# ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

УДК 513.88 : 517.948.3
DOI: 10.15587/2313-8416.2016.74668

## КРИТЕРИЙ СВЯЗИ РЕШЕНИЙ ОБОБЩЁННЫХ ПАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЁРТКИ В БАНАХОВЫХ АЛГЕБРАХ С ВЕСОМ

© Г. С. Полетаев

*Рассмотрено существование и связь между решениями абстрактных парных интегральных уравнений типа свёртки с произвольной и равной дельта функции Дирака правыми частями. Сформулирована и доказана теорема – критерий с необходимым и достаточным условием такой связи. Процедура свободна от аппарата теории интеграла типа Коши, гёльдеровости функций*
***Ключевые слова:*** *интеграл, уравнение, парное, свёртка, банахова, алгебра, факторизация, проектор*

*Existence and connection between the solutions of the abstract general convolution type paired integral equations with arbitrary right-hand side and equal to Dirac's delta function are considered. The theorem - criterion for such connection is formulated and proved. Procedure is a free from the theory of Cauchy integral and Hölder requirement*
***Keywords:*** *integral, equation, paired, convolution, Banach, algebra, factorization, projection*

### 1. Введение

Известна важная роль теории интегральных уравнений типа свёртки, в частности, парных, а также круга проблем, связанных с их исследованием, для фундаментальных теоретических и прикладных вопросов [1–21]. В том числе, в математике, механике, теории некоторых видов дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, теории упругости, в расчётах строительных элементов, в математической и теоретической физике [1–14]. Общие элементы этой тематики связываются положениями строящейся автором теории уравнений в кольцах с факторизационными парами [15–17, 21]. Решение такого рода уравнений и смежных задач, в существенном, сопряжено с преодолением серьёзных аналитических барьеров, выяснением самого факта существования решений, разработкой неизвестных подходов к решению и исследованию. Поэтому получение новых общих результатов о разрешимости таких уравнений, возможных путях построения решений, формул их представления, изучение свойств решений, возможных связей между решениями, является актуальной задачей. Актуальна и разработка элементов точных методов, минимально опирающихся на теорию функций комплексного переменного, свободных от аппарата теории интеграла типа Коши, требования гёльдеровости функций.

### 2. Анализ исследований и публикаций

В рассматриваемом ниже виде, обобщённые парные уравнения, впервые, появились в работах автора. Они охватывают известные парные интегральные уравнения типа свёртки [1–4, 6, 10, 12–18]. Наиболее полная теория последних, в случае порождающих ядра функций $k_{1,2}(t) \in L_1(-\infty,\infty)$, в целом классе $E$ банаховых пространств построена в [4]. В близкой к рассматриваемой в [12] и ниже постановке, но в других пространствах, эти парные интегральные уравнения изучались Черским Ю. И.; Черским Ю. И. и Гаховым Ф. Д. (1954, 1956; см. также [6]) при дополнительных ограничениях типа требования гёльдеровости функций. В их исследованиях использован аппарат задачи Римана-Гильберта, на связь с которой впервые указал И. М. Рапопорт [1]. Наряду с этим, для некоторых видов уравнений разных классов, можно обнаружить существование свойства связи между решениями. При весьма общих предположениях, оказывается возможным, зная специальные решения, построить решения, соответствующие произвольной правой части. Это имеет место для ряда известных и новых классов уравнений. В том числе, важных при моделировании теоретических и прикладных задач [12–18, 21]. Например, обнаруживается связь между решениями, соответствующими произвольной и равной единице кольца (функций, матриц или абстрактных элементов, в котором отыскивается решение) правым частям. Для парных уравнений, в том числе типа свёртки, до работ автора, вопросы связи решений оставались не поставленными в общей форме и, в достаточно полном объёме, не были разрешены. База результатов установлена в [12]. Она связана с работами [1, 2, 4] – предшествующими составляющими замечательной истории исследования парных интегральных уравнений типа свёртки. В этих, а также иных работах, имеются и фрагменты историко-мотивационного характера [6].

