

РАСЧЕТ АРОЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ИХ МАТЕРИАЛА

Гришин А.В. Яременко Е.А.

Рассматриваются две задачи:

- сопоставление теоретических результатов расчета арок, базирующихся на теории пластического течения с упрочнением, с экспериментальными данными;

- исследование напряженно-деформированного состояния арок при сложном нагружении.

Известно, что при нагрузках даже не очень близких к предельным, бетон работает в упругопластическом состоянии. Поэтому классический упругий анализ не обеспечивает определения реальных напряжений и деформаций, возникающих в конструкциях из таких материалов. Методы предельного равновесия, основанные на моделях идеальной пластичности с неограниченным течением, могут привести к завышению несущей способности конструкций и не дают возможности определить их перемещения вплоть до стадии разрушения. Деформационные теории пластичности применимы только при простом нагружении и не позволяют учесть действительные сложные воздействия на реальные сооружения. Поэтому в предлагаемой методике расчета арочных конструкций используется теория пластичности с упрочнением, основанная на ассоциированном законе пластического течения.

Полагаем, что деформирование арки происходит при малых удлинениях, сдвигах и углах поворота. Поэтому для разделения общих деформаций на упругие и пластические используется постулат суммирования в приращениях деформаций [1].

$$d\varepsilon_{ks} = d\varepsilon_{ks}^{(e)} + d\varepsilon_{ks}^{(p)} \quad (1)$$

Компоненты тензора приращений упругих деформаций определяются через компоненты тензора напряжений по закону Гука

$$de_{ks}^{(e)} = C_{ksmn}^{(e)} d\sigma_{mn} \quad (2)$$

Будем считать, что упругие коэффициенты $C_{ksmn}^{(e)}$ обладают свойствами симметрии и не зависят от скоростной деформации.

Пластические деформации не определяются однозначно через напряжения. Связь между ними имеет вид дифференциальных неинтегрируемых соотношений. Из принципа максимума Мизеса следует уравнение [1]

$$de_{ks}^{(e)} = d\lambda f_{,\sigma_{ks}}, \quad d\lambda = const > 0 \quad (3)$$

Здесь принято обозначение $()_{,\sigma_{ks}} = \frac{\partial ()}{\partial \sigma_{ks}}$. В качестве функции

нагружения f принято условие Г.А. Гениева для бетона [2], которое в инвариантной форме имеет следующий вид

$$3(\sigma_c - \sigma_p)\sigma_0 + 3\sigma_i^2 - \sigma_p\sigma_c = 0 \quad (4)$$

где σ_c, σ_p - пределы пластичности при сжатии и растяжении бетона; σ_0, σ_p - первый и второй инварианты тензора напряжений; их обозначения соответствуют работе [3].

Постоянная $d\lambda$, входящая в соотношения (3), определяется из условия $f=0$ при активном процессе нагружения. После целого ряда преобразований, находим

$$d\lambda = \frac{D_{ksmn}^e f_{,\sigma_{ks}} d\varepsilon_{ks}}{f_{,\sigma_{ks}} D_{ksmn}^{(e)} f_{,\sigma_{mn}} - f_{,\chi} \sigma_{te} f_{,\sigma_{tl}}} \quad (5)$$

где χ - параметр упрочнения; D_{ksmn}^e - модули упругости, получаемые при обращении формулы (2).

Подставляя (5) в (3), затем (2) и (3) в (1), после преобразований получаем следующие уравнения

$$d\sigma_{ks} = D_{ksmn}^{ep} d\varepsilon_{mn}, \text{ если } f=0 \text{ и } d'f > 0;$$

$$d\sigma_{ks} = D_{ksmn}^e d\varepsilon_{mn}, \text{ если } f=0 \text{ и } d'f \leq 0 \text{ или } f < 0,$$

где D_{ksmn}^{ep} определяются через параметры упрочнения и производные от функции нагружения, которые находятся через инварианты σ_0, σ_i по формулам дифференцирования сложных функций.

