

**КОНСОЛИДАЦИЯ ВОДОНАСЫЩЕННОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА, К
ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЕ КОТОРОГО ПРИЛОЖЕНА ВЕРТИКАЛЬНАЯ
СОСРЕДОТОЧЕННАЯ СИЛА**

И.И. Мосичева

Одесская государственная академия строительства и архитектуры

А.В. Шаповал

к.т.н. Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры

**CONSOLIDATION OF WATER SATURATION HALFSPACE, TO THE UPPER
LIMIT OF WHICH IS ATTACHED A VERTICAL CONCENTRATED FORCE**

I.I. Mosicheva

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

A.V. Shapoval

Dr. Ph. Prydniprovsk`ka State Academy of Civil Engineering and Architecture

Аннотация.

В рамках модели упругого водонасыщенного полупространства, к верхней границе которого приложена вертикальная сосредоточенная сила, впервые получено асимптотическое представление решения задачи о перемещениях грунтовой толщи по глубине в процессе фильтрационной консолидации. Это решение является фундаментальным при решении задач о распределении напряжений по глубине грунтовой толщи, к поверхности которой приложена произвольная распределенная нагрузка.

Abstract.

It was obtained first time an asymptotic representation of the solution of the problem of soil displacements on the depth in the process of filtration consolidation, according to the model of water-saturated elastic half-space, to the upper limit of which is attached a vertical concentrated force. This solution is fundamental in solving the problems of the stress distribution on the depth of soil to the surface of which is applied an arbitrary distributed load.

Ключевые слова: *фильтрационная консолидация, вертикальные перемещения, поровое давление, асимптотическое представление решения, аналитическое решение.*

Keywords: *filtration consolidation, vertical displacements, pore pressure, asymptotic representation of the solution, analytical solution*

Постановка проблемы в общем виде и ее связь с важными практическими задачами. Существующие в настоящее время методы определения осадок водонасыщенных грунтовых оснований либо осуществляются с использованием тех или иных численных методов [1, 2], либо базируются на предположении о том, что основание находится в состоянии компрессии [3, 4], либо при расчете осадок со слоистой текстурой используются приведенные свойства [5, 6].

Эти способы имеют такие недостатки:

1. В первом случае имеют место проблемы верификации модели (адекватная разбивка расчетной области на элементы, шаг интегрирования по времени и т.д.), а также проблемы расчета осадок областей с неограниченными размерами. Кроме того, решение задач, имеющих более или менее существенную практическую ценность либо сопряжено со значительными временными затратами, либо вообще невозможно.

2. Как правило, реальное напряженно-деформированное состояние грунтовых оснований отличается от компрессии. Поэтому изложенный в работах [3, 4] подход имеет ограниченное применение.

3. Использование для определения осадок основания осредненных характеристик также встречает возражения, поскольку в данном случае в недостаточной степени учитываются условия на контакте грунтовых слоев.

Анализ последних исследований и публикаций, в которых положено начало решения данной проблемы.

В этой связи представляют интерес методы расчета процесса развития во времени осадок, аналогичные общеизвестному методу послойного суммирования [7].

Выделение ранее нерешенных частей общей проблемы, которым посвящена данная статья.

Одним из вариантов реализации этого подхода является расчет осадок $S_i(\infty)$ для каждого элементарного i -того грунтового слоя по методике [7] для момента времени $t \rightarrow \infty$ и далее – определение осадки в текущий момент времени t как произведение $S_i(\infty)$ на степень консолидации данного элементарного слоя $U_i(t)$, соответствующее расчетному моменту времени.