### 3. Цели и задачи исследования

Целью статьи является формулировка и доказательство теоремы – критерия связи решений абстрактных обобщённых парных интегральных уравнений типа свёртки относительно неизвестной функции φ(t) вида:

$$\begin{cases} \varphi(t) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} k_1(t-s)\varphi(s)ds = \alpha\delta + f(t), \quad t<0; \\ \varphi(t) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} k_2(t-s)\varphi(s)ds = \beta\delta + g(t), \quad t>0. \end{cases} \tag{1}$$

Уравнения (1) при α=β=0; $\alpha, \beta \in C$ являются известными парными интегральными уравнениями типа свёртки [1, 2, 4, 6, 10, 12, 13]. Предполагается, что: $k_1(t), k_2(t)\exp\{ct\} \in L_1(-\infty,\infty)$;

$$[1-K_1(\lambda)][1-K_2(\lambda - ic)] \neq 0, \quad -\infty<\lambda<\infty;$$

$$K_j(\zeta) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} k_j(\zeta)e^{i\zeta t}dt; \ j=1,2, \quad c \in \mathbb{R}, c \geq 0. \tag{2}$$

Для достижения поставленной цели:

– разработан, отличающийся алгебраичностью, новый подход, опирающийся на основные положения теории колец и теории операторов;

– с помощью соответствующих элементов этого подхода, сформулирована и доказана общая теорема – критерий связи решений;

– разобран иллюстративный пример.

### 4. Общие положения

#### 4. 1. Обозначения, определения, индекс элемента банаховой алгебры $\tilde{L}_{(c)}$.

Следуя [12], напомним используемые далее обозначения и положения. Для любой функции

$$k(t), -\infty<t<\infty,$$

положим:

$$k_\pm(t) = k(t), \pm t \geq 0,$$

$$k_\pm(t) = 0, \pm t < 0.$$

Символом $L_{(c)} = L_{(c)}(-\infty,\infty)$, $c \in \mathbb{R}$, будем обозначать банахову алгебру всех комплекснозначных измеримых функций

$$k(t), -\infty<t<\infty,$$

таких, что $e^{ct}k(t) \in L_1(-\infty,\infty) \equiv L$. Норма в $L_{(c)}$ вводится по формуле:

$$\|k\|_{L_{(c)}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |k(t)| e^{ct} dt < \infty; \quad k \in L_{(c)},$$

а роль умножения играет свертка. Она обозначается символом $*$. Если $a$ и $b$ два любых вещественных числа, то через $L_{(a \cap b)}$ обозначим пересечение $L_{(a)}$ и

$$L_{(b)}: L_{(a \cap b)} := L_{(a)} \cap L_{(b)}.$$

Устанавливается, что $L_{(a \cap b)}$ – банахова алгебра относительно нормы:

$$\|k\|_{L_{a\cap b}} := \|k_-\|_{L_{(\min(a,b))}} + \|k_+\|_{L_{(\max(a,b))}}$$

и свертки в качестве умножения при обычном смысле сходимости интегралов. Через $L^\pm, L^\pm_{(c)}, L^\pm_{(a\cap b)}$ обозначим подалгебры функций из $L, L_{(c)}, L_{(a\cap b)}$, соответственно, которые обращаются в нуль при $\pm t > 0$.

Пусть формальный элемент ( $\delta$ – функция Дирака [2]) такой, что

$$\delta * \delta = \delta, \delta * k = k * \delta = k, \quad k \in L^+_{(-\not{k})} \oplus L^-_{(c)},$$

а $A$ – любая из алгебр $L, L^\pm, L_{(c)}, L^\pm_{(c)}, L_{(a\cap b)}, L^\pm_{(a\cap b)}$. Элемент $\delta$ играет роль мультипликативной единицы алгебры $A$, при этом $\delta \notin A$. Формальным присоединением этой единицы к $A$, образуем банахову алгебру $\tilde{A}$. Норма в $\tilde{A}$ вводится по формуле:

$$\|g\|_{\tilde{A}} = |\alpha| + \|g\|_A, g = \alpha\delta + k; \alpha \in \mathbf{C}, k \in A.$$

Алгебра $\tilde{L}(-\tilde{L}_{(c)})$ не имеет радикала и, следовательно, изоморфна некоторому кольцу непрерывных функций [19, 12]. Поэтому элементы рассматриваемых множеств часто будем называть функциями. Обратный для обратимого в $\tilde{A}$ элемента $g \in \tilde{A}$ будем обозначать $g^{-1}$. Возможен случай, когда элемент $g \in \tilde{A}$, обратимый в $\tilde{A}$ или нет, имеет обратный в некоторой другой алгебре. Тогда, чтобы уточнить, какой именно обратный для $g$ рассматривается, будем применять индексы, ассоциированные с алгеброй, содержащей этой обратный. Например, для $g^+ \in \tilde{L}^+_{0\cap c}$ символ $[g^+]^{-1}_{0\cap c}$ обозначает обратный, принадлежащий $\tilde{L}_{0\cap c}$.

