

**ЗАСТОСУВАННЯ ІНВАРІАНТНОГО J - ІНТЕГРАЛА ДЛЯ ФОРМУЛЮВАННЯ  
КРИТЕРІЮ ПОШИРЕННЯ ТЕХНОЛОГІЧНОЇ ТРІЩИНИ  
В КОНСТРУКЦІЯХ, ЩО ЗГИНАЮТЬСЯ**

**THE USE OF INVARIANT J - INTEGRAL FOR A FORMULATION OF THE  
TEMPORARY BREACH SPREAD CRITERION IN BENDING CONSTRUCTIONS.**

Майстренко О.Ф., к.т.н., доцент

Одеська державна академія будівництва та архітектури, м. Одеса, Україна

Maystrenko Oksana, PhD, associate professor

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine

maystrenkoof@gmail.com

Зінченко Г.В., аспірантка

Zinchenko Hanna, doctoral student

Одеська державна академія будівництва та архітектури, м. Одеса, Україна

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine

a-golud6@ukr.net

At the designing stage it is necessary to take into account a plenty of factors influencing on constructions resistibility and solidity. One of them is various damages arising during a production process and also an exploitation. It causes a detailed study of concrete properties and reinforced-concrete constructions work under outer forces. Thus, one of the recently discovered concrete peculiarities is its susceptibility temporary breaches. Theses breaches are the most brittle structural to elements of material because of a specific capability to concentrate tensioning at its outfall. Their presence in the substance causes structural changes under the exploitation outer forces effects.

This article describes J-integral method allowing to give an assessment of deformation energy release intensity during the temporary breach spread in bending constructions in a elastic-plasctic area. It gives the approach to calculate the energy flow to the force breach top developing like temporary.

**Keywords:**

technological defects, composition building materials, J - integral, stress intensity factor

**Вступ.** Відомо, що фізико - технічні властивості композиційних будівельних матеріалів та конструкцій значною мірою визначаються технологічною пошкодженістю. В період технологічної переробки матеріал накопичує дефекти, які є складовою частиною структури зразка та конструкції. Технологічні дефекти визначають місцевий напружено-деформований стан конструкції, характер тріщиноутворення та поверхню руйнування. Спрямована зміна технологічної пошкодженості дозволить управляти фізико-технічними властивостями матеріалів, характером тріщиноутворення та руйнування конструкцій [1].

Розглянемо застосування інваріантних інтегралів як з точки зору їх використання для аналізу полів напруги та переміщень біля вершини технологічної тріщини, так і в проблемах, пов'язаних з формулюванням критеріїв, що встановлюють межі докритичного розвитку тріщин.

**Аналіз досліджень.** У 1968 р. Ешелбі [2] ввів силу, необхідну для поширення тріщини, у формі інтеграла не залежного від контура інтеграції. Цей інтеграл отримується із теорії сил, що діють на дефекти в кристалах, розробленою Ешелбі на основі поняття тензора енергії-імпульсу [3]. У рамках механіки руйнування ця теорія модифікується з тим, щоб вона

могла бути використана для суцільного середовища, що містить дефекти і неоднорідності, а не для кристалів, що містять дислокації.

Пізніше інваріантний інтеграл був виведений Гюнтером (W. Gunter) [4] за допомогою теореми Нетер (E. Noether) [5].

Перші інваріантні інтеграли Ешелбі в теорії пружності були знайдені за допомогою спеціальної техніки і аж до роботи [4] ніяк не зв'язувалися з варіаційними симетріями енергетичного функціонала теорії пружності. Узагальнення інваріантних інтегралів на динамічний випадок сталося пізніше - в роботах: [2, 6 – 10].

Систематичне виведення інваріантних інтегралів теорії пружності за допомогою варіаційної теореми Нетер наведений в статті [11].

Нарешті, слід згадати роботи [12 – 13], де велика кількість нетривіальних законів збереження була отримана на базі теорії узагальнених групових симетрій.

