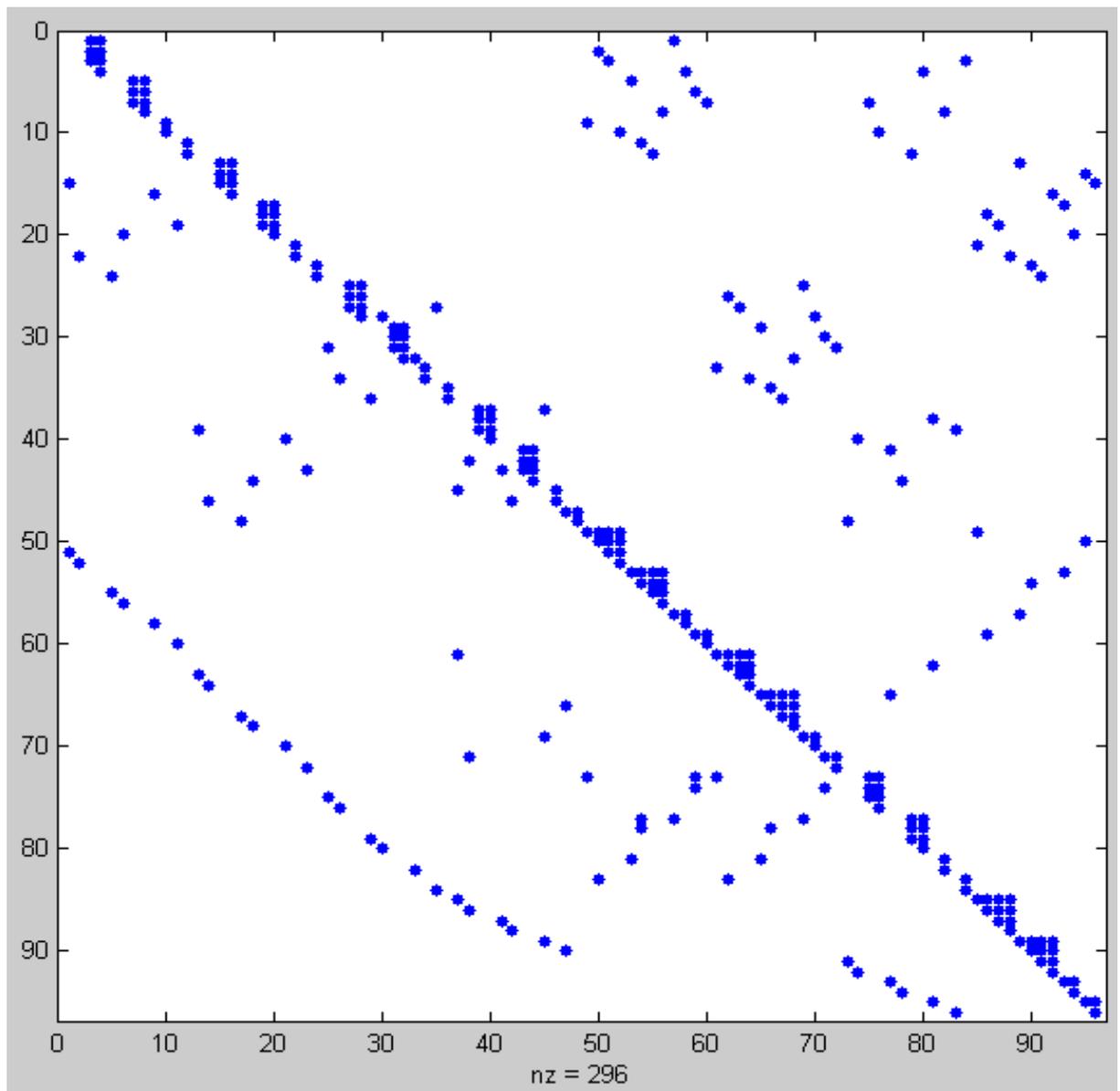


Рис. Б.1. Структура матрицы A^* сформированной в системе компьютерной математики MatLab

Сравнение значений результатов расчетов

Номер элемента	Номер сечения	Изгибающий момент M_z , кНм			Изгибающий момент M_y , кНм			Крутящий момент M_x , кНм		
		ЧА МГЭ	ПК SCAD	Δ %	ЧА МГЭ	ПК SCAD	Δ %	ЧА МГЭ	ПК SCAD	Δ %
1	1	23.023	23.023	0	14.146	14.146	0	-4.321	-4.321	0
	2	4.576	4.576	0	0.631	0.631	0	-4.321	-4.321	0
	3	-13.870	-13.870	0	-12.882	-12.882	0	-4.321	-4.321	0
2	1	23.047	23.047	0	-14.146	-14.146	0	-5.313	-5.313	0
	2	4.830	4.830	0	-0.631	-0.631	0	-5.313	-5.313	0
	3	-13.385	-13.385	0	12.882	12.882	0	-5.313	-5.313	0
3	1	59.730	59.730	0	14.146	14.146	0	-4.321	-4.321	0
	2	6.890	6.890	0	0.631	0.631	0	-4.321	-4.321	0
	3	-45.949	-45.949	0	-12.882	-12.882	0	-4.321	-4.321	0
4	1	68.617	68.617	0	-14.146	-14.146	0	-5.313	-5.313	0
	2	8.121	8.121	0	-0.631	-0.631	0	-5.313	-5.313	0
	3	-52.375	-52.375	0	12.882	12.882	0	-5.313	-5.313	0
5	1	-17.430	-17.430	0	10.934	10.934	0	1.944	1.944	0
	2	0.508	0.508	0	-2.580	-2.580	0	1.944	1.944	0
	3	18.447	18.447	0	-16.094	-16.094	0	1.944	1.944	0
6	1	-42.389	-42.389	0	10.934	10.934	0	1.944	1.944	0
	2	2.461	2.461	0	-2.580	-2.580	0	1.944	1.944	0
	3	47.313	47.313	0	-16.094	-16.094	0	1.944	1.944	0
7	1	-10.938	-10.938	0	-15.255	-15.255	0	3.559	3.559	0
	2	0	0	0	0	0	0	3.559	3.559	0
	3	10.938	10.938	0	15.255	15.255	0	3.559	3.559	0
8	1	10.938	10.938	0	-21.408	-21.408	0	5.062	5.062	0
	2	0	0	0	0	0	0	5.062	5.062	0
	3	-10.938	-10.938	0	21.408	21.408	0	5.062	5.062	0

Таблица Б.2

Номер элемента	Номер сечения	Поперечная сила $Q_y, кН$			Поперечная сила $Q_z, кН$			Продольная сила $N, кН$		
		ЧА МГЭ	ПК SCAD	Δ %	ЧА МГЭ	ПК SCAD	Δ %	ЧА МГЭ	ПК SCAD	Δ %
1	1	-6.149	-6.149	0	-4.504	-4.504	0	-9.625	-9.625	0
	2	-6.149	-6.149	0	-4.504	-4.504	0	-9.625	-9.625	0
	3	-6.149	-6.149	0	-4.504	-4.504	0	-9.625	-9.625	0
2	1	-6.072	-6.072	0	4.504	4.504	0	9.625	9.625	0
	2	-6.072	-6.072	0	4.504	4.504	0	9.625	9.625	0
	3	-6.072	-6.072	0	4.504	4.504	0	9.625	9.625	0
3	1	-17.613	-17.613	0	-4.504	-4.504	0	-11.304	-11.304	0
	2	-17.613	-17.613	0	-4.504	-4.504	0	-11.304	-11.304	0
	3	-17.613	-17.613	0	-4.504	-4.504	0	-11.304	-11.304	0
4	1	-20.165	-20.165	0	4.504	4.504	0	11.304	11.304	0
	2	-20.165	-20.165	0	4.504	4.504	0	11.304	11.304	0
	3	-20.165	-20.165	0	4.504	4.504	0	11.304	11.304	0
5	1	5.979	5.979	0	-4.504	-4.504	0	-1.064	-1.064	0
	2	5.979	5.979	0	-4.504	-4.504	0	-1.064	-1.064	0
	3	5.979	5.979	0	-4.504	-4.504	0	-1.064	-1.064	0
6	1	14.950	14.950	0	-4.504	-4.504	0	-22.698	-22.698	0
	2	14.950	14.950	0	-4.504	-4.504	0	-22.698	-22.698	0
	3	14.950	14.950	0	-4.504	-4.504	0	-22.698	-22.698	0
7	1	3.646	3.646	0	5.085	5.085	0	0	0	0
	2	3.646	3.646	0	5.085	5.085	0	0	0	0
	3	3.646	3.646	0	5.085	5.085	0	0	0	0
8	1	-3.646	-3.646	0	7.136	7.136	0	0	0	0
	2	-3.646	-3.646	0	7.136	7.136	0	0	0	0
	3	-3.646	-3.646	0	7.136	7.136	0	0	0	0