Иными словами, нами предлагается для расчета текущих осадок использовать формулы вида:

$$\left. \begin{aligned}
 S(t) &= \sum_{i=1}^n S_{\infty,i} \cdot U_i(t); \\
 S_{\infty,i} &= \beta \cdot \left(- \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_{z\gamma,i}}{E_i} \cdot h_i + \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_{z\gamma,i}}{E_{e,i}} \cdot h_i + \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_{zp,i}}{E_i} \cdot h_i \right); \\
 U_i(t) &= \frac{S_i(t)}{S_{\infty,i}}.
 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где $S(t)$ – средняя осадка основания в расчетный момент времени t ; $S_i(t)$ – то же, элементарного i -того грунтового слоя в расчетный момент времени t ; $S_{\infty,i}$ – то же, элементарного i -того слоя при $t \rightarrow \infty$; $U_i(t)$ – степень консолидации i -того слоя в расчетный момент времени t ; $\beta = 0,8$ – эмпирический коэффициент; $\sigma_{zp,i}$ – нормальное вертикальное напряжение в центре i -того элементарного слоя толщиной h_i , обусловленное нагрузкой от фундамента; $\sigma_{z\gamma,i}$ – то же, обусловленное весом удаленного из котлована грунта; n – количество слоев, на которые разбита сжимаемая толща; E_i – модуль общей деформации основания, установленный по ветви первичного нагружения основания; $E_{e,i}$ – то же, установленный по ветви вторичного нагружения [7].

Для определения степени консолидации грунтовых слоев необходимо знать зависимости осадки основания от времени на различной глубине. На решение этой задачи и направлены изложенные в настоящей статье исследования.

Изложение основного материала исследования. Рассмотрим водонасыщенное полупространство, к верхней границе которого приложена сосредоточенная сила P (рис. 1).

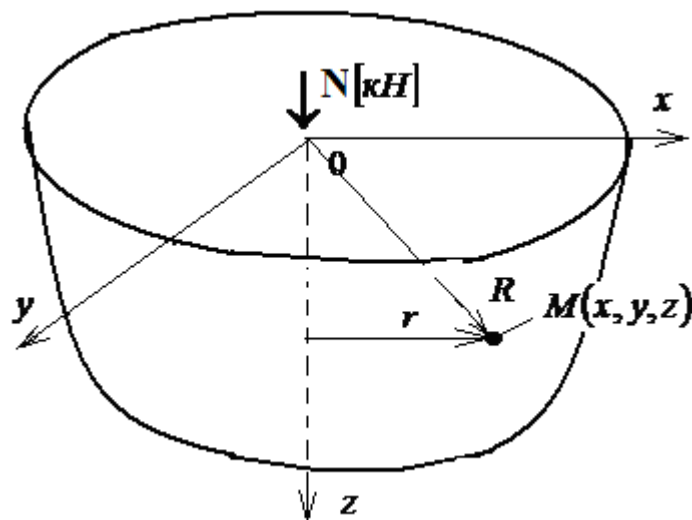


Рис. 1. К расчету НДС водонасыщенного полупространства

Для решения задачи используем изложенный в [8] алгоритм. На первом этапе найдем НДС полупространства в момент времени $t=0$. Согласно [8] в этом случае следует использовать модель грунтового основания в виде упругой изотропной среды [9] и положить упругую

константу Ламе $\lambda \rightarrow \infty$. Определение напряженно-деформированного состояния основания в данном случае сводится к решению системы уравнений вида:

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 F_0 = 0; U_0 = -\frac{\partial^2}{\partial r \partial z} F_0; W_0 = \Delta F_0 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} F_0; \\ \sigma_{zz,0} = G \cdot \frac{\partial}{\partial z} \cdot \left(3 \cdot \Delta F_0 - 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} F_0 \right); \sigma_{rr,0} = G \cdot \left(\frac{\partial}{\partial z} \Delta F_0 - 2 \cdot \frac{\partial^3}{\partial r^2 \partial z} F_0 \right); \\ \sigma_{\theta\theta,0} = G \cdot \left(\frac{\partial}{\partial z} \Delta F_0 - 2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} F_0 \right); \tau_{rz,0} = G \cdot \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left(\Delta F_0 - 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} F_0 \right); \\ \sigma_{kk,0} = 3 \cdot G \cdot \frac{\partial}{\partial z} \cdot \Delta F_0; P_0 = -\frac{1}{3} \cdot \sigma_{kk,0} = -G \cdot \frac{\partial}{\partial z} \cdot \Delta F_0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