Інтенсивне застосування  $J$  - інтеграла в механіці руйнування в якості параметра, що характеризує напружено-деформований стан тріщини в тілах пружнопластичності, був сформульований Райсом [15].

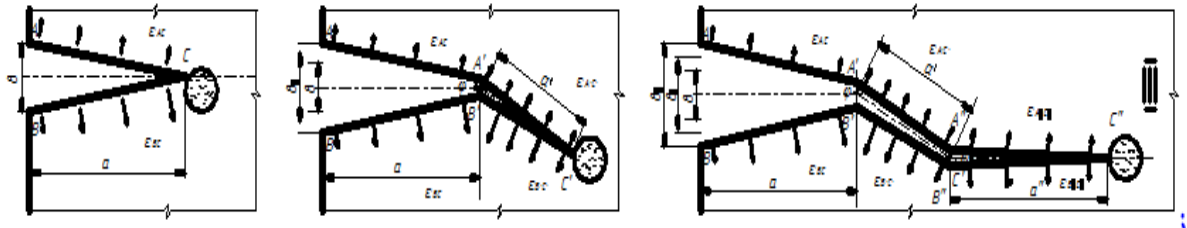
Черепанов Г. П. [16] отримав інваріантний  $\Gamma$ -інтеграл механіки руйнування безпосередньо із закону збереження енергії [16].

**Мета дослідження.** Описати процес розвитку технологічної тріщини в елементах, що згинаються, а також обчислення потоку енергії в її вершину, застосовуючи інваріантний  $J$  - інтеграл.

**Результати дослідження.** Як відомо, зародження та розвиток технологічних тріщин відбувається одночасно з процесами перетворення матеріалу з початкової сировини в кінцевий продукт. Можна стверджувати, що виникнення технологічних тріщин є необхідним актом становлення композиційних матеріалів. Сам процес виникнення і розвитку тріщин в тверднучому матеріалі дещо відрізняється від класичних процесів, прийнятих в теорії міцності [17].

Рух тріщин на рівні структурних неоднорідностей є своєрідними скачками від одного міжчасткового зв'язку до іншого [18], при цьому тріщина, що рухається, огинає не вигідні для себе структурні блоки, вона прагне розвиватися по енергетично вигідних траєкторіях, тому мікротраєкторії тріщин, що утворилися в період структуроутворення матеріалу, звивисті з індивідуальною морфологією кожного берега. У зв'язку з утворенням структурних блоків різних масштабних рівнів, зародження і зростання тріщин в матеріалі відбувається не одночасно за усім обсягом. Зростання кожної тріщини змінює мікродеформований стан окремих об'ємів системи, що може сприяти прискоренню або уповільненню зростання сусідніх тріщин, тому в матеріалі є присутніми, як правило, тріщини різні за довжиною, формою, шириною розкриття.

Як встановлено в роботі [18], механізми розвитку технологічних тріщин на макрорівні визначаються значенням і градієнтом усадкових деформацій на берегах тріщини. У реальних матеріалах збіг вісей тріщини і середовища, в якому вона розвивається, є окремий випадок, частіше буває ситуація, при якій на берегах тріщини виникають різновеликі усадкові деформації. В цьому випадку зона критичної пластичної деформації зрушується у бік того берега тріщини, який зазнає великі деформації усадки. Це викликає зміну напрямку руху тріщини, і її поворот здійснюється до тих пір, поки усадкові деформації на протилежних берегах не вирівнюються (рис.1).



