• • •

Dmytro Leshchenko
Odessa State Academy of Civi…

Leonid D Akulenko
Russian Academy of Sciences

УДК 531.383

© 2017 г. Л. Д. Акуленко, Я. С. Зинкевич, Т. А. Козаченко, Д. Д. Лещенко

ЭВОЛЮЦИЯ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА, БЛИЗКИХ К СЛУЧАЮ ЛАГРАНЖА, ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕСТАЦИОНАРНОГО МОМЕНТА СИЛ

Исследуются возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа, под действием момента, медленно изменяющегося во времени. Приведены условия возможности усреднения уравнений движения по фазе угла нутации, получена усредненная система уравнений. Рассмотрен пример, отвечающий движению тела в среде с линейной диссипацией.

Проблема эволюции вращений твердого тела относительно неподвижной точки продолжает привлекать внимание в связи с задачами входа летательных аппаратов в атмосферу, космонавтики, гироскопии, динамики вращающегося снаряда. При этом во многих случаях в качестве порождающего движения тела, учитывающего основные действующие на него моменты сил, может рассматриваться движение в случае Лагранжа. В этом случае тело имеет неподвижную точку и находится в поле силы тяжести, причем центр масс тела и неподвижная точка лежат на оси динамической симметрии тела. Восстанавливающий момент сил, аналогичный моменту силы тяжести, создается аэродинамическими силами, действующими на тело в потоке газа. Поэтому движения, близкие к случаю Лагранжа, исследовались в ряде работ по динамике летательных аппаратов, где учитывались восстанавливающий и различные возмущающие моменты.

Отметим анализ движения относительно центра масс летательных аппаратов, входящих в атмосферу с большой скоростью [1, 2]. Исследовалось движение вращающегося твердого тела в атмосфере под действием синусоидального или бигармонического восстанавливающего момента, зависящего от времени, и малых возмущающих моментов [3]. Впервые построена процедура усреднения по движению Эйлера—Пуансо для спутника с произвольным трехосным эллипсоидом инерции [4]. Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа, рассмотрены в ряде работ, например [5—14]. Имеется обзор результатов, полученных до 1998 г., по проблеме эволюции вращений твердого тела, близких к случаю Лагранжа [10]. Описана процедура усреднения для медленных переменных в первом приближении возмущенного движения твердого тела, близкого к случаю Лагранжа, и исследованы возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа, при разных порядках малости проекций вектора кинетического момента [5, 6, 14].

Рассматривалось движение симметричного тяжелого твердого тела с неподвижной точкой под действием сил трения, обусловленных окружающей диссипативной средой [7]. Исследовалось асимптотическое поведение движений гироскопа Лагранжа, близких к регулярным прецессиям, под действием малого возмущающего момента [8, 9, 12]. Изучалось движение волчка Лагранжа с вибрирующим подвесом [11] и влияние быстрых периодических и условно-периодических вибраций точки подвеса на существование и устойчивость стационарных вращений волчка Лагранжа вокруг вертикали и его регулярных прецессий [13].

1. Постановка задачи и невозмущенное движение. Рассматривается движение динамически симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки O в случае возмущений произвольной физической природы. Уравнения движения (динамические и кинематические уравнения Эйлера) имеют вид

$$
\begin{aligned}
&A\dot{p} + (C - A)\, qr = \mu \sin\theta \cos\varphi + \varepsilon M_1 \\
&A\dot{q} + (A - C)\, pr = -\mu \sin\theta \sin\varphi + \varepsilon M_2 \\
&C\dot{r} = \varepsilon M_3; \quad M_i = M_i(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau), \quad i = 1, 2, 3 \\
&\dot{\psi} = (p \sin\varphi + q\cos\varphi)\operatorname{cosec}\theta, \quad \tau = \varepsilon t \\
&\dot{\theta} = p\cos\varphi - q\sin\varphi, \quad \dot{\varphi} = r - (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Динамические уравнения (1.1) записаны в проекциях на главные оси инерции тела, проходящие через точку O. Здесь p, q, r – проекции вектора угловой скорости на эти оси, M_i $(i = 1, 2, 3)$ – проекции вектора возмущающего момента на те же оси, они зависят от медленного времени $\tau = \varepsilon t$ ($\varepsilon \ll 1$ – малый параметр, характеризующий величину возмущений, t – время), ψ, θ, φ – углы Эйлера, A – экваториальный, а C – осевой моменты инерции относительно точки O, $A \neq C$. Предполагается, что на тело действует восстанавливающий момент, максимальная величина которого равна μ и который создается постоянной по величине и направлению силой, приложенной в некоторой фиксированной точке оси динамической симметрии. В случае тяжелого волчка имеем $\mu = mgl$, m – масса тела, g – ускорение силы тяжести, l – расстояние от неподвижной точки O до центра тяжести тела.

