

## К РАСЧЕТУ РАМ НА УСТОЙЧИВОСТЬ С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ МАТЕРИАЛА

*Орлов А.Н., Петраш С.В. (Одесса)*

Решена задача по определению реактивных усилий в стержнях основной системы метода перемещений при расчетах статически неопределимых стержневых конструкций на устойчивость с учетом длительных процессов (ползучести) при  $t \rightarrow \infty$ .

Задачи, которые ставит в наше время практика строительства, требуют дальнейшего развития теории расчета и усовершенствовании существующих методов расчета строительных конструкций. Одной из важных особенностей этого закономерного процесса являются синтез и взаимное проникновение методов строительной механики, используемой как метод расчета строительных конструкций, и теории ползучести.

При расчетах рамных конструкций на устойчивость методом перемещений в условиях установившейся ползучести, которая носит затухающий характер, канонические уравнения имеют вид:

$$r_{k1}(\infty) \cdot z_1(\infty) + r_{k2}(\infty) \cdot z_2(\infty) + \dots + r_{kn}(\infty) \cdot z_n(\infty) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

Свободные члены уравнений (1) равны нулю, т.к. передача нагрузки считается узловой (по оси вертикальных элементов конструкций).

Предполагается, что материал рамы обладает свойствами нелинейной теории упругой наследственности [1]:

$$-EIy''(x, t) = M(x, t) + \gamma \varphi \int_{t_0}^t [M(x, \tau) + \frac{\beta h}{2I} M^2(x, \tau)] e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau. \quad (2)$$

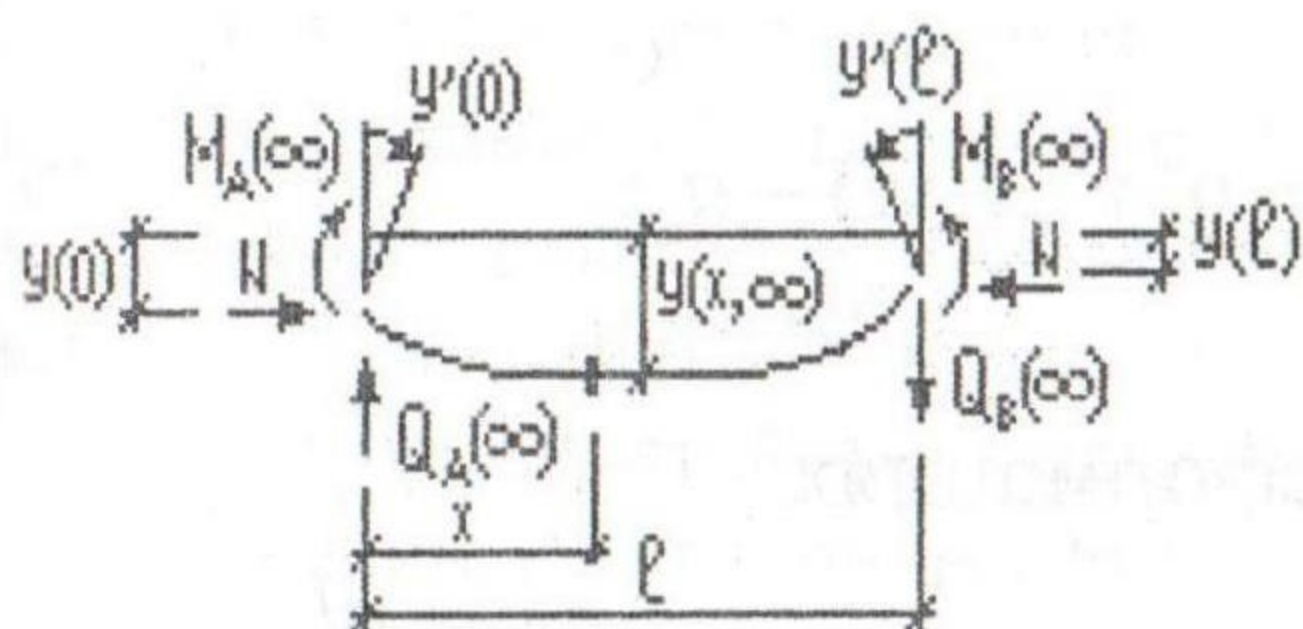


Рис. 1.