**Рис. № 1. Механізм зростання технологічної тріщини на макрорівні:**  
 **$a$  - початкова довжина технологічної тріщини з шириною розкриття  $b$ ;**  
 **$\phi$  - радіус гирла тріщини;**

**$\Delta a$  и  $\Delta b$  - приріст довжини та ширини розкриття тріщини;**

**$\epsilon_{AC}$  и  $\epsilon_{BC}$  - деформації берегів тріщини за умовою:  $\epsilon_{AC} = \epsilon_{BC}$ .**

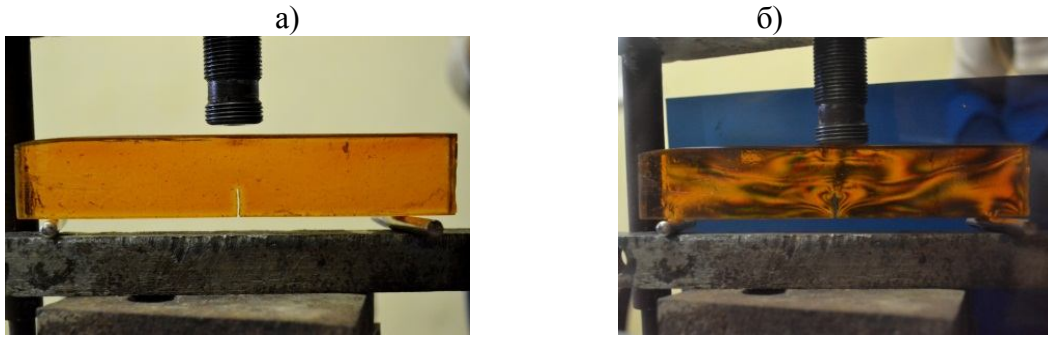
Таким чином, можна припустити, що, напрямлено управляючи технологічними тріщинами, можна змінювати умови, кінетику зростання і мікротраєкторію магістральних тріщин [1].

Як відзначалося вище, технологічні тріщини здатні концентрувати напругу у свого гирла, тобто ми можемо говорити, що край таких тріщин є місцем стоку енергії пружного поля, і тому виникає потік енергії у вершину тріщини, величина якого рівна втраті енергії за одиницю часу.

В даній роботі наведено результат експерименту, що був проведений за допомогою поляризаційно-оптичного методу (методу фотопружності) на серії зразків із епоксидної смоли для отримання картини ізохроматичних смуг і вивчення їх розподілу в області технологічної тріщини, розташованої в середині прольоту зразка (рис. 2, а).

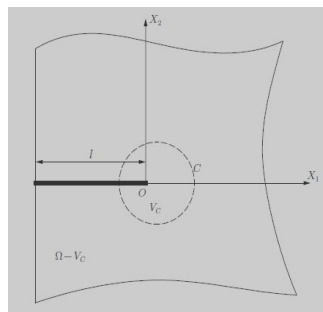
Застосування методу фотопружності дало можливість досліджувати напругу та деформації у виробках із пружних матеріалів, зокрема у бетоні. Зразки із епоксидної смоли, що мали прямокутну форму, високе значення коефіцієнта напруги, а також модуль пружності близьким до модуля пружності бетону, дозволили бути зменшеними моделями залізобетонних балок, що є конструкціями, які найчастіше зустрічаються, у будівництві.

Зразки навантажувалися на установці в лабораторії кафедри Виробництво будівельних конструкцій, виробів та матеріалів Одеської державної академії будівництва та архітектури. Розподіл полів напруги в зразку проводився при різних навантаженнях: 12, 19, 29, 42 і 55 кг (мал. 2, б). Аналізуючи результати експерименту, можна говорити про те, що при послідовному навантаженні зразків ізохроми з'являються у найбільш навантажених точках і локалізуються біля вершини технологічної тріщини. Після кожного етапу збільшення навантаження смуги утворюються на поверхні виробу та зрушуються в зону з найменшим рівнем напруги (рис. 1, б).



