

## ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ ПРОЧНОСТИ ПОЛИМЕРНОГО КОМПОЗИТА: НАТУРНЫЙ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

В.А. Вознесенский, Т.В. Ляшенко, Н.Р. Антонюк, Ан.А. Гара  
(Одесская государственная академия строительства и архитектуры)

**Введение.** Достаточно большие вариационные ряды опытных данных необходимы для решения специальных задач материаловедения [1, гл. 5], в которых инженерный интерес представляет не столько среднее значение критерия качества, сколько другие характеристики его распределения. Это коэффициенты формы и вариации, вероятности брака или разрушения, уровни качества при заданном риске и другие вероятностные показатели (ВП). В строительной практике ВП приоритетны при контроле качества и при разработке материалов для конструкций без резервирования (продуктопроводов, танков, экранов, мачт и т.п.).

Методы компьютерной статистики дают возможность более глубоко анализировать эксперимент, используя ранее недоступные количественные оценки. С помощью этих методов извлекается информация, которую иными способами нельзя получить без чрезмерных затрат ресурсов. Один из методов компьютерной статистики – *bootstrap* [2] – позволяет по результатам многократного случайного воспроизведения (репродуцирования, размножения) достаточно больших массивов экспериментальных данных сделать заключения, связанные со статистическими распределениями критериев качества материала.

Натурный эксперимент, направленный на получение данных о распределении уровня свойства материала (вне гипотезы о нормальном распределении), весьма трудоемок, поскольку в каждой точке плана эксперимента необходимо испытать несколько десятков образцов-близнецов (фиксированного состава, режима изготовления и т.д.). При естественном желании извлечь из такого эксперимента как можно больше полезной информации, возможности для этого ограничены. Во многих ситуациях не могут быть корректно применены аналитические методы [3] расчета оценок вероятностных показателей. Как показывает опыт кафедры ПАТСМ ОГАСА, распределения уровней реологических и физико-механических свойств жидких и затвердевших композиций часто отличны от нормального и меняют форму под влиянием рецептурно-технологических факторов. Это не позволяет определять доверительные границы ВП свойств материала. Ограничения снимает вычислительный эксперимент по бутстреп-методу, позволившему

Таблица 1. Числовые оценки распределения прочности и распределений этих оценок

Статистические оценки распределения	Распределение прочности $R$ в эксперименте		Новая информация, полученная в вычислительном эксперименте						
	наблюдательный	вычисленный	... характеристики распределений						
			$\nu\{0_i\}$	$q_{0.5}\{0_i\}$	$q_{0.5}\{0_{0i}\}$	$\Delta_{0.5}\{0_{0i}\}$	$A\{0_{0i}\}$	$E\{0_{0i}\}$	
Среднее $\Delta_{0.5}$	31.45	31.43	0.60	31.11	31.74	0.63	-0.01	-0.01	
Стандарт $s$	1.45	1.42	10.99	1.16	1.69	0.53	-0.01	-0.55	
Коэффициент вариации $v, \%$	4.62	4.52	10.86	3.70	5.36	1.65	-0.01	-0.55	
Асимметрия $A$	0.35	0.32	121	-0.33	0.93	1.27	-0.22	-0.10	
Эксцесс $E$	0.85	0.73	79	-0.15	1.70	1.85	0.36	0.78	
Границы	max	35.30	1.41	34.80	35.00	0.50	-2.97	9.47	
	min	27.80	28.26	2.20	27.80	29.40	1.60	0.73	-1.14
Квантили	Двухзон $\Delta$	7.50	6.77	11.54	5.40	7.50	2.10	-0.91	0.37
	$q_{0.5}$	29.40	29.38	1.46	28.52	30.00	1.48	-0.87	1.93
	$q_{10}$	29.98	29.87	1.07	29.40	30.38	0.98	-0.58	-0.21
	Медiana $Me = q_{0.5}$	31.30	31.32	1.03	30.80	31.90	1.10	0.47	-0.34
	$q_{0.5}$	34.04	33.84	2.54	32.72	35.08	2.36	0.08	-1.63
Двухзон $\Delta_{0.5} = q_{0.5} - q_{0.5}$	4.64	4.46	1.08	4.20	5.08	0.88	0.95	-3.56	
Отклонение $\Delta_{0.5}$ от квантиля $q_{0.5}$ от нормального $q_{0.5n}$	0.38	0.33	97.46	-0.23	0.77	1.00	-0.81	1.40	
Риск $\alpha_{0.5}$ разрушения при 30 МПа	0.10	0.10	39.88	0.04	0.18	0.14	0.41	-0.03	



**Распределения прочности R в натурном эксперименте.** Анализируются результаты определения предела прочности в трехсуточном возрасте на 50 образцах из смеси с 20 м.ч. наполнителя при добавлении 10 м.ч. воды. Оценки  $\theta$  характеристик распределения прочности R в эксперименте приведены в левой колонке табл. 1.