Уравнения равновесия и статические уравнения на контуре определялись из принципа виртуальной работы, который записывается как

$$\int_{\Omega} \{d\sigma_{ks} \delta(d\varepsilon_{ks}) - dP_k \delta(du_k) + [\sigma_{ks} \delta(d\varepsilon_{ks}) - P_k \delta(du_k)]\} d\Omega - \\ - \int_{S_q} (dq_k + q_k) \delta(du_k) ds = 0 \quad (7)$$

Здесь: P – массовые силы; q – внешние силы, действующие на поверхность S_q ; du_k – приращения перемещений. При выполнении точных решений выражение в квадратных скобках (7) должно быть равно нулю. При численном решении, ввиду неточности вычислений, оно оставлено для коррекции равновесного состояния.

Для численной реализации предлагаемой методики был разработан в системе Delphi программный комплекс, в котором дискретизация исходных уравнений и конструкций выполнена методом конечных элементов.

Использовались 8-ми и 9-ти узловые изопараметрические четырехугольные элементы. Для определения перемещений, а затем и напряжений в узловых точках элементов, строился итерационный процесс, который базировался на методе Ньютона – Канторовича. Результаты расчета выводятся в выходной файл в виде различных таблиц, а также на экран дисплея в виде различных эпюр и графиков.

Для сравнений теоретических результатов, полученных по предлагаемой методике, с результатами опытных данных, приведенных в работе [4], был выполнен расчет железобетонной бесшарнирной арки кругового очертания, которая испытывалась вплоть до разрушения. Схема арки приведена на рис. 1.