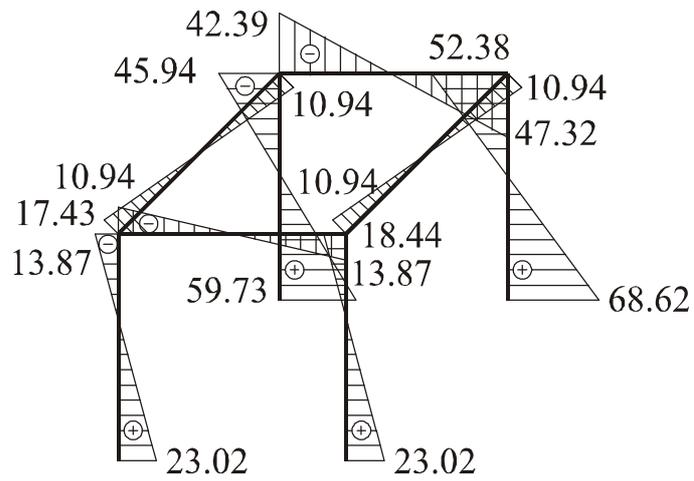


Рис. Б.2. Эпюра изгибающих моментов M_z (кНм)

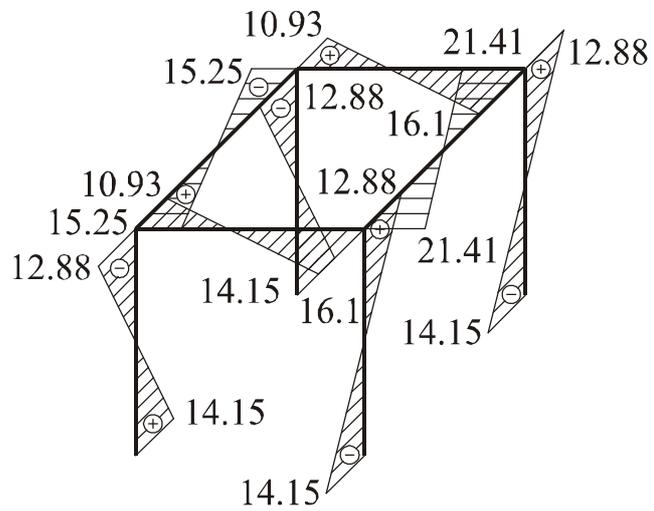


Рис. Б.3. Эпюра изгибающих моментов M_y (кНм)

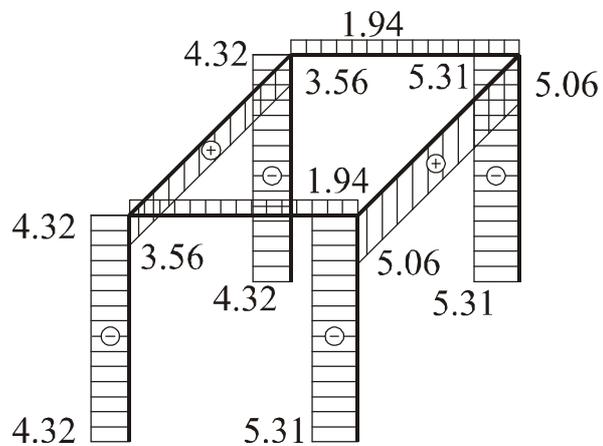


Рис. Б.4. Эпюра крутящих моментов M_x (кНм)

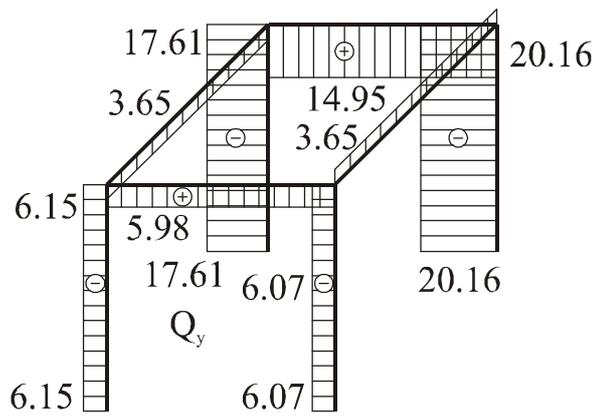


Рис. Б.5. Эпюра поперечных сил Q_y (кН)

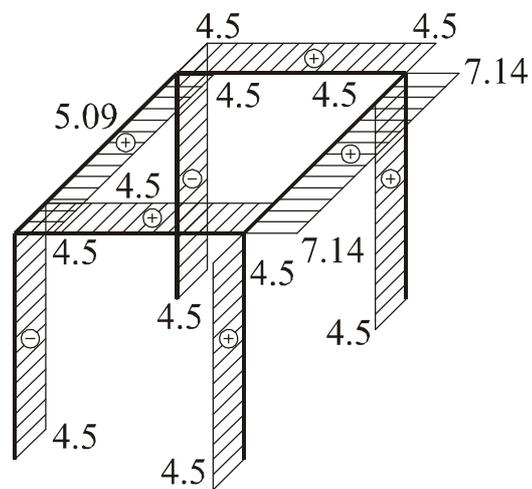


Рис. Б.6. Эпюра поперечных сил Q_z (кН)

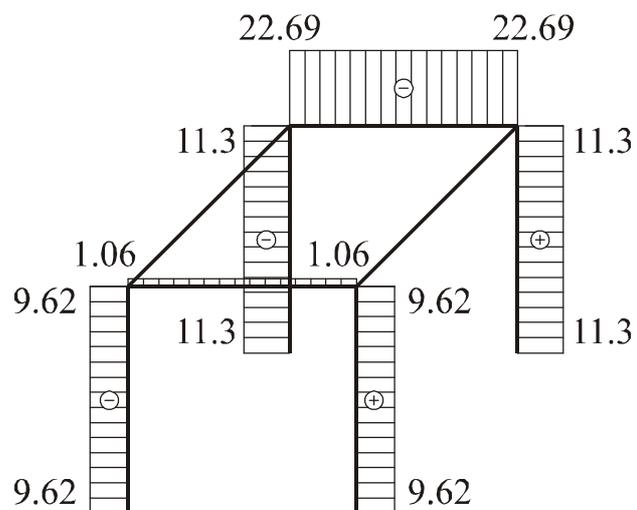


Рис. Б.7. Эпюра продольных сил N (кНм)

ПРИЛОЖЕНИЕ В

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Таблица Г.1

Значения касательных напряжений τ_{xz}

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.	-0,031	-0,089	-0,139	-0,175	-0,193	-0,193	-0,175	-0,139	-0,089	-0,031
2.	-0,016	-0,047	-0,073	-0,092	-0,102	-0,102	-0,092	-0,073	-0,047	-0,016
3.	-0,008	-0,024	-0,038	-0,048	-0,053	-0,053	-0,048	-0,038	-0,024	-0,008
4.	-0,004	-0,011	-0,018	-0,023	-0,025	-0,025	-0,023	-0,018	-0,011	-0,004
5.	-0,001	-0,003	-0,005	-0,007	-0,007	-0,007	-0,007	-0,005	-0,003	-0,001
6.	0,001	0,0034	0,0053	0,0066	0,007	0,0073	0,0066	0,0053	0,0034	0,001
7.	0,004	0,0115	0,0179	0,0226	0,025	0,025	0,0226	0,0179	0,0115	0,004
8.	0,008	0,0243	0,0379	0,0477	0,053	0,0529	0,0477	0,0379	0,0243	0,008
9.	0,016	0,047	0,0732	0,0923	0,102	0,1023	0,0923	0,0732	0,047	0,016
10.	0,031	0,0889	0,1385	0,1745	0,193	0,1935	0,1745	0,1385	0,0889	0,031

Таблица Г.2

Значения касательных напряжений τ_{xzb}

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.	0,035	0,1006	0,1566	0,1974	0,219	0,2188	0,1974	0,1566	0,1006	0,035
2.	0,018	0,0533	0,083	0,1046	0,116	0,1159	0,1046	0,083	0,0533	0,018
3.	0,01	0,0277	0,0432	0,0544	0,06	0,0603	0,0544	0,0432	0,0277	0,01
4.	0,005	0,0135	0,021	0,0265	0,029	0,0293	0,0265	0,021	0,0135	0,005
5.	0,002	0,0048	0,0074	0,0093	0,01	0,0103	0,0093	0,0074	0,0048	0,002
6.	-7E04	-0,002	-0,003	-0,004	-0,004	-0,004	-0,004	-0,003	-0,002	-7E04
7.	-0,003	-0,01	-0,015	-0,019	-0,021	-0,021	-0,019	-0,015	-0,01	-0,003
8.	-0,007	-0,021	-0,033	-0,042	-0,046	-0,046	-0,042	-0,033	-0,021	-0,007
9.	-0,014	-0,041	-0,065	-0,081	-0,09	-0,09	-0,081	-0,065	-0,041	-0,014
10.	-0,027	-0,079	-0,122	-0,154	-0,171	-0,171	-0,154	-0,122	-0,079	-0,027