**Рис. № 1 – Етапи проведення експерименту.  
Картина розподілу ізохроматичних смуг  
у зразку-моделі із епоксидної смоли з технологічною тріщиною:  
а) зразок-модель з технологічною тріщиною;  
б) розподіл полів напруги у зразку-моделі під навантаженням.**

Скориставшись [19], опишемо обчислення потоку енергії у вершину технологічної тріщини. Для цього введемо контур  $C$ , що охоплює область  $V_c$ , оточуючий вершину технологічної тріщини та, який переміщується услід за вершиною тріщини, рис.2 (у двовимірному випадку контур охоплює область  $V_c$  на площині  $x_1, x_2$ ).



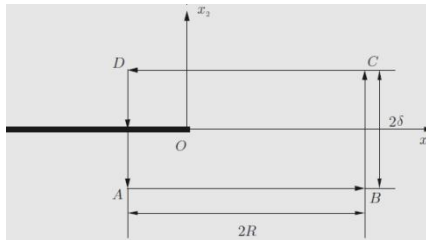
**Рис. № 2. Контур  $C$ , оточуючий вершину тріщини**

Потік енергії  $\Gamma_1$  локально стаціонарного пружного поля у вершину технологічної тріщини, що поширюється з постійною швидкістю у напрямі вісі  $x_1$  може бути обчислений за формулою (1), [20]:

$$\Gamma_1 = \int_C \left[ \left( W(\varepsilon_{ij}) + \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i - H \right) n_1 - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} n_j \right] ds, \quad (1)$$

Відмітимо, що розрахунок інтеграла особливо цікавий для зникаючої малого контура  $C$ .

Якщо в якості контура  $C$  взяти вузький прямокутний контур, витягнутий уздовж вісі  $x_1$  (рис. 2), то (1) набуває такого вигляду:



**Рис. № 3 Вибір контура інтеграції, що охоплює вершину технологічної тріщини, при обчисленні потоку енергії.**

$$\Gamma_1 = -\lim_C \int \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} n_j ds. \quad (2)$$

$(R \rightarrow 0, \delta / R \rightarrow 0)$

для тріщини нормального відриву (що розвивалася із технологічної в процесі проведення експерименту) вираз (1) має наступний вигляд (3):

$$\Gamma_1 = -2 \lim_{AB} \int \sigma_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1. \quad (3)$$

$(R \rightarrow 0, \delta / R \rightarrow 0)$

Опишемо обчислення потоку енергії у вершину силової тріщини, що розвивається з технологічної.

Нехай в лінійно пружному тілі поширюється тріщина нормального відриву та реалізується стан плоскої деформації. Згідно (3) потік енергії в довільну точку вершини тріщини може бути вичислений як:

$$\Gamma_1 = -2 \lim_{R \rightarrow 0, \delta / R \rightarrow 0} \int_{-R}^{+R} \sigma_{22} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \Big|_{x_2=\delta} dx_1 = \frac{K_I^2 (1+\nu) M^2 \sqrt{1 - \frac{1-2\nu}{2-2\nu} M^2}}{8E \left[ \sqrt{\left(1 - M^2\right) \left(1 - \frac{1-2\nu}{2-2\nu} M^2\right)} - \left(1 - \frac{1}{2} M^2\right)^2 \right]}, \quad (4)$$

де  $M = i / c_2$

Це співвідношення виражає лінійну щільність енергостокую на краю тріщини, що рухається, через локальний коефіцієнт інтенсивності напруги  $K_I$ .

Знаменник правої частини рівняння (4) перетворюється на нуль при  $M = M_R$ , де  $M_R$  – корінь рівняння Релея:

$$R(M, \nu) = \sqrt{\left(1 - M^2\right) \left(1 - \frac{1-2\nu}{2-2\nu} M^2\right)} - \left(1 - \frac{1}{2} M^2\right)^2 = 0. \quad (5)$$

Це рівняння має єдиний позитивний корінь, який менше 1 і визначає швидкість поширення хвиль по вільній поверхні пружного тіла [21].

У [19] відмічено, що чисельний аналіз рівняння Релея, дає можливість знайти значення кореня  $M_R$  залежно від значень коефіцієнта Пуассона  $0 < \nu < 1/2$ .