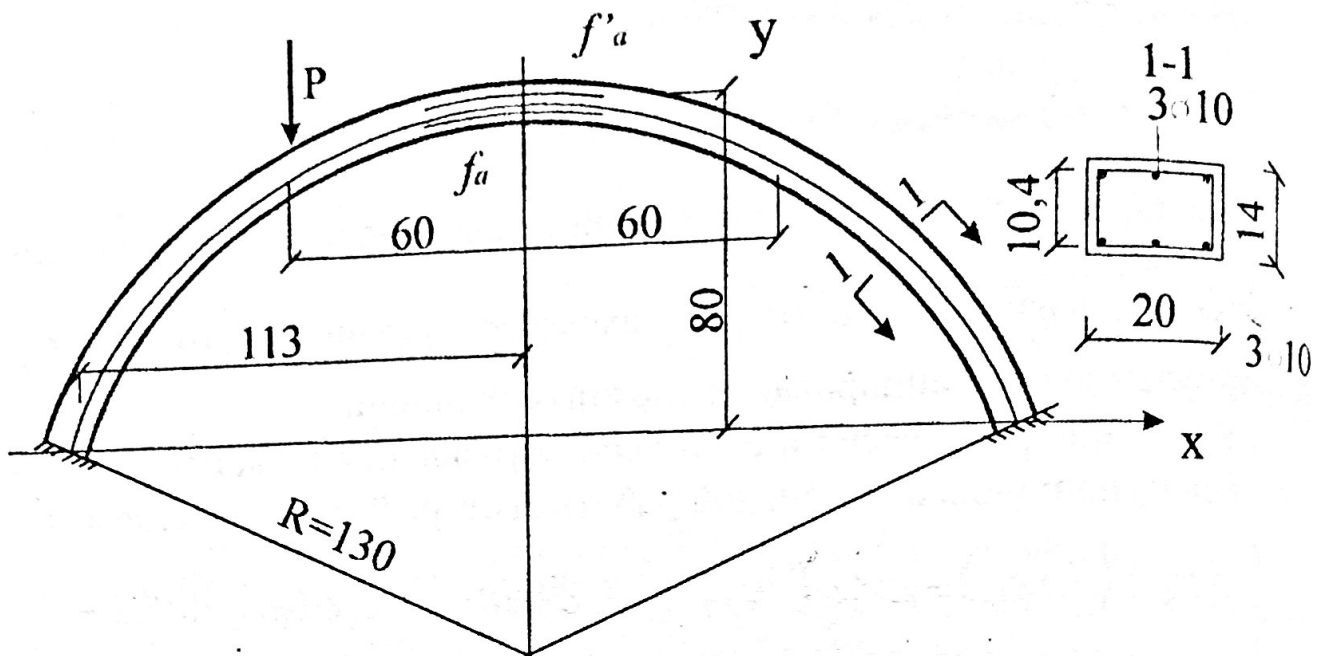


Рис. 1

Необходимые для расчета данные были взяты из [4], а недостающие - из СНиП II-V.1-62*. По результатам эксперимента при $P=9,75$ т произошло разрушение арки по схеме, показанной на рис. 7 из [4]. В результате расчета, по приведенной здесь методике разрушение было вызвано нагрузкой $P=9,778$ т. Пластические зоны и зоны предельных состояний показаны на рис. 2.

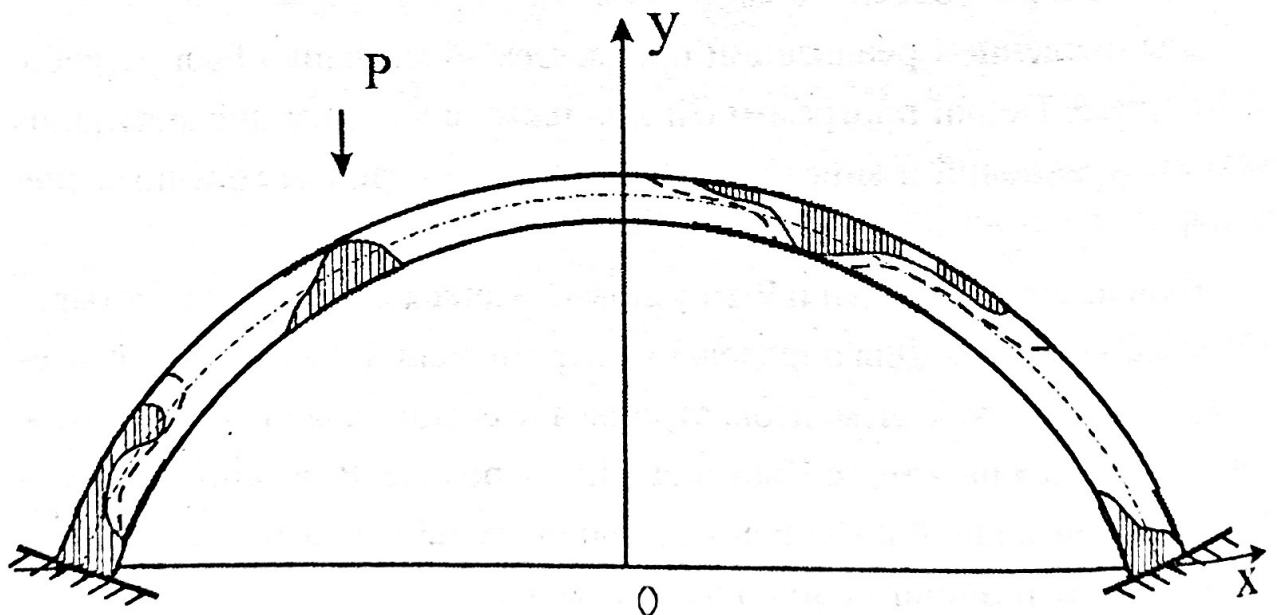


Рис. 2

— границы предельного состояния
 - - - границы пластических зон

Из рис. 2 видно, что качественная картина разрушения арки, полученная теоретическим путем, хорошо подтверждается опытными данными из работы [4]. Теоретическая величина разрушающей нагрузки почти точно совпадает с экспериментальной.

Был произведен расчет той же самой арки из [4] для следующих двух случаев её загрузки:

- прикладывались одновременно две симметричные силы, как показано на схеме I рис. 3 и определялось напряженно-деформированное состояние арки. Нагрузка приращениями доводилась до величины 9,7 т для каждой из сил $P_1 = P_2 = P$.

