НАПРЯЖЕННОЕ И ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ ИЗ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

В.М. Кобринец, Ю.В. Заволока, М.В. Заволока

(Одесская Государственная Академия Строительства и Архитектуры,

г. Одесса, Украина)

Рассмотрим внецентренно сжатый стержень выполненный из двух материалов. Для решения и анализа этого вопроса, воспользуемся предложением Хоффа [1]. Принимаем сечение в виде идеального двутавра с двумя точечными массами площадью A_{10} каждая из одного материала и двумя точечными массами площадью A_{20} каждая из другого материала, расстояние между которыми h_1 и h_2. Физический закон представим в нескольких часто встречающихся вариантах

$$\sigma_1=E_1\varepsilon_1; \qquad \sigma_2=E_2\varepsilon_2. \tag{1}$$

$$\varepsilon_1=K_1\sigma_1^m; \qquad \varepsilon_2=K_2\sigma_2^m. \tag{2}$$

$$\sigma_1=E_{10}\varepsilon_1-E_{21}\varepsilon^3_1; \qquad \sigma_2=E_{20}\varepsilon_2-E_{22}\varepsilon^3_2 \tag{3}$$

Напряжения в точечных массах считаются постоянными по всей площади A_1 и A_2.

Уравнения равновесия

$$P=2(A_{10}\sigma_1+A_{20}\sigma_2) \tag{4}$$

$$M=A_{10}\sigma_1h_1+A_{20}\sigma_2h_2 \tag{5}$$

Для физического закона (1) и (3) напряжения определяются по одним и тем же формулам (i = 1; i = 3)

$$\sigma_k=\alpha_i^{k-1}\sigma_0\left\{\frac{1}{2(\mu_1+\alpha_i\mu_2)}\pm\frac{[e+a_0(x)+y(x)+c_ж]h_k}{\mu_1h_1^2+\alpha_i\mu_2h_2^2}\right\} \tag{6}$$

k=1,2

Приняты обозначения

$\sigma_0=P/A_0$, A_0 – общая площадь поперечного сечения.

$\mu_1=A_{10}/A_0$; $\mu_2=A_{20}/A_0$; e, $a_0(x)$, $y_1(x)$, $c_ж$ – эксцентриситет, начальная погибь, прогиб стержня, расстояние от центра тяжести до центра жесткости.

$$\alpha_1=E_2/E_1; \qquad \alpha_3\sqrt{\frac{E_{20}^3\cdot E_{21}}{E_{22}\cdot E_{12}^3}} \tag{7}$$

Для закона определяемого формулой (2) напряжения в первом и втором материале будут

$$\sigma_1=\sigma_0\left\{\frac{1}{2(\mu_1+\alpha_c\mu_2)}\pm\frac{e+a_0(x)+y(x)+c_ж}{\mu_1 h_1+\alpha_и\mu_2 h_2}\right\} \tag{8}$$

$$\sigma_2=\sigma_0\left\{\frac{\alpha_c}{2(\mu_1+\alpha_c\mu_2}\pm\frac{\alpha_и\left[e+a_0(x)+y(x)+c_ж\right]}{\mu_1 h_1+\alpha_и\mu_2 h_2}\right\} \tag{9}$$

$$\alpha_c=\sqrt[m]{k_1/k_2}\,; \qquad \alpha_и=\sqrt[m]{h_2k_1/h_1k_2} \tag{10}$$

Как частный случай, могут быть получены формулы для центрального сжатия

$$\sigma_1^{сж}=\frac{\sigma_0}{2(\mu_1+\alpha\mu_2)}; \qquad \sigma_1^{сж}=\frac{\alpha\sigma_0}{2(\mu_1+\alpha\mu_2)} \tag{11}$$

Анализируя формулы (6), (8), (9) и (11) можно сделать вывод, что эффективность конструкций из композитных материалов следует добиваться за счет увеличения α а не за счет увеличения площади, возможно дорогостоящего материала, A_2.

Если в процессе эксплуатации происходит износ материала, то часть площади A_{10} и A_{20} разрушается и выключается из работы

$$A_1=A_{10}-A_{1p}\,; \qquad A_2=A_{20}-A_{2p} \tag{12}$$

Это сразу повлечет за собой увеличение напряжений. При одностороннем не симметричном износе центр тяжести сместится относительно центра тяжести на величину $c_ж$

$$c_ж=\pm\frac{\mu_{1p}h_1+\alpha\mu_{2p}h_2}{2\left[2\mu_1-\mu_{1p}+\alpha(2\mu_2-\mu_{2p})\right]}, \tag{13}$$

где $\mu_{1p}=A_{1p}/A_0$; $\mu_{2p}=A_{2p}/A_0$

α - определяется по (7) и (10).

Если материал A_2 дорогостоящий, то его следует защитить материалом A_1. Тогда будет разрушаться только материал A_1. При износе односторонней площади A_{10}.

$$c_ж = \pm \frac{\mu_1 h_1}{2(\mu_1 + 2\alpha\mu_2)}; \qquad \mu_{1p} = \mu_1 \tag{14}$$

Появление $C_ж$, приведет к тому, что эксцентриситет приложения силы P может увеличиться, а может и уменьшиться в зависимости от того с какой стороны происходит износ материала.