Для реальних матеріалів максимальна швидкість поширення тріщини обмежена деякою величиною  $s^*$ , меншої швидкості поверхневих хвиль Релея  $s_R$ , так що  $M < M_* < M_R$ , і рівній швидкості, при якій відбувається галуження тріщини, тобто коли з'являється два або більше напрямів розвитку тріщини.

Рівняння, що визначає значення  $M_*$  наведено у [19].

Відмітимо, вираз (1), для потоку енергії у вершину тріщини, що поширюється, залишається справедливим і для пружного поля, яке не є локально стаціонарним. Якщо постійна гранична швидкість поширення тріщини спостерігається на значному інтервалі часу її розвитку, то це явище можна пояснити тільки тим, що, починаючи з деякого значення швидкості поширення тріщини, величина енерговитрат, потрібних для прискорення розвитку тріщини, перевищує потік енергії  $\Gamma_1$  в її вершину.

Застосуємо інваріантний  $J$  - інтеграл для формулювання критерію поширення технологічної тріщини.

Критерії початку поширення тріщини можуть бути отримані як на основі енергетичних міркувань, так і силових. Історично склалося так, що Гріффітсом А. А. був запропонований енергетичний критерій руйнування, а силовий критерій набагато пізніше був сформульований Ірвіном Дж. Р. Вчений також показав еквівалентність цих двох критеріїв. Послідовна реалізація силового підходу привела до створення досить строгої і завершеної теорії лінійної механіки руйнування, що є основою, для аналізу крихких руйнувань матеріалів та інженерних конструкцій.

Для пружного тіла з тріщиною  $J$  - інтеграл є з точністю до знаку швидкість зміни його потенційної енергії при збільшенні довжини тріщини [22].

$$-\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial l} = J, \quad (6)$$

$$J = \int_C \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds. \quad (7)$$

Застосування сингулярних доданків, приведених в [23], дають наступні обчислення:

$$J = \frac{\beta}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 \quad (8)$$

де  $\beta = 1$  для плоского напруженого стану,  $\beta = 1 - \nu^2$ , для плоскої деформації.

Останнє співвідношення виражає зв'язок між інваріантним  $J$  - інтегралом та коефіцієнтами інтенсивності напруги і тим самим еквівалентність енергетичного критерію крихкого руйнування і силового критерію Ірвіна.

Таким чином можна сформулювати наступний критерій руйнування: тріщина починає поширюватися, коли  $J$  - інтеграл досягає граничного значення  $J_c$ , що є характеристикою матеріалу:

$$J(P, l, L, \dots) = J_c \quad (9)$$

## Висновки.

1. Наведена формула для визначення потоку енергії  $\Gamma_1$  локально стаціонарного пружного поля у вершину тріщини нормального відриву. Описана можливість обчислення потоку енергії в довільну точку тріщини (3). Це співвідношення виражає лінійну щільність енергостоків на краю тріщини, що рухається, через локальний коефіцієнт інтенсивності напруги  $K_I$  [20].

2. Процес розвитку тріщини - самоприскорюючий, і потік енергії у вершину технологічної тріщини зростає зі збільшенням швидкості. Якщо постійна гранична швидкість поширення технологічної тріщини спостерігається на значному інтервалі часу її розвитку, то це явище можна пояснити тільки тим, що, починаючи з деякого значення

швидкості поширення технологічної тріщини, величина енерговитрат, потрібних для прискорення розвитку тріщини, перевищує потік  $G_1$  в її вершину.

3. За допомогою  $J$  - інтеграла сформульовано критерій поширення технологічної тріщини в конструкціях, що згинаються.