Введем коммутирующие проекторы,

$$p^\pm : \tilde{L}^+_{(-\not{k})} + \tilde{L}^{-0}_{(\pm\not{k})} \to \tilde{L}^\pm_{(\pm c)},$$

действующие по формуле:

$$p^\pm(\alpha\delta + k) = \alpha\delta + k_\pm, \quad k \in (L^+_{(-\not{k})} \oplus L^-_{(c)}),$$

а также проекторы:

$$p^0 = p^+p^-(= p^-p^+), \quad p_\pm = p^\pm - p^0, \quad p_* = p_+ + p_-.$$

Ради краткости полагаем [20]:

$$x^{+} := p^{+}x,\ \ x^{-} := p^{-}x,$$

$$x^{0} := p^{0}x;\ \ x_{\pm} := p_{\pm}x,$$

$$\left(x \in (\tilde{L}^{+}_{\langle -|c|\rangle} \oplus \tilde{L}^{-}_{\langle |c|\rangle})\right).$$

Для любой функции

$$h = \alpha\delta + k, k \in A,$$

положим, $h^{\mp} = p^{\mp}h$. Очевидно, $h^{\mp} = \alpha\delta + k_{\mp}$. Если $k \in A$, то через $K(\zeta)$ будем обозначать интеграл,

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(t)e^{i\zeta t}dt,$$

рассматриваемый при тех $\zeta$, для которых он существует.

**4. 2. Обратимость и факторизация элементов в $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$**

Следующие утверждения вытекают из общих результатов [19] о кольцах абсолютно интегрируемых функций с весом.

**Вариант теоремы Винера в $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$**. Для обратимости в $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$ элемента

$$\alpha\delta + k, \alpha \in \mathbf{C}, k \in L_{\langle c\rangle},$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$-\infty < \mathrm{Re}\varsigma < \infty.$$

**Вариант теоремы Винера в $\tilde{L}^{\mp}_{\langle c\rangle}$**. Для обратимости в $\tilde{L}^{\mp}_{\langle c\rangle}$ элемента

$$\alpha\delta + k_{\mp}, \alpha \in \mathbf{C},\ \ k_{\mp} \in L^{\mp}_{\langle c\rangle},$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\alpha[\alpha + K_{\mp}(\zeta)] \neq 0, \mp \mathrm{Im}\zeta \geq \pm c;\ \ -\infty < \mathrm{Re}\zeta < \infty.$$

Пусть

$$g = \alpha\delta + k, \alpha \in \mathrm{C}, k \in L_{a\cap b}$$

такова, что при некотором $c \in [a,b]$ выполняется условие $\alpha[\alpha + K(\lambda - ic)] \neq 0, -\infty < \lambda < \infty$. Тогда, **индексом** $g$, как элемента $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$ (кратко $\chi[g,c]$ либо $\mathrm{ind}[g]_c$) назовем число, равное индексу функции $\alpha + K(\lambda - ic)$ переменной $\lambda$ вдоль сомкнутой вещественной оси $\{-\infty,\infty\}$, получающейся из $[-\infty,\infty]$ отождествлением концов [2], т. е.

$$\chi[g,c] := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d_{\lambda}[\arg\{\alpha + K(\lambda - ic)\}].$$

В частности, если $g = \delta - k, k \in L$, и

$$1 - K(\lambda) \neq 0, -\infty < \lambda < \infty,$$

то

$$\chi[g,0] := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d_{\lambda}[\arg\{1 - K(\lambda)\}].$$

**Факторизацией** функции $g = \delta - k, k \in L_{\langle c\rangle}$, в $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$ будем понимать представление её в виде:

$$g = [\delta + \gamma_{+}] * [\delta + \gamma_{-}],\ \gamma_{\mp} \in L^{\mp}_{\langle c\rangle}. \quad (3)$$

Эту факторизацию назовем «правильной в $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$», если хотя бы один из $\pm$ факторов $\delta + \gamma_{\mp}$ обратим в своей подалгебре $\tilde{L}^{\mp}_{\langle c\rangle}$. Если оба фактора таковы, то (3) называем «канонической в $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$» факторизацией. Учитывая, полупростоту банаховой алгебры $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$, обнаруживается, что, по изоморфизму колец, из факторизационных теорем М. Г. Крейна ([2])), непосредственно, вытекают факторизационные теоремы в $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$ [12].

**5. Результаты исследования**

**5. 1. Формулировка и доказательсто теоремы связи решений.** Используя подготовленную базу, сформулируем условия и приведём формулы связи решений парных интегральных уравнений (1) с произвольной и равной $\delta(t)$ правыми частями, при сделанных предположениях, непосредственно.