Первоначально центрально сжатый стержень с появлением $C_ж$ становится внецентренно сжатым. Следовательно, $C_ж$ играет роль начального несовершенства, которое появляется не сразу, а в процессе эксплуатации конструкции. Но может получиться, что внецентренно сжатый стержень при определенном значении μ_{1p} и μ_{2p} станет центрально сжатым, если $C_ж$ достигнет значения эксцентриситета e_0.

При $\mu_{2p} = 0$

$$\mu_{1p} = \frac{4e_0(\mu_1 + \alpha_2\mu_2)}{h_1 + e_0} \tag{15}$$

Поведение стержня при продольном изгибе с учетом линейной физической зависимости достаточно хорошо изучено и не требует идеализации поперечного сечения. Для изотропных стержней с учетом начальной погиби и эксцентриситета можно указать на работы Тимошенко С.П. (3).

В данном случае для сопоставления приведем значение критической силы и прогиба при линейной зависимости (1)

$$P_{kp} = \frac{\pi^2 E_1 I_z}{l^2}; \qquad I_z = \frac{A_0(\mu_1 h_1^2 + \alpha\mu_2 h_2^2)}{2} \tag{16}$$

$$y^{\max}_{\left(\frac{l}{2}\right)} = e_0 \frac{1 - \cos\frac{\alpha l}{2}}{\cos\frac{\alpha l}{2}}, \qquad \alpha = \sqrt{\frac{p}{E_1 I_z}} \tag{17}$$

Если e_0 связано с износом материала, то $y^{\max}$ со временем будет изменяться.

Рассмотрение продольного изгиба с учетом физической нелинейности существенно усложняет задачу.

В [2] указывается на то, что описание физической зависимости ε - σ формулой (2) хорошо согласуется с экспериментальными данными при поперечном изгибе. Но при продольном изгибе зависимость (2) следует применять весьма осторожно, так как касательно-модульная характеристика при $\varepsilon = 0$ стремится к бесконечности. Более корректна, в этом смысле, зависимость (3).

$$\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon} = E_{10} - 3E_{21}\varepsilon^2 \tag{18}$$

При $\varepsilon = 0$ $\dfrac{d\sigma}{d\varepsilon} = E_{10}$ или E_{20}

В качестве несовершенства примем начальную погибь в виде

$$a_0(x) = a_0 \sin\frac{\pi x}{l}, \tag{19}$$

что соответствует шарнирному опиранию. Уравнение продольного изгиба запишем относительного прогиба $y_1(x)$

$$E_{21}I_{z1}(y_1'')^3 - E_{10}I_{z0}y_1'' - Py_1 = Pa_0\sin\frac{\pi x}{l} \tag{20}$$

Здесь

$$I_{z0} = 0.5h_1^2A_1 + \alpha_{10}0.5h_2^2A_2, \qquad \alpha_{10} = E_{20}/E_{10}, \tag{21}$$

$$I_{z1} = (0.5h_1)^3A_1h_1 + \alpha_{21}(0.5h_2)^3A_2h_2, \qquad \alpha_{21} = E_{22}/E_{21}.$$

Частное решение принимаем по виду правой части

$$y_1(x) = a_1\sin\frac{\pi x}{l}. \tag{22}$$

Подставляем его в (17), применяя процедуру метода Бубнова-Галеркина, получим алгебраическое уравнение относительно a_1

$$-\frac{3}{4}\frac{\pi^6}{l^6}E_{21}I_{z1}a_1^3 + a_1(P_э - P) = Pa_0 \tag{23}$$

После некоторых преобразований уравнение (20) сводится к уравнению в относительных величинах

$$\zeta = \frac{1-\xi^2}{1+\xi^2}, \tag{24}$$

где $\zeta = P_э / P$, $\xi = a_1 / a_{max}$; $\xi_0 = a_0 / a_1$. (25)

При отсутствии начального несовершенства $a_0 = 0$ для идеального стержня получим

$$\zeta = 1 - \xi^2 \tag{26}$$

Зона устойчивости идеального стержня ограничена осями координат и кривой $1 - \xi^2$. Кривая имеет горизонтальную касательную при $\xi = 0$. При этом $\zeta = 1$, а сила равна

$$P = P_э = \frac{\pi^2 E_{10} I_{z0}}{l^2} \tag{27}$$

Если $a_0 \neq 0$ тогда $P < P_э$. При $a_l = a_{max}$ $P = 0$. Касательная при $\xi = 1$ наклонена под углом -1,107 рад.

Кривые по (24) с начальными несовершенствами будут располагаться внутри зоны устойчивости. Они имеют два участка. Восходящий - от нуля до максимума. На этом участке деформирование стержня устойчивое. Второй участок нисходящий – от максимума до нуля. Здесь деформирование будет неустойчивым. При определенных возмущениях возможен перескок с восходящей ветви на нисходящую.

Литература

1. Хофф Н. Продольный изгиб и устойчивость. М., -Л., !955
2. Писаренко Г.С. и др. Сопротивление материалов, Киев, Вища школа, 1979, с. 325-330.
3. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. Изд-во «Наука», физматчиз, М, 1977 г. с.808.