при граничных условиях:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zz,0}(r,z) = -\frac{N \cdot \delta(r)}{2 \cdot \pi \cdot r}; \tau_{rz,0}(r,z) = 0; \\ W(\infty, z) = U(\infty, z) = 0; \\ W(r, \infty) = U(r, \infty) = 0; \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

где F – бигармоническая функция; Δ оператор Лапласа в цилиндрической системе координат; U_0 и W_0 – радиальное и вертикальное перемещения; $\sigma_{zz,0}, \sigma_{rr,0}$ и $\sigma_{\theta\theta,0}$ – соответственно вертикальное, радиальное и тангенциальное нормальные перемещения; $\tau_{rz,0}$ – то же, касательное; P_0 – поровое давление; r, z – координаты; $\delta(r)$ – Дельта – функция Дирака [10].

Решение ищем в виде:

$$F_0 = \int_0^{\infty} J_0(\alpha \cdot r) \cdot [A_0(\alpha) + \alpha \cdot z \cdot B_0(\alpha)] \cdot \exp(-\alpha \cdot z) \cdot \alpha \cdot d\alpha \quad (4)$$

где $J_0(x)$ – функция Бесселя первого рода с нулевым индексом [10]; $A_0(\alpha)$ и $B_0(\alpha)$ – некоторые функции параметра α , которые следует определять путем удовлетворения граничным условиям (3).

Осадка основания S_0 в любой произвольной точке М (рис. 1) и поровое давление P_0 в момент времени $t \rightarrow 0$ в данном случае равны:

$$\left. \begin{aligned} S_0 &= -\frac{N}{4 \cdot \pi \cdot G} \cdot \int_0^{\infty} (1 + \alpha \cdot z) \cdot \exp(-\alpha \cdot z) \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot d\alpha; \\ P_0 &= \frac{N}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{\infty} \alpha \cdot \exp(-\alpha \cdot z) \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot d\alpha; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Далее найдем осадку основания для момента времени $t \rightarrow \infty$. Согласно [8] в этом случае следует использовать модель грунтового основания в виде упругой изотропной среды [9]. Определение напряженно-деформированного состояния основания в данном случае сводится к решению системы уравнений вида:

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 F_{\infty} = 0; U_{\infty} &= -\frac{\partial^2}{\partial r \partial z} F_{\infty}; W_{\infty} = \frac{\lambda + 2 \cdot G}{\lambda + G} \cdot \Delta F_{\infty} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} F_{\infty}; \\ \sigma_{zz, \infty} &= 2 \cdot G \cdot \left(\frac{\lambda + 2 \cdot G}{\lambda + G} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \Delta F_{\infty} - \frac{\partial^3 F_{\infty}}{\partial z^3} \right) + \lambda \cdot \left(\frac{G}{\lambda + G} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \Delta F_{\infty} \right); \\ \sigma_{rr, \infty} &= -2 \cdot G \cdot \frac{\partial^3 F_{\infty}}{\partial r^2 \partial z} + \frac{\lambda \cdot G}{\lambda + G} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \Delta F_{\infty}; \\ \sigma_{\theta\theta, \infty} &= 2 \cdot G \cdot \left(-\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 F_{\infty}}{\partial r \partial z} \right) + \lambda \cdot \left(\frac{G}{\lambda + G} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \Delta F_{\infty} \right); \\ \tau_{rz, \infty} &= G \cdot \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left(\frac{\lambda + 2 \cdot G}{\lambda + G} \Delta - 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot F_{\infty}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Осадка основания S_0 в любой произвольной точке М (рис. 1) и поровое давление P_0 в момент времени $t \rightarrow \infty$ в данном случае равны:

$$\left. \begin{aligned} S_{\infty} &= -\frac{N}{4 \cdot \pi \cdot G} \cdot \int_0^{\infty} [2 \cdot (1 - \nu) + \alpha \cdot z] \cdot \exp(-\alpha \cdot z) \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot d\alpha; \\ P_{\infty} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Далее найдем функцию времени $f(z, t)$, которая связывает между собой осадки основания при $t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$.