***Теорема 3 (Необходимое и достаточное условие – критерий связи решений парных интегральных уравнений типа свёртки).*** *Пусть* $k_1(t)$,

$$k_2(t)\exp(ct) \in L_1 \geq (-\infty, +\infty),$$

*т. е.*

$$k_1 \in L,\ k_2 \in L_{\langle c\rangle};\ c \geq 0,$$

*и выполнено условие (2), а парное интегральное уравнение с (1) с правой частью равной δ (т.е. при αδ=βδ=δ; f(t)=g(t)=0) имеет решение* $\varphi_S \in \tilde{L}_{0\cap c}$, *причём,* $\varphi_\delta = \varphi_S(t) = \delta + x_1$

$$x_1(t) \in L_{0\cap c}$$

и

$$\left[1+X_1(\lambda)\right]\bullet\left[1+X_1(\lambda-ic)\right]\neq 0, -\infty<\lambda<+\infty. \quad (4)$$

*Тогда для существования решений $\varphi(t)\in\tilde{L}_{0\cap c}$ парного интегрального уравнения (1) с произвольной из всевозможных правых частей αδ+f(t), -∞<t<0; βδ+g(t), 0<t<∞; где α,β∈C ; $f, g\in L_{0\cap c}$, c≥0, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:*

$$\alpha=\beta. \quad (5)$$

*При его выполнении, решение $\varphi(t)\in\tilde{L}_{0\cap c}$ обобщённого парного интегрального уравнения типа свёртки (1) с произвольной правой частью*

$$\alpha\delta+f(t),\ -\infty<t<0;\ \alpha\delta+g(t),$$

$$0<t<\infty;\ \alpha\in C;\ f,g\in L_{0\cap c};\ c\geq 0 \text{ в } \tilde{L}_{0\cap c}$$

*можно определить по формуле:*

$$\varphi(t)=\varphi_\delta\times\{p_-([\varphi_\delta]_0'\times[\delta+k_1^1]\times \\ \times[\alpha\delta+f_-])+p^+([\varphi_\delta]_c'\times[\delta+k_2^1]\times[\alpha\delta+g_+])\}(t), \quad (6)$$

где

$$[\varphi_\delta]_0', \delta+k_1^1\left(:=[\delta-k_1]_0'\right)\in\tilde{L};$$

$$[\varphi_\delta]_c', \delta+k_2^1\left(:=[\delta-k_2]_c'\right)\in\tilde{L}_{<c>}$$

обратные в $\tilde{L}$, $\tilde{L}_{<c>}$, *соответственно, для решения $\varphi_\delta\in\tilde{L}\cap\tilde{L}_{<c>}$ и для коэффициентов*

$$\left[\delta-k_1(t)\right]\in\tilde{L},\ \left[\delta-k_2(t)\right]\in\tilde{L}_{<c>}, c\geq 0$$

*парного уравнения (1).*

**Доказательство. Необходимость.** Пусть при сделанных предположениях элемент $\varphi\in\tilde{L}_{0\cap c}$ является решением уравнения (1). Тогда, используя введенные обозначения и проекторы, заключаем:

$$\left[(\delta-k_1)\cdot\varphi(t)\right]^-=\alpha\delta+f_-(t),$$

$$\left[(\delta-k_2)\cdot\varphi(t)\right]^+=\beta\delta+g_+(t). \quad (7)$$

Отсюда, применяя к обеим частям каждого из записанных равенств проектор $p^0$, получаем:

$$p^0\left[(\delta-k_1)\times\varphi\right]=p^0[\alpha\delta+f_-]=\alpha\delta;$$

$$p^0\left[(\delta-k_2)\times\varphi\right]=p^0[\beta\delta+g_+]=\beta\delta.$$

Используя теперь гомоморфические свойства проектора $p^0$, заключаем, что $\varphi^0=\alpha\delta=\beta\delta$ и условие (5) действительно имеет место.