Распределение R показано на рис. 1. Первый элемент вариационного ряда соответствует  $R_{\min} = 27.5$ , а #50 –  $R_{\max} = 35.3$ ; это единственные значения в диапазонах 27.5-28.5 и 34.5-35.5 МПа соответственно

Средняя прочность  $R_{av} = 31.45 \geq R_{тр}$ . С риском  $\alpha = 0.05$  распределение R для этого состава можно считать не отличающимся от нормального [9], хотя гистограмма и имеет тенденцию к положительной асимметрии. Квантиль  $R_{0.05}$ , соответствующий риску разрушения 0.05, ниже уровня  $R_{тр} = 30$  МПа. Квантиль  $R_{10}$  практически этому требованию удовлетворяет; естественно, что оценка риска  $\alpha_{30}$  разрушения при сжимающих напряжениях  $\sigma = 30$  МПа равна 0.10.

Закономерности изменения оценок  $\theta\{R\}$  под влиянием двух факторов состава описываются ЭС-моделями неполной четвертой степени. Так, модель (1), с 5 значимыми коэффициентами ( $\alpha = 0.10$ ), описывает поле средней прочности  $R_{av}$ : максимальный уровень  $R_{av, \max} = 32.49$  (при  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = +1$ ), минимум  $R_{av, \min} = 27.33$  ( $x_1 = +1$ ,  $x_2 = +0.7$ ), абсолютный прирост  $\Delta R = 5.16$  МПа и относительный  $\delta R = 18.9\%$ .

$$R_{av} = 29.38 - 1.41x_1 - 0.76x_2 - 1.10x_1x_2 + 1.37x_1^2x_2^2 \quad (1)$$

Это поле показано на рис. 2; условие  $R_{тр} \geq 30$  МПа выполняется при малых добавках воды (не более 15 м.ч.;  $x_1 \leq -0.5$ ) и любом количестве наполнителя, а также при любых добавках воды, но при низком содержании наполнителя (не более 12 м.ч.;  $x_2 \leq -0.8$ ). По сравнению с  $R_{av}$ , поверхность поля квантиля  $R_{0.05}$  (на том же рисунке) не только ниже по шкале ординат, но и несколько деформирована. Это связано как с изменением коэффициента вариации  $v$  (%) от состава к составу, так и со значимым отклонением распределений R от нормального для некоторых составов. По этой причине определенный экспериментально при  $\sigma = 30$  МПа риск разрушения  $\alpha_{30}$  отклоняется от предсказанного при гипотезе нормальности значения  $\alpha_{30,н}$ . Разностный критерий  $\Delta\alpha_{30,н} = \alpha_{30} - \alpha_{30,н}$  отражает и асимметрию  $A\{R\} \neq 0$ , и эксцесс  $E\{R\} \neq 0$  реального распределения. Поверхность поля разностного критерия показывает, что в анализируемой системе основным фактором, изменяющим форму кривой распределения прочности, является наполнитель – только при его низком содержании (до 12-14%) реальный риск разрушения меньше предсказываемого по нормальной кривой.

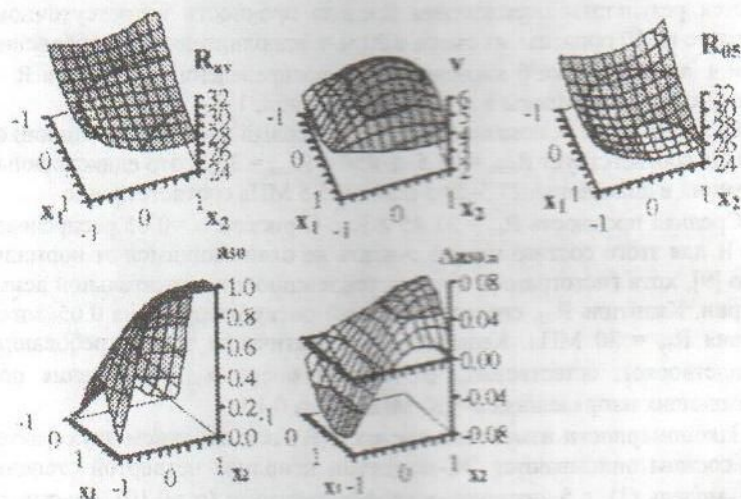


Рис. 2. Поля статистических характеристик распределения прочности  $R$  в координатах состава композита:  $x_1$  (дополнительная вода) и  $x_2$  (наполнитель)

**Репродуцирование результатов натурального эксперимента.** Вне зависимости от числа испытанных образцов-близнецов для любой числовой характеристики распределения по натуральным данным определяется лишь одно значение – точечная оценка  $\theta\{R\}$ . Законы распределения некоторых  $\theta$  (а значит и их интервальные оценки) можно определить аналитически [3], но при ряде условий, трудно выполнимых на практике. В то же время распределения оценок  $\theta\{R\}$  (а также их функций) можно получить методом бутстрапа в вычислительном эксперименте.