Вначале найдем поровое давление P в интервале времени $0 < t < \infty$. Для этой цели, согласно [8], используем уравнение вида:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = c_v \cdot \Delta P - \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{kk,0}, \quad (8)$$

при начальных условиях:

$$\left. \begin{aligned} P(r,0,t) = P(\infty,z,t) = P(r,\infty,t) = 0; \\ P(r,z,0) = \frac{N}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{\infty} \alpha \cdot \exp(-\alpha \cdot z) \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot d\alpha; \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где c_v – коэффициент пространственной консолидации основания [11, 12]; t – время;

$$\frac{\partial}{\partial t} \sigma_{kk,0} \equiv 0.$$

Потенциал обусловленных отжатием поровой жидкости перемещений и перемещение в направлении оси $0z$, согласно [8], равны:

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \frac{c_v}{\lambda + 2 \cdot G} \cdot \int_0^t P(r,z,\tau) \cdot d\tau; \\ W_P &= \frac{\partial}{\partial z} \Phi. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Здесь Φ – потенциал обусловленных отжатием поровой жидкости перемещений; W_P – обусловленное отжатием поровой жидкости вертикальное перемещение.

Решение ищем в области изображений по Лапласу по переменной « t » [10].

В этом случае равенства (8)...(10) примут такой вид:

$$\left. \begin{aligned} P^* &= c_v \cdot \Delta P^* + \frac{N}{2 \cdot \pi \cdot \omega} \cdot \int_0^{\infty} \alpha \cdot \exp(-\alpha \cdot z) \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot d\alpha; \\ P^*(r,0,\omega) &= P^*(\infty,z,\omega) = P^*(r,\infty,\omega) = 0; \\ P^*(r,z,0) &= \frac{N}{2 \cdot \pi \cdot \omega} \cdot \int_0^{\infty} \alpha \cdot \exp(-\alpha \cdot z) \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot d\alpha; \\ \Phi^* &= \frac{c_v}{\lambda + 2 \cdot G} \cdot \frac{P^*}{\omega}; W_P^* = \frac{\partial}{\partial z} \Phi^*. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Здесь ω – параметр одностороннего преобразования Лапласа [10];

$$P^*(r, z, t) = \int_0^{\infty} P(r, z, \omega) \cdot e^{(-\omega t)} \cdot dt, \quad \text{и} \quad \Phi^*(r, z, \omega) = \int_0^{\infty} \Phi(r, z, t) \cdot e^{(-\omega t)} \cdot dt -$$

односторонние преобразования по переменной « t » порового давления и потенциальной функции перемещений, обусловленных отжатием поровой жидкости.

Решения верхнего равенства (11) с учетом граничных условий (второе сверху равенство (11)) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} P^* &= \frac{N}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{\infty} \frac{\exp(-\alpha \cdot z) - \exp(-\gamma \cdot z)}{\omega} \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot d\alpha; \gamma = \sqrt{\frac{\omega}{c_v} + \alpha^2}; \\ \Phi^* &= \frac{N}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{c_v}{\lambda + 2 \cdot G} \cdot \int_0^{\infty} \frac{\exp(-\alpha \cdot z) - \exp(-\gamma \cdot z)}{\omega^2} \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot d\alpha; \\ W_P^* &= -\frac{N}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{c_v}{\lambda + 2 \cdot G} \cdot \int_0^{\infty} \frac{\alpha \cdot \exp(-\alpha \cdot z) - \gamma \cdot \exp(-\gamma \cdot z)}{\omega^2} \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot d\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Оригинал для порового давления (верхнее равенство (12)) был получен Ю.К. Зарецким [12].