**Достаточность.** Пусть предположения теоремы 3 выполнены, имеют место условия (3)–(5) и в формуле (6):

$$\varphi_\delta\equiv\varphi_\delta(t)=\delta+x_1;\ x_1(t)\in L_{0\cap c}\ (c\geq 0),$$

удовлетворяющее условию (4) решение парного интегрального уравнения (1) с правой частью равной присоединенной единице $\delta(=\delta(t))$; а

$$[\varphi_\delta]_0', [\varphi_\delta]_c'; \delta+k_j^1, j=1,2$$

обратные в банаховых алгебрах $\tilde{L}, \tilde{L}_{(c)}$, соответственно, элементы. Их существование гарантирует вариант теоремы Н. Винера, так как выполнены условия (3), (4)). Знаками «+,−» при функциях отмечено применение используемых проекторов [12]. Тогда:

$$\left([\delta-k_1]\times\varphi_\delta\right)^-=\left([\delta-k_2]\times\varphi_\delta\right)^+=\delta.$$

Поэтому,

$$[\delta-k_1]\times\varphi_\delta=\delta+a_+, [\delta-k_2]\times\varphi_\delta=\delta+a_-;$$

где $a_+\in L^+$, $a_-\in L^-_{(c)}$ – некоторые элементы и справедливы представления:

$$[\varphi_\delta]_0'=[\delta+a_+]_0'\times[\delta-k_1], [\varphi_\delta]_c'=[\delta+a_-]_c'\times[\delta-k_2]. \quad (8)$$

Используя свойства представления Гельфанда элементов банаховых алгебр функциями на максимальных идеалах, получаем ещё такие представления:

$$[\varphi_\delta]_0'=\delta+x_0^1(x_0^1\in L); [\varphi_\delta]_c'=\delta+x_c^1(x_c^1\in L_{<c>}),$$

а с помощью (8) заключаем, что

$$p^0[[\delta+a_+]_0']=p^0[[\delta+a_-]_c']=\delta. \quad (9)$$

Легко видеть, что при любой правой части уравнения (1) с $\alpha=\beta;\alpha,\beta\in C; f,g\in L_{0\cap c}, c\geq 0$ правая часть формулы (6) определяет некоторую функцию (элемент) $y(t)\in\tilde{L}_{0\cap c}$. Переписывая уравнение (1) с помощью введенных обозначений в краткой форме (7) и подставляя этот элемент $y(t)\in\tilde{L}_{0\cap c}$ в левую часть (1) вместо $\varphi(t)$, в результате преобразований, с учетом (9) и сделанных замечаний, получим:

$$\begin{aligned}
&p^{-}\left[\{(\delta-k_1)\times\varphi\}(t)\right]=\\
&=p^{-}\left[\{(\delta-k_1)\times\{\varphi_\delta\times\{p_{-}([\varphi_\delta]'_0\times[\delta+k_1^1]\times[\alpha\delta+f_{-}])+p^{+}([\varphi_\delta]'_c\times[\delta+k_2^1]\times[\alpha\delta+g_{+}])\}\}\}(t)\right]=\\
&=p^{-}\left[\{(\delta-k_1)\times\varphi_\delta\times\{[\varphi_\delta]'_0\times[\delta+k_1^1]\times[\alpha\delta+f_{-}]-p^{+}([\varphi_\delta]'_0\times[\delta+k_1^1]*[\alpha\delta+f_{-}])\}\}(t)\right]+\\
&+p^{-}[\{(\delta+a_{+})\times\{p^{-}([\varphi_\delta]'_c\times[\delta+k_2^1]\times[\alpha\delta+g_{+}])\}\}(t)]=\\
&=\alpha\delta+f_{-}(t)-p^0[\{[\delta+a_{+}]'_0\times[\alpha\delta+f_{-}]\}(t)]+p^0[\{(\delta+a_{+})\times\{p^{+}([\delta+a_{-}]'_c\times[\alpha\delta+g_{+}])\}\}(t)]=\\
&=\alpha\delta+f_{-}(t)-\alpha p^0[[\delta+a_{+}]'_0(t)]+\alpha p^0[[\delta+a_{-}]'_c(t)]=\alpha\delta+f_{-}(t)-\alpha\delta+\alpha\delta=\alpha\delta+f_{-}(t).
\end{aligned}$$

Аналогічно проверяется, что $\alpha\delta+g_{+}$. Стало быть, действительно, формула (6) определяет решение уравнения (1) в рассматриваемой ситуации. Достаточность, а с нею и теорема, доказана.