Значения касательных напряжений τ_{xz}

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.	-0,033	-0,095	-0,148	-0,186	-0,206	-0,206	-0,186	-0,148	-0,095	-0,033
2.	-0,017	-0,05	-0,078	-0,098	-0,109	-0,109	-0,098	-0,078	-0,05	-0,017
3.	-0,009	-0,026	-0,041	-0,051	-0,057	-0,057	-0,051	-0,041	-0,026	-0,009
4.	-0,004	-0,012	-0,019	-0,025	-0,027	-0,027	-0,025	-0,019	-0,012	-0,004
5.	-0,001	-0,004	-0,006	-0,008	-0,009	-0,009	-0,008	-0,006	-0,004	-0,001
6.	9E-04	0,0027	0,0042	0,0053	0,006	0,0058	0,0053	0,0042	0,0027	9E-04
7.	0,004	0,0105	0,0164	0,0207	0,023	0,0229	0,0207	0,0164	0,0105	0,004
8.	0,008	0,0227	0,0353	0,0445	0,049	0,0493	0,0445	0,0353	0,0227	0,008
9.	0,015	0,0441	0,0687	0,0865	0,096	0,0959	0,0865	0,0687	0,0441	0,015
10.	0,029	0,0835	0,13	0,1638	0,182	0,1816	0,1638	0,13	0,0835	0,029

$$\left\{ \begin{array}{l} A \sinh \frac{n\pi h_1}{2b} + B \cosh \frac{n\pi h_1}{2b} + \frac{16pb^2}{qn^3\pi^3 b_n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} = 0 \\ -A \sinh \frac{n\pi h_2}{2b} + B \cosh \frac{n\pi h_2}{2b} + \frac{16pb^2}{qn^3\pi^3 b_n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} = 0 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \frac{\sinh \frac{n\pi h_2}{2b}}{\sinh \frac{n\pi h_1}{2b}} \\ \frac{1}{2b} \end{array} \right. ;$$

$$B \cosh \frac{n\pi h_2}{2b} + B \frac{\cosh \frac{n\pi h_1}{2b} \sinh \frac{n\pi h_2}{2b}}{\sinh \frac{n\pi h_1}{2b}} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{16pb^2}{qn^3\pi^3 b_n} \times$$

$$\times \frac{\sinh \frac{n\pi h_2}{2b}}{\sinh \frac{n\pi h_1}{2b}} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{16pb^2}{qn^3\pi^3 b_n} = 0,$$

$$B \left(\cosh \frac{n\pi h_2}{2b} + \frac{\cosh \frac{n\pi h_1}{2b} \sinh \frac{n\pi h_2}{2b}}{\sinh \frac{n\pi h_1}{2b}} \right) +$$

$$+ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{16pb^2}{qn^3 \pi^3 b_n} \left(\frac{\sinh \frac{n\pi h_2}{2b}}{\sinh \frac{n\pi h_1}{2b}} + 1 \right) = 0,$$

$$B = - \frac{\frac{16pb^2}{qn^3 \pi^3 b_n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\sinh \frac{n\pi h_2}{2b}}{\sinh \frac{n\pi h_1}{2b}} + 1 \right)}{\left(\cosh \frac{n\pi h_2}{2b} + \frac{\cosh \frac{n\pi h_1}{2b} \sinh \frac{n\pi h_2}{2b}}{\sinh \frac{n\pi h_1}{2b}} \right)},$$

$$B = - \frac{16pb^2}{qn^3 \pi^3 b_n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sinh \frac{n\pi h_2}{2b} + \sinh \frac{n\pi h_1}{2b}}{\sinh \frac{n\pi h_1}{2b}} \times$$

$$\times \frac{\sinh \frac{n\pi h_1}{2b}}{\cosh \frac{n\pi h_2}{2b} \sinh \frac{n\pi h_1}{2b} + \cosh \frac{n\pi h_1}{2b} \sinh \frac{n\pi h_2}{2b}},$$

$$B = - \frac{16pb^2}{qn^3 \pi^3 b_n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sinh \frac{n\pi h_2}{2b} + \sinh \frac{n\pi h_1}{2b}}{\sinh \left(\frac{n\pi h_1}{2b} + \frac{n\pi h_2}{2b} \right)},$$

$$B = - \frac{16pb^2}{qn^3 \pi^3 b_n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sinh \frac{n\pi h_2}{2b} + \sinh \frac{n\pi h_1}{2b}}{\sinh \left[\frac{n\pi}{2b} (h_1 + h_2) \right]},$$

$$\begin{aligned}
& -A \sinh \frac{n\pi h_2}{2b} - \frac{16pb^2}{qn^3 \pi^3 b_n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\left(\sinh \frac{n\pi h_2}{2b} + \sinh \frac{n\pi h_1}{2b} \right) \cosh \frac{n\pi h_2}{2b}}{\sinh \frac{n\pi h}{2b}} + \\
& + \frac{16pb^2}{qn^3 \pi^3 b_n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} = 0,
\end{aligned}$$

$$-A \sinh \frac{n\pi h_2}{2b} + \frac{16pb^2}{qn^3 \pi^3 b_n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{\left(\sinh \frac{n\pi h_2}{2b} + \sinh \frac{n\pi h_1}{2b} \right) \cosh \frac{n\pi h_2}{2b}}{\sinh \frac{n\pi h}{2b}} \right) = 0,$$

$$A = \frac{16pb^2}{qn^3 \pi^3 b_n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{\left(\sinh \frac{n\pi h_2}{2b} + \sinh \frac{n\pi h_1}{2b} \right) \cosh \frac{n\pi h_2}{2b}}{\sinh \frac{n\pi h}{2b}} \right) \frac{1}{\sinh \frac{n\pi h_2}{2b}},$$

$$\begin{aligned}
A &= \frac{16pb^2}{qn^3 \pi^3 b_n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\cosh \frac{n\pi h_2}{2b} \sinh \frac{n\pi h_1}{2b} + \cosh \frac{n\pi h_1}{2b} \sinh \frac{n\pi h_2}{2b}}{\sinh \frac{n\pi h}{2b} \sinh \frac{n\pi h_2}{2b}} - \\
& - \frac{\cosh \frac{n\pi h_1}{2b} \sinh \frac{n\pi h_2}{2b} + \cosh \frac{n\pi h_2}{2b} \sinh \frac{n\pi h_1}{2b}}{\sinh \frac{n\pi h}{2b} \sinh \frac{n\pi h_2}{2b}},
\end{aligned}$$

$$A = \frac{16pb^2}{qn^3 \pi^3 b_n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\cosh \frac{n\pi h_1}{2b} - \cosh \frac{n\pi h_2}{2b}}{\sinh \frac{n\pi h}{2b}}.$$