Для построения асимптотики, связывающей значения осадок в нуле и на бесконечности рассмотрим подынтегральную функцию последнего равенства (12) и найдем ее предельные значения при $t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$. С учетом теоремы операционного исчисления о предельных значениях оригинала имеем:

$$\left. \begin{aligned} F^*(\alpha, \omega) &= \frac{\alpha \cdot \exp(-\alpha \cdot z) - \gamma \cdot \exp(-\gamma \cdot z)}{\omega^2}; \gamma = \sqrt{\frac{\omega}{c_v} + \alpha^2}; \\ \lim_{t \rightarrow 0} [F(\alpha, t)] &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} [\omega \cdot F^*(\alpha, \omega)] = 0; \\ \lim_{t \rightarrow \infty} [F(\alpha, t)] &= \lim_{\omega \rightarrow 0} [\omega \cdot F^*(\alpha, \omega)] = \frac{1 + \alpha \cdot z}{\alpha \cdot c_v} \cdot \exp(-\alpha \cdot z). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Далее найдем оригинал функции $F^*(\alpha, \omega)$.

1. Оригинал функции $F_1^*(\alpha, \omega) = \frac{\alpha \cdot \exp(-\alpha \cdot z)}{\omega^2}$ имеет вид:

$$F_1^*(\alpha, \omega) = \frac{\alpha \cdot \exp(-\alpha \cdot z)}{\omega^2} \Leftrightarrow \alpha \cdot t \cdot \exp(-\alpha \cdot z). \rightarrow (14)$$

2. Точное нахождение оригинала функции

$$F_2^*(\alpha, \omega) = \frac{\sqrt{\frac{\omega}{c\nu} + \alpha^2} \cdot \exp\left(-z \cdot \sqrt{\frac{\omega}{c\nu} + \alpha^2}\right)}{\omega^2} \quad \text{вызывает значительные затруднения.}$$

Поэтому найдем его асимптотику. Для этой цели используем изложенный в работе [13] алгоритм. В качестве «внутренней» функции выберем экспоненту

$$\varphi = \exp\left(-\alpha^2 \cdot c\nu \cdot t\right). \quad (15)$$

Изображением (15) является функция:

$$\left. \begin{aligned} \varphi = \exp\left(-\alpha^2 \cdot c\nu \cdot t\right) &\Leftrightarrow \xi = \frac{1}{\omega + \alpha^2 \cdot c\nu}; \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} it(\xi) &= \frac{1}{\alpha^2 \cdot c\nu}; \lim_{\omega \rightarrow \infty} it(\xi) = 0; \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

С учетом (16) найдем:

$$\omega = \frac{1 - \xi \cdot \alpha^2 \cdot c\nu}{\xi}. \quad (17)$$

Далее подставим (17) в функцию $\omega^2 \cdot F_2^*(\alpha, \omega)$. Имеем:

$$\left. \begin{aligned} F_3^*(\alpha, \xi) &= \omega^2 \cdot F_2^*(\alpha, \xi) = \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \frac{1 - \xi \cdot \alpha^2 \cdot c\nu}{\xi}} \left[\sqrt{\frac{\omega}{c\nu} + \alpha^2} \cdot \exp\left(-z \cdot \sqrt{\frac{\omega}{c\nu} + \alpha^2}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{c\nu \cdot \xi}} \cdot \exp\left(\frac{z}{\sqrt{c\nu \cdot \xi}}\right) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