Рассмотрим участок стержня подвергнутый деформативному воздействию, находящийся под действием продольной силы  $N$  (рис. 1):

$$M(x, \infty) = M_A(\infty) - Q_A(\infty)x + N[y(x, \infty) - y(0)] \quad (3)$$

Учитывая, что при  $t \rightarrow \infty$  скорости изменения кривизны, перемещений и реактивных усилий стремятся к нулю, т.е.  $\dot{y}'(x, t) \rightarrow 0$ ,  $\dot{y}(x, t) \rightarrow 0$ ,  $\dot{M}_A(t) \rightarrow 0$ ,  $\dot{Q}_A(t) \rightarrow 0$ , используя известные зависимости, уравнение (2) можно представить как нелинейное дифференциальное второго порядка:

$$y''(x, \infty) + a_1 - a_2x + n^2[y(x, \infty) - y(0, \infty)] + \frac{1}{2}\omega l \{a_1 - a_2x + n^2[y(x, \infty) - y(0, \infty)]\}^2 = 0, \quad (4)$$

$$a_1 = \frac{M_A(\infty)}{E_g I}; \quad a_2 = \frac{Q_A(\infty)}{E_g I}; \quad E_g = \frac{E}{1 + \varphi};$$

где:

$$n^2 = \frac{N}{E_g I}; \quad \omega = \frac{\varphi}{(1 + \varphi)^2} \frac{\beta E}{\lambda}. \quad (5)$$

(при рассмотрении стержней основной системы метода перемещений при единичных деформативных воздействиях в случае угловой деформации в сомножитель  $\frac{1}{2}\omega l$  в (4)  $l$  входит в первой степени, а при линейном -  $l^2$ ).

Для придания большей компактности последующим решениям и преобразованиям сделаем замену:

$$\begin{aligned} a_1 - a_2x + n^2[y(x, \infty) - y(0)] &= z(x, \infty); \\ -a_2 + n^2 y'(x, \infty) &= z'(x, \infty); \quad n^2 y''(x, \infty) = z''(x, \infty); \end{aligned} \quad (6)$$

и тогда уравнение (4) запишется так:

$$z''(x, \infty) + n^2 z(x, \infty) = -Az^2(x, \infty); \quad (7)$$

с граничными условиями:

$$z(x, \infty) = a_1; \quad z'(x, \infty) = n^2 y'(x, \infty) - a_2; \quad (8)$$

где  $A = \begin{cases} \frac{1}{2}\omega n v & \text{— при угловых деформациях} \\ \frac{1}{2}\omega n v^2 & \text{— при линейных деформациях} \end{cases}; \quad v = nl. \quad (9)$

Уравнение (7) нелинейное и в нем уже выделена линейная (левая) и нелинейная (правая) части. Выполнив преобразование Лапласа [2]:

$$\begin{aligned} z(x, \infty) &\leftrightarrow S(p); \\ z''(x, \infty) &\leftrightarrow p^2 S(p) - pz(0, \infty) - z'(0, 0); \\ z^2(x, \infty) &\leftrightarrow L\{z^2(x, \infty)\}; \end{aligned} \quad (10)$$

получим уравнение в пространстве изображений:

$$(p^2 + n^2)S(p) - pz(0, \infty) - z'(0, \infty) = -AL\{z^2(x, \infty)\}; \quad (11)$$

решение которого (для пространства изображений):

$$S(p) = \frac{p}{p^2 + n^2} z(0, \infty) + \frac{1}{p^2 + n^2} z'(0, \infty) - \frac{A}{p^2 + n^2} L\{z^2(x, \infty)\} \quad (12)$$

Далее воспользуемся методом последовательных приближений. Отбросив третье слагаемое справа в выражении (12), получим первое приближение. Выполняя обратное преобразование и находя оригинал полученного выражения, записываем на его основании уравнения, описывающие изогнутую ось, углы поворота поперечных сечений и распределение изгибающих моментов.