вначале прикладывалась приращениями только левая нагрузка, которая увеличивалась до $P_1 = 9,7$ т. Затем прикладывалась правая нагрузка и также доводилась до $P_2 = 9,7$ т, но левая нагрузка оставалась без изменения.

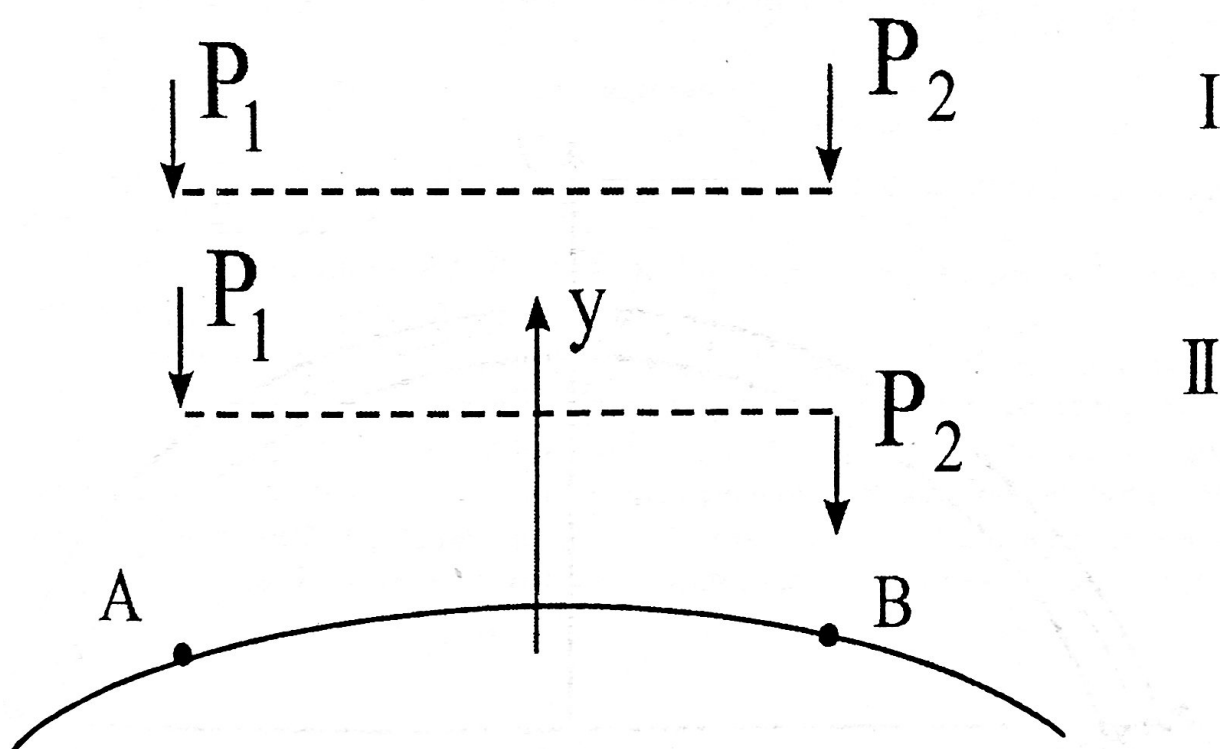


Рис. 3

Для первого случая загрузки на рис. 4 показаны пластические зоны и зоны предельного состояния в арке при $P_1 = P_2 = 9,7$ т. Они незначительные и симметричные и не приводят к разрушению арки. Перемещения в точках А, В приложения нагрузки $P_1 = 9,7$ т $P_2 = 9,7$ т составили $u_x = 0,0096$ см, $u_y = -0,0196$ см.