После этого разложим функцию $F_3^*(\alpha, \xi)$ в ряд Тейлора по новой переменной ξ в окрестности точки $\xi = \frac{1}{\alpha^2 \cdot c\nu}$ [10]. Поскольку этой точке соответствует значение комплексной переменной $\omega \rightarrow 0$, эти коэффициенты являются коэффициентами разложения в асимптотический ряд по переменной 't' при $t \rightarrow \infty$. Имеем:

$$F_3^*(\alpha, \xi) = \omega^2 \cdot F_2^*(\alpha, \xi) = a_0 + \frac{a_1}{1!} \cdot \left(\frac{1}{\alpha^2 \cdot c_v} - \xi \right) + \frac{a_2}{2!} \cdot \left(\frac{1}{\alpha^2 \cdot c_v} - \xi \right)^2 + \dots = \left. \begin{aligned} & \\ & = a_0 + \frac{a_1}{1!} \cdot \left(\frac{1}{\alpha^2 \cdot c_v} - \frac{1}{\omega + \alpha^2 \cdot c_v} \right) + \frac{a_2}{2!} \cdot \left(\frac{1}{\alpha^2 \cdot c_v} - \frac{1}{\omega + \alpha^2 \cdot c_v} \right)^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Здесь:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \alpha \cdot \exp(-\alpha \cdot z); \\ a_1 &= -\frac{1}{2} \cdot \alpha^3 \cdot c_v \cdot (1 - \alpha \cdot z) \cdot \exp(-\alpha \cdot z); \\ a_2 &= -\frac{1}{4} \cdot \alpha^5 \cdot c_v^2 \cdot (5 \cdot \alpha \cdot z - 3 - \alpha^2 \cdot z^2) \cdot \exp(-\alpha \cdot z); \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

С учетом (19) и (20) подынтегральная функция (13) может быть представлена в виде:

$$F^*(\alpha, \omega) = \frac{\alpha \cdot \exp(-\alpha \cdot z) - \gamma \cdot \exp(-\gamma \cdot z)}{\omega^2} \approx \frac{1}{\omega^2} \cdot \left\{ \alpha \cdot \exp(-\alpha \cdot z) - \left[a_0 + \frac{a_1}{1!} \cdot \left(\frac{1}{\alpha^2 \cdot c_v} - \frac{1}{\omega + \alpha^2 \cdot c_v} \right) + \frac{a_2}{2!} \cdot \left(\frac{1}{\alpha^2 \cdot c_v} - \frac{1}{\omega + \alpha^2 \cdot c_v} \right)^2 + \dots \right] \right\} \quad (21)$$

Для практических расчетов достаточно удержать первые два члена ряда (21). Имеем:

$$F^*(\alpha, \omega) = \frac{\alpha \cdot \exp(-\alpha \cdot z) - \gamma \cdot \exp(-\gamma \cdot z)}{\omega^2} \approx \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\alpha}{\omega \cdot (\omega + c_v \cdot \alpha^2)} - \frac{\alpha^2 \cdot z}{\omega \cdot (\omega + c_v \cdot \alpha^2)} \right] \cdot \exp(-\alpha \cdot z) \quad (22)$$

Оригинал (22) имеет вид:

$$F(z, \alpha, t) = \frac{1 - \alpha \cdot z}{2 \cdot c_v \cdot \alpha} \cdot \exp(-\alpha \cdot z) \cdot \left[1 - \exp(-c_v \cdot \alpha^2 \cdot t) \right]. \quad (23)$$

Далее найдем функцию $f(z, \alpha, t)$, которая связывает между собой асимптотические значения осадок при $t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$.