Рассматривая элементы основной системы метода перемещений, записываем зависимости для определения реактивных внутренних усилий  $M_A(\infty)$  и  $Q_A(\infty)$  в первом приближении (полученные данные представлены в таблице). Легко заметить, что полученные зависимости по форме полностью совпадают с зависимостями для упругой задачи. Вид и численные значения функций  $\varphi_1(v)$ ,  $\varphi_2(v)$ ,  $\varphi_3(v)$ ,  $\varphi_4(v)$ ,  $\eta_1(v)$ ,  $\eta_2(v)$  хорошо известны [3]. Однако необходимо отметить, что модуль упругости бетона при длительном деформировании  $E_d$  и параметр сжатия элемента  $\nu_d$  определяются с учетом  $1 + \varphi$ . Очевидно, что полученные решения в первом приближении есть решения на основании линейной теории упругой наследственности.

Для получения второго приближения следует вычислить нелинейную часть выражения (7), принимая во внимание решения первого приближения. Порядок расчета во втором приближении аналогичен расчету при первом приближении. Полученные данные представлены в таблице в виде расчетных зависимостей для определения реактивных внутренних усилий с учетом нелинейной теории упругой наследственности.

Зависимости для определения функций  $\psi_1 - \psi_5$ , входящих в расчетные зависимости для внутренних усилий  $M_A(\infty)$  и  $Q_A(\infty)$  (см. таблицу):

$$\psi_1(v_g) = \frac{2}{v_g} \left[ \frac{1}{v} \varphi_4(v_g) F_1(v_g) - \frac{1}{3} \varphi_3(v_g) F_2(v_g) \right]; \quad (13)$$

$$\psi_2(v_g) = \frac{4}{3v_g} \left[ \frac{2}{v} \eta_2(v_g) F_1(v_g) - \varphi_4(v_g) F_2(v_g) \right]; \quad (14)$$

$$\psi_3(v_g) = \frac{3}{4v_g \text{Sin} v_g} \varphi_1(v_g) F_3(v_g); \quad (15)$$

$$\psi_4(v_g) = \varphi_4(v_g) \psi_2(v_g); \quad (16)$$

$$\psi_3(v_g) = \frac{3}{4v_g^2 \text{Cos} v_g} \eta_1(v_g) F_3(v_g); \quad (17)$$

где:

$$F_1(v_g) = 3 \left[ \varphi_2^2(v_g) + \varphi_5^2(v_g) \right] (1 - \text{Cos} v_g) - 2\varphi_2(v_g) \varphi_5(v_g) * \\ * (\text{Sin} 2v_g - 2\text{Sin} v_g) - \left[ \varphi_2^2(v_g) - \varphi_5^2(v_g) \right] (\text{Cos} 2v_g - \text{Cos} v_g); \quad (18)$$

$$F_2(v_g) = 3 \left[ \varphi_2^2(v_g) + \varphi_5^2(v_g) \right] \text{Sin} v_g - 4\varphi_2(v_g) \varphi_5(v_g) (\text{Cos} 2v_g - \text{Cos} v_g) + \\ + \left[ \varphi_2^2(v_g) - \varphi_5^2(v_g) \right] (2\text{Sin} 2v_g - \text{Sin} v_g) \quad ; \quad (19)$$

$$\varphi_5(v_g) = \frac{1}{4v_g} \left[ v_g^2 - 6\varphi_4(v_g) \right]; \quad (20)$$

$$F_3(v_g) = 3 \left[ \varphi_1^2(v_g) + \frac{1}{v_g} \eta_1^2(v_g) \right] (1 - \text{Cos} v_g) + \frac{2}{v_g} \varphi_1(v_g) \eta_1(v_g) * \quad ; \quad (21)$$

$$* (\text{Sin} 2v_g - 2\text{Sin} v_g) - \left[ \varphi_1^2(v_g) - \frac{1}{v_g} \eta_1^2(v_g) \right] (\text{Cos} 2v_g - \text{Cos} v_g)$$

$$v_g = v \sqrt{1 + \varphi}. \quad (22)$$

Результаты, полученные во втором приближении, позволяют получить более точные результаты по сравнению с первым [4].