### 5. 2. Пример

Рассмотрим в качестве примера уравнение:

$$\begin{cases} x(t)-\int\limits_{-\infty}^{\infty}k_1(t-s)x(s)ds=c^{-}(t), t\prec 0,\\ x(t)-\int\limits_{-\infty}^{\infty}k_2(t-s)x(s)ds=b^{+}(t), t\succ 0; \end{cases} \tag{10}$$

где

$$k_1(t)=\left[e^{-2t}\right]_{+}; k_2(t)=\left[e^{5t}\right]_{-};$$

$$c^{-}=c^{-}(t)=c_{-}(t)\in L^{-}, b^{+}=b^{+}(t)=b_{+}(t)\in L^{+}.$$

Полагаем,

$$a_1=\delta(t)-k_1(t); a_2=\delta(t)-k_2(t); \tag{11}$$

то есть:

$$a_1=\delta-\left[e^{-2t}\right]_{+}; a_2=\delta-\left[e^{5t}\right]_{-}$$

Решением $\varphi_\delta$ при

$$c^{-}=c^{-}(t)=\delta, b^{-}=b^{+}(t)=\delta,\ \ \delta\equiv\delta(t)$$

очевидно, будет $\varphi_\delta=\delta(t)$ - функция Дирака. Можно установить, что для функций (11), обратными в $\tilde{L}$ будут:

$$a_1'(t)=\delta+\left[e^{-t}\right]_{-}; a_2'(t)=\delta+\left[e^{4t}\right]_{-}.$$

При любых

$$c^{-}=c^{-}(t)=c_{-}(t)\in L^{-},$$

$$b^{+}=b^{+}(t)=b_{+}(t)\in L^{+}$$

условие (5), очевидно, выполнено: $\alpha=\beta=0$. Следовательно, в силу **теоремы 3** решение $\varphi(t)\in L$ уравнения (10) существует и допускает представление в виде:

$$\begin{aligned}
&\varphi(t)=\left[a_1'*c^{-}\right]_{-}+\left[a_2'*b^{+}\right]^{+}=\\
&=\left[\left(\delta+\left[e^{-t}\right]_{+}\right)*c^{-}(t)\right]_{-}+\left[\left(\delta+\left[e^{4t}\right]_{-}\right)*b^{+}(t)\right]^{+}=\\
&=c_{-}(t)+\left\{\left[e^{-t}\right]_{+}*c^{-}(t)\right\}_{-}+b^{-}(t)+\left\{\left[e^{4t}\right]_{-}*b^{+}(t)\right\}^{+}.
\end{aligned}$$

Отсюда, в $L$:

$$\begin{aligned}
&\varphi(t)=c_{-}(t)+b_{+}(t)+\\
&+\left\{\left(e^{-t}\right)_{+}\times c_{-}(t)\right\}_{-}+\left\{\left[e^{4t}\right]_{-}\times b_{+}(t)\right\}_{+}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Результаты о парных уравнениях освещались автором, в частности, в рамках Международной конференции имени академика М. Кравчука в Киеве, КПИ-2010, 2012, а также Всероссийской конференции «Необратимые процессы в природе и технике», в Москве, МГТУ-2013, а также в ОГАСА [21] и других.

### 6. Выводы

Имеются важные, в том числе ранее неизвестные, положения исследований по теории интегральных уравнений типа свёртки, которые можно получать единым подходом. При нём, среди прочих, используются элементы строящейся теории уравнений в кольцах с факторизационными парами. Удаётся, не опираясь на теорию задачи Римана, сократить использование аппарата преобразований Фурье, снять условие гёльдеровости функций, охарактеризовать разрешимость уравнений и связь решений соответствующих произвольным и специальным правым частям. При весьма общих условиях, без требований гельдеровости функций, сформулирована и доказана теорема с необходимым и достаточным условием связи их решений, соответствующих произвольной и равной присоединенной единице, исходных банаховых алгебр, правым частям. Использовались применяемые непосредственно к соответствующему случаю банаховых алгебр подходы, развиваемые для уравнений в абстрактных кольцах с факторизационными парами [15–17, 20]. При установлении вида формулы связи, существенно использованы варианты теоремы Н. Винера и факторизационных теорем [2, 4, 12–14, 19, 20]. В случае, когда порождающие ядра функции принадлежат соответствующим подалгебрам, ситуация упрощается. Результаты имеют теоретическое и практическое значение. Могут использоваться в соответствующих ситуациях при изучении конкретных примеров уравнений рассматриваемого вида (1). В перспективе возможно насыщение круга применимости новыми конкретными фактами для подклассов уравнений, исследование свойств связи для других уравнений и специальных решений.

**Литература**

1. Рапопорт, И. М. О некоторых «парных» интегральных и интегро-диффер. уравнениях [Текст] / И. М. Рапопорт // Сборник трудов института математики АН УССР. – Киев: Институт математики АН УССР, 1949. – № 12. – С. 102–118.

2. Крейн, М. Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов [Текст] / М. Г. Крейн // Успехи мат. наук. – 1958. – Вып. 5. – С. 3–120.