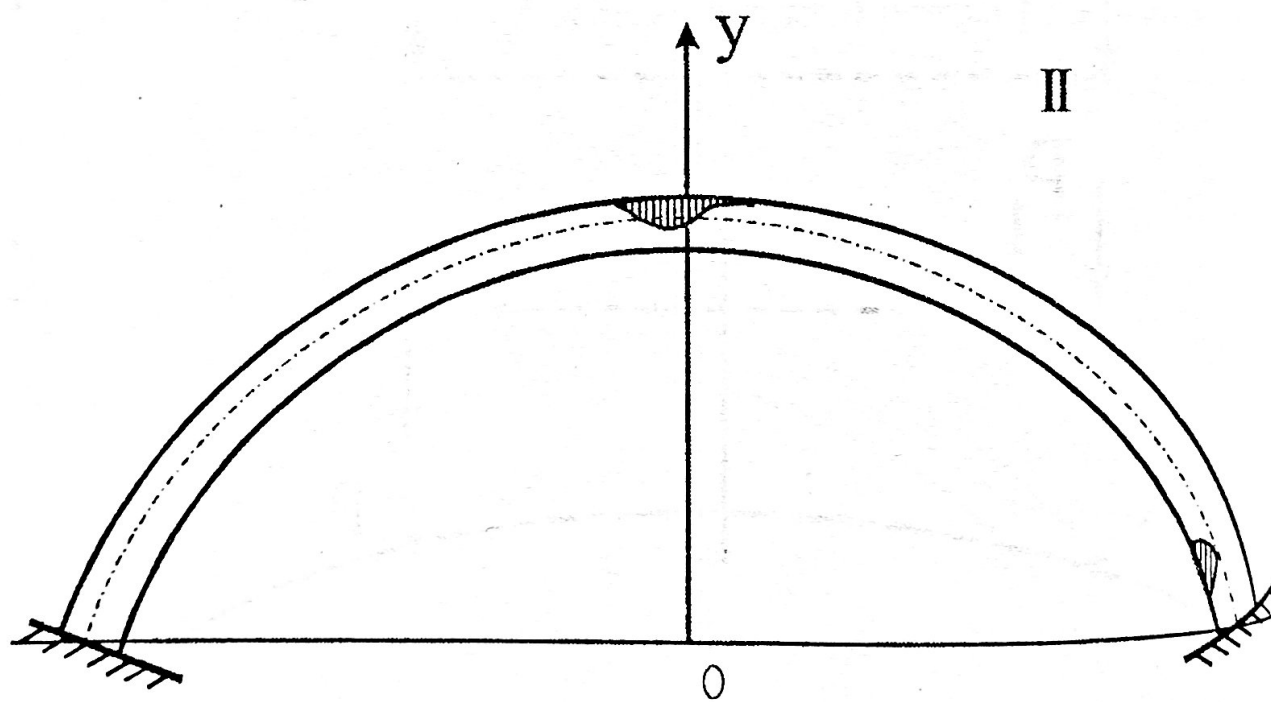
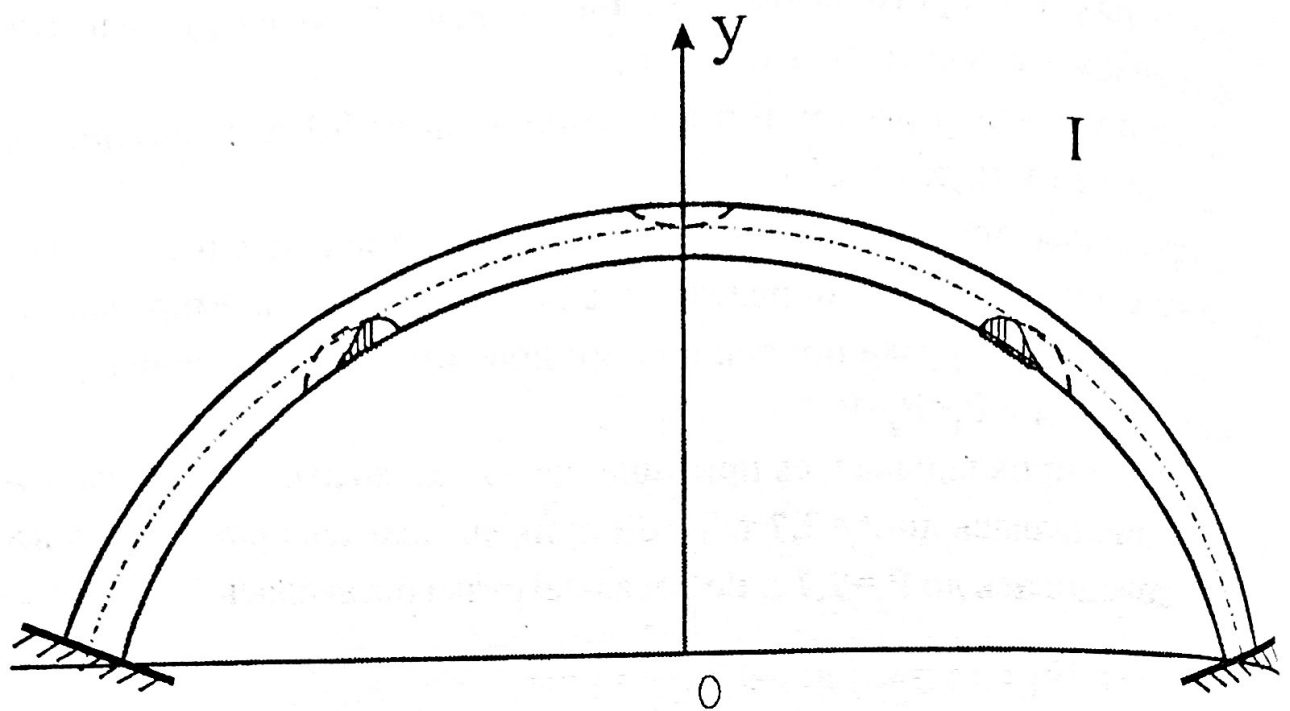