Из данных натурального эксперимента в вычислительном эксперименте формируются новые случайные выборки, попасть в которые имеет равные возможности любой единичный результат опыта. Для этого элемент вариационного ряда (например, #1 на рис. 1, то есть,  $R = R_{\min} = 27.8$ ) отбирается в генерируемую выборку с использованием равномерного распределения и тут же возвращается на место. Таким образом, любой элемент может попасть в новую выборку объема  $n = 50$  от 0 до 50 раз, что существенно изменяет все характеристики ( $\theta_c$ ) генерируемого в вычислительном эксперименте ряда. Действительно, если случайно #1 не попадет в выборку, то диапазон  $\Delta = R_{\max} - R_{\min}$  сокра-



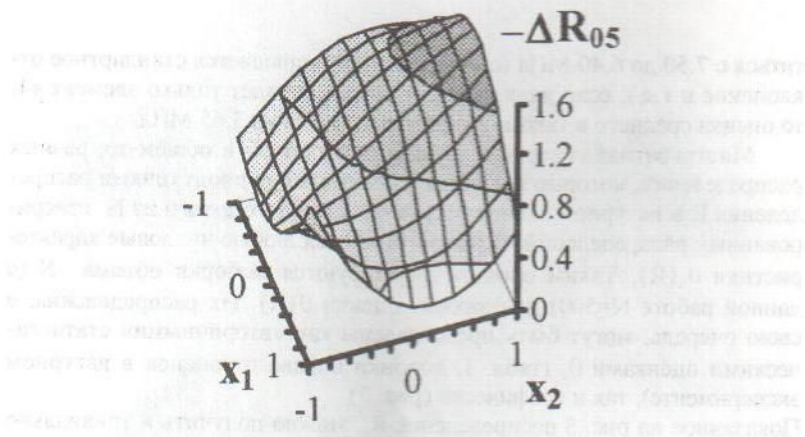


Рис. 4. Влияние состава на снижение величины  $R_{05}$  (МПа) при переходе к ее гарантированному уровню

рушения 0.05 и 0.10, коэффициента вариации  $v\{R\}$ , риска разрушения  $\alpha_{30}$  – при  $\sigma=30$  МПа) получить достаточно сложно [3]. Аналитически не определено и распределение отклонения квантиля вариационного ряда  $q_\alpha$  от значения  $q_{\alpha,n}$ , рассчитанного при гипотезе нормальности, в частности, показанное на рис. 3 распределение  $\Delta R_{05,n} = R_{05} - R_{05,n}$ .

Следует подчеркнуть две «аксиоматические» особенности результатов бутстреп-эксперимента. Во-первых, средние любых оценок  $\theta_c$  в пределе равны значениям оценок  $\theta$  для распределения результатов натурного эксперимента (показано [4], что в задачах строительного материаловедения для приближенного равенства достаточно  $N \geq 200$ ); соответствующие числа в колонках  $\theta$  и  $\theta_c$  табл. 1 можно считать практически равными – наибольшие расхождения у оценок, связанных с границами  $R$ . Во-вторых, связанные с границами оценки ( $\max$ ,  $\min$ ,  $\Delta$ , квантили  $q_\alpha$  и т.п.) не могут выйти за пределы вариационного ряда  $R$  в натурном эксперименте (ср. соответствующие ячейки в табл. 1).

Закономерности влияния факторов состава на числовые оценки  $\theta_c$  генерированных распределений или их функции описываются ЭС-моделями неполной четвертой степени, подобными (1). На рис. 4 показано описанное моделью с 8 значимыми коэффициентами поле такого ВП как снижение величины квантиля  $R_{05}$  при переходе к его гарантированному уровню  $q_{05}\{R_{05}\}$ . Наибольшее отклонение у состава со сред-

ней добавкой воды и 30% наполнителя; однако, этот состав и по гарантированным уровням  $R_{05}$  останется одним из наиболее прочных (рис. 2).