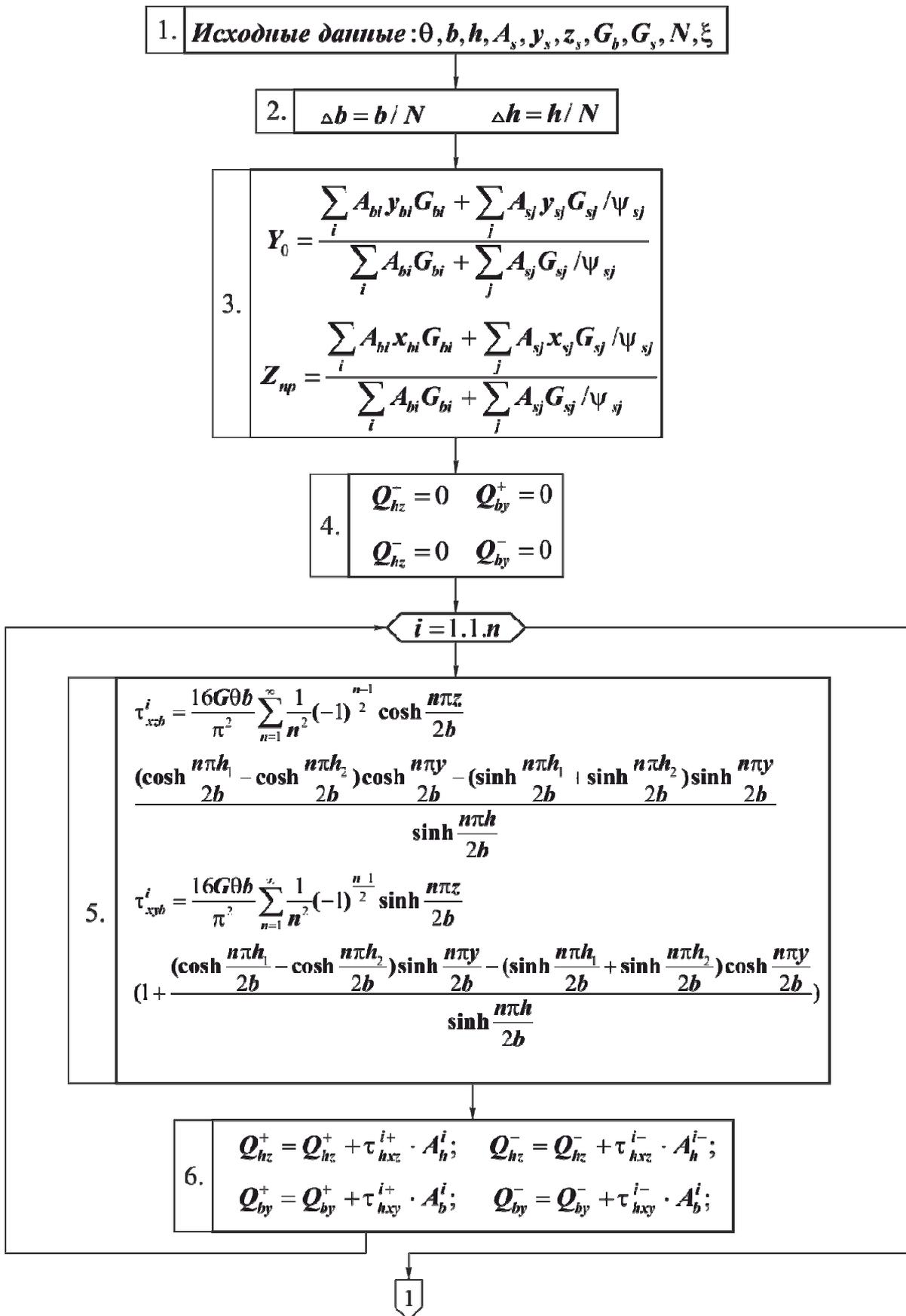


Рис. Г.1. Блок-схема определение центра кручения методом последовательных приближений

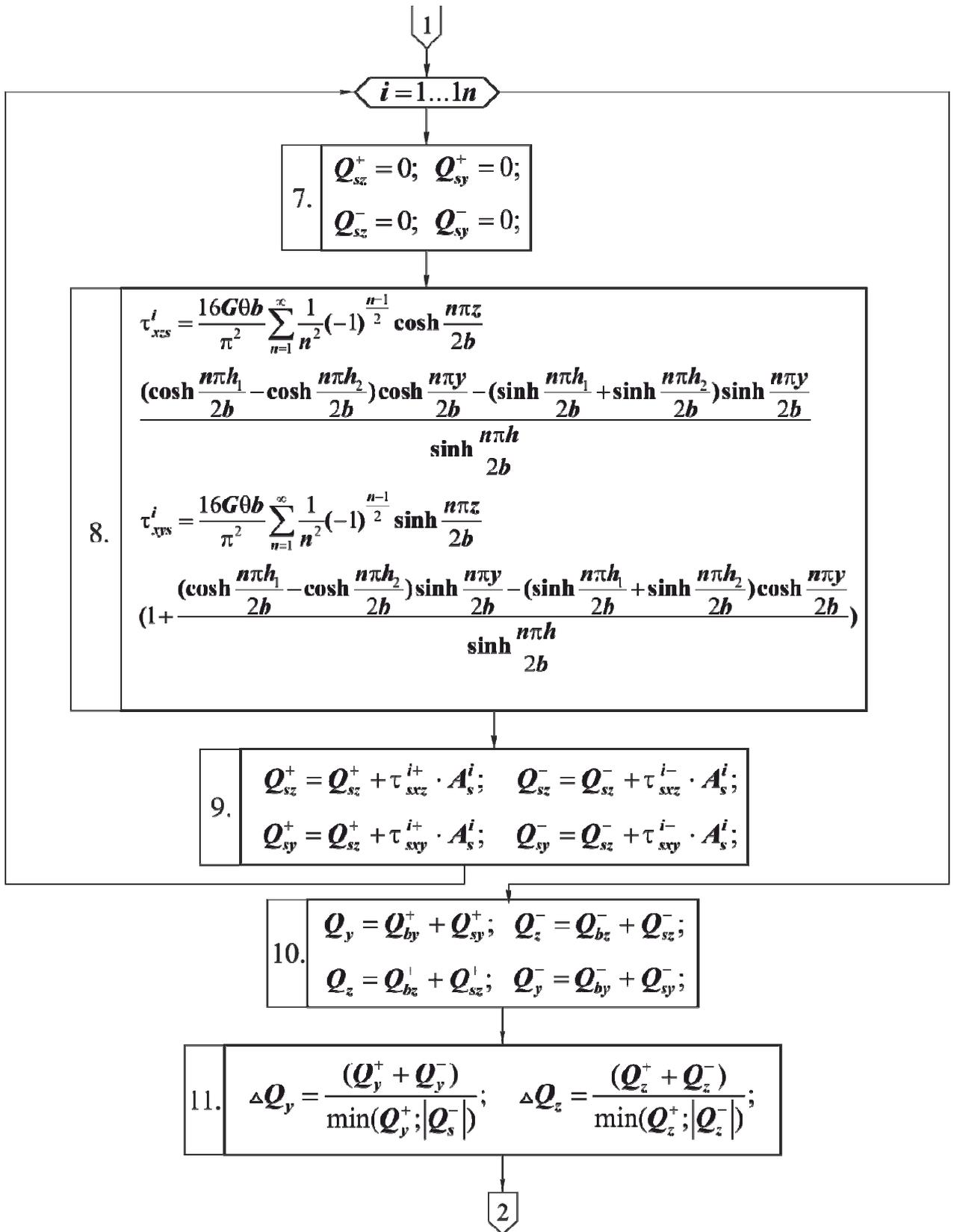


Рис. Г.2. Блок-схема определение центра кручения последовательных приближений (продолжение)

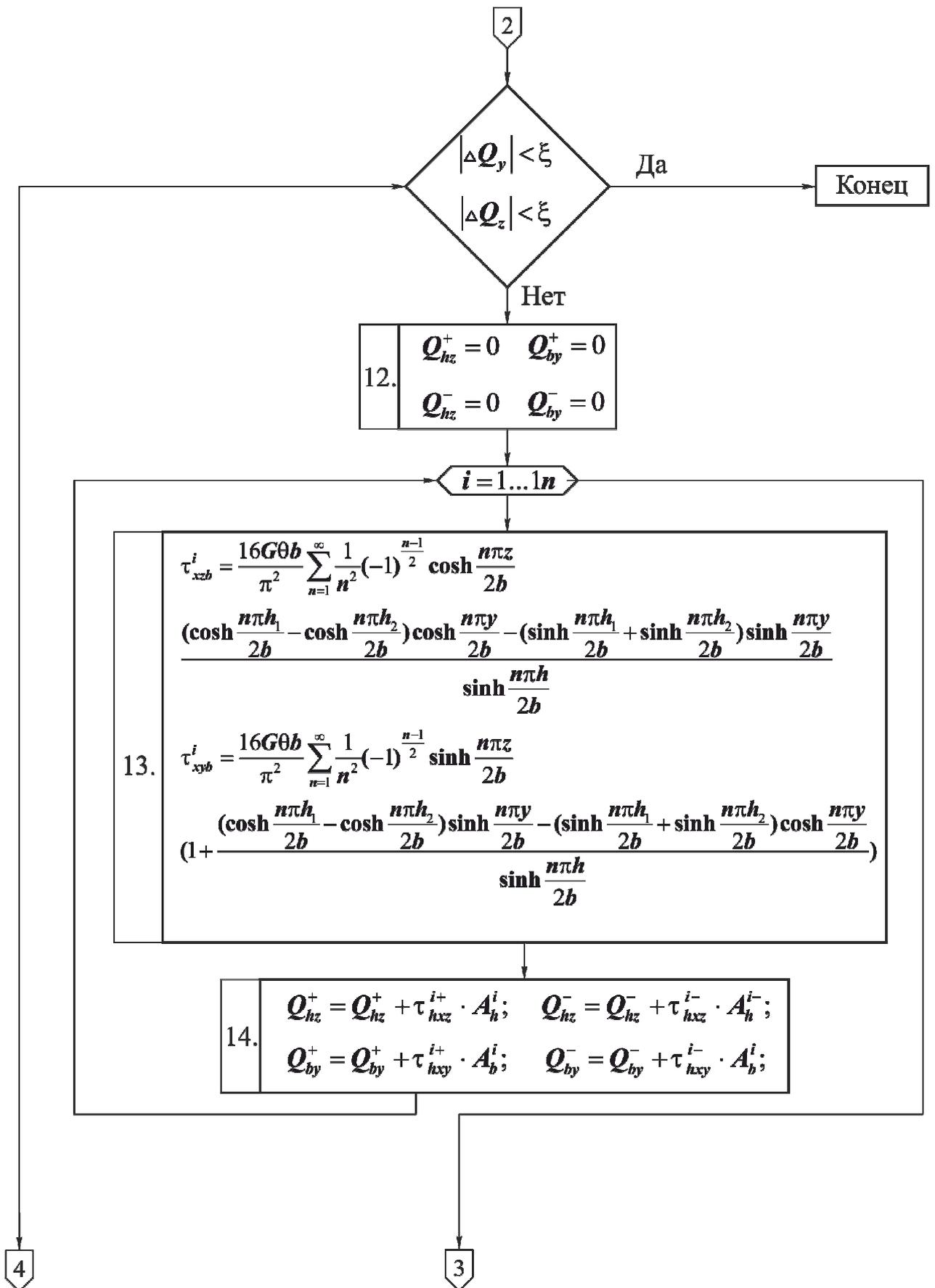


Рис. Г.3. Блок-схема определение центра кручения последовательных приближений (продолжение)