Рис. 4.

При втором случае загрузки арки, качественная и количественная картина напряженно-деформированного состояния в ней резко отличается от первого. К концу действия левой нагрузки $P_1 = 9,7$ т пластические зоны и зоны предельного состояния мало отличаются от приведен-

ных на рис. 2. Перемещения точки А равны $u_x=0,098$ см $u_y=-0,094$ см, а точки В — $u_x=0,083$ см, $u_y=0,064$ см. К моменту приложения второй нагрузки, т.е., когда обе нагрузки стали равны по 9,7 т картина образования зон очень изменилась; они показаны на рис. 4. Перемещения точки А стали равными $u_x=0,043$ см, $u_y=-0,048$ см, а точки В $u_x=0,018$ см, $u_y=-0,01$ см.

Анализируя рис. 3, 4 видим, что с увеличением нагрузки в некоторых областях арки произошла разгрузка, т.е. ранее образованные пластические зоны закрылись. Следовательно, процесс разгрузки может происходить не только при снятии нагрузки, но и при ее увеличении.

Если допускается работа конструкций в упругопластической стадии, то необходимо обязательно учитывать последовательность приложения действующих на нее нагрузок. Как видно из приведенного выше примера, при одновременном действии нагрузок P_1 и P_2 разрушение арки не происходит. Но если эти нагрузки прикладываются последовательно, то к концу действия только нагрузка P_1 при незначительном ее увеличении произойдет разрушение арки до начала действия нагрузки P_2 .

Литература

1. Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И. Теория упрочняющегося пластического тела. — М.: Наука, 1971. — 231 с.
2. Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона. — М.: Стройиздат, 1974. — 316 с.
3. Новожилов В.В. Теория упругости. — Л.: Судпромгиз, 1958. — 370 с.
4. Проценко А.М., Власов В.В. Статический принцип предельного равновесия и определение деформированного состояния статически неопределимых железобетонных конструкций в стадии исчерпания их несущей способности. // В сб. НИИЖБ, — “Воздействие статических, динамических и многократно повторяющихся нагрузок на бетон и элементы железобетонных конструкций. — М.: Стройиздат, 1972. — с 191 — 220.