Ставится задача исследования асимптотического поведения решений системы (1.1) при малом ε, которое будет проводиться методом усреднения [15] на интервале времени порядка ε^{-1}.

В случае невозмущенного движения первыми интегралами уравнений для системы (1.1) при $\varepsilon = 0$ являются величины [14, 16]

$$
\begin{aligned}
&G_z = A\sin\theta\left(p\sin\varphi + q\cos\varphi\right) + Cr\cos\theta = c_1 \\
&H = \frac{1}{2}[A(p^2 + q^2) + Cr^2] + \mu\cos\theta = c_2, \quad r = c_3
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Здесь G_z – проекция вектора кинетического момента на вертикаль Oz, H – полная энергия тела, r – проекция вектора угловой скорости на ось динамической симметрии, c_i $(i = 1, 2, 3)$ – произвольные постоянные, причем $c_2 \geq -\mu$.

Известно в общем случае выражение для угла нутации θ в невозмущенном движении как функции времени t, интегралов движения (1.2) и произвольной фазовой постоянной β [14, 16]:

$$
\begin{aligned}
&u = \cos\theta = u_1 + (u_2 - u_1)\operatorname{sn}^2(\alpha t + \beta), \quad \operatorname{sn}(\alpha t + \beta) = \sin\operatorname{am}(\alpha t + \beta, k) \\
&\alpha = \left[\mu(u_3 - u_1)/(2A)\right]^{1/2}, \quad k^2 = (u_2 - u_1)(u_3 - u_1)^{-1}, \quad 0 \leq k^2 \leq 1
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Здесь u – периодическая функция $\alpha t + \beta$ с периодом $K(k)/\alpha$; sn и am – эллиптические синус и амплитуда [17], k – модуль эллиптических функций, через u_1, u_2, u_3 обозначены вещественные корни кубического многочлена

$$
Q(u) = A^{-2}[(2H - Cr^2 - 2\mu u)(1 - u^2)A - (G_z - Cru)^2]
\tag{1.4}
$$

Соотношения между его корнями и первыми интегралами (1.2) записываются следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&u_1+u_2+u_3=\frac{H}{\mu}-\frac{Cr^2}{2\mu}+\frac{C^2r^2}{2A\mu}, \quad u_1u_2+u_1u_3+u_2u_3=\frac{G_zCr}{A\mu}-1\\
&u_1u_2u_3=-\frac{H}{\mu}+\frac{Cr^2}{2\mu}+\frac{G_z^2}{2A\mu}\\
&-1\le u_1\le u_2\le 1\le u_3<+\infty
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

Формулы (1.2), (1.3), (1.5) описывают решение системы (1.1) при $\varepsilon=0$ в случае Лагранжа.

2. Процедура усреднения. Далее применяется процедура усреднения, разработанная ранее [5, 14]. Она используется для усреднения системы (1.1) при возмущениях, зависящих от медленного времени τ и допускающих усреднение по фазе угла нутации θ, вдоль траекторий изменения $\theta(t)$. Выделим быстрые и медленные переменные, при этом первые интегралы (1.2) для возмущенного движения (1.1) являются медленными переменными. Быстрые переменные – углы собственного вращения φ, нутации θ и прецессии ψ.