Имеем:

$$f(z, \alpha, t) = \frac{F(z, \alpha, t)}{F(z, \alpha, \infty)} = 1 - \exp(-c_v \cdot \alpha^2 \cdot t). \quad (24)$$

С учетом (24) окончательное решение задачи имеет вид:

$$W_z = -\frac{N}{4 \cdot \pi \cdot G} \cdot \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1 + \alpha \cdot z + (1 - 2 \cdot v) \cdot \left[\frac{1 - e^{(-c_v \cdot \alpha^2 \cdot t)}}{e^{(-c_v \cdot \alpha^2 \cdot t)}} \right]}{(1 - 2 \cdot v) \cdot \left[\frac{1 - e^{(-c_v \cdot \alpha^2 \cdot t)}}{e^{(-c_v \cdot \alpha^2 \cdot t)}} \right]} \right\} \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot d\alpha. \quad (25)$$

Поскольку (25) в дальнейшем предполагается использовать в качестве фундаментального решения, целесообразно избавиться от несобственного интеграла.

Для этого представим функцию $e^{(-c_v \cdot \alpha^2 \cdot t)}$ в виде ряда экспонент:

$$e^{(-\eta^2)} \approx \sum_{i=1}^n a_i \cdot e^{(-k_i \cdot \eta)}. \quad (26)$$

Для этой цели используем метод наименьших квадратов и элементы теории оптимизации [10, 14].

Значения коэффициентов a_i и k_i представлены в таблице 1.

В графическом виде исходная функция (ряд 1) и ее аппроксимация (ряд 2) представлены на рис. 2.

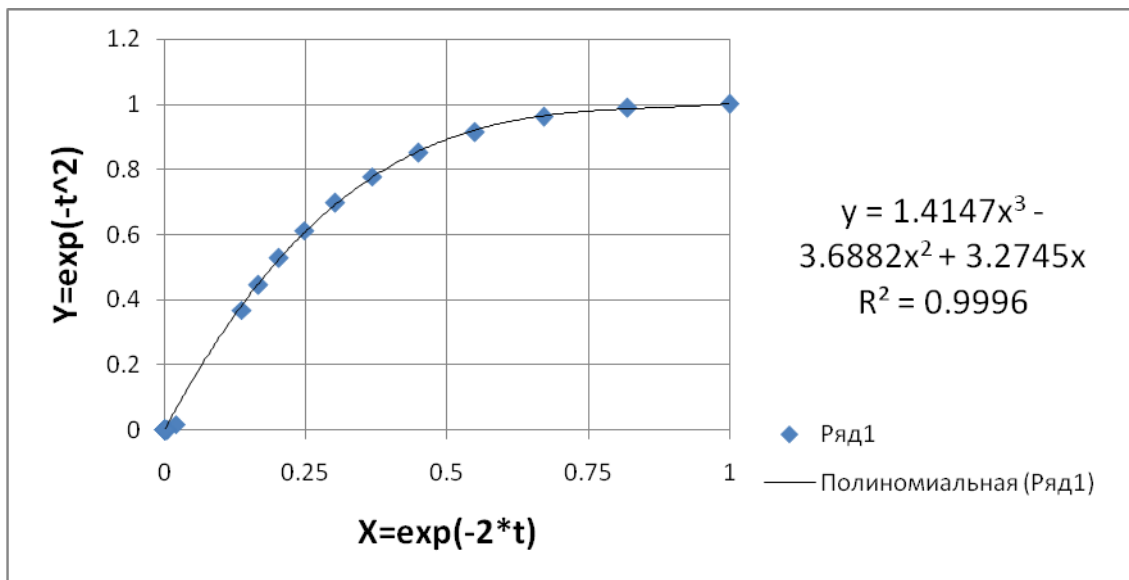


Рис. 2. К аппроксимации функции $\exp(-\eta^2)$

С учетом (26) найдем:

$$e^{(-c_v \cdot \alpha^2 \cdot t)} \approx \sum_{i=1}^n a_i \cdot e^{(-k_i \cdot \alpha \cdot \sqrt{c_v t})}. \quad (27)$$

Таблица 1.