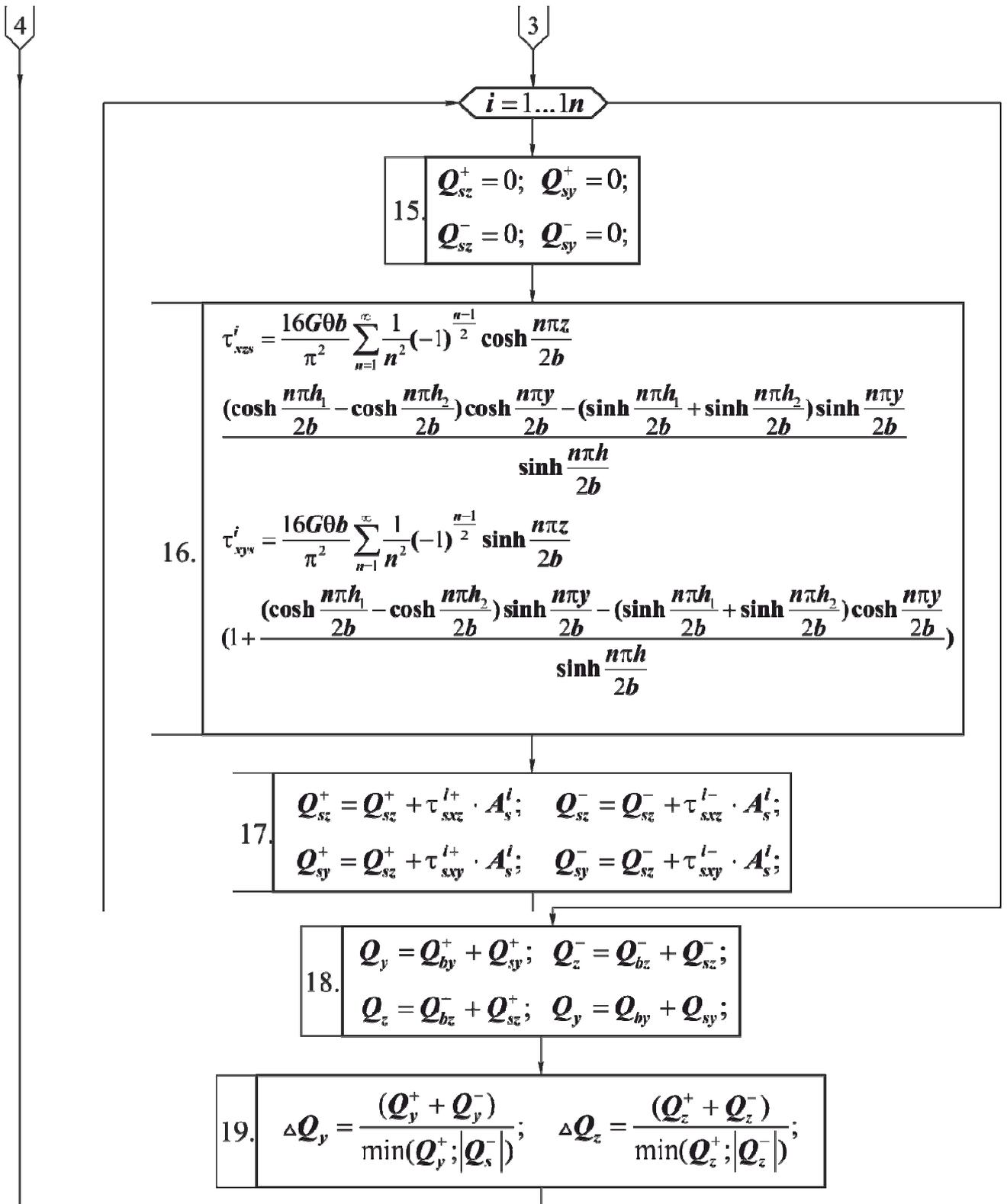


Рис. Г.4. Блок-схема определение центра кручения последовательных приближений (окончание)

**Сравнение экспериментальных данных Ю.В.Чиненкова с
теоретическими значениями, полученными по предлагаемой методике**

Экспериментальные значения				Теоретические значения по предлагаемой методике									
$f_{ck} = 24,5$ МПа		$f_{ck} = 10,8$ МПа		$f_{ck} = 24,5$ МПа				$f_{ck} = 10,8$ МПа					
T , кНм	$\Theta 10^{-3}$, 1/м	T , кНм	Θ , 1/м	T , кНм	Θ , 1/м	%	$\frac{T_{exp}}{T_{teor}}$	T , кНм	Θ , 1/м	%	$\frac{T_{exp}}{T_{teor}}$		
1,1	1	1,1	1	1,1	1	0	1	1	1	10	1,2		
2,6	2	2,1	2	2,4	2	8	1,08	2	2	5	1,05		
3,9	3	2,9	3	3,5	3	11	1,11	2,8	3	3	1,04		
4,8	4	3,6	4	4,5	4	6	1,07	3,5	4	3	1,03		
5,7	5	4,3	5	5,6	5	1	1,02	4,1	5	5	1,05		
6,6	6	4,8	6	6,4	6	3	1,03	4,4	6	9	1,09		
7,5	7			7,1	7	5	1,06						
8,1	8			7,9	8	2	1,03						
8,9	9			8,4	9	6	1,06						
Выборочное среднее								1,051					1,077
Выборочная дисперсия, S_x								0,034					0,064
Выборочный коэффициент вариации, C_v								0,032					0,059
Доверительный интервал		Нижний предел						1,058					1,098
		Верхний предел						1,044					1,056

**Сравнение экспериментальных данных Ю.В.Чиненкова с
теоретическими значениями, полученными по предлагаемой методике**

Экспериментальные значения				Теоретические значения по предлагаемой методике								
$f_{ck} = 38$ МПа		$f_{ck} = 9$ МПа		$f_{ck} = 38$ МПа				$f_{ck} = 9$ МПа				
T , кНм	$\Theta 10^{-3}$, 1/м	T , кНм	Θ , 1/м	T , кНм	Θ , 1/м	%	$\frac{T_{exp}}{T_{teor}}$	T , кНм	Θ , 1/м	%	$\frac{T_{exp}}{T_{teor}}$	
1,2	1	1	1	1,1	1	9	1,09	0,9	1	11	1,11	
2,6	2	1,8	2	2,4	2	8	1,08	2	2	10	0,9	
3,9	3	2,6	3	3,5	3	11	1,11	2,8	3	7	0,93	
4,5	4	3,5	4	4,5	4	0	1	3,5	4	0	1	
5,2	5	4,4	5	5,5	5	5	0,95	4,1	5	7	1,07	
6	6	4,6	6	6,4	6	6	0,94	4,4	6	5	1,05	
6,8	7	5	7	7,2	7	5	0,94	4,6	7	8	1,09	
7,7	8			7,7	8	0	1					
8,4	9			8,3	9	1	1,01					
9,7	10			9,6	10	1	1,01					
9,1	11			8,7	11	5	1,05					
9,5	12			8,9	12	7	1,07					
Выборочное среднее								1,021				
Выборочная дисперсия, S_x								0,059				
Выборочный коэффициент вариации, C_v								0,058				
Доверительный интервал		Нижний предел						1,031				
		Верхний предел						1,011				

Нагрузки на продольные ригели

Вид нагрузки	Характеристические значения, кН/м^2	Коэффициент надежности по нагрузке	Расчетная нагрузка, кН/м^2
Постоянная			
1. Паркетный пол, $t=0,02\text{м}$, $\rho=8\text{кН/м}^3$	0,16	1,1	0,176
2. Шлакобетонный слой, $t=0,065\text{м}$, $\rho=16\text{кН/м}^3$	1,04	1,2	1,248
3. Пенобетонная звукоизоляцион-ная плита, $t=0,06\text{м}$, $\rho=5\text{кН/м}^3$	0,3	1,2	0,36
4. Железобетонная панель (по каталогу) приведенной толщиной 110мм, $t=0,11\text{м}$, $\rho=25\text{кН/м}^3$	2,75	1,1	3,025
ИТОГО	$g^n = 4,25$		$g = 4,81$
Временная			
5. Кратковременная	2,8	1,3	3,64
6. Длительная	1,2	1,3	1,56
ИТОГО	$p^n = 4$		$p = 5,2$
Полная нагрузка			
7. Постоянная и длительная	5,45		6,37
8. Кратковременная	2,8		3,64
ИТОГО	8,25		10,01