Первые три уравнения (1.1) приведем с помощью ряда преобразований к виду [5, 14]

$$
\begin{aligned}
&\dot G_z=\varepsilon\left[(M_1\sin\varphi+M_2\cos\varphi)\sin\theta+M_3\cos\theta\right]\\
&\dot H=\varepsilon\left(M_1p+M_2q+M_3r\right)\\
&\dot r=\varepsilon C^{-1}M_3;\quad M_i=M_i\left(p,q,r,\psi,\theta,\varphi,\tau\right),\quad i=1,2,3
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Здесь и в трех последних кинематических уравнениях (1.1) подразумевается, что переменные p, q, r при помощи соотношений (1.2) выражены как функции $G_z,H,r,\psi,\theta,\varphi$ и подставлены в уравнения (1.1) и (2.1).

Однако правые части уравнений (2.1) содержат три быстрые переменные θ, φ, ψ, периодические по t, что затрудняет применение метода усреднения (проблема резонанса). Для исключения этой трудности потребуем, чтобы выражения в правых частях уравнений (2.1) могли быть представлены как функции медленных переменных и угла нутации θ, периодические по фазе угла θ с периодом 2π, и имели следующие структурные свойства возмущающего момента сил (см. равенства (1.2)):

$$
\begin{aligned}
&M_1\sin\varphi+M_2\cos\varphi=M_1^*,\quad M_1p+M_2q=M_2^*,\quad M_3=M_3^*\\
&M_i^*=M_i^*(G_z,H,r,\tau,\theta),\quad i=1,2,3
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Рассматривается для определенности случай

$$
M_1=pf,\quad M_2=qf,\quad M_3=M_3^*,\quad f=f(G_z,H,r,\theta,\tau)
\tag{2.3}
$$

В дальнейшем предполагаются выполненными необходимые и достаточные условия справедливости тождеств (2.2) или, в частности, достаточные условия (2.3), которые обеспечивают справедливость соотношений (2.2). Система (2.1) тогда может быть представлена в форме

$$
\begin{aligned}
&\dot G_z=\varepsilon F_1,\quad \dot H=\varepsilon F_2,\quad \dot r=\varepsilon F_3\\
&F_1=M_1^*\sin\theta+M_3^*\cos\theta,\quad F_2=M_2^*+M_3^*r,\quad F_3=C^{-1}M_3^*
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Здесь $F_i=F_i\left(G_z,H,r,\tau,\theta\right)$ $(i=1,2,3)$ – 2π-периодические функции фазы угла θ.

Исследование возмущенного движения предполагается проводить для медленных переменных u_i $(i = 1,2,3)$. Медленные переменные G_z, H, r удается выразить через u_i (1.6) следующим образом [5,14]:

$$
\begin{aligned}
&G_z = \chi\delta\left(u_1 + u_2 + u_3 + u_1u_2u_3 + R\right)^{1/2}\\
&H = \frac{1}{2}\mu[(u_1 + u_2 + u_3)(1 + AC^{-1}) + (R - u_1u_2u_3)(1 - AC^{-1})]\\
&r = C^{-1}\chi\left(u_1 + u_2 + u_3 + u_1u_2u_3 - R\right)^{1/2}\\
&R = \operatorname{sign}(G_z^2 - C^2r^2)[(1 - u_1^2)(1 - u_2^2)(u_3^2 - 1)]^{1/2}\\
&\chi = \operatorname{sign} r\left(A\mu\right)^{1/2}, \quad \delta = \operatorname{sign}\left(1 + u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3\right)
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Знаки χ и R в начальный момент определяются по начальным условиям для G_z и r. Если в процессе движения одна или обе величины $G_z^2 - C^2r^2$ и r проходят через нуль, то возможна смена знаков χ и R, для определения которых можно воспользоваться исходной системой (2.4).

После ряда преобразований искомая система уравнений для медленных переменных u_i $(i = 1,2,3)$ принимает вид

$$
\begin{aligned}
&\frac{du_i}{dt} = \varepsilon V_i(u_1, u_2, u_3, \tau, \theta), \quad u_i(0) = u_i^0\\
&V_i = V_{i1}F_1^* + V_{i2}F_2^* + V_{i3}F_3^*, \quad V_{ij} = V_{ij}\left(u_1, u_2, u_3\right), \quad i, j = 1,2,3
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

$$
\begin{aligned}
&V_{11} = \frac{G_z - Cru_1}{A\,\Delta}, \quad V_{12} = \frac{u_1^2 - 1}{\Delta}, \quad V_{13} = \frac{C}{\Delta}[(CA^{-1} - 1)ru_1^2 - G_zA^{-1}u_1 + r]\\
&\Delta = \mu\left(u_1 - u_2\right)\left(u_1 - u_3\right)
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Функции V_{2j} и V_{3j} $(j = 1,2,3)$ получаются из соответствующих выражений (2.7) для того же значения j путем циклической перестановки индексов у величины u_i. Функции F_i^* получаются подстановкой в функции F_i (2.4) выражений (2.5). Начальные значения для переменных u_i вычисляются по начальным данным G_z^0, H^0, r^0 при помощи соотношений (1.5).