3. Попов, Г. Я. О спаренных интегро-диффер. уравнениях изгиба лежащей на упругом основании неограниченной плиты кусочн-постоянной жесткости [Текст] / Г. Я. Попов // Изв. высш. учебн. завед., Матем. – 1957. – № 1. – С. 195–209.

4. Гохберг, И. Ц. О парном интегральном уравнении и его транспонированном I [Текст] / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн // Теорет. и прикл. математика. – 1958. – Вып. 1. – С. 58–81.

5. Мусхелишвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения [Текст] / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1968. – 512 с.

6. Гахов, Ф. Д. Уравнения типа свертки [Текст] / Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский. – М.: Наука, 1978. – 296 с.

7. Попов, Г. Я. Метод факторизации и его численная реализация [Текст]: уч. пос. / Г. Я. Попов, П. В. Керекеша, В. Е. Круглов; ред. Г. Я. Попов. – Одесса: Одесский гос. университет, 1976. – 82 с.

8. Попов, Г. Я. Контактные задачи для линейно деформируемого основания [Текст] / Г. Я. Попов. – Киев – Одесса: ВШ, 1982. – 168 с.

9. Мхитарян, С. М. О некотор. плоских контакт. задачах теор. упруг. с учётом сил сцепл. и связ. с ними интегр. и диффер. уравн. [Текст] / С. М. Мхитарян // Изв. АН Армянской ССР. Механика. – 1968. – Т. XXI, № 5-6. – С. 3–20.

10. Черский, Ю. И. Метод сопряжения аналитических функций с приложениями [Текст] / Ю. И. Черский, П. В. Керекеша, Д. П. Керекеша. – Одесса: Астропринт, 2010. – 552 с.

11. Акопян, В. Н. Замкнутое решения некоторых смешанных задач для ортотропной плоскости с разрезом [Текст] / В. Н. Акопян, Л. Л. Даштоян // Современные проблемы механики деформируемого твердого тела, дифференциальных и интегральных уравнений. – Одесса, 2013. – С. 12.

12. Полетаев, Г. С. Парное уравнение типа свертки с ядрами из различных банаховых алгебр [Текст] / Г. С. Полетаев // Укр. матем. журн. – 1991. – № 6. – С. 803–813.

13. Полетаев, Г. С. Парні рівняння типу згортки з ядрами з різних банахових алгебр абсолютно інтегрованих з вагою функцій [Текст] / Г. С. Полетаев // НАУКОВІ ВІСТІ Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». – 2002. – № 4 (24). – С. 143–148.

14. Полетаев, Г. С. Парные уравнения типа свёртки с ядрами из разных банаховых алгебр абсолютно интегрируемых по весу функций [Текст]: міжнар. наук. конф. / Г. С. Полетаев. – Київ, 2002. – С. 349.

15. Полетаев, Г. С. Абстрактный аналог парного уравнения типа свертки в кольце с факторизационной парой [Текст] / Г. С. Полетаев // Укр. матем. журн. – 1991. – № 9. – С. 1201–1213.

16. Poletaev, G. S. Connection of Solutions of Abstract Paired Equations in Rings with Factorization Pairs [Text] / G. S. Poletaev // Modern Analysis and Applications. – 2009. – P. 479–484. doi: 10.1007/978-3-7643-9921-4_29

17. Полетаев, Г. С. Критерий связи решений абстракт. парного уравн. в кольце с факторизационной парой [Текст]: конф. / Г. С. Полетаев. – Київ, 2010. – С. 220.

18. Полетаев, Г. С. Связь решений парных интегральных уравнений типа свёртки [Текст]: конф. / Г. С. Полетаев. – Київ, 2012. – С. 193.

19. Гельфанд, И. М. Коммутативные нормированные кольца [Текст] / И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов. – М.: Физматгиз, 1960. – 316 с.

20. McNabb, A. Factorization of Operators – I: Algebraic Theory and Examples [Text] / A. McNabb, A. Schumitzky // Journal of Functional Analysis. – 1972. – Vol. 9, Issue 3. – P. 262–295. doi: 10.1016/0022-1236(72)90002-x

21. Полетаев, Г. С. Критерий связи решений парных матричных уравнений с проекторами [Текст] / Г. С. Полетаев // ВІСНИК ОДАБА. – Одеса, 2013. – Вип. 50. – С. 229–244.

**References**

1. Rapoport, I. M. (1949). O nekotoryh «parnyh» integral'nyh i integro-differ. Uravnenijah. Sbornik trudov instituta matematiki AN USSR. Kiev: Institut matematiki AN USSR, 12, 102–118.