Собственный вес погонного метра продольного ригеля составит:

$$h_p \cdot b_p \cdot \rho = 0,5 \cdot 0,4 \cdot 25 = 5 \text{ кН/м}$$

С учетом коэффициента надежности по нагрузке:

$$q^p = 5 \cdot 1,1 = 5,5 \text{ кН/м}$$

Характеристическая нагрузка на продольный ригель составит:

$$q^n = 8,25 \cdot 6 = 49,5 \text{ кН/м}$$

Полная нагрузка на ригель составит:

$$q = 10,01 \cdot 6 = 60,06 \text{ кН/м}$$

Нагрузка на продольный ригель с учетом его собственного веса составит:

$$q_y = 60,06 + 5,5 = 65,56 \text{ кН/м}$$

Нагрузка на поперечные ригели принимаются по таблице Г.7:

Таблица Г.7

Нагрузка на поперечные ригели

Вид нагрузки	Характеристические значения, кН/м ²	Коэффициент надежности по нагрузке	Полная нагрузка, кН/м ²
Постоянная			
1. Ячеистый бетон $t=0,4\text{м}$, $\rho=4\text{кН/м}^3$	1,6	1,1	1,76
ИТОГО	$g^n = 1,6$		$g = 1,76$

Собственный вес погонного метра поперечных ригелей составит:

$$h_p \cdot b_p \cdot \rho = 0,5 \cdot 0,4 \cdot 25 = 5 \text{ кН/м}$$

С учетом коэффициента надежности по нагрузке:

$$q^p = 5 \cdot 1,1 = 5,5 \text{ кН/м}$$

Характеристическая нагрузка на ригель составит:

$$q^n = 1,6 \cdot 6 = 9,6 \text{ кН/м}$$

Полная нагрузка на ригель составит:

$$q = 1,76 \cdot 6 = 10,56 \text{ кН/м}$$

Нагрузка на ригель с учетом его собственного веса составит:

$$q_y = 10,56 + 5,5 = 16,06 \text{ кН/м.}$$

Нагрузка на ригели покрытия принимается по таблице Г.8:

Таблица Г.8

Нагрузки на покрытие

Вид нагрузки	Характеристические значения, кН/м ²	Коэффициент надежности по нагрузке	Полная нагрузка, кН/м ²
Постоянная			
1. Рубероидный ковер в три слоя (вес одного слоя 0,050 кН/м ²)	0,15	1,2	0,18
2. Цементная стяжка, $t=0,03\text{м}$, $\rho=20\text{кН/м}^3$	0,6	1,3	0,78
3. Утеплитель из пенобетонных плит, $t=0,12\text{м}$, $\rho=5\text{кН/м}^3$	0,6	1,2	0,72
4. Пароизоляция из одного слоя рубероида	0,05	1,2	0,06
5. Железобетонная панель (по каталогу) приведенной толщиной 110мм, $t=0,11\text{м}$, $\rho=25\text{кН/м}^3$	2,75	1,1	3,025
ИТОГО	$g^n = 4,15$		$g = 4,765$
Временная			
6. Снеговая	0,88	1,14	1,00
в том числе длительная	0,192	1,14	0,219
кратковременная	0,688	1,14	0,781
Полная нагрузка			
7. Постоянная и длительная	4,342		4,984
8. Кратковременная	0,688		0,781
ИТОГО	5,03		5,765

Нормативная нагрузка на ригели покрытия:

$$q^n = 5,03 \cdot 6 = 30,2 \text{ кН/м}$$

Полная нагрузка на ригели покрытия:

$$q = 5,765 \cdot 6 = 34,6 \text{ кН/м}$$

Полная нагрузка на ригели покрытия с учетом его собственного веса

$$q_y = 34,6 + 5,5 \approx 40,0 \text{ кН/м}$$

Значения изгибающих и крутящих моментов в продольном ригели 23

№ п/п	Наименование загружения	Усилия <i>кНм</i>		
		M_x	$M_{зпр.}$	$M_{зон.}$
1.	1-я плита в осях 1-2, А-Б	0,04	2,15	-3,75
2.	2-я плита в осях 1-2, А-Б	0,11	12,71	-16,69
3.	3-я плита в осях 1-2, А-Б	0,13	33,45	-37,56
4.	4-я плита в осях 1-2, А-Б	0,11	43,77	-59,59
5.	5-я плита в осях 1-2, А-Б	0,09	45,74	-70,47
6.	1-я плита в осях 2-3, А-Б	0,12	45,11	-73,03
7.	2-я плита в осях 2-3, А-Б	0,15	43,86	-77,86
8.	3-я плита в осях 2-3, А-Б	0,15	42,72	-81,65
9.	4-я плита в осях 2-3, А-Б	0,13	42,05	83,15
10.	5-я плита в осях 2-3, А-Б	0,11	41,88	-83,17
11.	1-я плита в осях 1-2, Б-В	0,05	44,03	-86,92
12.	2-я плита в осях 1-2, Б-В	0,018	54,59	-99,86
13.	3-я плита в осях 1-2, Б-В	0,05	75,33	-120,73
14.	4-я плита в осях 1-2, Б-В	0,03	85,65	-142,76
15.	5-я плита в осях 1-2, Б-В	0,007	87,62	-153,64
16.	1-я плита в осях 2-3, Б-В	-0,17	86,99	-156,2
17.	2-я плита в осях 2-3, Б-В	-0,044	85,75	-161,04
18.	3-я плита в осях 2-3, Б-В	-0,047	84,6	-164,83
19.	4-я плита в осях 2-3, Б-В	-0,022	83,94	-166,3
20.	5-я плита в осях 2-3, Б-В	0	83,7	-166,3
21.	Стен. огр. в осях 1, А-Б	3,09	83,77	-166,74
22.	Стен. огр. в осях 1-2, А	3,16	84,25	-166,84
23.	Стен. огр. в осях 2-3, А	3,16	84,06	-167,28
24.	Стен. огр. в осях 1, Б-В	0,07	84,07	-167,66
25.	Стен. огр. в осях 1-2, В	0	84,54	-167,78
26.	Стен. огр. в осях 2-3, В	0	84,36	-168,22
27.	Расчетная нагрузка	0	109,47	-218,09

Значения изгибающих и крутящих моментов в поперечном ригели 37

№ п/п	Наименование загружения	Усилия кНм		
		M_x	$M_{зпр.}$	$M_{зон.}$
1.	1-я плита в осях 1-2, А-Б	1,09	0,013	0,06
2.	2-я плита в осях 1-2, А-Б	3,18	0,031	0,24
3.	3-я плита в осях 1-2, А-Б	4,99	0,039	0,28
4.	4-я плита в осях 1-2, А-Б	5,93	0,035	0,16
5.	5-я плита в осях 1-2, А-Б	6,12	0,031	0,058
6.	1-я плита в осях 2-3, А-Б	6,12	0,039	0,2
7.	2-я плита в осях 2-3, А-Б	5,94	0,048	0,38
8.	3-я плита в осях 2-3, А-Б	5,81	0,049	0,39
9.	4-я плита в осях 2-3, А-Б	5,81	0,042	0,21
10.	5-я плита в осях 2-3, А-Б	6,11	0,036	0,09
11.	1-я плита в осях 1-2, Б-В	5,59	0,042	0,17
12.	2-я плита в осях 1-2, Б-В	5,31	0,046	0,43
13.	3-я плита в осях 1-2, Б-В	5,1	0,05	0,54
14.	4-я плита в осях 1-2, Б-В	5,03	0,05	0,47
15.	5-я плита в осях 1-2, Б-В	5,05	0,05	0,39
16.	1-я плита в осях 2-3, Б-В	5,01	0,055	0,51
17.	2-я плита в осях 2-3, Б-В	4,98	0,054	0,64
18.	3-я плита в осях 2-3, Б-В	5	0,057	0,63
19.	4-я плита в осях 2-3, Б-В	5,07	0,063	0,48
20.	5-я плита в осях 2-3, Б-В	5,11	0,066	0,37
21.	Стен. огр. в осях 1, А-Б	5,14	-2,38	-7,82
22.	Стен. огр. в осях 1-2, А	5,58	-2,39	-8,09
23.	Стен. огр. в осях 2-3, А	5,54	-2,4	-8,07
24.	Стен. огр. в осях 1, Б-В	5,66	26,86	-53,13
25.	Стен. огр. в осях 1-2, В	1,74	26,85	-53,13
26.	Стен. огр. в осях 2-3, В	1,98	26,84	-53,18
27.	Расчетная нагрузка	3,62	26,86	-53,01

Эпюры нормальных напряжений σ_x^N (МПа), представлены на рис. Г.5.