### Література

1. Выровой В. Н. Композиционные строительные материалы и конструкции: Структура, самоорганизация, свойства / В. Н. Выровой., В. С. Дорофеев., В. Г. Суханов ; под ред. В. Н. Вырового. – Одесса : 2010. – 91 с.
2. Atkinson C., Eshelby J. D. The flow of energy into the tip of a moving crack// Int. J. Fracture Mechanics. 1968. V. 4. No. 1. P. 3-18.
3. Eshelby J. D. The Force on an Elastic Singularity // Phil. Trans. Roy. Soc., London. 1951. V. A244. P. 87-112.
4. Gunter W. Uber einige Randintegrale der Elasto-Mechanik // Abh. Braunsch. Wiss. Ges. 1962. H. 14. S. 53-72.
5. Noether E. Invariante Variationsprobleme // Kgl. Ges. Wiss. Nachr. Gottingen. Math.-Physik. Kl. 2. 1918. S. 235-257.
6. Freund L. B. Energy flux into the tip of an extending crack in an elastic body // J. Elasticity. 1972. V. 2. P. 341-349.
7. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. / Г. П. Черепанов – М.: Наука, 1974. – 640 с.
8. Fletcher D. C. Conservation laws in linear elastodynamics // Arch. Rat. Mech. Anal. 1976. V. 60. P. 329-353.
9. Atluri S. N., Nishioka T. Path-independent integrals, energy release rates and general solutions of near-tip fields in mixed mode dynamic fracture mechanics// Engn. Fracture Mechanics. 1983. V. 18. P. 1-22.
10. Ehlacher A. Path-independent Integral for the Calculation of the Energy-release Rate in Elastodynamics / In: Advances in Fracture Research. CFA Paris, Fracture 81, 1981. Ed. D. Francois. V. 5. P. 2187-2194.
11. Knowles J. K., Sternberg E. On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics // Arch. Rat. Mech. Anal. 1972. V. 44. P. 187-211.
12. Olver P. J. Conservation laws in elasticity I. General results// Arch. Rational Mech. Anal. 1984. V. 85. P. 119-129.
13. Olver P. J. Conservation laws in elasticity II. Linear homogeneous isotropic elastostatics // Arch. Rational Mech. Anal. 1984. V. 85. P. 131-160.
14. Olver P. J. Symmetry Groups and Path-Independent Integrals / In: Fundamentals of Deformation and Fracture. Eshelby Memorial Symposium, Sheffield 2-5 April, 1984. Eds. B. A. Bilby et al. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. P. 57-71.
15. Rice J. R. A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1968. No. 35. P. 379-386.
16. Черепанов Г. П. О распространении трещин в сплошной среде / Г. П. Черепанов // Прикл. матем. и механика. 1967. – Т. 31. – Вып. 3. – С. 476-488.
17. Карпенко Н. И. Теория деформирования железобетона с трещинами / Н. И. Карпенко. – М.: Стройиздат, 1976. – 208 с.
18. Выровой В. Н. Композиционные строительные материалы и конструкции: Структура, самоорганизация, свойства / В. Н. Выровой., В. С. Дорофеев., В. Г. Суханов ; под ред. В. Н. Вырового. – Одесса : 2010. – С. 69-72 с.
19. Астафьев В. А. Нелинейная механика разрушения / В. А. Астафьев, Ю. Н. Радаев., Л. В. Степанова. – Самара : Издательство «Самарский университет», 2001. – С. 171-174.
20. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
21. Астафьев В. А. Нелинейная механика разрушения / В. А. Астафьев, Ю. Н. Радаев., Л. В. Степанова. – Самара : Издательство «Самарский университет», 2001. – 83 с.
22. Астафьев В. А. Нелинейная механика разрушения / В. А. Астафьев, Ю. Н. Радаев., Л. В. Степанова. – Самара : Издательство «Самарский университет», 2001. – С. 87-97.
23. Астафьев В. А. Нелинейная механика разрушения / В. А. Астафьев, Ю. Н. Радаев., Л. В. Степанова. – Самара : Издательство «Самарский университет», 2001. – С. 59-60.