2. Krejn, M. G. (1958). Integral'nye uravnenija na poluprjamoj s jadrami, zavisjashhimi ot raznosti argumentov. Uspehi mat. Nauk, 5, 3–120.

3. Popov, G. Ja. (1957). O sparennyh integro-differ. uravnenijah izgiba lezhashhej na uprugom osnovanii neogranichennoj plity kusochn-postojannoj zhestkosti. Izv. vyssh. uchebn. zaved., Matem., 1, 195–209.

4. Gohberg, I. C., Krejn, M. G. (1958). O parnom integral'nom uravnenii i ego transponirovannom I. Teoret. i prikl. Matematika, 1, 58–81.

5. Mushelishvili, N. I. (1968). Singuljarnye integral'nye uravnenija. Moscow: Nauka, 512.

6. Gahov, F. D., Cherskij, Ju. I. (1978). Uravnenija tipa svertki. Moscow: Nauka, 296.

7. Popov, G. Ja., Kerekesha, P. V., Kruglov, V. E.; Popov, G. Ja. (Ed.) (1976). Metod faktorizacii i ego chislennaja realizacija. Odessa: Odesskij gos. universitet, 82.

8. Popov, G. Ja. (1982). Kontaktnye zadachi dlja linejno deformiruemogo osnovanija. Kiev – Odessa: VSh, 168.

9. Mhitarjan, S. M. (1968). O nekotor. ploskih kontakt. zadachah teor. uprug. s uchjotom sil scepl. i svjaz. s nimi integr. i differ. uravn. Izv. AN Armjanskoj SSR. Mehanika, XXI (5-6), 3–20.

10. Cherskij, Ju. I., Kerekesha, P. V., Kerekesha, D. P. (2010). Metod soprjazhenija analiticheskih funkcij s prilozhenijami. Odessa: Astroprint, 552.

11. Akopjan, V. N., Dashtojan, L. L. (2013). Zamknutoe reshenija nekotoryh smeshannyh zadach dlja ortotropnoj ploskosti s razrezom. Sovremennye problemy mehaniki deformiruemogo tverdogo tela, differencial'nyh i integral'nyh uravnenij. Odessa, 12.

12. Poletaev, G. S. (1991). Parnoe uravnenie tipa svertki s jadrami iz razlichnyh banahovyh algebra. Ukr. matem. zhurn., 6, 803–813.

13. Poletaev, G. S. (2002). Parni rivnjannja typu zgortky z jadramy z riznyh banahovyh algebr absoljutno integrovanyh z vagoju funkcij. NAUKOVI VISTI Nacional'nogo tehnichnogo universytetu Ukrai'ny «Kyi'vs'kyj politehnichnyj instytut», 4 (24), 143–148.

14. Poletaev, G. S. (2002). Parnye uravnenija tipa svjortki s jadrami iz raznyh banahovyh algebr absoljutno integriruemyh po vesu funkcij. Kyiv, 349.

15. Poletaev, G. S. (1991). Abstraktnyj analog parnogo uravnenija tipa svertki v kol'ce s faktorizacionnoj paroj. Ukr. matem. zhurn., 9, 1201–1213.

16. Poletaev, G. (2009). Connection of Solutions of Abstract Paired Equations in Rings with Factorization Pairs. Modern Analysis and Applications, 479–484. doi: 10.1007/978-3-7643-9921-4_29

17. Poletaev, G. S. (2010). Kriterij svjazi reshenij abstrakt. parnogo uravn. v kol'ce s faktorizacionnoj paroj. Kyiv, 220.

18. Poletaev, G. S. (2012). Svjaz' reshenij parnyh integral'nyh uravnenij tipa svjortki. Kyiv, 193.

19. Gel'fand, I. M., Rajkov, D. A., Shilov, G. E. (1960). Kommutativnye normirovannye kol'ca. Moscow: Fizmatgiz, 316.

20. McNabb, A., Schumitzky, A. (1972). Factorization of operators – I: Algebraic theory and examples. Journal of Functional Analysis, 9 (3), 262–295. doi: 10.1016/0022-1236(72)90002-x

21. Poletaev, G. S. (2013). Kriterij svjazi reshenij parnyh matrichnyh uravnenij s proektorami. VISNIK ODABA. Odesa, 50, 229–244.

*Рекомендовано до публікації д-р техн. наук, професор Дьомін Д. О.*
*Дата надходження рукопису 16.06.2016*

**Полєтаєв Геннадій Степанович**, кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра вищої математики, Одеська державна академія будівництва та архітектури, вул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, Україна, 65029
E-mail: poletayev_gs@ukr.net