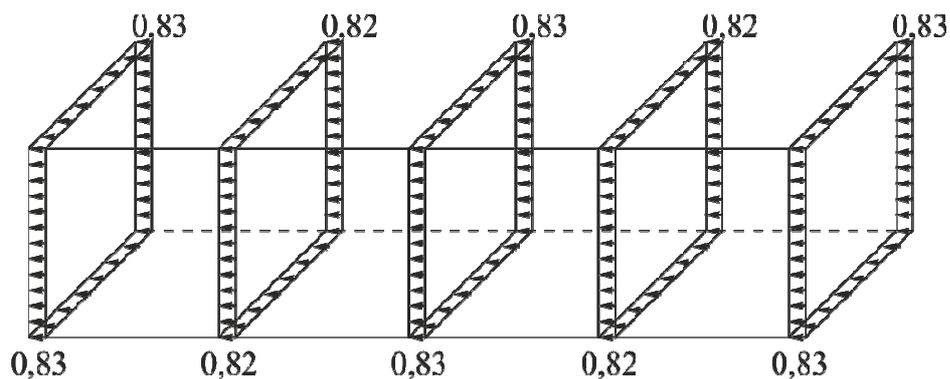


Рис. Г.5. Эпюры нормальных напряжений σ_x^N (МПа)

Эпюры нормальных напряжений σ_x^z (МПа), представлены на рис. Г.6.

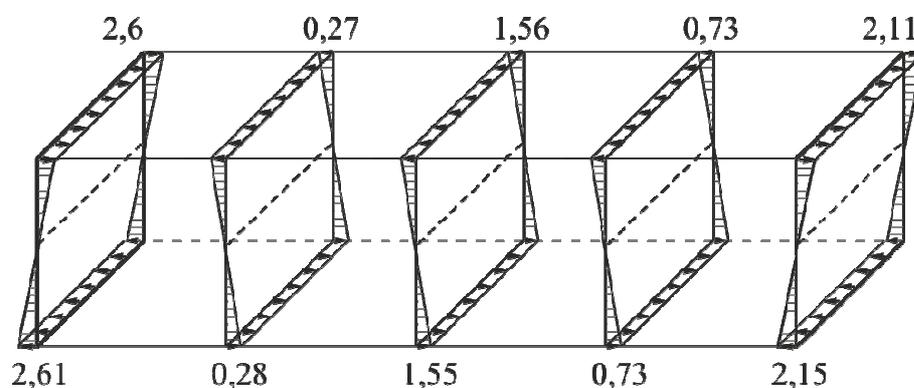


Рис. Г.6. Эпюры нормальных напряжений σ_x^z (МПа)

Эпюры нормальных напряжений σ_x^y (МПа), представлены на рис.Г.7.

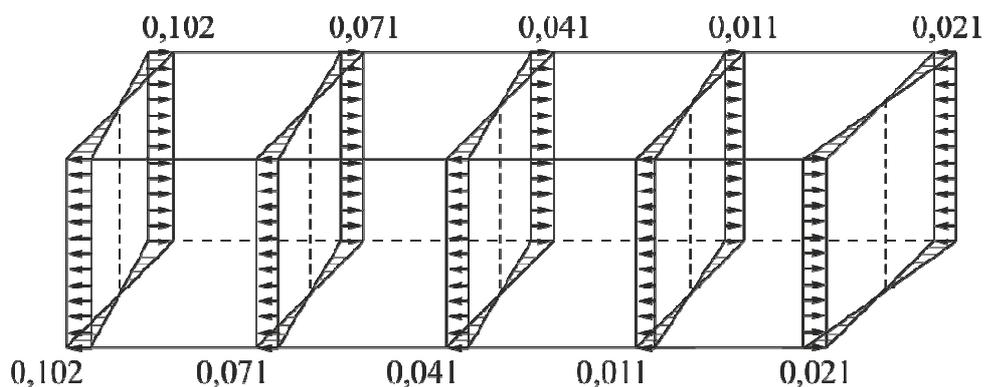


Рис. Г.7. Эпюры нормальных напряжений σ_x^y (МПа)

Суммарные эпюры нормальных напряжений σ_x (МПа), представлены на рис.Г.8.

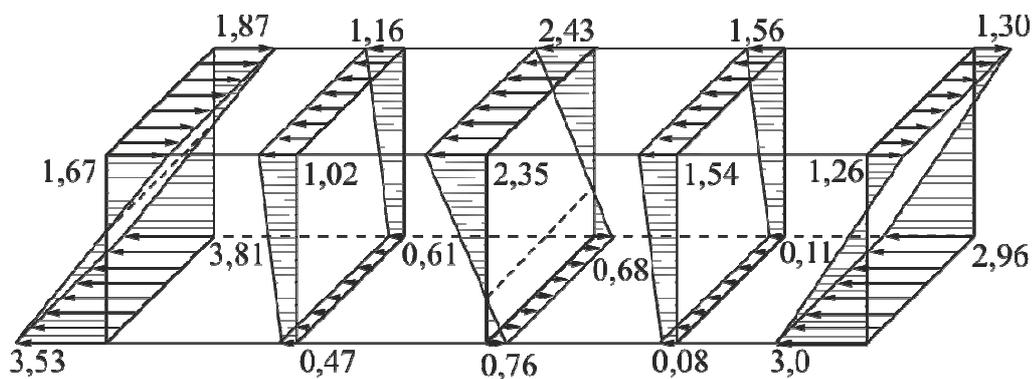


Рис. Г.8. Суммарные эпюры нормальных напряжений σ_x (МПа)

Рассмотрим распределение касательных напряжений в характерных сечениях поперечного ригеля 37 в предположении упругой работы в предельном состоянии.

Эпюры касательных напряжений τ_{xz} (МПа), представлены на рис.Г.9.

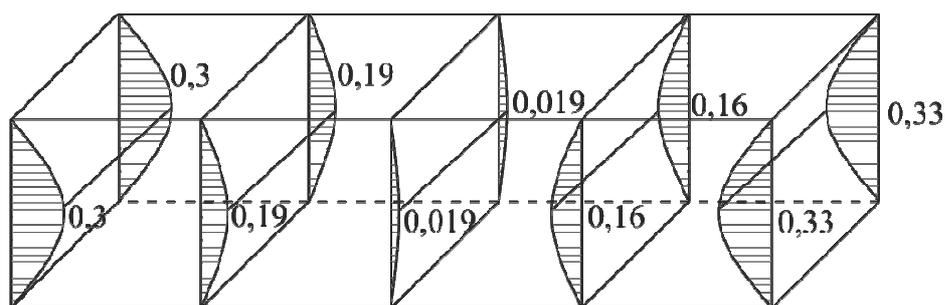


Рис. Г.9. Эпюры касательных напряжений τ_{xz} (МПа)

Эпюры касательных напряжений τ_{xy} (МПа), представлены на рис.Г.10.

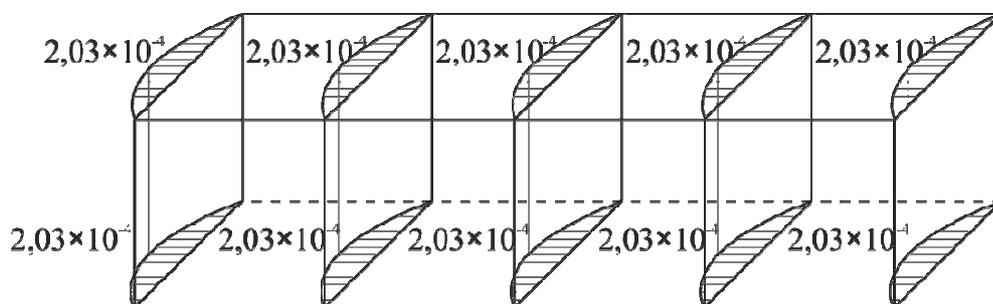


Рис. Г.10. Эпюры касательных напряжений τ_{xy} (МПа)

Эпюры касательных напряжений τ_x (МПа), представлены на рис.Г.11.

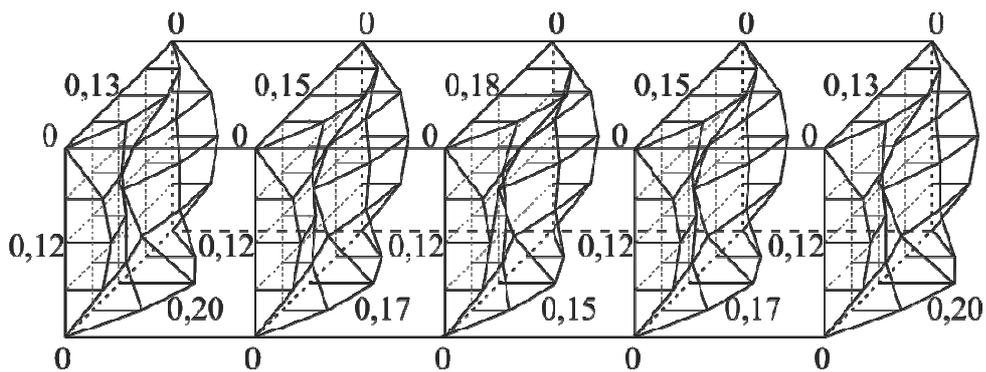


Рис. Г.11. Эпюры касательных напряжений τ_x (МПа)

Суммарные эпюры касательных напряжений τ (МПа), представлены на рис.Г.12.