Подставим в правые части системы (2.6) быструю переменную θ из выражения (1.3) для невозмущенного движения. Тогда правые части системы (2.6) будут периодическими функциями t с периодом $2K\left(k\right)/\alpha$, k и α определены соотношениями (1.3). Усредняя правые части полученной системы по фазе угла нутации, получим усредненную систему первого приближения $(\tau = \varepsilon t)$

$$
\begin{aligned}
&\frac{du_i}{d\tau} = U_i\left(u_1, u_2, u_3, \tau\right), \quad u_i(0) = u_i^0; \quad i = 1,2,3\\
&U_i\left(u_1, u_2, u_3, \tau\right) = \frac{\alpha}{2K(k)}\int\limits_0^{2K/\alpha} V_i\left(u_1, u_2, u_3, \tau, \theta(t)\right)dt
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

После исследования и решения системы (2.8) для u_i исходные переменные G_z, H, r восстанавливаются по формулам (2.5). Медленные переменные u_i и G_z, H, r определяются с погрешностью порядка ε.

3. Движение твердого тела под действием линейного диссипативного момента. Рассмотрим возмущенное движение, близкое к случаю Лагранжа, под действием внешней среды. Примером может служить внешняя среда, медленно изменяющая свойства вязкости вследствие изменения плотности, температуры, состава среды. Возмущающие моменты εM_i $(i = 1,2,3)$ имеют вид [18]

$$M_1 = -a(\tau)p, \quad M_2 = -a(\tau)q, \quad M_3 = -b(\tau)r; \quad a(\tau), \quad b(\tau) > 0, \quad \tau = \varepsilon t \tag{3.1}$$

$a(\tau)$ и $b(\tau)$ – интегрируемые функции, зависящие от свойств среды и формы тела.

Моменты (3.1) удовлетворяют условиям (2.2)–(2.4), что дает возможность усреднения по фазе угла нутации θ. При данных возмущениях система (2.4) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{G}_z &= -\varepsilon\left[\left(a(\tau)p\sin\varphi + a(\tau)q\cos\varphi\right)\sin\theta + b(\tau)r\cos\theta\right] \\ \dot{H} &= -\varepsilon[a(\tau)(p^2+q^2) + b(\tau)r^2] \\ \dot{r} &= -\varepsilon C^{-1}b(\tau)r \end{aligned} \tag{3.2}$$

Третье уравнение (3.2) может быть проинтегрировано:

$$r = r^0 \exp\left(-\varepsilon C^{-1}\int_0^t b(\varepsilon t)dt\right) \tag{3.3}$$

Рассмотрим случай, когда

$$\begin{aligned} &a(\tau) = a_0 + a_1\tau, \quad b(\tau) = b_0 + b_1\tau \\ &a_0, a_1, b_0, b_1 - \text{const}, \quad a_0 > 0, \quad b_0 > 0, \quad a_1 \geq 0, \quad b_1 \geq 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

После ряда преобразований усредненная система (2.8) при учете возмущающих моментов (3.1) примет вид

$$\begin{aligned} &\frac{du_1}{d\tau} = \frac{-1}{A\Delta}\{a(\tau)[A^{-1}(G_z - Cru_1)(G_z - Cr\upsilon) + \\ &+ (u_1^2-1)(2H - Cr^2 - 2\mu\upsilon)] + b(\tau)r(G_z - Cru_1)(\upsilon - u_1)\}\,(123) \\ &\upsilon = u_3 - (u_3 - u_1)\,E(k)/K(k) \end{aligned} \tag{3.5}$$