Значения коэффициентов

№ п/п	Значения коэффициентов		
a_i	3,2745	3,6882	1,4147
k_i	2,0	4,0	6,0

С учетом (27) и представленных в таблице 1 данных несобственный интеграл (25) может быть представлен в аналитической форме:

$$W_z = -\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot G} \cdot \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} + \frac{z^2}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \right. \\ & \left. \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} - \frac{1,4137}{\sqrt{r^2 + (6 \cdot \sqrt{c_v \cdot t} + z)^2}} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{3,6882}{\sqrt{r^2 + (4 \cdot \sqrt{c_v \cdot t} + z)^2}} - \frac{3,2745}{\sqrt{r^2 + (2 \cdot \sqrt{c_v \cdot t} + z)^2}} \right] \right\}. \quad (28) \end{aligned} \right.$$

Полученное нами решение задачи имеет такие асимптотические оценки:

$$\left. \begin{aligned} W_z(r, z, 0) &= -\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot G} \cdot \frac{r^2 + 2 \cdot z^2}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}; \\ W_z(r, z, \infty) &= -\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot G} \cdot \frac{2 \cdot (1 - \nu) \cdot r^2 + z^2 \cdot (3 - 2 \cdot \nu)}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}; \\ \frac{S(r, \infty)}{S(r, 0)} &= \frac{W_z(r, 0, \infty)}{W_z(r, 0, 0)} = 2 \cdot (1 - \nu). \end{aligned} \right\}. \quad (29)$$

Последняя оценка (29) полностью совпадает с полученными Ю. К. Зарецким результатами [12].

В заключение отметим, что полученные в настоящей работе результаты (формула (28)) в дальнейшем будут использованы для разработки методики расчета осадок осушаемых с использованием вертикальных дрен оснований.

Литература

1. Справочник Plaxis V 8.2 / пер. М.Ф. Астафьева. 2006. 182 с
2. Парамонов В.Н. Метод конечных элементов при решении нелинейных задач геотехники. Санкт-Петербург, 2012 – 264 с.
3. Цытович Н.А. «Механика грунтов (краткий курс).»: Учебник для строит. вузов. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1983. – 288 с., ил.
4. Цытович Н.А., Зарецкий Ю.К., Малышев М.В., Абелев М.Ю., Тер-Мартиросян З.Г. Прогноз скорости осадок оснований и сооружений. - М.: Стройиздат, 1967. - 238 с.
5. Шаповал А.В., Шаповал В.Г. Теория взаимосвязанной фильтрационной консолидации: Монография. -Днепропетровск: Пороги, 2009-311 с.
6. Шаповал В.Г. Прогноз осадок и кренов фундаментов на пылевато – глинистом основании, находящихся под воздействием статической и циклической нагрузки: Автореферат докторской диссертации. - Днепропетровск, 1996. - 50 с.
7. ДБН В.2.1-10-2009. Основи та фундаменти споруд. Київ. Мінрегіонбуд України, 2009-104 с.
8. Шаповал А.В., Шаповал В.Г. Алгоритм побудови асимптотичних рішень задач про осідання водонасичених основ. Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. Збірник наукових праць. Випуск 28 – Рівне, 2014 – с. 463 – 469.
9. Новацкий В. Теория упругости. - М.: Мир, - 1975. - 872 с.
10. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике. - М.: Наука, 1974. - 840 с.
11. Шаповал А.В., Шаповал В.Г. Теория взаимосвязанной фильтрационной консолидации: Монография. -Днепропетровск: Пороги, 2009-311 с.
12. Зарецкий Ю.К. Теория консолидации грунтов. - М.: Наука. 1967 - 270 с.
13. Шаповал В.Г., Шаповал А.В., Титякова Е.С. Алгоритм построения разложений в асимптотические ряды при нахождении обратного преобразования Лапласа в задачах теплопереноса и фильтрационной консолидации.//Світ геотехніки. № 4. 2005. –С. 12-16.
14. Почтман Ю.М., Колесниченко А.Л. Методы математической оптимизации в механике грунтов. - Киев - Донецк: Вища школа, 1977. - 104 с.