Генерация распределения относительных изменений свойств композита при его структурообразовании или деструкции. Если в результате натурального эксперимента получены вариационные ряды для нескольких критериев  $Y_1, \dots, Y_j, \dots$  (в частности, для нескольких сроков твердения материала или до и после экспозиции в агрессивной среде), то компьютерное материаловедение позволяет получить новые, нетривиальные сведения о композите [4, 5, 10]. В дополнение к традиционно рассчитываемой по двум средним одной числовой оценке коэффициента «отношения» (твердения, насыщения, стойкости...)  $K = Y_{j,av}/Y_{1,av}$

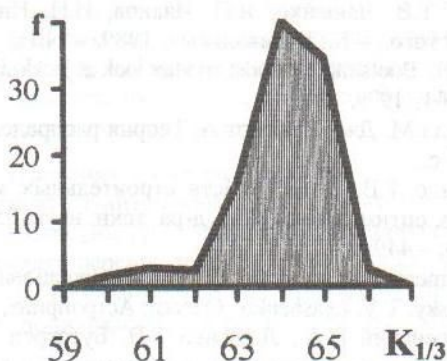


Рис. 5. Полигон распределения показателя  $K_{1/3}$  (%) твердения композита в однодневном возрасте

появляется информация о распределении этого коэффициента (полигон и оценки  $\theta$ ). В данном исследовании по вариационным рядам прочности через 1 и 3 суток мог быть рассчитан коэффициент  $K_{1/3}$  (%), показывающий интенсивность твердения; для состава, проанализированного в табл. 1, он равен  $100 \cdot 20.12/31.43 = 64.0$  (отношение средних). Для получения распределения  $K_{1/3}$  возможны несколько подходов к процедуре репродуцирования данных [10]. Поскольку в шахтной выработке опасно выпадение любого куска породы, то по каждому вариационному ряду ( $R_1$  и  $R$ ) генерировано по 500 случайных значений прочности, и по 500 парам (без упорядочивания новых рядов) рассчитаны 500 значений  $K_{1/3}$ . Распределение коэффициента интенсивности твердения показано на рис. 5;



оно имеет сильную отрицательную асимметрию и большой эксцесс; доверительные границы  $K_{1/3,05} = 62.4$  и  $K_{1/3,95} = 65.3$  сдвинуты по отношению к среднему в сторону меньших значений.

**Заключение.** Компьютерная статистика является эффективным инструментом компьютерного материаловедения. Она позволяет извлечь из достаточно больших массивов результатов натурального эксперимента скрытую информацию о свойствах материала, в частности, оценить распределения риска разрушения, показателей стойкости и т.п.

## Литература

1. ЭВМ и оптимизация композиционных материалов / В.А. Вознесенский, Т.В. Ляшенко, Я.П. Иванов, И.И. Николов: Под ред. В.А. Вознесенского. – К.: Будивэльнык, 1989. – 240 с.
2. Efron B. Bootstrap methods: another look at jackknife. – The Annals of Statistics, v.7, №1, 1979.
3. Кендалл М. Дж., Стьюарт А. Теория распределений. – М: Наука, 1966. – 587 с.
4. Ляшенко Т.В. Поля свойств строительных материалов (концепция, анализ, оптимизация). Дис. д-ра техн. наук: 05.23.05 / ОГАСА. – Одесса, 2003. – 449 с.
5. Experimental-statistical modelling in computational materials science / V.A.Voznesensky, T.V. Lyashenko– Одесса: Астропринт, 1998. – 32 с.
6. Вознесенский В.А., Ляшенко Т.В. Бутстреп – компьютерное «клонирование» данных натурального эксперимента // Моделирование и оптимизация в материаловедении: Мат-лы 42-го междунар. сем. МОК'42. – Одесса: Астропринт, 2003. – С. 3-5.
7. Блекот В.Д. Разработка и оптимизация карбамидных композиционных омоноличивающих материалов для внутришахтного строительства. Дис. канд. техн. наук. – Одесса, 1988. – 172 с.
8. Анализ и оптимизация показателей обеспеченности свойств КСМ для омоноличивания трещиноватых пород / В.А. Вознесенский, А.Т. Пименов, В.Д. Блекот // Асфальтовые и цементные бетоны для условий Сибири: Сб. науч. тр. СибАДИ. – Омск, 1989. – С. 111-116.
9. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. – М.: Наука, 1982. – 416 с.
10. Вознесенский В.А., Ляшенко Т.В. Компьютерное размножение данных эксперимента для извлечения скрытой информации о свойствах материала // Композиційні матеріали для будівництва: Вісник ДонНАБА. – Макеевка, 2005 (в печати).