На основании приведенных зависимостей были выполнены расчеты железобетонных рамных конструкций на устойчивость методом перемещений. При этом использовались характеристики приведенных сечений. Расчеты показали, что изменение критических сил составляют 15-23% при учете линейной теории ползучести и 21-33% при учете нелинейной теории по сравнению с критическими силами, полученными для упругой стадии работы конструкций.

№ п/п	Схема стержня	Расчетные зависимости для линейной ТУН	Расчетные зависимости для нелинейной ТУН
1.		$M_{1,1}(\infty) = \frac{4E_{\text{ср}}I}{l} \varphi_2(v_{\text{ср}})$ $Q_{1,1}(\infty) = Q_B(\infty) = \frac{6E_{\text{ср}}I}{l^2} \varphi_1(v_{\text{ср}})$	$M_{1,1}(\infty) = \frac{4E_{\text{ср}}I}{l} [\varphi_2(v_{\text{ср}}) - \omega \psi_1(v_{\text{ср}})]$ $Q_{1,1}(\infty) = Q_B(\infty) = \frac{6E_{\text{ср}}I}{l^2} [\varphi_1(v_{\text{ср}}) - \omega \psi_1(v_{\text{ср}})]$
2.		$M_{1,1}(\infty) = \frac{3E_{\text{ср}}I}{l} \varphi_1(v_{\text{ср}})$ $Q_{1,1}(\infty) = Q_B(\infty) = \frac{3E_{\text{ср}}I}{l^2} \varphi_1(v_{\text{ср}})$	$M_{1,1}(\infty) = \frac{3E_{\text{ср}}I}{l} [\varphi_1(v_{\text{ср}}) - \omega \psi_1(v_{\text{ср}})]$ $Q_{1,1}(\infty) = Q_B(\infty) = \frac{3E_{\text{ср}}I}{l^2} [\varphi_1(v_{\text{ср}}) - \omega \psi_1(v_{\text{ср}})]$
3.		$M_{1,1}(\infty) = \frac{6E_{\text{ср}}I}{l^2} \varphi_1(v_{\text{ср}})$ $Q_{1,1}(\infty) = Q_B(\infty) = \frac{12E_{\text{ср}}I}{l^3} \eta_2(v_{\text{ср}})$	$M_{1,1}(\infty) = \frac{6E_{\text{ср}}I}{l^2} [\varphi_1(v_{\text{ср}}) - \omega \psi_2(v_{\text{ср}})]$ $Q_{1,1}(\infty) = Q_B(\infty) = \frac{12E_{\text{ср}}I}{l^3} [\eta_2(v_{\text{ср}}) - \omega \psi_2(v_{\text{ср}})]$
4.		$M_{1,1}(\infty) = \frac{3E_{\text{ср}}I}{l^2} \varphi_1(v_{\text{ср}})$ $Q_{1,1}(\infty) = Q_B(\infty) = \frac{3E_{\text{ср}}I}{l^3} \eta_1(v_{\text{ср}})$	$M_{1,1}(\infty) = \frac{3E_{\text{ср}}I}{l^2} [\varphi_1(v_{\text{ср}}) - \omega \psi_1(v_{\text{ср}})]$ $Q_{1,1}(\infty) = Q_B(\infty) = \frac{3E_{\text{ср}}I}{l^3} [\eta_1(v_{\text{ср}}) - \omega \psi_1(v_{\text{ср}})]$

### Литература

1. Ржаницын А.Ф. Теория ползучести.-М.:Стройиздат,1968.-303с.
2. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования.-М.:Наука,1971.-288с.
3. Кисилев В.А. Строительная механика: Спец.курс. Динамика и устойчивость сооружений.-М.:Стройиздат,1981.-512с.
4. Петраш С.В. Прочность и устойчивость железобетонных рамных конструкций с учетом линейной и нелинейной ползучести. Дис....канд.техн.наук: 05.23.01-Одесса: ОГАСА, 2000.-196с.