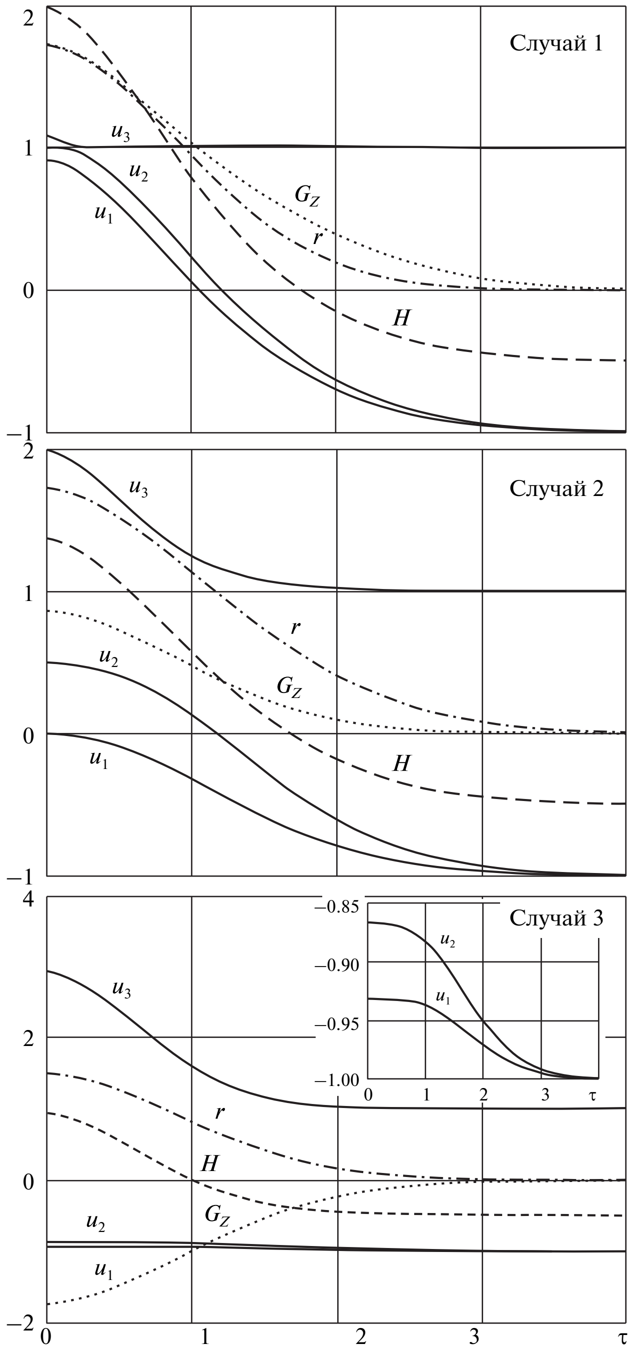
Символ (123) означает, что два невыписанных соотношения получаются из выписанного циклической перестановкой индексов 1, 2, 3. $K(k)$ и $E(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода, вместо G_z, H, r и k подставляются их выражения (2.5) и согласно последней формуле (1.3).

Усредненная система (3.5) проинтегрирована численно при разных начальных условиях и значениях параметров задачи. Рассмотрим три случая, соответствующие начальным данным, приведенным в таблице.

Предполагается, что в начальный момент $t = 0$ волчок Лагранжа получил угловую скорость вращения относительно оси динамической симметрии, равную $r^0 = \sqrt{3}$; кроме того,

$$A = 1.5, \quad C = 1, \quad \mu = 0.5, \quad a_1 = b_1 = 1, \quad u_2^0 = \cos\theta^0$$

В начальный момент угол отклонения оси динамической симметрии от вертикали равен θ^0. На фигуре изображены графики функций $G_z, H, r,\ u_i$ $(i = 1,2,3)$ для указанных трех случаев, полученные в результате численного расчета.



В случае 1 полная энергия тела, проекция вектора кинетического момента на вертикаль и угловая скорость вращения относительно оси динамической симметрии убывают. Величина u_3 достаточно быстро стремится к единице. Переменные u_1 и u_2 стремятся к -1. При этом, как следует из первого равенства (1.3), $\cos\theta \to -1$ при $\theta \to \pi$.