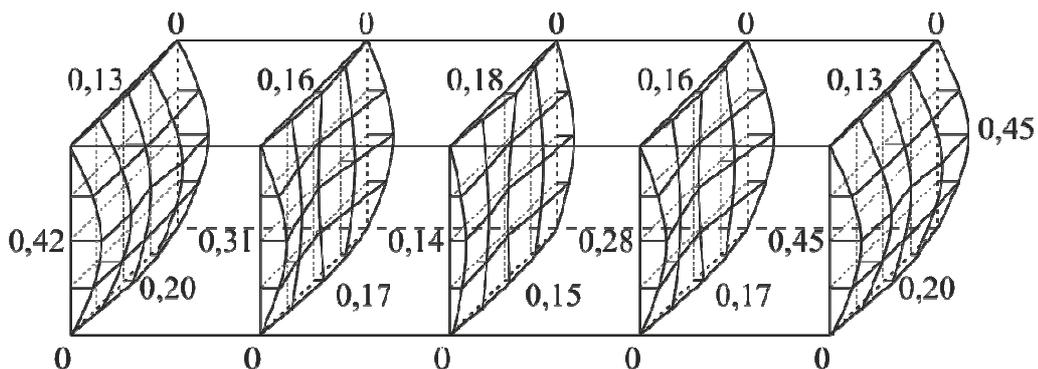


Рис. Г.12. Суммарные эпюры касательных напряжений τ (МПа)

Эпюры главных напряжений σ_1 (МПа) представлены на рис.Г.13.

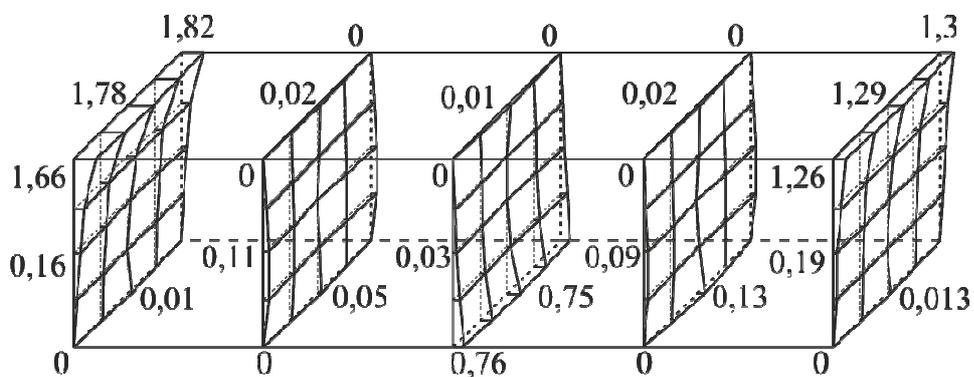


Рис. Г.13. Эпюры главных напряжений σ_1 (МПа)

Эпюры главных напряжений σ_3 (МПа) представлены на рис.Г.14.

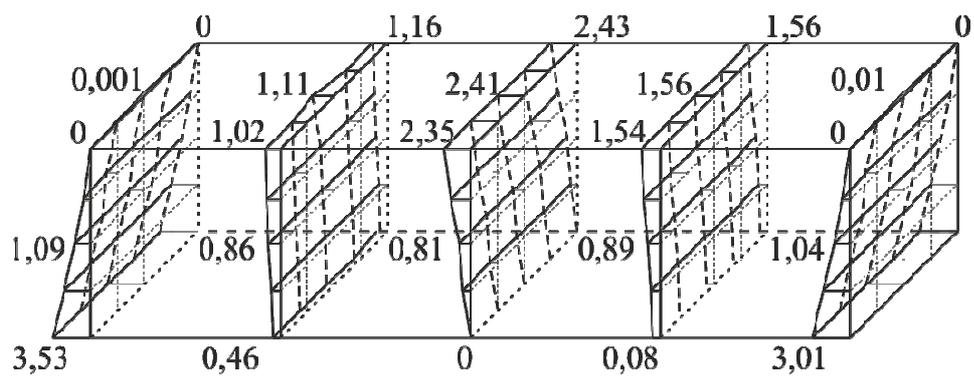


Рис. Г.14. Эпюры главных напряжений σ_3 (МПа)

ПРИЛОЖЕНИЕ Д

Сравнение значений изгибающих моментов M_y (кНм), возникающих в стойках девятиэтажной железобетонной рамной конструкции, в осях А-В, 1, и А-В, 5 при расчете в упругой стадии и с учетом трещинообразования

№ элемента	№ сечений	Упругий расчет	Расчет с учетом трещинообразования	$\Delta, \%$
5	1	0	0	0,09
	2	0	0	0,036
	3	0	0	0,04
10	1	8,32723	8,334725	0,09
	2	-4,00242	-4,00386	0,036
	3	-16,332	-16,332	0
79	1	0	0	0
	2	0	0	0
	3	0	0	0
126	1	-27,5767	-27,6925	0,42
	2	0,35819	0,358319	0,036
	3	28,2931	28,41193	0,42
158	1	29,6214	29,63325	0,04
	2	-0,30361	-0,30489	0,42
	3	-30,2286	-30,2407	0,04
232	1	32,6965	32,70827	0,036
	2	-0,27563	-0,27679	0,42
	3	-33,2477	-33,25734	0,029
264	1	0	0	0
	2	0	0	0
	3	0	0	0
311	1	-39,0926	-39,1825	0,23
	2	5,32815	5,350528	0,42
	3	49,7489	49,7688	0,04
Примечание: Сечение 1 находится в начале элемента, 2 – в середине элемента, 3 – в конце элемента				

Сравнение значений изгибающих моментов M_y (кНм), возникающих в продольных ригелях девятиэтажной железобетонной рамной конструкции, в осях А-В, 1-5 при расчете в упругой стадии и с учетом трещинообразования

№ элемента	№ сечений	Упругий расчет	Расчет с учетом трещинообразования	$\Delta, \%$
16	1	0,015567	0,01557	0,04
	2	0,011393	0,0114	0,04
	3	0,007218	0,00722	0,04
17	1	0,023612	0,02362	0,04
	2	0,006647	0,00665	0,04
	3	-0,010317	-0,0103	0,04
20	1	0	0	0
	2	0	0	0
	3	0	0	0
21	1	0	0	0
	2	0	0	0
	3	0	0	0
201	1	-0,00067	-0,0007	0,04
	2	-0,000044	-4E-05	0,04
	3	0,000581	0,00058	0,04
202	1	-0,000296	-0,0003	0,04
	2	0,000042	4,2E-05	0,04
	3	0,000381	0,00038	0,04
205	1	0	0	0
	2	0	0	0
	3	0	0	0
206	1	0	0	0
	2	0	0	0
	3	0	0	0
Примечание: Сечение 1 находится в начале элемента, 2 – в середине элемента, 3 – в конце элемента				

Сравнение значений изгибающих моментов M_y (кНм), возникающих в поперечных ригелях девятиэтажной железобетонной рамной конструкции, в осях А-В, 1-5 при расчете в упругой стадии и с учетом трещинообразования

№ элемента	№ сечений	Упругий расчет	Расчет с учетом трещинообразования	$\Delta, \%$
102	1	0,000286	0,00028607	0,025
	2	0,00011	0,00011003	0,025
	3	-0,000064	-6,402E-05	0,025
104	1	0,000746	0,00074619	0,025
	2	0,000045	4,5011E-05	0,025
	3	-0,000655	-0,0006552	0,025
139	1	0,000346	0,00034609	0,025
	2	-0,000052	-5,201E-05	0,025
	3	-0,000451	-0,0004511	0,025
178	1	0,000454	0,00045411	0,025
	2	0,000012	1,2003E-05	0,025
	3	-0,00043	-0,0004301	0,025
250	1	0,003257	0,00325781	0,025
	2	-0,000598	-0,0005981	0,025
	3	-0,004455	-0,0044561	0,025
252	1	0,000397	0,0003971	0,025
	2	-0,00019	-0,00019	0,025
	3	-0,000777	-0,0007772	0,025
287	1	-0,048007	-0,048019	0,025
	2	0,004443	0,00444411	0,025
	3	0,056895	0,05690922	0,025
289	1	-0,011148	-0,0111508	0,025
	2	0,003247	0,00324781	0,025
	3	0,017644	0,01764841	0,025
Примечание: Сечение 1 находится в начале элемента, 2 – в середине элемента, 3 – в конце элемента				