Случай	u_1^0	u_2^0	u_3^0	θ^0
1	0.913	0.996	1.087	5°
2	0	0.5	2	60°
3	–0.932	–0.866	2.932	150°

В случае 2 переменная u_3 также стремится к единице, однако интервал монотонного убывания увеличился. Проекция вектора кинетического момента G_z и величина r монотонно убывают к нулю. Полная энергия H монотонно убывает, приближаясь к значению $H = -0.5$.

В случае 3 проекция вектора кинетического момента на вертикаль G_z стремится к нулю, однако в отличие от случаев 1 и 2 монотонно возрастает. Полная энергия тела H достаточно быстро стремится к –0.5. Величины r и u_3 монотонно убывают; функции u_1 и u_2 также монотонно убывают, как это видно из графиков в крупном масштабе, представленных в правом верхнем углу нижнего фрагмента фигуры.

4. Заключение. При сравнении полученных результатов с результатами [5, 14], где M_i не зависят от медленного времени τ, можно отметить их ясное механическое содержание: зависимость возмущающего момента от медленного времени приводит к появлению в усредненной системе уравнений первого приближения для медленных переменных функций $a(\tau)$ и $b(\tau)$, зависящих от медленного времени, которые при численном интегрировании сглаживают поведение u_i $(i = 1,2,3)$, G_z, H. Под действием диссипативного момента (3.1) тело стремится к устойчивому нижнему положению равновесия быстрее, чем в ранее рассмотренном случае [5, 14], что следует из задания коэффициентов (3.4).

Корректность счета подтверждается тем, что полученные по численным данным и формулам (2.5) значения r практически совпадают с точным решением (3.3).

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (16-11-10343).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кузмак Г.Е.* Динамика неуправляемого движения летательных аппаратов при входе в атмосферу. М.: Наука, 1970. 348 с.
2. *Ярошевский В.А.* Движение неуправляемого тела в атмосфере. М.: Машиностр., 1978. 167 с.
3. *Асланов В.С.* Пространственное движение тела при спуске в атмосфере. М.: Физматлит, 2004. 160 с.
4. *Черноусько Ф.Л.* О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 474–483.
5. *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л.* Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 5. С. 771–778.
6. *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л.* Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 5. С. 3–10.
7. *Simpson H.C., Gunzburger M.D.* A two time scale analysis of gyroscopic motion with friction // J. Appl. Math. Phys. 1986. V. 37. № 6. P. 867–894.
8. *Сазонов В.В., Сидоренко В.В.* Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярным прецессиям Лагранжа // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 6. С. 951–957.
9. *Sidorenko V.V.* Capture and escape from resonance in the dynamics of the rigid body in viscous medium // J. Nonlinear Sci. 1994. V. 4. P. 35–57.
10. *Лещенко Д.Д.* Эволюция вращений твердого тела, близких к случаю Лагранжа // Актуальные пробл. авиац. аэрокосм. систем: процессы, модели, эксперимент. 1998. Вып. 2(6). С. 32–37.
11. *Холостова О.В.* Динамика волчка Лагранжа с неподвижной и вибрирующей точкой подвеса. М.: Изд-во МАИ, 2000. 84 с.

12. *Сидоренко В.В.* Об одном классе движений спутника, несущего сильный магнит // Космич. исслед. 2002. Т. 40. № 2. С. 147–155.
13. *Маркеев А.П.* О движении тяжелого динамически симметричного твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // Изв. РАН. МТТ. 2012. № 4. С. 3–10.
14. *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д.* Эволюция движений твердого тела относительно центра масс. М.; Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2015. 308 с.
15. *Волосов В.М., Моргунов Б.И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
16. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.
17. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
18. *Кошляков В.Н.* О некоторых частных случаях интегрирования динамических уравнений Эйлера, связанных с движением гироскопа в сопротивляющейся среде // ПММ. 1953. Т. 17. Вып. 2. С. 137–148.

Институт проблем механики РАН, Москва
Московский физико-технический институт, Долгопрудный
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва
Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Одесса, Украина
e-mail: kumak@ipmnet.ru
yaninaz@mail.ru
kushpil.ru@rambler.ru
leshchenko_d@ukr.net

Поступила в редакцию
7. VIII. 2016